

Міністерство освіти і науки України
Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна

Факультет радіофізики, біомедичної електроніки та комп'ютерних систем

Кафедра квантової радіофізики

До захисту допущено

Кафедрою _____ протокол № _____ від _____

завідувач кафедри _____ Андрій ДЕГТЯРЬОВ
(підпис) (ім'я, прізвище)

« _____ » _____ 2025 р.

Кваліфікаційна робота
здобувача _____ другого (магістерського) _____ рівня вищої освіти
(першого (бакалаврського)/ другого (магістерського))

Отримання ефективних параметрів для маскування двовимірної анізотропної
напівпровідникової структури з концентричними шарами
(назва роботи)

Спеціальність (спеціалізація) _____ 105, прикладна фізика та наноматеріали
(код та найменування спеціальності; спеціалізації спеціальності - за наявності)

Освітня програма _____ радіофізика
(назва освітньої програми)

Виконавець _____ Єгор НОС
(підпис) (ім'я, прізвище)

Науковий керівник _____ Олег РИБІН
(підпис) (ім'я, прізвище)

Харків – 2025

АНОТАЦІЯ

Нос Є.В. Отримання ефективних параметрів для маскуванню двовимірної анізотропної напівпровідникової структури з концентричними шарами. Дипломна робота. Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна, 2025. 41 с., 10 рис., 36 джерел.

Проведено аналітичне та чисельне дослідження біфункціонального метаматеріального плаща на основі двовимірної циліндричної структури з двома напівпровідниковими оболонками та концентричними шарами в квазістаціонарному режимі. На основі підходів трансформаційної оптики та теорії ефективного середовища сформульовано умови теплового екранування/концентрації та електричного маскуванню для анізотропної оболонки, еквівалентної двошарової структурі. Отримано аналітичні вирази для ефективних електро- і теплопровідностей напівпровідникових шарів з використанням закону Відемана-Франца та формули Шульгассера, які можуть бути використані для подальшого чисельного моделювання з використанням комерційних чисельних пакетів програм.

Виконано моделювання розподілу електричного та теплового полів у пакеті COMSOL для градієнтного та точкового збудження. Показано, що підібрана циліндрична структура забезпечує одночасне теплове екранування/концентрацію та електричне маскуванню внутрішньої області без помітного спотворення зовнішнього поля. Продемонстровано, що запропонована ізотропна модифікація теорії ефективного середовища суттєво зменшує обчислювальні витрати порівняно з анізотропній постановкою та може бути використана на практиці.

ТРАНСФОРМАЦІЙНА ОПТИКА, МАСКУВАННЯ, ЕКРАНУВАННЯ, БІФУНКЦІОНАЛЬНИЙ ПЛАЩ, ТЕОРІЯ ЕФЕКТИВНОГО СЕРЕДОВИЩА, МЕТАМАТЕРІАЛИ, НАПІВПРОВІДНИКИ, ТЕПЛОПРОВІДНІСТЬ, ЕЛЕКТРОПРОВІДНІСТЬ, ЗАКОН ВІДЕМАНА-ФРАНЦА.

ABSTRACT

Nos E. Obtaining effective parameters for cloaking of a two-dimensional anisotropic semiconductor structure with concentric layers. Diploma thesis. V. N. Karazin Kharkiv National University, 2025. 41 p., 10 fig., 36 references.

Analytical and numerical study of a bifunctional metamaterial cloak based on a two-dimensional cylindrical structure with two semiconductor shells and concentric layers in the quasi-stationary regime was carried out. Based on approaches of transformation optics and effective medium theory, the conditions for thermal shielding/concentration and electrical cloaking were formulated for an isotropic shell equivalent to a two-layer structure. Analytical expressions for the effective electric and thermal conductivities of the semiconductor layers were obtained using the Wiedemann-Franz law and the Schulgasser formula. The expressions are suitable for further numerical modelling using commercial numerical software.

The distributions of the electric and thermal fields were simulated in COMSOL for gradient and point excitations. It was shown that the designed cylindrical structure provides simultaneous thermal shielding/concentration and electrical cloaking of the inner region without noticeable distortion of the external fields. It was demonstrated that the proposed modification of the effective medium theory significantly reduces the computational cost compared to a fully tensorial formulation and can be used in practical applications.

TRANSFORMATION OPTICS, CLOAKING, SHIELDING, BIFUNCTIONAL CLOAK, EFFECTIVE MEDIUM THEORY, METAMATERIALS, SEMICONDUCTORS, THERMAL CONDUCTIVITY, ELECTRICAL CONDUCTIVITY, WIEDEMANN-FRANZ LAW.

ЗМІСТ

ПЕРЕЛІК СКОРОЧЕНЬ ТА УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ	7
ВСТУП	8
ЛІТЕРАТУРНИЙ ОГЛЯД	12
1.1. Трансформаційна оптика як частина сучасної прикладної фізики	12
1.2. Основна конфігурація для перетворень	12
1.3. Застосування теорії ефективного середовища	20
МАТЕРІАЛИ ТА МЕТОДИ	29
РЕЗУЛЬТАТИ ТА ОБГОВОРЕННЯ.....	32
ВИСНОВКИ	39
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ.....	40

ПЕРЕЛІК СКОРОЧЕНЬ ТА УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ

EMT – теорія ефективного середовища (Effective Medium Theory)

EM – електромагнітні (хвилі)

COMSOL – програмний мульти-дисциплінарний пакет програм для чисельного моделювання фізичних полів

S_0 – внутрішня область (зона для маскування)

S_1, S_2 – напівпровідникові оболонки біфункціональної структури

σ – електрична провідність середовища

κ – теплопровідність середовища

ϵ – діелектрична проникність

μ – магнітна проникність

χ – узагальнена провідність (електрична або теплова)

$\rho, \rho_1, \rho_2, \rho_3$ – радіуси концентричних областей структури

U – електричний потенціал

T – температура

N – кількість підшарів у ламінованій оболонці

f – об'ємна частка підшару в ефективному середовищі

k_B – стала Больцмана

ВСТУП

Керування розподілом електромагнітних, електричних і теплових полів активно використовується в мікро- та наноелектроніці, сенсорних системах, телекомунікаціях і системах оптичного зв'язку. У таких пристроях часто потрібно не просто передавати сигнал, а змінювати шлях його поширення в матеріалі – послаблювати вплив зовнішніх полів, захищаючи окремі елементи схеми, або навпаки посилювати поле в певній області. Для цього розробляються спеціальні штучні композитні матеріали – метаматеріали, у яких ефективні матеріальні параметри задаються не стільки самою природою речовини, скільки геометрією вбудованою симетрії або шарів. Такі структури дають змогу реалізувати маскування, концентрацію та екранування полів.

Маскування (cloaking) – це керування матеріальними параметрами оболонки навколо об'єкта так, щоб хвилі (або стаціонарні поля) огинали внутрішню область і майже не розсіювалися на ній. У результаті поле зовні практично не відрізняється від поля без об'єкта, тобто об'єкт стає практично невидимим для заданого діапазону частот або типу поля [2].

У сучасних теоретичних роботах для опису подібних задач широко застосовують підходи трансформаційної оптики. Вони спираються на те, що рівняння відповідні рівняння математичної фізики (Максвелла, теплопровідності та Лапласа) зберігають свою форму при певних перетвореннях координат. Якщо виконати таке перетворення для області простору з внутрішньою порожниною, можна отримати вирази для просторових розподілів матеріальних параметрів, за яких хвильові або стаціонарні поля огинають цю область або концентруються в ній. На основі цього підходу побудовано моделі електромагнітних, акустичних і теплових метаматеріальних плащів, у тому числі для одночасного керування електричними та тепловими полями в багатошарових циліндричних і сферичних оболонках, як найбільш зручних для аналітичних перетворень у ортогональних координатах [1, 24, 30].

Реалізацію таких моделей у реальних матеріалах зазвичай пов'язують із

багатошаровими метаматеріальними структурами. Необхідні анізотропні ефективні параметри виникають у них за рахунок чергування тонких шарів з різними фізичними властивостями. Для математичного опису матеріальних параметрів таких структур використовують теорію ефективного середовища (Effective Medium Theory, EMT), яка дає можливість замінити концентричну шарувату оболонку еквівалентним анізотропним середовищем з певними ефективними компонентами тензорів діелектричної проникності, теплопровідності або електропровідності. Коректне визначення таких параметрів є необхідною умовою для наближення реальної багатошарової структури до ідеалізованого плащу, отриманого в рамках підходів трансформаційної оптики [20, 21, 22].

Двовимірні анізотропні напівпровідникові структури з концентричними шарами розглядають як один із зручних модельних об'єктів для таких задач. У них ядро та навколишні оболонки дають можливість відносно легко керувати розподілом електричних і теплових полів у стаціонарному режимі. Оскільки оптичні та транспортні характеристики компонент структур залежать від частоти, температури та концентрації носіїв заряду, подібні системи можуть застосовуватися як основа для керованих плащів, концентраторів та захисних оболонок у мікроелектронних і сенсорних пристроях, тому задача отримання ефективних параметрів для таких структур є важливою складовою підготовки до їх практичного використання [3, 17, 18].

Актуальність даної теми пов'язана з розвитком трансформаційної оптики, де вже запропоновано низку теоретичних моделей невидимих об'єктів на основі спеціально спроектованих розподілів матеріальних параметрів. Однак значна частина таких моделей описує ідеалізовані середовища з безперервною зміною параметрів, що суттєво відрізняється від реальних метаматеріалів, які зазвичай мають шарувату або періодичну будову. Тому актуальним є питання адаптації підходів трансформаційної оптики до конкретних електромагнітних метаматеріалів, зокрема до циліндричних багатошарових структур з концентричними оболонками, які широко зустрічаються у сучасних приладах та

пристроях.

Для опису реальних шаруватих систем є доцільним поєднання методів трансформаційної оптики з теорією ефективного середовища, яке дає змогу замінити складну неоднорідну структуру еквівалентним анізотропним або ізотропним середовищем з певними ефективними параметрами. На сьогоднішньому етапі розвитку трансформаційних підходів та теорії ефективного середовища постає задача побудови узгодженої з нею моделі для невидимих концентричних циліндричних та шаруватих метаматеріалів. Дослідження ефективних параметрів двовимірної анізотропної структури з концентричними шарами безпосередньо пов'язане з цією задачею та спрямоване на зближення строгої теорії маскування з реальними конструкціями оболонок з метаматеріалів [6, 24, 31].

У роботі використовуються результати сучасних досліджень, присвячених маскуванню та концентрації електричних і теплових полів у багатошарових циліндричних та сферичних структурах, а також роботи, де на основі теорії ефективного середовища запропоновано моделі концентричних метаматеріальних плащів. Це дозволяє розглянути конкретну двовимірну анізотропну структуру з концентричними шарами як зручну модель для отримання ефективних параметрів маскування та аналізу умов, за яких багатошарова оболонка може працювати як плащ, концентратор або екранувальна оболонка.

Актуальність дослідження пов'язана з потенційним використанням напівпровідникових композитних структур як платформи для реалізації біфункціональних плащів, здатних одночасно забезпечувати тепловий захист і електричне маскування внутрішніх елементів. Використання зв'язку між електропровідністю та теплопровідністю в напівпровідниках, а також узагальнених підходів теорії ефективного середовища відкриває можливість побудови моделей із меншими обчислювальними витратами, зберігаючи при цьому необхідні властивості маскування та екранування.

Метою роботи є отримання ефективних параметрів для маскування двовимірної анізотропної напівпровідникової структури з концентричними

шарами у стаціонарному режимі, що забезпечують одночасне теплове екранування та електричне маскування внутрішньої області за умов зменшених обчислювальних витрат.

Завдання роботи:

- 1) Виконати літературний огляд матеріалів з трансформаційної оптики та метаматеріалів у задачах маскування і концентрації електричних та теплових полів.
- 2) Сформулювати математичну постановку задачі маскування для двовимірної напівпровідникової структури з концентричними шарами в стаціонарному (квазістатичному) наближенні.
- 3) Узагальнити теорію ефективного середовища для напівпровідникових оболонок з урахуванням закону Відемана-Франца та формули Шульгассера для переходу до ефективних скалярних параметрів.
- 4) Отримати аналітичні вирази для ефективних електричних і теплових провідностей областей маскувальної структури та відповідних об'ємних часток підшарів.
- 5) Провести комп'ютерне моделювання розподілу електричних і теплових полів у розробленій структурі для градієнтних і точкових джерел та продемонструвати режими теплового екранування та електричного маскування внутрішньої області.
- 6) Порівняти обчислювальну ефективність запропонованого підходу з наявними моделями багатошарових плащів та оцінити перспективи практичного застосування отриманих ефективних параметрів.

ЛІТЕРАТУРНИЙ ОГЛЯД

1.1. Трансформаційна оптика як частина сучасної прикладної фізики

Трансформаційна оптика розглядає керування зовнішніми полями через цілеспрямовану зміну просторового розподілу матеріальних параметрів середовища – діелектричної та магнітної проникностей, а також електропровідності і температурної провідності. Завдяки формальній інваріантності рівнянь Максвелла і теплопровідності відносно координатних перетворень, складну геометрію можна еквівалентно описати через ефективні значення тензорів ϵ , μ , σ і κ , щоб хвилі зовнішніх полів огинали задану область або змінювали траєкторію поширення потрібним чином.

Для реалізації такого підходу використовують метаматеріали та метаповерхні, тобто штучні періодичні структури з елементарними комірками з розміром, меншим за довжину хвилі. На макрорівні такі структури поведуться як ефективно однорідне середовище. Окремий напрям досліджень пов'язаний з двовимірними метаматеріалами – тобто метаповерхні, де керування фазою та амплітудою хвилі досягається в шарі з товщиною, меншою за довжину хвилі, що зменшує втрати та спрощує виготовлення у порівнянні з об'ємними метаматеріалами [5, 14].

Історично концепція трансформаційної оптики розвивалася на перетині електродинаміки та теорії координатних відображень. Ще у 20-х роках минулого століття у літературі з'явилися роботи, де гравітаційне відхилення сонячного світла біля Сонця тлумачили як еквівалент поширення в певному діелектричному середовищі [8]. Пізніше були використані конформні відображення у задачах електростатики для перетворення складних областей у простіші, з перенесенням геометричної складності в профіль параметрів середовища. Паралельно в астрономії гравітаційне відхилення променів світла поблизу масивних тіл інтерпретували як еквівалент поширення в ефективному оптичному середовищі зі змінним показником заломлення, що фактично реалізує відповідності між

геометрією простору та матеріальними параметрами середовища [5, 9].

Коваріантне формулювання рівнянь Максвелла в матеріальному середовищі показало загальний зв'язок між тензорами ϵ , μ та метрикою простору, що фактично стало математичною основою трансформаційної оптики. У сучасних оглядах це описують як системний підхід: будь-яке координатне перетворення, застосоване до рівнянь Максвелла, можна інтерпретувати як перехід до еквівалентного середовища з певними локальними значеннями ϵ та μ , які на практиці намагаються реалізувати за допомогою метаматеріалів [5, 14].

Ідея плаща невидимості пов'язана з роботами Пендрі та Леонгарта [15, 19], де вперше показано, що відповідне координатне перетворення дозволяє спрямувати промені або хвилі навколо певної області так, ніби її не існує. У термінах трансформаційної оптики це означає, що в оболонці навколо маскованої області необхідні як правило анізотропні та неоднорідні профілі ϵ та μ , які змушують хвилю огинати внутрішню зону без розсіяння назовні. Подальші огляди показали, що такі ж ідеї працюють не тільки для променевої оптики, а й для повних рівнянь Максвелла, і можуть бути узагальнені на квазістатичні задачі, де замість хвиль використовують рівняння Лапласа, а також рівняння теплопровідності для маскування від теплових полів [11, 28].

Практичну реалізацію плащів невидимості пов'язують із появою метаматеріалів та метаповерхонь. Вони дозволяють синтезувати середовища з керованими ефективними ϵ та μ , у тому числі з від'ємним показником заломлення, складними градієнтними профілями та анізотропією, необхідними для реалізації заданих координатних перетворень. У відповідній літературі також було описано акустичні та теплові аналоги, а також біфункціональні структури, які одночасно можуть керувати електричним струмом і тепловим потоком. У всіх цих випадках вихідною точкою є одна ідея: спочатку задається бажане перетворення простору або поля в математичній моделі, а потім на його основі підбирають або проектують метаматеріальну структуру, що реалізує необхідні ефективні параметри [11, 13].

Сучасні дослідження у сфері трансформаційної оптики демонструють, що

зміна просторових параметрів середовища може забезпечити контроль над поширенням полів і хвиль і створити умови для реалізації плащів невидимості. У побудові таких моделей виходять із рівнянь Максвелла та рівняння теплопровідності, на основі яких формулюють координатні перетворення та описують поведінку хвиль у неоднорідних середовищах [12, 23, 32]. На базі цього було запропоновано та реалізовано теоретичні та експериментальні схеми керування електромагнітними, тепловими та акустичними полями, що дало змогу створювати різні типи плащів невидимості – електромагнітні, теплові та акустичні відповідно [2, 23].

Сучасна трансформаційна теорія як математичний інструмент для реалізації плащів невидимості оперує просторовим розподілом кількох конститутивних параметрів середовища. Останні роботи показали, що на цій основі можна проектувати біфункціональні плащі, які одночасно керують електричними та тепловими полями [16, 20, 22]. Обидва типи полів використовуються в хвильових концентраторах, термоелектричних сенсорах, енергетичних системах та різних медичних пристроях [28, 34].

Методи трансформаційної оптики дозволяють поєднати в одній структурі режими маскування та концентрації. Більшість сучасних робіт щодо біфункціональних плащів і концентраторів зосереджена на циліндричних і сферичних стратифікованих структурах через зручність координатних перетворень для таких форм. Зручність полягає в тому, що для циліндричних і сферичних оболонок поверхні шарів збігаються з координатними поверхнями ($r = \text{const}$), тому рівняння Максвелла/Лапласа і рівняння теплопровідності добре розділяються в таких системах координат, а потрібні перетворення зводяться до простої радіальної трансформації з одновимірними профілями параметрів [17, 24, 25, 35].

1.2. Основна конфігурація для перетворень

У задачах маскування та керування розподілом полів нас цікавить не повний хвильовий процес, а встановлений стан системи, без перехідних процесів.

У такому режимі електричні та теплові поля в багатьох структурах можна розглядати у стаціонарному або квазістатичному наближенні: вхідні умови фіксовані в часі, а силові лінії струму та теплового потоку набувають сталого характеру. Цей режим зазвичай використовують при аналізі плащів невидимості та концентраторів для електричних і теплових полів у циліндричних багатошарових оболонках.

За таких умов просторовий розподіл потенціалу (електричного або температурного) визначається лише властивостями середовища та граничними умовами. Матеріал кожної області описується ефективною електропровідністю або теплопровідністю, а поле всередині структури повинно бути узгодженим на всіх межах між шарами. Це дозволяє перейти від повних рівнянь Максвелла та рівняння теплопровідності до спрощеного опису, в якому стаціонарний розподіл потенціалу підкоряється рівнянню Лапласа:

$$\nabla \cdot (\chi \nabla \Psi) = 0, \quad (1)$$

де χ – теплопровідність або електропровідність середовища, а Ψ – абсолютну температуру T або електричний потенціал U . Коли Ψ описує електричний потенціал, тоді χ інтерпретується як діелектрична проникність ϵ , вектор напруженості електричного поля визначається як градієнт потенціалу.

Рівняння Лапласа (1) широко застосовують у задачах трансформаційної оптики, оскільки воно інваріантне відносно нелінійних координатних перетворень. Завдяки цьому апарат нелінійної трансформаційної оптики можна використовувати і у стаціонарних задачах, і в квазістатичному наближенні, коли довжина хвилі значно перевищує характерні розміри елементарних частин структури плаща [4, 10, 15].

На рис. 1. можна побачити схематичне зображення двовимірної двошарової структури в стаціонарному режимі, що складається з трьох кругових областей з радіусами ρ_1, ρ_2, ρ_3 у однорідному зовнішньому середовищі.

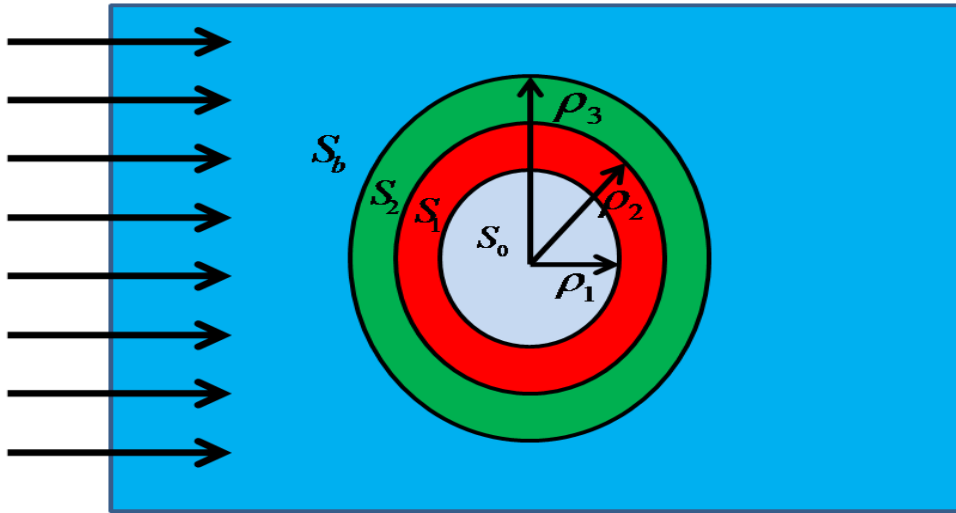


Рисунок 1. Схематичне зображення біфункціональної структури

Щоб описати біфункціональний плащ, зазвичай переходять від початкових віртуальних параметрів χ у декартових координатах до еквівалентних фізичних параметрів χ' у циліндричних координатах, використовуючи основне співвідношення трансформаційної оптики:

$$\chi' = \frac{S\chi S^T}{\det(S)}, \quad (2)$$

де χ і χ' – електрична або теплова провідність у віртуальних та фізичних координатах відповідно, матриця S задається через матрицю Якобі переходу між цими системами координат [15, 36]. Координатному перетворенню передують знаходження розв'язку рівняння (1) в кожній із областей структури (рис. 1), а допоміжна матриця перетворення задається за допомогою рівностей:

$$\left. \begin{aligned} S &= g_0^{1/2} \cdot Jac \cdot \tilde{g}_0^{1/2}, \\ g_0^{-1} &= TT^T \end{aligned} \right\}, \quad (3)$$

де Jac – матриця Якобі переходу від віртуальної (початкової) декартової системи координат до еквівалентної їй фізичної ортогональної системи, g – метричний тензор вихідної системи координат, \tilde{g} – метричний тензор у фізичній системі координат, а T – діагональна матриця масштабних коефіцієнтів цієї ортогональної системи.

У такому формулюванні матриця S фактично виступає як посередник між геометричним перетворенням і зміною матеріальних параметрів. Вона враховує, як викривляється елементарний об'єм під дією координатного перетворення, і як при цьому змінюються локальні напрямки, уздовж яких зручно описувати потік тепла або електричного струму. Через S виражаються трансформовані тензори електропровідності або теплопровідності: задане віртуальне однорідне середовище зі скалярним χ перетворюється на фізичне анізотропне середовище, тензорні параметри якого вже відповідають потрібному режиму маскуванню або концентрації.

У роботі [20] було розглянуто композит, у якому всі області вважаються ізотропними. На цій основі автори запропонували двовимірну сферичну біфункціональну структуру, що поєднує властивості концентратора електричного поля та теплового плаща невидимості. Основним завданням в цій роботі було сформулювати умови теплового маскуванню. Розв'язуючи відповідну граничну задачу для рівняння (1) у сферичних координатах, було отримано аналітичні співвідношення (4) і (5), які задають умови концентрації та маскуванню через значення електропровідності σ_i ($i = 0,1,2,b$) та теплопровідності κ_i ($i = 0,1,2,b$) у шарах S_1 і S_2 :

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{2\rho_1^3 + \rho_0^3}{2(\rho_1^3 - \rho_0^3)} \sigma_b, \\ \kappa_1 &= \frac{2\rho_1^3 + \rho_0^3}{2(\rho_1^3 - \rho_0^3)} \kappa_b; \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_2 &= \frac{2\rho_2^3 + \rho_1^3}{2(\rho_2^3 - \rho_1^3)} \sigma_b, \\ \kappa_2 &= \frac{2\rho_2^3 + \rho_1^3}{2(\rho_2^3 - \rho_1^3)} \kappa_b. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Підтвердження правильності виразів (4) і (5) виконували за допомогою чисельного моделювання в середовищі COMSOL, використовуючи ці вирази для конкретного набору параметрів і певних джерел, а внутрішню область S_0 вважали

заповненою повітрям (вакуумом). Також були досліджені ізотропні сферичні та циліндричні структури, для яких в аналітичному вигляді знаходили розв'язки рівняння Лапласа для електричного і теплового полів. На основі цих розв'язків записували умови для електропровідності та теплопровідності шарів, за яких тришарова оболонка поводить себе як електричний концентратор і одночасно забезпечує теплове маскування внутрішньої області. Окремі варіанти такої постановки дозволяють повністю екранувати струм усередині, зберігаючи при цьому непорушеним зовнішній тепловий розподіл [20].

Подальший розвиток цих моделей пов'язаний із переходом від ізотропних параметрів до ефективно анізотропних оболонок, які будуються за допомогою координатних перетворень і теорії ефективного середовища. У цьому випадку вихідні ізотропні плащі слугують прототипом: їх аналітичні умови маскування та концентрації використовують як орієнтир для вибору радіальних профілів ефективних параметрів у більш реалістичних багат шарових структурах. Перехід від простих ізотропних прикладів до анізотропних оболонок і шаруватих метаматеріалів є основою для подальшого аналізу двовимірної анізотропної структури з концентричними шарами, що розглядається у даній роботі.

На рис. 2 показано результати моделювання біфункціонального концентратора. У випадку ідеалізованої моделі без внутрішнього об'єкта (рис. 2 а) контурні лінії електричного потенціалу до входу в оболонку та за її межами залишаються близькими до прямолінійних, а в зоні плаща помітне їх згущення, що відповідає посиленню поля всередині. Лінії струму огинають внутрішню область, майже не порушуючи розподіл поля зовні, тобто оболонка одночасно концентрує електричне поле в заданому регіоні та маскує внутрішню зону. У разі введення в S_0 еліптичного мідного включення (рис. 2 б) картина зміщується: лінії потенціалу додатково деформуються в околі провідника, однак після виходу з оболонки знову стають практично прямими, і ззовні об'єкт практично є невидимим.

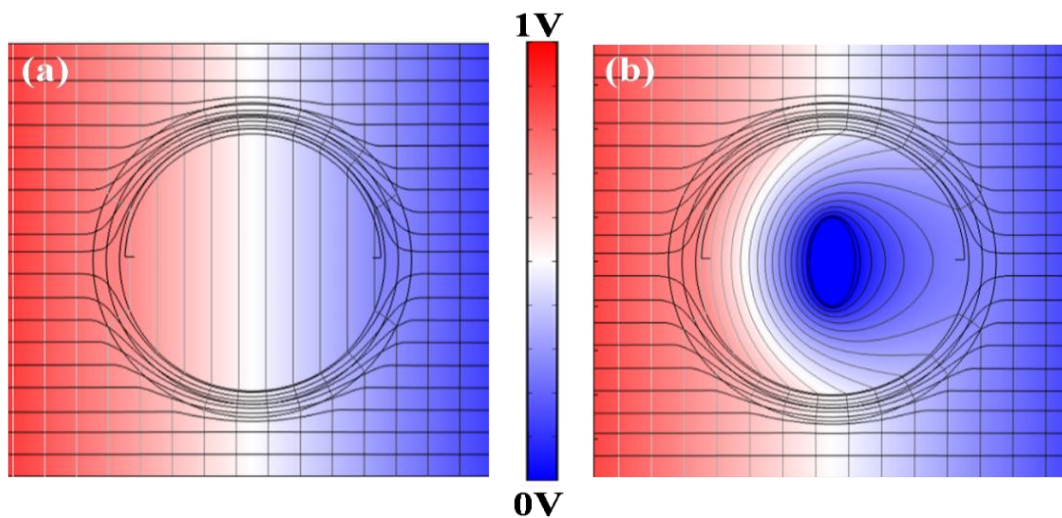


Рисунок 2. Розподіл електричного потенціалу та ліній струму в біфункціональному концентраторі: (a) ідеалізована модель без внутрішнього об'єкта; (b) модель з еліптичним мідним включенням у внутрішній області

Аналогічне чисельне моделювання з використанням мульти-фізичного пакету COMSOL було виконано для теплового поля для тієї ж самої геометрії, коли на лівій та правій межах задаються температури у 393 К та 293 К, відповідно, рис.3, що відповідає градієнтному джерелу температури. З цього рисунку видно, що лінії теплового поля поза оболонкою майже не відрізняються від випадку однорідного середовища (тобто середовища у відсутності структури), тоді як тепловий потік усередині плаща огинає внутрішню область, яка залишається низькотемпературною з точки зору заданого градієнта температури (рис. 3a). Додавання еліптичного мідного об'єкта до внутрішньої області суттєво не змінює зовнішнє теплове поле, оскільки тепловий потік так само обходить і вакуумну зону, і прихований провідник, забезпечуючи теплове маскування (рис. 3b).

Також у роботі був розглянутий точковий тип збудження. На рис. 4 наведено нормовані карти електричного та теплового полів для випадку точкового джерела, розміщеного у фоні. На панелі (a) видно, що лінії потенціалу та струму, які виходять із джерела, проходять повз плащ, огинаючи внутрішню область, і за його межами знову формують радіальну картину, подібну до випадку без плаща. На панелі (b) показано аналогічну поведінку для теплового поля: лінії теплового

поля та тепловий потік обходять внутрішню область і прихований провідниковий об'єкт, забезпечуючи практично повний його тепловий захист.

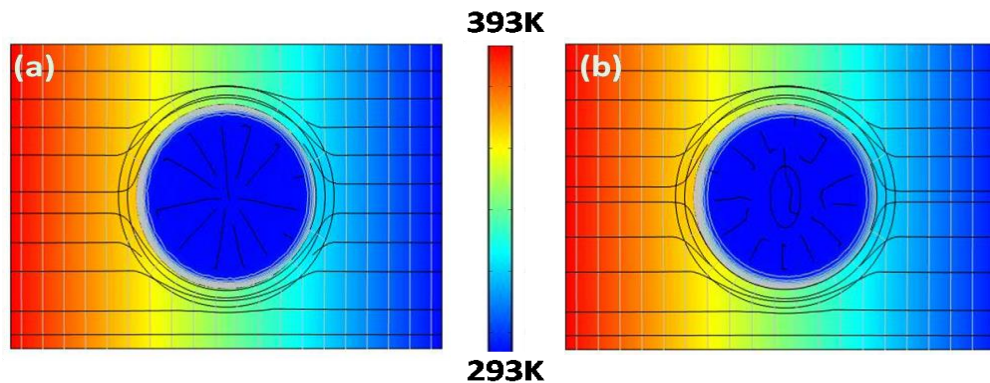


Рисунок 3. Розподіл температури та теплового потоку в тепловому плащі: (a) без внутрішнього мідного об'єкта; (b) з еліптичним мідним включенням у внутрішній області

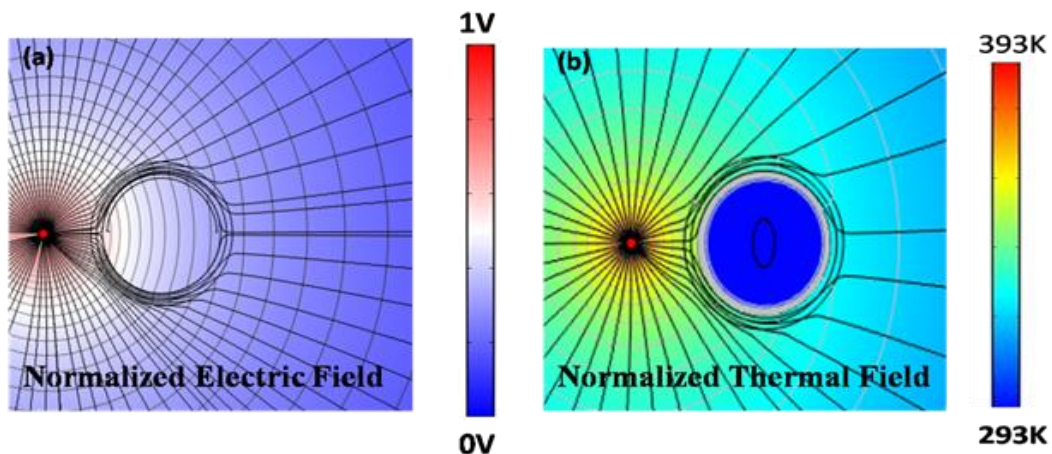


Рисунок 4. Результати моделювання для точкового збудження: (a) нормоване електричне поле в режимі концентратора; (b) нормоване теплове поле в режимі теплового плаща

Як також було показано у цій роботі [20], альтернативний ізотропний варіант для умов маскування, у якому $\kappa_2 = \kappa_b$, $\sigma_1 = 0$, описують формули

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 &= 0, \\ \kappa_1 &= \frac{2\rho_2^3 + \rho_1^3}{2(\rho_2^3 - \rho_1^3)} \kappa_b; \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

та

$$\left. \begin{aligned} \kappa_2 &= \kappa_b, \\ \sigma_2 &= \frac{2\rho_3^3 + \rho_2^3}{2(\rho_3^3 - \rho_2^3)} \sigma_b. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Такий варіант використовується як вихідна конфігурація перед переходом до анізотропії. Введення радіального перетворення

$$\rho' = \rho \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2} + \rho_1, \quad \theta = \theta, \quad \varphi' = \varphi \quad (8)$$

дозволяє побудувати анізотропний шар S_1 , для якого тензор ефективної провідності набуває діагонального вигляду:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 &= 0, \\ \kappa_1 &= \kappa_b \cdot \text{diag} \left[\left(\frac{\rho' - \rho_1}{\rho'} \right), \left(\frac{\rho'}{\rho' - \rho_1} \right), \left(\frac{\rho' - \rho_1}{\rho'} \right) \left(\frac{\rho_2}{\rho_2 - \rho_1} \right)^2 \right]. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

У цьому випадку тензор ефективної провідності має різні радіальні та тангенціальні компоненти. Необхідні значення теплопровідності в цій області можна реалізувати експериментально за допомогою композиту «скловата-ацетон» [22], ефективний коефіцієнт теплопровідності якого обчислюють за формулою

$$\kappa_{1,eff} = \kappa_{GMB} + \frac{3f \kappa_{GMB} (\kappa_{LA} - \kappa_{GMB})}{3\kappa_{GMB} + (1 - f_{LA})(\kappa_{LA} - \kappa_{GMB})}. \quad (10)$$

У роботах [21, 22] цей підхід узагальнено на випадок двох анізотропних підболонок S_1 і S_2 .

Координатні перетворення

$$\left. \begin{aligned} \rho_1 < \rho < \rho_2: \rho' &= \rho \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2} + \rho_1, \quad \theta' = \theta, \quad \varphi' = \varphi, \\ \rho_1 < \rho_2 < \rho_3: \rho'' &= \rho \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_3 - \rho_2} + \rho_3 \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_3 - \rho_2}, \quad \theta'' = \theta, \quad \varphi'' = \varphi, \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

приводять до тензорних параметрів

$$\rho_1 < \rho' < \rho_2: \left\{ \begin{array}{l} \sigma_1 = 0, \\ \kappa_1 = \kappa_b \cdot \text{diag} \left[\frac{\rho_2}{\rho_2 - \rho_1} \left(\frac{\rho' - \rho_1}{\rho'} \right)^2, \frac{\rho_2}{\rho_2 - \rho_1}, \frac{\rho_2}{\rho_2 - \rho_1} \right], \end{array} \right\} \quad (12)$$

та

$$\rho_2 < \rho'' < \rho_3: \left\{ \begin{array}{l} \sigma_2 = \sigma_b \cdot \text{diag} \left[\frac{\rho_3 - \rho_2}{\rho_3 - \rho_1} \left(\frac{\rho'' - \alpha \rho_3}{\rho''} \right)^2, \frac{\rho_2}{\rho_2 - \rho_1}, \frac{\rho_2}{\rho_2 - \rho_1} \right], \\ \kappa_2 = A \cdot \kappa_b, \end{array} \right\} \quad (13)$$

у фізичному просторі, що забезпечують необхідний режим плаща та/або концентратора. Конкретні набори σ_b , κ_b і компонент тензорів для режимів маскування та комбінованого маскування з концентрацією наведено у наступних виразах

$$\left. \begin{array}{l} \kappa_b = \kappa_b^{clock} = 1.21 \times 10^{-3} W/(mK), \\ \sigma_b = 0.45 S/m, \\ \kappa_1 = \kappa_b \cdot \text{diag} \left[\frac{\rho_2}{\rho_2 - \rho_1} \left(\frac{\rho' - \rho_1}{\rho'} \right)^2, \frac{\rho_2}{\rho_2 - \rho_1}, \frac{\rho_2}{\rho_2 - \rho_1} \right], \\ \sigma_1 = 0, \\ \kappa_2 = \kappa_2^{clock} = 225 \mu W/(mK), \\ \sigma_2 = \sigma_b \cdot \text{diag} \left[\frac{\rho_3 - \rho_2}{\rho_3 - \rho_1} \left(\frac{\rho'' - \alpha \rho_3}{\rho''} \right)^2, \frac{\rho_2}{\rho_2 - \rho_1}, \frac{\rho_2}{\rho_2 - \rho_1} \right], \\ \kappa_0 = \sigma_0 = 0. \end{array} \right\} \quad (14)$$

та

$$\left. \begin{aligned}
 \kappa_2 = \kappa_b = \kappa_b^{con} = 0.04 \text{ W/(mK)}, \\
 \sigma_b = 0.45 \text{ S/m}, \\
 \kappa_1 = \kappa_b \cdot \text{diag} \left[\frac{\rho_2}{\rho_2 - \rho_1} \left(\frac{\rho' - \rho_1}{\rho'} \right)^2, \frac{\rho_2}{\rho_2 - \rho_1}, \frac{\rho_2}{\rho_2 - \rho_1} \right], \\
 \sigma_1 = 0, \\
 \sigma_2 = \sigma_b \cdot \text{diag} \left[\frac{\rho_3 - \rho_2}{\rho_3 - \rho_1} \left(\frac{\rho'' - \rho_1}{\rho''} \right)^2, \frac{\rho_2}{\rho_2 - \rho_1}, \frac{\rho_2}{\rho_2 - \rho_1} \right], \\
 \kappa_0 = \sigma_0 = 0.
 \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

і далі використовують у чисельному моделюванні. Для подальшої реалізації цих профілів у вигляді шаруватих метаматеріалів було застосовано підхід ефективного середовища [21, 22]. У цих роботах на базі тієї ж постановки було розглянуто більш загальний випадок двошарового плаща, де зовнішня оболонка S_2 та внутрішня S_1 мають різні теплові та електричні параметри.

Окремо було проаналізовано ситуацію, коли теплопровідність зовнішньої оболонки збігається з теплопровідністю фону, $\kappa_2 = \kappa_b$. За цієї умови теплопровідність S_2 фіксується як фонові, електропровідність σ_2 задається окремо, а значення κ_1 для внутрішнього шару обчислюють аналітично з рівнянь типу (15). Чисельне моделювання показало, що за підібраних параметрів структура знову працює як біфункціональний плащ: електричне поле та температурний розподіл поза оболонкою практично не відрізняються від однорідного середовища, а всередині формується зона, ізольована від зовнішніх впливів. Набір провідностей, використаний у цьому режимі, близький до характеристик поліуретанової піни, що робить модель ближчою до реальних матеріалів [3].

Далі в масковану область знову вводили мідний включений об'єкт. Результати показали, що навіть за наявності такого провідника зовнішні розподіли потенціалу і температури залишаються практично незмінними: вертикальні лінії напруги та температури плавно обходять внутрішню зону, а поле у фоні не містить помітних збурень. Причому, дослідження також були виконані для градієнтного та точкового збудження. Це свідчить про те, що запропонована конструкція може

бути основою для захисних оболонок, які захищають металічні прилади та пристрої від зовнішніх електричних і теплових збурень.

Таким чином, можна побачити, що двошарова структура з підібраними параметрами провідності здатна реалізувати як стан концентрації, так і стан маскуванню за різних граничних умов. Це підтверджує коректність теоретичних розрахунків і дає орієнтир для подальшого переходу до анізотропних та ефективно однорідних оболонок.

1.3. Застосування теорії ефективного середовища

У попередньому підрозділі було показано, як отримати умови роботи біфункціонального плаща в двошаровій моделі. Проте більша кількість шарів дозволяє отримати більш гнучке керування зовнішніми полями. Тому важливо розглянути модель, у якій плащ реалізується як багатошарова структура з концентричними ізотропними підшарами, що в середньому відтворюють потрібні анізотропні параметри. Підхід ефективного середовища дозволяє описати таку оболонку через ефективні радіальні і тангенціальні компоненти електропровідності та теплопровідності і пов'язати їх з конкретним вибором матеріалів і товщин шарів.

Розвиток моделей біфункціональних плащів на основі трансформаційної оптики пов'язують з використанням теорії ефективного середовища. У випадку метаматеріалів це дозволяє замінити складну анізотропну оболонку на багатошарову структуру з чергуванням простих ізотропних матеріалів, які в середньому відтворюють потрібні тензори електропровідності та теплопровідності ефективної структури. На основі цього в роботі [24] побудовано концентричну багатошарову структуру для біфункціонального плаща: зовнішнє середовище та внутрішня область описуються ізотропними параметрами, а потрібна ефективна анізотропія виникає завдяки радіальній залежності матеріальних параметрів оболонок.

Вище згадана робота є прикладом успішної реалізації підходу теорії ефективного середовища у задачах з плащами невидимості. Області S_0 , S_1 та S_2

розглядаються як одноосьові середовища та поділяються на $2N$ підшарів. S_1 і S_2 утворені чергуванням N шарів двох матеріалів: (m_{A1}, m_{A2}) у S_1 та (m_{B1}, m_{B2}) у S_2 . Товщина підшарів задається таким співвідношенням:

$$\left. \begin{aligned} \frac{thickness(S_{1,1})}{thickness(S_{1,2})} &= \frac{thickness(S_{m_{A1}})}{thickness(S_{m_{A2}})}, \\ \frac{thickness(S_{2,1})}{thickness(S_{2,2})} &= \frac{thickness(S_{m_{B1}})}{thickness(S_{m_{B2}})}, \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

де $S_1 = S_{1,1} \cup S_{1,2}$, $S_2 = S_{2,1} \cup S_{2,2}$, а $S_{1,1} = N \times S_{m_{A1}}$, $S_{1,2} = N \times S_{m_{A2}}$,
 $S_{2,1} = N \times S_{m_{B1}}$, $S_{2,2} = N \times S_{m_{B2}}$.

За допомогою рутинних математичних перетворень були отримані ефективні ізотропні параметри матеріалу $\sigma_{m_{A1}}$, $\sigma_{m_{A2}}$, $\sigma_{m_{B1}}$, $\sigma_{m_{B2}}$, $K_{m_{A1}}$, $K_{m_{A2}}$, $K_{m_{B1}}$ та $K_{m_{B2}}$, які відповідають дійсним анізотропним параметрам матеріалу:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{S_{1r}} &= \sigma_0, \quad \sigma_{S_{1t}} = \frac{4\sigma_b^2}{\sigma_0}, \\ \sigma_{S_{2r}} &= \frac{2\rho_2^3 + \rho_1^3}{2(\rho_2^3 - \rho_1^3)} \sigma_b, \\ \sigma_{S_{2t}} &= 4\sigma_b \frac{\rho_2^3 - \rho_1^3}{\rho_2^3 + \rho_1^3/2}; \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

та

$$\left. \begin{aligned} K_{S_{1r}} &= \frac{2\rho_2^3 + \rho_1^3}{2(\rho_2^3 - \rho_1^3)} K_0, \\ K_{S_{1t}} &= \frac{4K_b^2}{K_{S_{1r}}} = \frac{4K_b^2}{K_0} \frac{\rho_2^3 - \rho_1^3}{\rho_2^3 + \rho_1^3/2}, \\ K_{S_{2r}} &= K_b, \quad K_{S_{2t}} = 4K_b. \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

У чисельному моделюванні при використанні пакету COMSOL було

розглянуто випадок градієнтного збудження, коли на лівій границі структури задається джерело напруги 1 В і джерело температури 373,15 К, а на правій – відповідно 0 В і 273,15 К. Для фону задавали електропровідність $\sigma_b \approx 10^{-6}$ С/м та теплопровідність $k_b \approx 0,175$ Вт/(м·К), внутрішня область S_0 вважалася заповненою повітрям, а число підшарів N дорівнювало 20. Ефективні параметри підшарів обчислювали за формулами (16)-(18), після чого проводили моделювання електричного і теплового полів у COMSOL. Результати моделювання представлені на рис. 6.

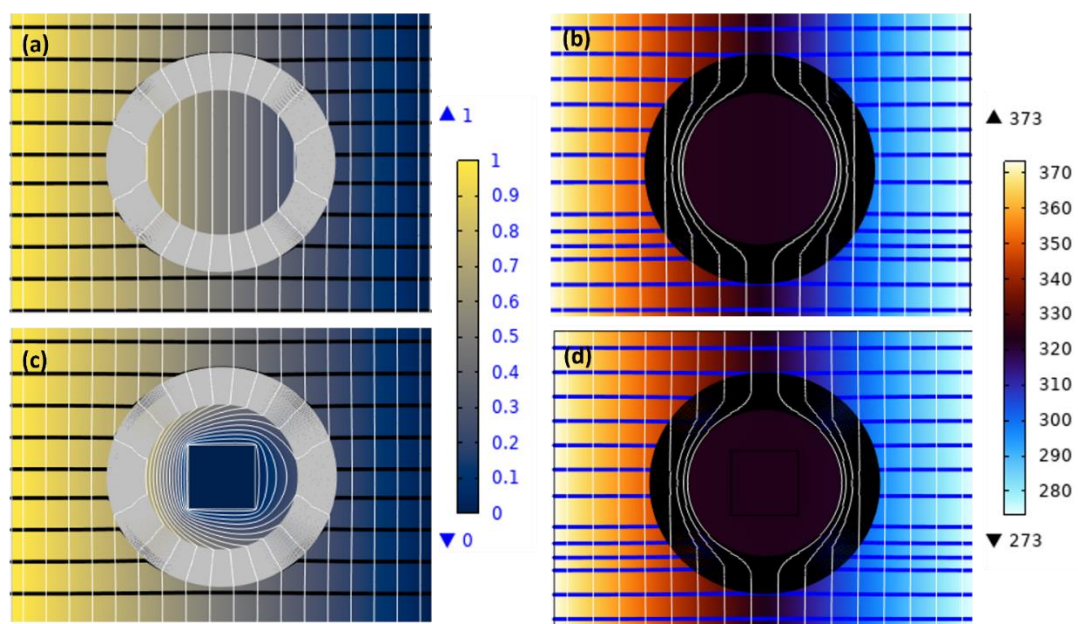


Рисунок 6. Біфункціональний плащ на основі ламінованої структури: (а) електричне поле (білі лінії – потенціал, чорні – лінії струму) без внутрішнього об’єкта; (б) теплове поле (білі – лінії теплового поля, сині – лінії теплового потоку); (с, d) конфігурації з мідним об’єктом у внутрішній області

З аналізу розподілів полів на рис.6 видно, що вертикальні лінії потенціалу та температури плавно огинають внутрішню область, а лінії струму та теплового потоку проходять крізь ламіновану оболонку без суттєвих спотворень зовні (див. рис.6 а, б). Усередині плаща навпаки спостерігається зосередження ліній поля, що відповідає режиму концентратора. Додавання мідного включення у внутрішню

область (рис. 6 с, d) практично не змінює картину полів у фоні (зовні): потенціал і температура поза оболонкою залишаються такими самими, як для випадку без об'єкта. Це означає, що запропонована багатошарова структура реалізує біфункціональний тепло-електричний плащ з маскуванню високопровідного металічного включення.

Також у роботі було розглянуто збудження точковим джерелом. У цьому випадку в середовищі задавали точкове джерело напруги в 1 В та джерело температури в 1 К, а просторове поширення поля аналізували в нормованих одиницях для електричного та теплового випадків [24]. Результати відповідного моделювання представлені на рис. 7.

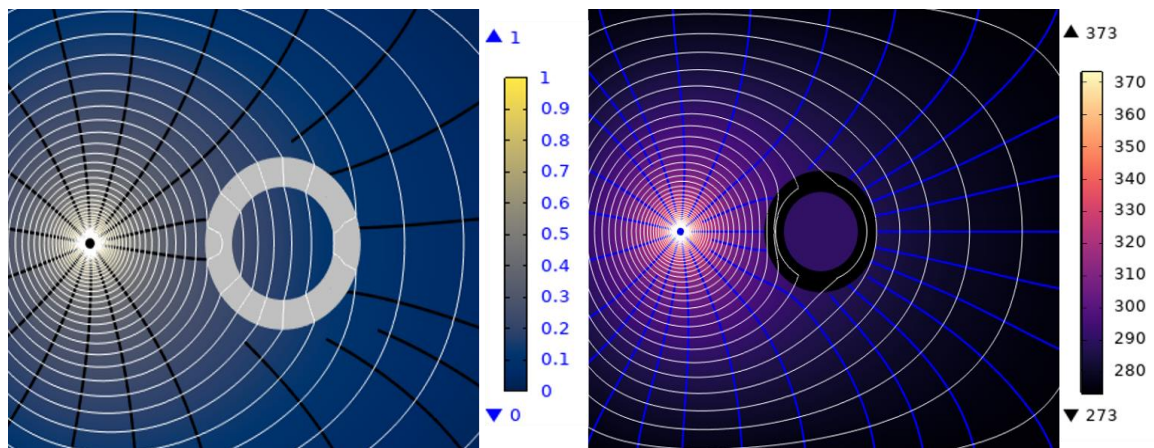


Рисунок 7. Нормований розподіл електричного та теплового полів для точкового збудження в ламінованому плащі: (а) потенціал і лінії струму для електричного поля; (б) лінії теплового поля та лінії теплового потоку

Як можна побачити з рис. 7, контурні лінії потенціалу та струму повністю огинають оболонку, а за її межами знову формують радіальний розподіл, характерний для точкового джерела у однорідному середовищі. Аналогічну картину спостерігають для теплового поля: лінії температурного поля та лінії теплового потоку обходять центральну область, не створюючи помітних спотворень у фоні. Це свідчить про те, що ефективні параметри, отримані у роботі, коректно відтворюють умови плаща як для градієнтного, так і для точкового

режимів збудження, а конструкція може працювати як концентратор так як і маскувальна оболонка.

Також у роботі [24] було розглянуто режими, у яких багат шарова структура переходить від функції плаща до функції екрана. За певного вибору фонових електро- і теплопровідностей та перерозподілу підшарів у області S_2 автори отримали конфігурацію, коли проникнення електричного поля всередині оболонки практично блокується, тоді як тепловий розподіл у зовнішній області залишається близьким до незбуреного. У цьому випадку ламінована оболонка захищає внутрішній об'єкт від струму, але не порушує тепловий обмін із зовнішнім середовищем. Інший варіант конфігурації досягається шляхом зміни порядку розташування підшарів у S_2 : усі N підшарів одного типу зосереджують на внутрішньому боці оболонки, а N підшарів іншого типу – на зовнішньому. Така структура еквівалентна двом послідовним підоболонкам і може забезпечувати вже майже повне екранування і електричного, і теплового полів.

Отже, змінюючи лише внутрішню архітектуру шарів у багат шаровій метаматеріальній структурі, можна реалізувати на одній основі різні режими роботи – від біфункціонального плаща до екрана. Це підкреслює гнучкість підходу теорії ефективного середовища для проектування багат функціональних метаматеріальних оболонок.

МАТЕРІАЛИ ТА МЕТОДИ

На першому етапі роботи було проведено огляд наукової літератури, де розглядалися питання біфункціонального плаща, шаруваті метаматеріальні оболонки і питання керуванню тепловими та електричними полями в концентричних багатошарових структурах. В першу чергу було розглянуто роботи, що присвячені маскуванню і концентрації/екранування електричних та теплових полів у багатошарових циліндричних і сферичних структурах [1, 24, 30], створенню біфункціональних метаматеріальних плащів [16, 20, 22], а також узагальненим підходам ЕМТ для метаматеріалів [6, 26, 32]. Окрему увагу було приділено роботам, де розглядаються шаруваті оболонки для теплового та електромагнітного маскування, а також моделі, у яких поєднуються методи трансформаційної оптики з описанням шаруватих структур за допомогою ЕМТ [22, 24, 31, 35].

Додатково було проаналізовано роботи з теорії напівпровідників, у яких формулюється закон Відемана-Франца щодо зв'язку між електропровідністю і теплопровідністю [32, 33] у напівпровідниках, а також роботи, присвячені використанню формул Шульгассера й наближення Максвелла для опису ефективних параметрів циліндричних та сферичних шаруватих структур [7, 29]. Це дозволило сформулювати математичну постановку задачі для двовимірної циліндричної структури з внутрішньою областю S_0 та двома оболонками S_1 і S_2 у квазістаціонарному режимі для маскування і захисту від електричного й теплового полів.

Базовим рівнянням для опису стаціонарного розподілу потенціалу (температури T або електричного потенціалу U) було обрано рівняння Лапласа з ефективною провідністю χ , яка інтерпретується як електропровідність σ або теплопровідність κ залежно від фізичного типу поля. Для переходу від ідеалізованої анізотропної моделі до реалістичної напівпровідникової ізотропної структури було використано закон Відемана-Франца, що пов'язує електропровідність та теплопровідність у напівпровідниках, а також формулу

Шульгассера для циліндричних двошарових структур. На основі цих співвідношень були отримані аналітичні вирази для радіальних і тангенціальних компонент провідностей, а далі – для еквівалентних ефективних скалярних електричних і теплових провідностей областей S_1 та S_2 .

Для опису шаруватої оболонки як ефективного ізотропного середовища застосовувалось наближення Максвелла. Кожен з напівпровідникових шарів гіпотетично розбивався на два підшари з різними провідностями, для яких вводилися об'ємні частки F . Система алгебраїчних рівнянь, що виникає при поєднанні закону Відемана-Франца, формули Шульгассера та наближення Максвелла, розв'язувалась аналітично, що дозволило отримати в явному вигляді вирази для ефективних провідностей шарів та відповідних об'ємних часток підшарів. Отримані залежності використовувалися як вхідні дані для подальшого чисельного моделювання та дають змогу зафіксувати зв'язок між матеріальними параметрами напівпровідникових компонентів і режимами маскуванню та екранування.

Чисельне моделювання проводилося в мульти-фізичному середовищі COMSOL Multiphysics для двовимірної осесиметричної циліндричної геометрії. Зовнішній фон задавався як однорідне ізотропне середовище з фіксованими значеннями електропровідності σ_b та теплопровідності κ_b , внутрішня область S_0 також вважалася однорідним ізотропне середовище з фіксованими значеннями електропровідності σ_0 та теплопровідності κ_0 , а оболонки S_1 та S_2 описувались отриманими ефективними провідностями. При цьому розв'язувались квазістаціонарні задачі для електричного потенціалу та температури.

Було розглянуто два типи збудження. У випадку градієнтного джерела на протилежних вертикальних межах структури задавалися фіксовані значення електричного потенціалу (в 1 В і 0 В, відповідно) та температури (в 373 К і 273К, відповідно). У випадку точкового збудження в однорідному фоні розміщували точкові джерела напруги та тепла, а аналіз полів проводили в нормованих одиницях. Для кожного режиму обчислювалися просторові розподіли електричного потенціалу та температури, а також лінії електричного струму та

теплого потоку, що дозволило візуально оцінити режими теплового екранування та електричного маскування в досліджуваній структурі.

Обробка результатів полягала в якісному та кількісному аналізі конфігурації ліній поля та потоку, а також у порівнянні отриманих просторових розподілів з відомими з літератури результатами для біфункціональних плащів та концентраторів. Окрему увагу було приділено тому, чи зберігається характер поля у фоні та чи формується всередині оболонки зона зниженої температури та екранованого струму. На основі цього аналізу оцінювалась коректність отриманих ефективних параметрів та їх придатність для подальшого використання у проєктуванні метаматеріальних структур для термо-захисту та електромагнітного маскування.

Отже, методи дослідження включають послідовний літературний огляд робіт з трансформаційної оптики та метаматеріалів, формулювання постановки задачі для двовимірної циліндричної напівпровідникової структури з концентричними шарами у квазістаціонарному наближенні, узагальнення теорії ефективного середовища для напівпровідникових внутрішніх шарів з отриманням аналітичних виразів для ефективних електричних і теплових провідностей та об'ємних часток підшарів, а також чисельне моделювання у пакеті програм COMSOL розподілу полів для градієнтних і точкових джерел з демонстрацією явищ теплового екранування та електричного маскування.

РЕЗУЛЬТАТИ ТА ОБГОВОРЕННЯ

Завданням цієї дипломної роботи було отримання ефективних параметрів для маскуванню двовимірної анізотропної напівпровідникової структури з концентричними шарами. Вирази (17)-(18) вимагають багато циклічних машинних обчислень у випадку розбиття кожної концентричної шари на велику кількість підшарів, як того вимагають принципи теорії ефективного середовища [26]. Такі обчислення суттєво впливають на точність результатів, щодо отримання значень ефективних параметрів областей маскувальної структури, що, в свою чергу, помітно ускладнює процес моделювання явищ маскуванню і концентрації фізичних полів за допомогою комерційних пакетів програм.

Останню проблему можна принципово подолати у випадку розгляду напівпровідникових матеріалів, чому й присвячено цю дипломну роботу. Дійсно, як відомо з теорії напівпровідникових матеріалів [33], між електропровідністю σ і теплопровідністю κ існує зв'язок, який можна виразити аналітично за допомогою закону Відемана-Франца, який у своїй найпростішій формі має вигляд подвійної рівності:

$$\frac{\kappa}{\sigma} = K = \left(r + \frac{5}{2}\right)^2 \left(\frac{k}{e}\right)^2, \quad (19)$$

де k – стала Больцмана, e – заряд електрону, r – стала, що визначає механізм розсіяння носіїв заряду, а K – іноді називається сталою Франца.

Розглянемо знов структуру, зображену на рис. 1, вважаючи що обидві шари (області S_1 і S_2) є виключно напівпровідниками.

Значення для обох провідностей у виразах (19) є скалярними величинами. Тому для використання закону Відемана-Франца треба перейти від тензорних величин у виразах (17)-(18) до ефективних скалярних величин. Це можна зробити за допомогою формули Шульгассера [29] для структур із циліндричним і сферичним профілем з двома шарами (див. рис. 1), яка має вигляд систем і рівностей між тензорними радіальними і тангенційними з ефективними

скалярними для $i=1,2$:

$$\left. \begin{aligned} \chi_{S_{it}} &= \frac{\chi_{S_{i1}}}{2} + \frac{\chi_{S_{i2}}}{2}, \\ \frac{1}{\chi_{S_{ir}}} &= \frac{1}{2\chi_{S_{i1}}} + \frac{1}{2\chi_{S_{i2}}} \end{aligned} \right\}, \quad (20)$$

де під символом χ позначена будь-яка з провідностей однієї з двох шарів структури. Тут мається на увазі, що кожний з шарів гіпотетично розбивається на дві підшари зі своїми виключно ізотропними провідностями. Шар S_i ($i=1,2$) розбивається на підшари S_{i1} і S_{i2} ($i=1,2$) зі своїми проникностями $\chi_{S_{i1}}$ і $\chi_{S_{i2}}$, відповідно ($i=1,2$) (див. рис. 8). Радіуси підшарів ρ_{12} і ρ_{23} є різними, і їх ще треба визначити, що є одною з основних задач цього розділу.

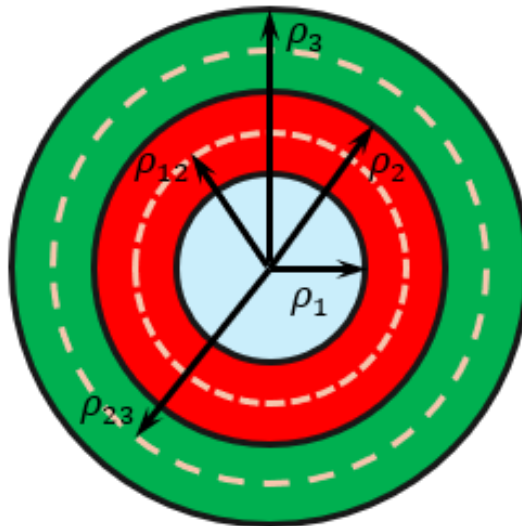


Рисунок 8. Гіпотетичне розбиття областей S_1 і S_2 на пару підшарів

У роботі [27] з урахуванням виразів (4)-(5) і (20) були отримані вирази для визначення ефективних провідностей $\chi_{S_{i1}}$ і $\chi_{S_{i2}}$ ($i=1,2$) у вигляді:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{S_{i1}}^{\pm} &= \sigma_{S_{it}} m \sqrt{\sigma_{S_{it}}^2 - \sigma_{S_{it}} \sigma_0}, \\ \sigma_{S_{i2}}^{\pm} &= \sigma_{S_{it}} \pm \sqrt{\sigma_{S_{it}}^2 - \sigma_{S_{it}} \sigma_0} \end{aligned} \right\}. \quad (21)$$

Підстановка виразів (17)-(18) у вирази (21) дає у результаті:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{S_{21}}^{\pm} &= \frac{\rho_3 \sigma_b}{\rho_3 - \rho_2} \left(1 \operatorname{Im} \sqrt{\frac{\rho_2}{2\rho_3} \frac{2\rho_3^2 + 2\rho_3\rho_2 - \rho_2^2}{\rho_3^2 + \rho_3\rho_2 + \rho_2^2}} \right), \\ \sigma_{S_{22}}^{\pm} &= \frac{\rho_3 \sigma_b}{\rho_3 - \rho_2} \left(1 \pm \sqrt{\frac{\rho_2}{2\rho_3} \frac{2\rho_3^2 + 2\rho_3\rho_2 - \rho_2^2}{\rho_3^2 + \rho_3\rho_2 + \rho_2^2}} \right); \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

$$\left. \begin{aligned} \kappa_{S_{11}}^{\pm} &= \frac{\rho_2}{\rho_2 - \rho_1} \kappa_0 \left(1 \operatorname{Im} \sqrt{\frac{\rho_1}{\rho_2 - \rho_1} \left(\rho_2^2 + \rho_1\rho_2 + \frac{\rho_1^2}{2} \right)} \right), \\ \kappa_{S_{12}}^{\pm} &= \frac{\rho_2}{\rho_2 - \rho_1} \kappa_0 \left(1 \pm \sqrt{\frac{\rho_1}{\rho_2 - \rho_1} \left(\rho_2^2 + \rho_1\rho_2 + \frac{\rho_1^2}{2} \right)} \right); \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

$$\left. \begin{aligned} \kappa_{S_{21}}^{\pm} &= \kappa_{S_{2t}} \operatorname{Im} \sqrt{\kappa_{S_{2t}}^2 - \kappa_{S_{2t}} \kappa_b}, \\ \kappa_{S_{22}}^{\pm} &= \kappa_{S_{2t}} \pm \sqrt{\kappa_{S_{2t}}^2 - \kappa_{S_{2t}} \kappa_b}; \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

де

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{S_{1t}} &= -b \pm \sqrt{b^2 + c}, \\ b &= \kappa_{S_{1t}} \frac{K_A \sigma_0 R_1 \kappa_0 - 2\kappa_{S_{1t}} R_1 \kappa_0 + \sigma_0 \kappa_{S_{1t}} - \sigma_0 R_1 \kappa_0}{-4K_A^2 \kappa_{S_{1t}} \sigma_0 + K_A^2 \sigma_0^2 + 2\kappa_{S_{1t}} R_1 \kappa_0}, \\ c &= \frac{\kappa_{S_{1t}}^2 R_1^2 \kappa_0^2}{K_A (4K_A^2 \kappa_{S_{1t}} \sigma_0 - K_A^2 \sigma_0^2 - 2\kappa_{S_{1t}} R_1 \kappa_0)}, \\ R_1 &= \frac{2\rho_2^3 + \rho_1^3}{2(\rho_2^3 - \rho_1^3)}. \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

$$\left. \begin{aligned} \kappa_{S_{2t}} &= \frac{(1 \operatorname{Im} R_3) K_B^2 R_2^2 \sigma_b^2}{2(1 \operatorname{Im} R_3) K_B R_2 \sigma_b - \kappa_b}, \\ R_2 &= \frac{\rho_3}{\rho_3 - \rho_2}, \quad R_3 = \sqrt{\frac{\rho_2}{2\rho_3} \frac{2\rho_3^2 + 2\rho_3\rho_2 - \rho_2^2}{\rho_3^2 + \rho_3\rho_2 + \rho_2^2}}, \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

На цьому етапі постає задача отримання ефективних ізотропних провідностей областей S_1 і S_2 , тобто виразів χ_{S_1} і χ_{S_2} , оскільки чисельне моделювання явищ маскування і концентрації полів з використанням комерційних пакетів вимагає помітно більше машинного часу для анізотропних

областей у порівнянні з ізотропними.

У квазістатичному випадку товщини областей S_1 і S_2 мають бути значно менше довжини хвилі первісної падаючої ЕМ хвилі, тому для отримання виразів для провідностей χ_{S_1} і χ_{S_2} можна використовувати формулу-наближення Максвелла [7]. Таким чином, матимемо у результаті ($i=1,2$):

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{S_i} &= F_i \sigma_{S_{i1}} + (1-F_i) \sigma_{S_{i2}}, \\ \kappa_{S_i} &= F_i \kappa_{S_{i1}} + (1-F_i) \kappa_{S_{i2}}, \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

де F_i ($i=1,2$) – об'ємна частка підшари S_{i1} у області (шарі) S_i , що визначається формулою:

$$\frac{\kappa_{S_i}}{\sigma_{S_i}} = K_i, \quad i=1,2 \quad (28)$$

Для визначення об'ємних часток F_i знов застосуємо закон Відемана-Франца (19) у вигляді

$$F_i = \frac{\rho_{i,i+1}^2 - \rho_i^2}{\rho_{i+1}^2 - \rho_i^2}, \quad i=1,2 \quad (29)$$

який приводить до систем рівнянь відносно об'ємних часток F_i :

$$K_i \left[F_i \sigma_{S_{i1}} + (1-F_i) \sigma_{S_{i2}} \right] = F_i \kappa_{S_{i1}} + (1-F_i) \kappa_{S_{i2}}, \quad i=1,2. \quad (30)$$

Розв'язання рівнянь (30) дає у результаті:

$$F_i = \frac{-K_i \sigma_{S_{i2}} + \kappa_{S_{i2}}}{K_i \sigma_{S_{i1}} - K_i \sigma_{S_{i2}} - \kappa_{S_{i1}} + \kappa_{S_{i2}}}, \quad i=1,2 \quad (31)$$

Таким чином, рівності (21)-(28) і (31) визначають ефективні параметри для маскування структури з рис. 1 із напівпровідниковими областями S_1 і S_2 . Більш того, як зазначено у роботі [26], товщини напівшарів S_{i1} і S_{i2} ($i=1,2$) мають бути принаймні в 10 разів менше, ніж довжина первісної хвилі в них. Варто зауважити, що значення радіусів структури рис. 1 мають обчислюватись з використанням формули (16).

Моделювання у цій роботі проводилося з використанням пакету COMSOL

при розгляді як градієнтного джерела, так і на випадок точкового джерела на випадок розсіювання носіїв заряду на акустичних фононах (тобто, коли $r = -1/2$). Розглянемо спочатку збудження градієнтним джерелом.

Нехай теплові та електричні поля «течуть» з лівого боку на правий, а джерела напруги 1 В і температури 373 К при цьому відповідають лівій границі, коли стоки напруги відповідають правій границі з напругою в 0 В і температури в 273 К. Результати моделювання для цього випадку представлені на рис. 9. На рис. 9 (a) показано екранування щільності теплового потоку, а на рис. 9 (b) показано маскування щільності електричного потоку.

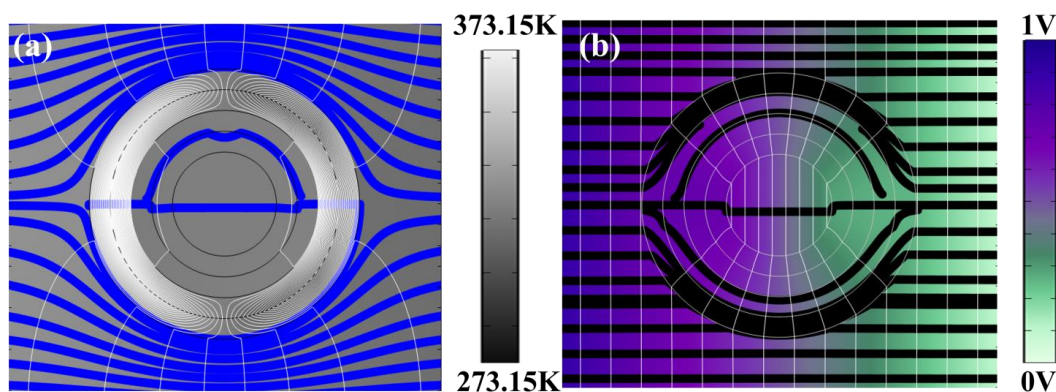


Рисунок 9. Потік теплових (a) і електричних (b) полів

Як можна побачити з рис. 9 (a), сині лінії щільності теплового потоку, який плавно тече з лівого боку до правого, огинають круглі області та демонструють ефект екранування тепла. Контури температури зосереджені в області S_2 , що свідчить про ефективну теплоізоляцію та перенаправлення тепла. Це говорить про те, що властивості матеріалу шари S_2 призводять до високоефективного екранування теплової енергії, запобігаючи її проникненню до внутрішньої області.

З рис. 9 (b) чітко визначається ефект маскування. Лінії електричного поля, показані чорним кольором, плавно входять в область S_2 , а потім огинають шару S_1 без будь-яких спотворень, зберігаючи при цьому цілісність потоку електричного поля. Лінії електричного потенціалу, що зображені на рисунку білим

кольором, зосереджені в центральній області. Така структура електричного поля говорить про здатність розглядаємої структури із відповідними матеріальними параметрами спрямовувати електричні поля навколо області S_1 , ефективно роблячи його невидимим для вхідного електричного потоку. Зауважимо, що вище зазначені результати були досягнуті при виборі фону з теплопровідністю $\kappa_b = 0.65 \text{ Вт/м}\cdot\text{К}$ та електропровідністю $\sigma_b = 200 \text{ С/м}$, а результати розрахування за формулами (30) дають такі значення для ефективних об'ємних часток розбиття шарів S_1 і S_2 : $F_1 = 0,37$, $F_2 = 0,68$.

Результати моделювання на випадок точкового джерела показані на рис. 10, де зображено розподіл теплового поля навколо цього джерела. Тут ми можемо чітко побачити, як поводить ся густина теплового потоку за наявності розглянутої концентричної структури з ефективними параметрами, що визначається виразами (21)-(27) і (30).

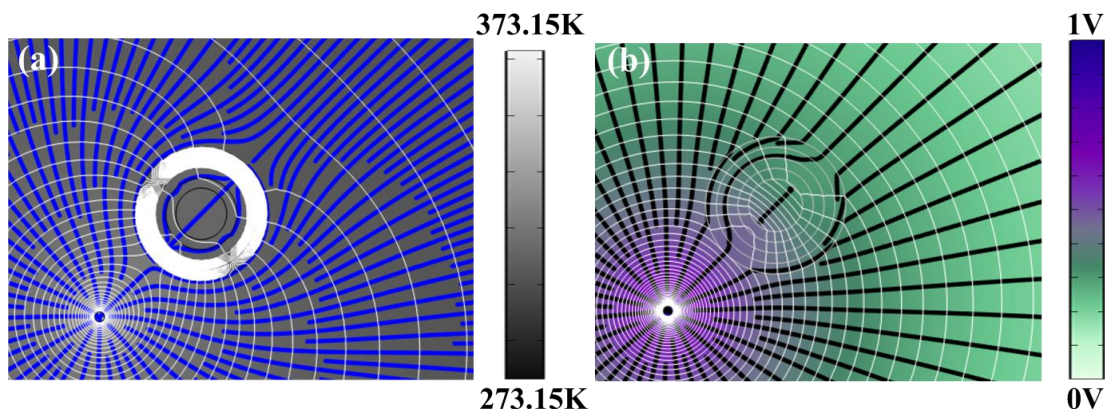


Рисунок 10. Випадок збудження точковими джерелами: (а) явище екранування термальних полів; (б) явище маскування від електричного поля

Як видно з рис. 10, тепла енергія від точкового джерела поширюється та ефективно спрямовується навколо визначених областей, демонструючи чіткий ефект екранування. Це не тільки підтверджує попередні висновки на випадок градієнтних джерел, але й підкреслює надійність отриману вище теорію ефективного середовища для різних типів джерел.

На рис. 10 (b) показано поведінку електричного поля при збудженні точковим джерелом. З рисунку можна побачити, що лінії електричного поля плавно огинають маскувальну область без будь-якого спотворення електричного потоку. Така поведінка ще раз підтверджує, що теорія ефективного середовища успішно досягає бажаного ефекту маскуванню для електричних полів.

Результати вище наведених у цьому розділі чисельних експериментів перевірки підкреслюють практичну значущість теорії ефективного середовища у трансформативної оптиці щодо реальних сценаріїв, підтверджуючи, що теорія ефективного середовища дозволяє керувати полями різних джерел. Це дозволяє створювати міцну основу для практичних розробок метаматеріальних і композитних структур в інженерних застосуваннях – терморегулюванні в електроніці, електромагнітному маскуванні та захисті приладів і пристроїв від зовнішніх електромагнітних і термальних збурень.

Контроль матеріальних параметрів складових шаруватої структури дозволяє бажаним чином маніпулювати як тепловими, так і електричними полями. Ці відкриття мають важливе значення для розробки сучасних структур у різних галузях інженерії, а саме, для терморегулювання та пристроїв електромагнітного маскування. Продемонстровані ефекти екранування та маскуванню підкреслюють потенціал для розробки метаматеріальних структур із індивідуальними властивостями для досягнення конкретних функціональних результатів.

ВИСНОВКИ

1. За результатами математичного та комп'ютерного моделювання було показано, що композитна циліндрична структура з двома внутрішніми напівпровідниковими ізотропними і анізотропними оболонками, що знаходяться у вільному однорідному непровідному ізотропному просторі, забезпечує одночасно теплову концентрацію/екранування та електричне маскування внутрішньої області.

2. Концентрація температурних контурів у зовнішньому шарі та відповідний перерозподіл теплових потоків підтверджують високий ступінь теплоізоляції внутрішньої частини структури, тоді як електричне маскування робить її ефективно невидимою для зовнішнього електромагнітного поля.

3. Запропонована модифікація теорії ефективного середовища для циліндричної структури дає змогу цілеспрямовано керувати матеріальними параметрами напівпровідникових шарів, реалізуючи бажані режими теплового захисту та електромагнітного маскування.

4. Порівняння з існуючими моделями, розглянутими у сучасній науковій літературі, показало, що запропоновані моделі ефективних параметрів метаматеріальних структури потребують на порядок менше машинного часу для чисельного моделювання явищ маскування та концентрації/екранування, що підвищує їх практичну цінність і створює підґрунтя для подальшої розробки структур з індивідуально підібраними тепловими та електричними властивостями з метою захисту приладів і пристроїв від зовнішніх електромагнітних сигналів, а також від електричних і теплових збурень середовища, де знаходяться ці структури.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

- 1) Amirkulova, F. A., & Norris, A. N. (2020). The gradient of total multiple scattering cross-section and its application to acoustic cloaking. *Journal of Theoretical and Computational Acoustics*, 28(04), 1950016.
- 2) Ang, P., & Eleftheriades, G. V. (2021). Incident-field estimation for active cloaking. *Physical Review Applied*, 16(6), 064005. <https://doi.org/10.1103/PhysRevApplied.16.064005>
- 3) Athanasopoulos N., Baltopoulos A., Matzakou M., Vavouliotis A., & Kostopoulos V. (2012) Electrical conductivity of polyurethane/MWCNT nanocomposite foams. *Polymer Composites*, 33(8), 1302-1312. <https://doi.org/10.1002/pc.22256>
- 4) Batool, Sidra, Nissar, Mehwish, Frezza, Fabrizio, and Mangini, Fabio. (2020) Cloaking using the anisotropic multilayer sphere. *Photonics*, 7, 52. <https://doi.org/10.3390/photonics7030052>
- 5) Brosa U. (2012) Electromagnetic Waves in Variable Media. *Zeitschrift für Naturforschung A*, 67 (3-4), 111-131. <https://doi.org/10.5560/zna.2011-0069>
- 6) Chen, H., & Chan, C. T. (2010). Acoustic cloaking and transformation acoustics. *Journal of Physics D: Applied Physics*, 43(11), 113001.
- 7) Choy, T. C. (1999). *Effective medium theory: Principles and applications*. Clarendon Press.
- 8) Dyson, F. W., Eddington, A. S., & Davidson, C. (1920). IX. A determination of the deflection of light by the Sun's gravitational field, from observations made at the total eclipse of May 29, 1919. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A*, 220 (571-581), 291-333. <https://doi.org/10.1098/rsta.1920.0009>
- 9) Feng, Huolei, Ni, Yushan. (2022). Bifunctions of invisible sensors and cloaks in thermal electric fields. *J. Appl. Phys.* 131, 025107. <https://doi.org/10.1063/5.0079933>

- 10) Filonov D. S., Slobozhanyuk A. P., Belov P. A., and Kivshar Yu. S. (2012) Double-shell metamaterial coatings for plasmonic cloaking. *Phys. Status Solidi RRL*. 6(1), 46-48. <https://doi.org/10.1002/pssr.201105475>
- 11) Filonov D. S., Slobozhanyuk A. P., Belov P. A., and Kivshar Yu. S. Double-shell metamaterial coatings for plasmonic cloaking. *Phys. Status Solidi RRL*. 6 (1), 46-48, 2012. <https://doi.org/10.1002/pssr.201105475>
- 12) Lan Ch., Bi K., Fu X., Li B., and Zhou J. (2016). Bifunctional metamaterials with simultaneous and independent manipulation of thermal and electric fields. *Optics Express*. 24(20), 23072-23080. <https://doi.org/10.1364/OE.24.023072>
- 13) Lee, K.-T., Ji, Ch., Iizuka, H., and Banerjee, D. (2021). Optical cloaking and invisibility: From fiction toward a technological reality. *Journal of Applied Physics*. 129 (23), 231101. <https://doi.org/10.1063/5.0048846>
- 14) Leonhardt, U. (2006). Optical conformal mapping. *Science*, 312(5781), 1777-1780.
- 15) Leonhardt, U., Philbin, T. G. (2009) Chapter 2. Transformation Optics and the Geometry of Light. *Progress in Optics*, 53, 69-152. [https://doi.org/10.1016/S0079-6638\(08\)00202-3](https://doi.org/10.1016/S0079-6638(08)00202-3)
- 16) Li J. Y., Gao Y., and Huang J. P. (2010). A bifunctional cloak using transformation media. 108,074504. <https://doi.org/10.1063/1.3490226>
- 17) Liu, Z. C., Li, X. B., & Cui, X. (2021). The cloaking method in non-uniform static fields of cylindrical and spherical invisibility cloaks. *Journal of Physics D: Applied Physics*, 54(14), 14LT01. <https://doi.org/10.1088/1361-6463/abd729>
- 18) Ma Yu., Liu Y., Raza M., Wang Yu., He S. (2014) Experimental demonstration of a multiphysics cloak: Manipulating heat flux and electric current simultaneously. *Phys. Rev. Lett.* 113, 205501. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.113.205501>
- 19) Pendry, J. B., Schurig, D., & Smith, D. R. (2006). Controlling electromagnetic fields. *science*, 312(5781), 1780-1782.
- 20) Raza M. (2020). An electric concentrator and thermal cloaking device. *Material Express Research*. 7(5), 055802. <https://doi.org/10.1088/2053-1591/ab8fba>

- 21) Raza M., Naqvi S. A., Rybin O., Ahsan M., Braaten B. D. (2025). Transformation-based theory for controlling electrical and thermal fields for plasmonic applications. *Waves in Random and Complex Media*. In press. <https://doi.org/10.1080/17455030.2025.2476419>
- 22) Raza M., Rybin O., Ahsan M., Alonazi W. B., Rameen K. (2023). Controlling the thermal and electric fields in isotropic and anisotropic media. *Physica Scripta*. 98(10), 105913. <https://doi.org/10.1088/1402-4896/acf3ae>
- 23) Raza, M., Liu, Y., Lee, E. H., & Ma, Y. (2016). Transformation thermodynamics and heat cloaking: a review. *Journal of Optics*, 18(4), 044002. <https://doi.org/10.1088/2040-8978/18/4/044002>
- 24) Rybin O., Raza M., Shulga S., Rehman N. A. (2025) Effective medium theory of a concentric metamaterial bifunctional cloak. *Zeitschrift für Naturforschung A*. 80(5), 335-344. <https://doi.org/10.1515/zna-2024-0206>
- 25) Rybin O., Raza M., Shulga S., Shahbaz A., Kobieliev O, Baula T. Cloak control of thermal and electric fields in anisotropic semiconductor concentrically inhomogeneous media. IEEE 5th KhPI Week on Advanced Technology (KhPIWeek), October 7-11, 2024, Kharkiv, Ukraine. <https://doi.org/10.1109/KhPIWeek61434.2024.10877989>
- 26) Rybin, O., & Shulga, S. (2020). Generalized broad-band effective medium theory of two-component metamaterials including magnetic ones: A review. *Journal of Electromagnetic Waves and Applications*, 34(11), 1513-1549. <https://doi.org/10.1080/09205071.2020.1787234>
- 27) Rybin, O., Raza, M., Shulga, S., Shahbaz, A., Kobieliev, O., & Baula, T. (2024). Cloak control of thermal and electric fields in anisotropic semiconductor concentrically inhomogeneous media. IEEE 5th KhPI Week on Advanced Technology (KhPIWeek), Kharkiv, Ukraine, October 7-11, 2024. <https://doi.org/10.1109/KhPIWeek61434.2024.10877989>
- 28) Sadeghi, M.M., Li, Sucheng, Xu, Lin, Chen, Huanyang. (2015). Transformation optics with Fabry-Perot resonances, *Sci. Rep.*, 5, Article Number: 8680. <https://doi.org/10.1038/srep08680>

- 29) Schulgasser, K. (1983). Sphere assemblage model for polycrystals and symmetric materials. *Journal of Applied Physics*, 54(3), 1380-1382. <https://doi.org/10.1063/1.332161>
- 30) Schumann, M. F., Wiesendanger, S., Goldschmidt, J. Ch., Bläsi, B., Bittkau, K., Paetzold, U. W., Sprafke, A., Wehrspohn, R. B., Rockstuhl, C., and Wegener, M. Cloaked contact grids on solar cells by coordinate transformations: designs and prototypes. (2015). *Optica* 2(10), 850-853. <https://doi.org/10.1364/OPTICA.2.000850>
- 31) Shestopalov Yu. (2021). Cloaking: analytical theory for benchmark structures. *Journal of Electromagnetic Waves and Applications*. 35(4), 485-510. <https://doi.org/10.1080/09205071.2020.1846629>
- 32) Stedman T., Woods L. M. (2017). Cloaking of thermoelectric transport. *Scientific Reports*. 7(1), 6988 <https://doi.org/10.1038/s41598-017-05593-6>
- 33) Wiedemann, G., & Franz, R. (1853). Über die warme-leitungsfähigkeit der etalle. *Ann. Phys. und Chemie*, 89, 497-531. <https://doi.org/10.1002/andp.18531650802>
- 34) Xu X., Che Sh. (2025). Simultaneous thermal-electrical cloak and camouflage via level-set-based topology optimization. *Journal of Mechanical Design*. 147(6), 1-16. <https://doi.org/10.1115/1.4068103>
- 35) Zanovello, U., Zilberti, L., & Matekovits, L. (2018). A near-field cloaking study to reduce MRI RF-artefacts in presence of elongated prostheses. *IEEE Journal of Electromagnetics, RF and Microwaves in Medicine and Biology*, 2(4), 249-256. <https://doi.org/10.1109/JERM.2018.2875248>
- 36) Zhang Pu. (2021). Theory of Transformation Optics and Invisibility Cloak Design. Doctoral thesis. KTH. Stockholm, Sweden.