ЗАПИСКИ МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА
ХАРЬКОВСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА им. А. М. ГОРЬКОГО
И ХАРЬКОВСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

Том XXIX. Серия 4 1963

К ВОПРОСУ ОБ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ИНВЕРСНЫХ ПОЛУГРУППАХ

Л. М. Глускин

В настоящей работе уточняются некоторые результаты статей [1] и [2].

Пусть H — множество всех троек (k, c, m), где k, c, m — целые числа, удовлетворяющие условиям:

$$k \geqslant 0, \quad m \geqslant 0, \quad k+c \geqslant 0, \quad m+c \geqslant 0, \quad k+c+m > 0.$$

Множество H является, как показано в статье [1], инверсной полугруппой относительно действия:

$$(k, c, m)(k', c', m') = (\max\{k, k'-c\}, c+c', \max\{m', m-c'\}). \tag{1}$$

В этой же статье найдены все стабильные эквивалентности полугруппы H. Пусть $M = \begin{bmatrix} r_1, & r_2, & r_3 \\ n_1, & n_2, & n_3 \end{bmatrix}$ — матрица с целыми неотрицательными элементами, подчиненная условиям:

$$\begin{gathered} n_i = 0 \to r_i = 1, \\ n_1 > 0 \to \{n_2 = n_3 = 1, \quad r_2 \leqslant r_1, \ r_3 \leqslant r_1\}. \end{gathered} \tag{2}$$

Обозначим через σ_M бинарное отношение на полугруппе H, определенное точно на трех парах ее элементов:

$$\begin{gathered} (0, r_1+n_1, 0)\,\sigma_M\,(0, r_1, 0), \\ (n_2, r_2, 0)\,\sigma_M\,(0, r_2, 0), \\ (0, r_3, n_3)\,\sigma_M\,(0, r_3, 0). \end{gathered}$$

Оказывается, всякая стабильная эквивалентность ρ на полугруппе H совпадает со стабильно-эквивалентным замыканием ρ_M [1] одного из отношений σ_M. Из леммы 3.3 статьи [1] следует, что среди чисел r_i, n_i, образующих различные матрицы M (для которых $\rho_M = \rho$ при фиксированной эквивалентности ρ), существуют наименьшие.

Покажем, что в случае минимальности элементов r_i, n_i матрицы M эта матрица, кроме условия (2), удовлетворяет условию:

$$\begin{gathered} n_2 \neq 0 \to n_2 = 1, \\ n_3 \neq 0 \to n_3 = 1. \end{gathered} \tag{3}$$

В самом деле, пусть стабильная эквивалентность ρ полугруппы H является стабильно-эквивалентным замыканием отношения σ_M и пусть, например, $n_3 = n \neq 0$. Тогда по условию

$$(0, r, n)\,\rho\,(0, r, 0), \tag{4}$$

где $r = r_3$. Из (4) и единственности обобщенно обратного элемента для каждого элемента инверсной полугруппы H/ρ имеем (см. [1]):

$$(r, -r, n+r)\,\rho\,(r, -r, r). \tag{5}$$

Из (4) и (1) следует в силу $r>0$, $n>0$:

$$(0,\ r,\ 0)\,\rho\,(0,\ r,\ n)=(0,\ 1,\ 0)\,(0,\ r-1,\ n)=$$
$$=(0,\ 1,\ 0)\,[(0,\ r,\ 0)\,(r,\ -r,\ r)\,(0,\ r-1,\ n)].$$

Отсюда и из (5), (1) вытекает

$$(0,\ r,\ 0)\,\rho\,[(0,\ 1,\ 0)\,(0,\ r,\ 0)\,(r,\ -r,\ n+r)\,(0,\ r-1,\ n)]=$$
$$=(0,\ r+1,\ 0)\,(r,\ -r,\ n+r)\,(0,\ r-1,\ n)=(0,\ r+1,\ 0)\,(r,\ -1,\ n+1)=$$
$$=(0,\ r+1,0)\,(r,\ -r,\ r)\,(0,\ r,\ n)\,(1,\ -1,\ 1).$$

Последнее соотношение вместе с (4) дает:

$$(0,\ r,\ 0)\,\rho\,[(0,\ r+1,\ 0)\,(r,\ -r,\ r)\,(0,\ r,\ 0)\,(1,\ -1,\ 1)]=(0,\ r,\ 1).$$

Таким образом,

$$(0,\ r,\ 1)\,\rho\,(0,\ r,\ 0),$$

и число n_3 можно заменить в матрице M единицей. Первая часть формулы (3) доказывается аналогично.

Полугруппа H является порождающей для класса инверсных полугрупп в том смысле, что для любой инверсной полугруппы S ее подполугруппа, порожденная произвольным элементом u и обобщенно обратным к u элементом $v\in S$, изоморфна одной из полугрупп $H_{\text{M}}=H/\rho_{\text{M}}$.

Теорема пункта 4 статьи [1] утверждает, что полугруппы H_{M} и $\text{H}_{\text{M}'}$ изоморфны тогда и только тогда, когда $M'=M$ или матрица M' получена из M перестановкой второго и третьего столбцов. Эта теорема справедлива при условии, что элементы матриц M и M' являются минимальными для соответствующих эквивалентностей. (В статье [1] это не оговорено, хотя минимальность использована при доказательстве).

Из соотношений 3 вытекает, что теорему пункта 2.3 статьи [2] следует формулировать так:

Для того, чтобы полугруппа H_{M} допускала нетождественный автоморфизм, необходимо и достаточно, чтобы $r_2=r_3$, $n_2=n_3$. Единственным нетождественным автоморфизмом такой полугруппы является отображение

$$\varphi u=v,\quad \varphi v=u,$$

где u и $v=u^{-1}$ — образующие элементы полугруппы H_{M}.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. М. Глускин. Об инверсных полугруппах. «Зап. матем. отд. ХГУ и Харьковск. матем. об-ва».

2. Л. М. Глускин. Элементарные обобщенные группы. «Матем. сб.», **41** (83), № 1, 23–36 (1957).