

Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна
Факультет математики і інформатики
Кафедра фундаментальної математики

Кваліфікаційна робота

освітньо-кваліфікаційний рівень: *магістр*

на тему *Теоретико-категорний варіант теореми
Шилова про замкнені відношення
еквівалентності*

Виконав: студент групи М-161 VI курсу
(другий магістерський рівень),
спеціальності 111
“Математика”
освітньо-наукової програми
“Математика”
Скуріхін Р.В.

Керівник: кандидат фіз.-мат. наук,
доцент кафедри
фундаментальної математики
Каролінський Є.О.

Анотації

Скуріхін Р.В. Теоретико-категорний варіант теореми Шилова про замкнені відношення еквівалентності

У роботі досліджується зв'язок між категорією замкнених відношень еквівалентності на компактних просторах та категорією пар комутативних C^* -алгебр. Доведено, що ці категорії еквівалентні.

Для опису цієї еквівалентності побудовано функтори C та Σ . Функтор C ставить у відповідність об'єкту (X, R) категорії замкнених відношень еквівалентності пару $(C(X), B_R)$, де $C(X)$ - алгебра неперервних функцій на X , а B_R - алгебра інваріантних функцій відносно R . Функтор Σ ставить у відповідність об'єкту (A, B) категорії пар комутативних C^* -алгебр спектр $\Sigma(A)$ алгебри A та природне відношення еквівалентності на $\Sigma(A)$.

Skurikhin R.V. A Categorical Version of Shilov's Theorem on Closed Equivalence Relations

This thesis explores the relationship between the category of closed equivalence relations on compact spaces and the category of pairs of commutative C^* -algebras. It is shown that these categories are equivalent.

To describe this equivalence, the functors C and Σ are constructed. The functor C assigns to an object (X, R) in the category of closed equivalence relations the pair $(C(X), B_R)$, where $C(X)$ is the algebra of continuous functions on X and B_R is the algebra of invariant functions with respect to R . The functor Σ assigns to an object (A, B) in the category of pairs of commutative C^* -algebras the spectrum $\Sigma(A)$ of the algebra A and natural equivalence relation on $\Sigma(A)$.

Зміст

Анотації	2
Вступ	4
1. Відомі та допоміжні факти	6
1.1. Деякі визначення з теорії категорій	6
1.2. Деякі визначення з теорії C^* -алгебр	7
1.3. Теореми про структуру комутативних C^* -алгебр	9
2. Категорії замкнених відношень еквівалентності та пар C^*-алгебр	13
2.1. Категорія замкнених відношень еквівалентності	13
2.2. Категорія пар комутативних C^* -алгебр	15
2.3. Спектр пари комутативних C^* -алгебр	17
3. Доведення еквівалентності категорій	20
3.1. Теорема Шилова	20
3.2. Еквівалентність категорій пар комутативних C^* -алгебр та замкнених відношень еквівалентності.	21
Висновки	25
Список використаних джерел	26

Вступ

Ця дипломна робота присвячена теоретико-категорному дослідженню зв'язку між категорією замкнених відношень еквівалентності на компактних топологічних просторах та категорією пар комутативних C^* -алгебр з одиницею.

В першому розділі роботи ми нагадаємо деякі визначення та теореми з теорії категорій, теорії C^* -алгебр та топології, які будуть використовуватися далі. Зокрема, ми нагадаємо визначення функтора, морфізму функторів, ізоморфізму, а також визначення еквівалентності категорій. Далі ми нагадаємо визначення банахової алгебри, характеру, спектру, C^* -алгебри, а також теореми Стоуна-Вейерштрасса, Колмогорова-Гельфанда та Гельфанда-Наймарка. Ці теореми встановлюють глибокий зв'язок між C^* -алгебрами та компактними хаусдорфовими просторами, а саме еквівалентність відповідних категорій. Теорему про еквівалентність буде сформульовано та доведено в кінці першого розділу.

У другому розділі роботи ми вводимо категорію замкнених відношень еквівалентності. Об'єктами цієї категорії будуть пари (X, R) , де X - компактний хаусдорфів топологічний простір, а R - замкнене відношення еквівалентності на X . Морфізмами цієї категорії будуть неперервні траєкторні відображення, тобто відображення, що зберігають еквівалентність. Також ми наводимо приклади замкнених та незамкнених відношень еквівалентності.

Також у другому розділі роботи ми вводимо категорію пар комутативних C^* -алгебр. Об'єктами цієї категорії є пари (A, B) , де A - комутативна C^* -алгебра, а B - її C^* -підалгебра. Морфізмами категорії є такі гомоморфі-

зми $L : A_1 \rightarrow A_2$, що $L(B_1) \subset B_2$, де (A_1, B_1) і (A_2, B_2) - об'єкти розглянутої категорії.

В третьому розділі буде встановлено еквівалентність цих двох категорій за допомогою функторів C та Σ . Функтор C буде ставити у відповідність об'єкту (X, R) категорії замкнених відношень еквівалентності пару $(C(X), B_R)$, де $C(X)$ - алгебра неперервних функцій на X , а B_R - алгебра інваріантних функцій відносно R . Функтор Σ буде ставити у відповідність об'єкту (A, B) категорії пар комутативних C^* -алгебр спектр $\Sigma(A)$ алгебри A та відповідне відношення еквівалентності на $\Sigma(A)$.

Розділ 1

Відомі та допоміжні факти

1.1. Деякі визначення з теорії категорій

Нагадаємо деякі визначення теорії категорій, використовуючи формулювання з книги [1] (див. розділ 2, стор. 57):

Означення 1.1. Коваріантний функтор з категорії $\mathcal{C}$ у категорію $\mathcal{D}$ це відображення F між об'єктами цих категорій та їх морфізмами, для якого:

1. Морфізм $\varphi : A \rightarrow B$ переходить в морфізм $F(\varphi) : F(A) \rightarrow F(B)$
2. $F(\text{id}_A) = \text{id}_{F(A)}$
3. $F(\varphi \circ \psi) = F(\varphi) \circ F(\psi)$ для будь-яких морфізмів φ, ψ категорії $\mathcal{C}$.

Означення 1.2. Контраваріантний функтор з категорії $\mathcal{C}$ у категорію $\mathcal{D}$ це відображення F між об'єктами цих категорій та їх морфізмами, для якого:

1. Морфізм $\varphi : A \rightarrow B$ переходить в морфізм $F(\varphi) : F(B) \rightarrow F(A)$
2. $F(\text{id}_A) = \text{id}_{F(A)}$
3. $F(\varphi \circ \psi) = F(\psi) \circ F(\varphi)$ для будь-яких морфізмів φ, ψ категорії $\mathcal{C}$.

Означення 1.3. Нехай F, G - два функтори з $\mathcal{C}$ у $\mathcal{D}$. Функторний морфізм F у G це сімейство морфізмів $f_X : F(X) \rightarrow G(X)$, тобто по одному морфізму для кожного об'єкта X категорії $\mathcal{C}$, що для кожного морфізму $\varphi : X \rightarrow Y$ категорії $\mathcal{C}$ наступна діаграма комутативна

$$\begin{array}{ccc}
F(X) & \xrightarrow{F(\varphi)} & F(Y) \\
f_X \downarrow & & \downarrow f_Y \\
G(X) & \xrightarrow{G(\varphi)} & G(Y)
\end{array}$$

Останнє визначення дає змогу визначити категорію функторів з $\mathcal{C}$ у $\mathcal{D}$.

Означення 1.4. Морфізм $\varphi : X \rightarrow Y$ у категорії $\mathcal{C}$ називають ізоморфізмом, якщо існує морфізм $\psi : Y \rightarrow X$, що $\psi \circ \varphi = \text{id}_X$, $\varphi \circ \psi = \text{id}_Y$.

Означення 1.5. Об'єкти X, Y категорії $\mathcal{C}$ називають ізоморфними, якщо між ними існує ізоморфізм.

Означення 1.6. Категорії $\mathcal{C}$ та $\mathcal{D}$ називають еквівалентними, якщо існують такі функтори $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ та $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$, що функтор $G \circ F$ є ізоморфним тотожньому функтору $\text{id}_{\mathcal{C}}$ у категорії функторів з $\mathcal{C}$ у $\mathcal{C}$, а функтор $F \circ G$ є ізоморфним тотожньому функтору $\text{id}_{\mathcal{D}}$ у категорії функторів з $\mathcal{D}$ у $\mathcal{D}$.

Зауваження 1.7. Останнє означення можна переформулювати наступним чином: категорії $\mathcal{C}$ та $\mathcal{D}$ називають еквівалентними, якщо існують такі функтори $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ та $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ та сімейства ізоморфізмів f_X та g_X , що є морфізмами функторів $G \circ F$, $F \circ G$ та $\text{id}_{\mathcal{C}}$, $\text{id}_{\mathcal{D}}$ відповідно.

1.2. Деякі визначення з теорії C^* -алгебр

Нагадаємо деякі визначення та теореми теорії C^* -алгебр, використовуючи формулювання з книги [3]:

Означення 1.8. Множина A є банаховою алгеброю, якщо це комплексна алгебра, що одночасно є банаховим простором, тобто це нормований повний лінійний простір над $\mathbb{C}$, на якому визначена операція множення, що задовольняє наступним аксіомам:

1. $a(bc) = (ab)c$ для будь-яких $a, b, c \in A$.
2. $\lambda(ab) = (\lambda a)b = a(\lambda b)$ для будь-яких $a, b \in A$ та $\lambda \in \mathbb{C}$.
3. $a(b + c) = ab + ac$ та $(a + b)c = ac + bc$ для будь-яких $a, b, c \in A$.
4. $\|ab\| \leq \|a\|\|b\|$ для будь-яких $a, b \in A$.
5. $\exists 1_A \in A : \forall a \in A : 1_A a = a = a 1_A$

Означення 1.9. Характером банахової алгебри A називають лінійне відображення $\varphi : A \mapsto \mathbb{C}$, що є гомоморфізмом відносно операції множення:

1. $\forall a, b \in A : \varphi(a + b) = \varphi(a) + \varphi(b)$.
2. $\forall a \in A, \lambda \in \mathbb{C} : \varphi(\lambda a) = \lambda \varphi(a)$.
3. $\varphi(1_A) = 1$.
4. $\forall a, b \in A : \varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$.

Означення 1.10. Спектром банахової алгебри A називають множину всіх характерів A як підпростір A^* , наділену слабкою топологією (тобто топологією поточної збіжності). Для спектру використовують позначення $\Sigma(A)$.

Твердження 1.11. Спектр банахової алгебри $\Sigma(A)$ є компактим хаусдорфовим топологічним простором.

Означення 1.12. Банахова алгебра A є C^* -алгеброю, якщо на ній додатково задана інволюція $a \mapsto a^*$, для якої виконуються наступні аксіоми:

1. $(\alpha a + \beta b)^* = \bar{\alpha} a^* + \bar{\beta} b^*$ для будь-яких $a, b \in A$ та $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.
2. $a^{**} = a$ для будь-якого $a \in A$
3. $(ab)^* = b^* a^*$ для будь-яких $a, b \in A$
4. $\|a^*\| = \|a\|$ для будь-якого $a \in A$

5. $\|aa^*\| = \|a\|^2$ для будь-якого $a \in A$

Приклад 1.13. Множина всіх комплекснозначних неперервних функцій $C(X)$ на компактному хаусдорфовому просторі є C^* -алгеброю. Лінійні операції задаються як звичайно для функцій:

$$(\alpha f + \beta g)(x) = \alpha f(x) + \beta g(x)$$

Операція множення - це добуток функцій:

$$(fg)(x) = f(x)g(x)$$

Норма на цьому просторі - це звичайна норма простору неперервних функцій на компактi:

$$\|f\| = \max_{x \in X} |f(x)|$$

А інволюція - це комплексне спряження:

$$(f^*)(x) = \overline{f(x)}$$

1.3. Теореми про структуру комутативних C^* -алгебр

Теорема 1.14 (Стоуна-Вейерштрасса [4]). Нехай X - компактний хаусдорфовий топологічний простір. $B \subset C(X)$ - замкнена самоспряжена підалгебра алгебри неперервних функцій, і B розділяє точки X , тобто $\forall x, y \in X, x \neq y : \exists b \in B : b(x) \neq b(y)$. Тоді $B = C(X)$.

Теорема 1.15 (Колмогорова-Гельфанда [5]). Нехай X - компактний хаусдорфовий топологічний простір. Для $x \in X$ розглянемо характер φ_x банахової алгебри $C(X) : \varphi_x(a) = a(x), a \in C(X)$. Тоді відображення $I : X \mapsto$

$\Sigma(C(X)), I(x) = \varphi_x$ є гомеоморфізмом. Таким чином, можна ототожнити спектр $C(X)$ з компактом X .

Теорема 1.16 (Гельфанда-Наймарка [2](стор. 289)). Нехай A - комутативна C^* -алгебра і $\Gamma : A \rightarrow C(\Sigma(A))$ - її перетворення Гельфанда, $\Gamma(a) = \hat{a}$, де $\hat{a}(\varphi) = \varphi(a), \varphi \in \Sigma(A)$ - характер. Тоді Γ є ізометричним $*$ -ізоморфізмом C^* -алгебр, тобто Γ - такий ізоморфізм алгебр, що $\forall a \in A : \|\Gamma(a)\| = \|a\|$ і $\Gamma(a^*) = \Gamma(a)^*$.

Разом останні дві теореми показують глибокий зв'язок між C^* -алгебрами та хаусдорфовими компактами. Більш строго це можна записати теорему на мові теорії категорій, для цього спочатку визначемо категорії комутативних C^* -алгебр та компактних хаусдорфових просторів.

Означення 1.17. Категорія комутативних C^* -алгебр - це категорія, об'єктами якої є комутативні C^* -алгебри, а морфізми - це лінійні гомоморфізми алгебр, що зберігають інволюцію.

Означення 1.18. Категорія компактних хаусдорфових просторів - це категорія, об'єктами якої є компактні хаусдорфові простори, а морфізми - неперервні відображення між ними.

Теорема 1.19. Категорії комутативних C^* -алгебр та компактних хаусдорфових просторів є еквівалентними.

Доведення. За визначенням 1.6, нам потрібно взяти пару функторів, що будуть визначати еквівалентність категорій. Побудуємо ці функтори:

Визначимо контраваріантний функтор C наступним чином:

- Об'єкт X (хаусдорфів компакт) переходить в $C(X)$ - множину неперервних функцій зі значеннями в $\mathbb{C}$
- Морфізм $f : X \rightarrow Y$ (неперервне відображення між компактами) переходить в $C(f) : C(Y) \rightarrow C(X)$, визначене як $C(f)(a) = a \circ f$

Перевіримо, що це дійсно функтор. Для цього візьмемо будь-які морфізми $f : X \rightarrow Y, g : Y \rightarrow Z$ і функцію $a \in C(Z)$:

$$C(g \circ f)(a) = a \circ (g \circ f) = a \circ g \circ f$$

$$(C(f) \circ C(g))(a) = C(f)(a \circ g) = a \circ g \circ f$$

А також $C(\text{id}_X)(a) = a \circ \text{id}_X = a$.

Визначимо контраваріантний функтор Σ наступним чином:

- Об'єкт A (C^* -алгебра) переходить в $\Sigma(A)$ - спектр цієї алгебри.
- Морфізм $L : A \rightarrow B$ (C^* -морфізм двох алгебр) переходить в $\Sigma(L) : \Sigma(B) \rightarrow \Sigma(A)$, що визначено як $\Sigma(L)(\varphi) = \varphi \circ L$

Перевіримо, що це дійсно функтор. Для цього візьмемо будь-які морфізми $L : A \rightarrow B, M : B \rightarrow D$ і характер $\varphi \in \Sigma(D)$:

$$\Sigma(M \circ L)(\varphi) = \varphi \circ (M \circ L) = \varphi \circ M \circ L$$

$$(\Sigma(L) \circ \Sigma(M))(\varphi) = \Sigma(L)(\varphi \circ M) = \varphi \circ M \circ L$$

А також $\Sigma(\text{id}_A)(\varphi) = \varphi \circ \text{id}_A = \varphi$.

Далі, в якості сімейства морфізмів що визначає ізоморфізмі функторів $\Sigma \circ C$ та $\text{id}_{\text{кат. комп. прост.}}$ візьмемо відображення $I_X : X \mapsto \Sigma(C(X)), I(x) = \varphi_x$. Тоді за теоремою Колмогорова-Гельфанда це дійсно ізоморфізми у категорії компактних просторів, і потрібно перевірити комутативність наступної діаграми:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ I_X \downarrow & & \downarrow I_Y \\ \Sigma(C(X)) & \xrightarrow{\Sigma(C(f))} & \Sigma(C(Y)) \end{array}$$

Отже, маємо:

$$\begin{aligned}
 (\Sigma(C(f)) \circ I_X)(x)(a) &= \Sigma(C(f))(\varphi_x)(a) = (\varphi_x \circ C(f))(a) = \\
 &= \varphi_x(a \circ f) = a(f(x)) \\
 (I_Y \circ f)(x)(a) &= (I_Y(f(x)))(a) = \varphi_{f(x)}(a) = a(f(x))
 \end{aligned}$$

Отже, це дійсно ізоморфізм функторів.

Далі, в якості сімейства морфізмів що визначає ізоморфність функторів $C \circ \Sigma$ та $\text{id}_{\text{кат. } C^*\text{-алгебри}}$ візьмемо відображення $\Gamma_A : A \rightarrow C(\Sigma(A))$ - перетворення Гельфанда, $\Gamma_A(a) = \hat{a}$, де $\hat{a}(\varphi) = \varphi(a)$, $\varphi \in \Sigma(A)$ - характер. Тоді за теоремою Гельфанда-Наймарка це дійсно ізоморфізм у категорії C^* -алгебр, і потрібно лише перевірити комутативність наступної діаграми:

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{L} & B \\
 \Gamma_A \downarrow & & \downarrow \Gamma_B \\
 C(\Sigma(A)) & \xrightarrow{C(\Sigma(L))} & C(\Sigma(B))
 \end{array}$$

Отже, маємо:

$$\begin{aligned}
 (C(\Sigma(L)) \circ \Gamma_A)(a)(\varphi) &= C(\Sigma(L))(\hat{a})(\varphi) = (\hat{a} \circ \Sigma(L))(\varphi) = \\
 &= \hat{a}(\varphi \circ L) = \varphi(L(a)) \\
 (\Gamma_B \circ L)(a)(\varphi) &= (\Gamma_B(L(a)))(\varphi) = \widehat{L(a)}(\varphi) = \varphi(L(a))
 \end{aligned}$$

Отже, функтори C та Σ встановлюють еквівалентність цих категорій.

□

Розділ 2

Категорії замкнених відношень еквівалентності та пар C^* -алгебр

2.1. Категорія замкнених відношень еквівалентності

Нехай X - компактний хаусдорфів топологічний простір, і R - відношення еквівалентності на X .

Означення 2.1. Відношення еквівалентності R називається *замкненим*, якщо воно є замкненою підмножиною у просторі $X \times X$, тобто множина пар $\{(x, y) \in X \times X : x \sim y\}$ замкнена в $X \times X$.

Приклад 2.2. Нехай X - одиничний круг на площині, тобто $X = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$. Будемо вважати, що точки (x_1, x_2) і (y_1, y_2) еквівалентні, якщо одна з іншої може бути отримана за допомогою повороту навколо початку координат. Тоді ми отримуємо замкнене відношення еквівалентності на просторі X :

$$R = \{((x_1, x_2), (y_1, y_2)) : x_1^2 + x_2^2 = y_1^2 + y_2^2\}$$

Доведення. Замкненість цієї множини можна отримати, наприклад, записавши R як прообраз замкненої множини відносно неперервного відображення, тобто $R = f^{-1}(0)$, де $f(x_1, x_2, y_1, y_2) = x_1^2 + x_2^2 - y_1^2 - y_2^2$. $\square$

Приклад 2.3. Нехай тепер X - це одиничне коло на площині, тобто $X = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. Зафіксуємо число $\theta \in \mathbb{R}$, що $\frac{\theta}{\pi} \notin \mathbb{Q}$. Будемо вважати, що

$z_1 \sim z_2$, якщо $z_2 = e^{in\theta} z_1$ для деякого $n \in \mathbb{Z}$. Покажемо, що це відношення еквівалентності не є замкненим.

Доведення. Спочатку доведемо, що множина $A = \{\{n\frac{\theta}{\pi}\}, n \in \mathbb{Z}\}$, де $\{n\frac{\theta}{\pi}\}$ позначає дробову частину, є щільною множиною, тобто $\overline{A} = [0, 1]$.

Візьмемо довільне $\alpha \in [0, 1]$ та $k \in \mathbb{N}$. Тоді серед $\frac{\theta}{\pi}, 2\frac{\theta}{\pi}, \dots, (k+1)\frac{\theta}{\pi}$ два числа, що потрапили в один проміжок з $[0, \frac{1}{k}), [\frac{1}{k}, \frac{2}{k}), \dots, [\frac{k-1}{k}, 1]$. Тоді вони відрізняються менше ніж на $\frac{1}{k}$:

$$\exists n, m \in \mathbb{Z} : |n\frac{\theta}{\pi} - m\frac{\theta}{\pi}| \leq \frac{1}{k}$$

Однак $(n-m)\frac{\theta}{\pi}$ не нуль бо не належить $\mathbb{Q}$, і отже тоді існує таке $p \in \mathbb{Z}$, що $|(n-m)p\frac{\theta}{\pi} - \alpha| < \frac{1}{k}$. Так як $(n-m)p \in \mathbb{Z}$, то ми знайшли елемент A що наближає α з точністю $\frac{1}{k}$. Так як α, k довільні, то маємо щільність цієї множини.

З цього випливає, що клас еквівалентності $[z] = \{ze^{in\theta}, n \in \mathbb{Z}\}$ - це щільна множина на колі X . Але тоді в ній можна обрати послідовність z_k таку що $z_k \sim z$, $\lim_{k \rightarrow \infty} z_k = z'$, $z' \not\sim z$. Так як пари (z, z_k) лежать в $R = \{(x, y) \in X \times X : x \sim y\}$, то пара $(z, z') \in \overline{R}$, однак $(z, z') \notin R$ - отже, R не є замкненою множиною.

□

Означення 2.4. Нехай R_j - відношення еквівалентності на множині X_j ($j = 1, 2$), і $f : X_1 \rightarrow X_2$. Відображення f називається *траєкторним*, якщо f переводить еквівалентні точки у еквівалентні, тобто, якщо $x, y \in X_1$ і $(x, y) \in R_1$, то $(f(x), f(y)) \in R_2$.

Об'єктами категорії замкнених відношень еквівалентності будуть пари (X, R) , де X - компактний хаусдорфів простір, а R - замкнене відношення

еквівалентності. Морфізми цієї категорії - неперервні траєкторні відображення.

2.2. Категорія пар комутативних C^* -алгебр

Об'єктами цієї категорії є пари (A, B) , де A - комутативна C^* -алгебра, а B - її C^* -підалгебра, тобто замкнена самоспряжена підалгебра, що містить одиницю алгебри A .

Морфізми категорії - це такі гомоморфізми $L : A_1 \rightarrow A_2$, що $L(B_1) \subset B_2$, де (A_1, B_1) і (A_2, B_2) - об'єкти розглянутої категорії.

Нехай тепер X - компактний хаусдорфів топологічний простір і R - замкнене відношення еквівалентності на X . Розглянемо в алгебрі $A = C(X)$ наступну підмножину:

$$B_R = \{a \in A : (x, y) \in R \implies a(x) = a(y)\}$$

Лема 2.5. Множина B_R є C^* -підалгеброю алгебри A .

Доведення. По-перше, одиниця алгебри A лежить у B_R :

$$1_A \in B_R : \forall x, y \in X : 1_A(x) = 1_A(y) = 1_{\mathbb{C}}$$

По-друге, це лінійний підпростір:

$$\forall a, b \in B_R, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C} : \forall (x, y) \in R :$$

$$(\alpha a + \beta b)(x) = \alpha a(x) + \beta b(x) = \alpha a(y) + \beta b(y) = (\alpha a + \beta b)(y)$$

Далі, це підалгебра:

$$\forall a, b \in B_R, \forall (x, y) \in R :$$

$$(ab)(x) = a(x)b(x) = a(y)b(y) = (ab)(y)$$

Також, це замкнена множина, так як з рівномірної збіжності випливає точкова:

$$\forall a_n \in B_R : \exists \lim_{n \rightarrow \infty} a_n, \forall (x, y) \in R :$$

$$(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n)(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n(y) = (\lim_{n \rightarrow \infty} a_n)(y)$$

І нарешті, це самоспряжена підалгебра:

$$\forall a \in B_R, \forall (x, y) \in R :$$

$$(a^*)(x) = \overline{a(x)} = \overline{a(y)} = (a^*)(y)$$

□

Алгебра B_R має назву алгебри *інваріантних функцій* відносно R . Надалі пару (A, B_R) будемо позначати за $C(X, R)$.

Нехай тепер (X_1, R_1) і (X_2, R_2) - два об'єкти категорії замкнених відношень еквівалентності, і $f : X_1 \rightarrow X_2$ - неперервне траєкторне відображення. Тоді f породжує морфізм $C(f)$ із $C(X_2, R_2)$ в $C(X_1, R_1)$ наступним чином: $C(f)(\varphi) = \varphi \circ f, \varphi \in C(X_2)$. Умова морфізму виконується, бо $\forall (x, y) \in R_1, \varphi \in B_{R_2} : C(f)(\varphi)(x) = \varphi(f(x))$, так як $x \sim y \implies f(x) \sim f(y)$, то $\varphi(f(x)) = \varphi(f(y)) = C(f)(\varphi)(y)$, і отже $C(f)(B_{R_2}) \subset B_{R_1}$.

Лема 2.6. *Відповідність C є контраваріантним функтором з категорії замкнених відношень еквівалентності у категорію пар комутативних C^* -алгебр.*

Доведення.

По-перше, доведемо, що функтор C переводить тотожний морфізм в тотожний. Отже, нехай (X, R) об'єкт категорії замкнених відношень еквівалентності. Його тотожний морфізм це $\text{id}_X : X \rightarrow X, \text{id}_X(x) = x$. Тоді:

$$C(\text{id}_X) : \varphi \mapsto \varphi \circ \text{id}_X = \varphi$$

І відповідно, маємо що $C(\text{id}_X) = \text{id}_{C(X)}$

Далі, потрібно довести що композиції морфізмів відповідає композиція морфізмів. Отже, нехай $(X_1, R_1), (X_2, R_2), (X_3, R_3)$ - об'єкти категорії замкнених відношень, $f_{12} : X_1 \rightarrow X_2, f_{23} : X_2 \rightarrow X_3$ - відповідні морфізми.

Розглянемо $C(f_{23} \circ f_{12})$ для $\varphi \in C(X_3), x \in X_1$:

$$(C(f_{23} \circ f_{12})(\varphi))(x) = (\varphi \circ (f_{23} \circ f_{12}))(x) = \varphi(f_{23}(f_{12}(x)))$$

Розглянемо $C(f_{12}) \circ C(f_{23})$ для $\varphi \in C(X_3), x \in X_1$:

$$(C(f_{12}) \circ C(f_{23}))(\varphi)(x) = (C(f_{12})(\varphi \circ f_{23}))(x) = (\varphi \circ f_{23} \circ f_{12})(x) = \varphi(f_{23}(f_{12}(x)))$$

Отже, $C(f_{23} \circ f_{12})(\varphi) = (C(f_{12}) \circ C(f_{23}))(\varphi)$, що завершує доведення.

□

2.3. Спектр пари комутативних C^* -алгебр

Нехай (A, B) - об'єкт категорії пар комутативних C^* -алгебр. Розглянемо на спектрі $\Sigma(A)$ наступне відношення еквівалентності:

$$R_B = \{(\varphi, \psi) : \forall b \in B : \varphi(b) = \psi(b)\}$$

Лема 2.7. Множина R_B є замкненим відношенням еквівалентності.

Доведення.

Отже, нехай $\{(\varphi_\alpha, \psi_\alpha)\} \subset R_B$ - сітка, що збігається до (φ, ψ) . Тоді для замкненості R_B потрібно довести що $(\varphi, \psi) \in R_B$. З визначення топології декартового добутку маємо що збіжності сіток $\lim_\alpha \varphi_\alpha = \varphi, \lim_\alpha \psi_\alpha = \psi$. Так

як топологія в $\Sigma(A)$ задається поточною збіжністю, то

$$\forall b \in B : \exists \lim_{\alpha} \varphi_{\alpha}(b) = \varphi(b)$$

$$\forall b \in B : \exists \lim_{\alpha} \psi_{\alpha}(b) = \psi(b)$$

Однак, $\varphi_{\alpha}(b) = \psi_{\alpha}(b)$ і тоді:

$$\varphi(b) = \lim_{\alpha} \varphi_{\alpha}(b) = \lim_{\alpha} \psi_{\alpha}(b) = \psi(b)$$

Отже:

$$\forall b \in B : \varphi(b) = \psi(b)$$

І тоді $(\varphi, \psi) \in R_B$, отже R_B є замкненим відношенням еквівалентності.

□

Надалі пару $(\Sigma(A), R_B)$ будемо позначати $\Sigma(A, B)$.

Нехай тепер (A_1, B_1) та (A_2, B_2) - два об'єкти категорії пар комутативних C^* -алгебр, і $L : A_1 \rightarrow A_2$ морфізм цієї категорії, тобто гомеоморфізм з додатковою властивістю $L(B_1) \subset B_2$. Тоді L породжує морфізм $\Sigma(L)$ із $\Sigma(A_2, B_2)$ в $\Sigma(A_1, B_1)$ наступним чином: $\Sigma(L)(\varphi)(a) = \varphi(L(a))$, $\varphi \in \Sigma(A_2)$, $a \in A_1$. Це є морфізмом, тобто неперервним траєкторним відображенням, бо $b \in B_1 \implies L(b) \in B_2$ і тоді $\varphi \sim \psi \implies \varphi(L(b)) = \psi(L(b))$ і отже $\Sigma(L)(\varphi) \sim \Sigma(L)(\psi)$.

Лема 2.8. *Відповідність Σ є контраваріантним функтором з категорії пар комутативних C^* -алгебр у категорію замкнених відношень еквівалентності.*

Доведення.

По-перше, доведемо, що функтор Σ переводить тотожний морфізм в тотожний. Отже, нехай (A, B) об'єкт категорії пар комутативних C^* -алгебр. Його тотожний морфізм це $\text{id}_A : A \rightarrow A$, $\text{id}_A(a) = a$. Тоді:

$$\Sigma(\text{id}_A) : \varphi \mapsto \varphi \circ \text{id}_X = \varphi$$

І відповідно, маємо що $\Sigma(\text{id}_A) = \text{id}_{\Sigma(A)}$

Далі, потрібно довести що композиції морфізмів відповідає композиція морфізмів. Отже, нехай $(A_1, B_1), (A_2, B_2), (A_3, B_3)$ - об'єкти категорії пар комутативних C^* -алгебр, $L_{12} : A_1 \rightarrow A_2, L_{23} : A_2 \rightarrow A_3$ - відповідні морфізми.

Розглянемо $\Sigma(L_{23} \circ L_{12})$ для $\varphi \in \Sigma(A_3), a \in A_1$:

$$(\Sigma(L_{23} \circ L_{12})(\varphi))(a) = (\varphi \circ (L_{23} \circ L_{12}))(a) = \varphi(L_{23}(L_{12}(a)))$$

Розглянемо $\Sigma(L_{12}) \circ \Sigma(L_{23})$ для $\varphi \in \Sigma(A_3), a \in A_1$:

$$(\Sigma(L_{12}) \circ \Sigma(L_{23}))(\varphi)(a) = (\Sigma(L_{12})(\varphi \circ L_{23}))(a) = (\varphi \circ L_{23} \circ L_{12})(a) = \varphi(L_{23}(L_{12}(a)))$$

Отже, $\Sigma(L_{23} \circ L_{12})(\varphi) = (\Sigma(L_{12}) \circ \Sigma(L_{23}))(\varphi)$, що завершує доведення.

□

Розділ 3

Доведення еквівалентності категорій

3.1. Теорема Шилова

В цьому розділі ми розглянемо доведення теореми Шилова [6] про опис підалгебр алгебри усіх неперервних комплекснозначних функцій на компактному просторі.

Теорема 3.1. *Нехай X - компактний хаусдорфів топологічний простір, $A = C(X)$, а B - замкнена самоспряжена підалгебра алгебри A . Тоді відношення еквівалентності R_B на просторі X , що визначається формулою:*

$$R_B = \{(\varphi, \psi) : \forall b \in B : \varphi(b) = \psi(b)\}$$

є замкненим відношенням еквівалентності, та B є алгеброю інваріантних функцій відносно R_B , тобто $B = B_{R_B}$.

Доведення.

Як було доведено в лемі 2.7, R_B є замкненим відношенням еквівалентності. За визначенням R_B , усі елементи B є інваріантними функціями відносно R_B , тобто $B \subset B_{R_B}$. Покажемо, що $B = B_{R_B}$, тобто інших інваріантних функцій не існує.

Розглянемо факторпростір $K = X/R_B$. Це компактний простір (див. [7]), проекція $p : X \rightarrow K, p(x) = [x]$ - неперервне відображення, і будь-яка неперервна функція $f : X \rightarrow \mathbb{C}$, що є інваріантною відносно R , може бути записана як $\tilde{f} \circ p$, де $\tilde{f} : K \rightarrow \mathbb{C}$. Таким чином, є однозначна відповідність

$U(a) = \tilde{a}$ між $C(K)$ та інваріантними функціями B_{R_B} , і ця відповідність є ізоморфізмом алгебр.

Тоді алгебра $U(B)$ це якась підалгебра $C(K)$. Покажемо, що $U(B)$ розділяє точки простору K . Нехай $[x_1] \neq [x_2]$, тобто $(x_1, x_2) \notin R_B$. Це означає що існує $b \in B$ що $b(x_1) \neq b(x_2)$, але це означає що й $U(b)([x_1]) \neq U(b)([x_2])$, що і означає що $U(B)$ розділяє точки K . Але B також є самоспряженою підалгеброю, отже $U(B)$ також самоспряжена підалгебра в $C(K)$, і тоді за теоремою Стоуна-Вейерштраса отримуємо що $U(B) = C(K)$ і відповідно $B = B_{R_B}$, що і треба було довести. $\square$

3.2. Еквівалентність категорій пар комутативних C^* -алгебр та замкнених відношень еквівалентності.

Теорема 3.2. Категорії пар комутативних C^* -алгебр та замкнених відношень еквівалентності є еквівалентними.

Доведення. Візьмемо в якості пари функторів, що будуть встановлювати еквівалентність категорій, функтори C та Σ . Отже, потрібно встановлювати ізоморфізми функторів $\Sigma \circ C$ та $\text{id}_{\text{кат. відн. еквів.}}$ та функторів $C \circ \Sigma$ та $\text{id}_{\text{кат. пар } C^*\text{-алгебр}}$.

В якості сімейства ізоморфізмів, що визначає ізоморфізми функтора $\Sigma \circ C$ тотожньому, візьмемо відображення $I_{X,R} : X \mapsto \Sigma(C(X))$, $I_{X,R}(x) = \varphi_x$. Тоді за теоремою Колмогорова-Гельфанда це гомеоморфізм між X та $\Sigma(C(X))$. Для того щоб це був ізоморфізм категорії замкнених відношень еквівалентності потрібно довести, що $I_{X,R}$ та $I_{X,R}^{-1}$ є траєкторними відображеннями. Дійсно:

$$(x, y) \in R \implies \forall b \in B_R : b(x) = b(y)$$

$$\forall b \in B_R : I_{X,R}(x)(b) = \varphi_x(b) = b(x) = b(y) = \varphi_y(b) = I_{X,R}(y)(b)$$

$$(I_{X,R}(x), I_{X,R}(y)) \in R_{B_R}$$

Отже, $I_{X,R}$ є траєкторним відображенням.

Так як $I_{X,R}$ - гомеоморфізм, то будь-який характер над $C(X)$ має вигляд φ_x , тобто значення в фіксованій точці. Тоді потрібно довести що для того щоб $I_{X,R}^{-1}$ було траєкторним відображенням, потрібно щоб якщо $(\varphi_x, \varphi_y) \in R_{B_R}$, то $(x, y) \in R$. Доведемо це від супротивного: нехай це не так, і $(x, y) \notin R$. Тоді класи еквівалентності $[x]$ та $[y]$ не співпадають, і можна побудувати неперервну $h : X/R \rightarrow \mathbb{C}$, що $h([x]) \neq h([y])$ (множина X/R є хаусдорфовим компактом так як R є замкнутим (див. [7])). Тоді також існує функція $b(x) = h([x])$ що є інваріантною відносно R , а отже $b \in B_R$. Однак тоді $\varphi_x(b) = b(x) \neq b(y) = \varphi_y(b)$, що протирічить тому, що $(\varphi_x, \varphi_y) \in R_{B_R}$. Отже, $I_{X,R}^{-1}$ є траєкторним, і тоді $I_{X,R}$ дійсно є ізоморфізмом в категорії замкнених відношень еквівалентності.

Тоді для ізоморфності функтора $\Sigma \circ C$ тотожньому залишилось довести комутативність наступної діаграми:

$$\begin{array}{ccc} (X, R_X) & \xrightarrow{f} & (Y, R_Y) \\ I_{X,R_X} \downarrow & & \downarrow I_{Y,R_Y} \\ \Sigma(C((X, R_X))) & \xrightarrow{\Sigma(C(f))} & \Sigma(C((Y, R_Y))) \end{array}$$

Отже, маємо:

$$\begin{aligned} (\Sigma(C(f)) \circ I_{X,R})(x)(a) &= \Sigma(C(f))(\varphi_x)(a) = (\varphi_x \circ C(f))(a) = \\ &= \varphi_x(a \circ f) = a(f(x)) \end{aligned}$$

$$(I_{Y,R_Y} \circ f)(x)(a) = (I_{Y,R_Y}(f(x)))(a) = \varphi_{f(x)}(a) = a(f(x))$$

Отже, це дійсно ізоморфізм функторів.

Тепер доведемо ізоморфність функтора $C \circ \Sigma$ тотожньому взявши в якості сімейства ізоморфізмів відображення $\Gamma_{A,B} : A \rightarrow C(\Sigma(A))$ - перетворення Гельфанда, $\Gamma_{A,B}(a) = \hat{a}$, де $\hat{a}(\varphi) = \varphi(a)$, $\varphi \in \Sigma(A)$ - характер. Тоді за теоремою Гельфанда-Наймарка це ізоморфізм між алгебрами A та $C(\Sigma(A))$. Для того щоб це був ізоморфізм категорії пар C^* -алгебр потрібно довести, що потрібно щоб $\Gamma_{A,B}(B) \subset B_{R_B}$, $\Gamma_{A,B}^{-1}(B_{R_B}) \subset B$, тобто щоб $\Gamma_{A,B}(B) = B_{R_B}$. Однак теорема Шилова каже нам, що $\Gamma_{A,B}(B) = R_B$, тобто це підалгебра інваріантних функцій відносно наступного відношення еквівалентності на множині характерів алгебри A :

$$R = \{(\varphi, \psi) : \forall \hat{b} \in \Gamma_{A,B}(B) : \hat{b}(\varphi) = \hat{b}(\psi)\}$$

Однак, використовуючи означення Γ , це можна записати наступним чином:

$$R = \{(\varphi, \psi) : \forall b \in B : \varphi(b) = \psi(b)\}$$

Тобто $R = R_B$, і тоді отримуємо що $\Gamma_{A,B}(B) = B_{R_B}$, і отже $\Gamma_{A,B}$ дійсно є ізоморфізмом в категорії пар комутативних C^* -алгебр.

Тоді для ізоморфності функтора $C \circ \Sigma$ тотожньому залишилось довести комутативність наступної діаграми:

$$\begin{array}{ccc} (A_1, B_1) & \xrightarrow{L} & (A_2, B_2) \\ \Gamma_{A_1, B_1} \downarrow & & \downarrow \Gamma_{A_2, B_2} \\ C(\Sigma((A_1, B_1))) & \xrightarrow{C(\Sigma(L))} & C(\Sigma((A_2, B_2))) \end{array}$$

Отже, маємо:

$$(C(\Sigma(L)) \circ \Gamma_{A_1, B_1})(a)(\varphi) = C(\Sigma(L))(\hat{a})(\varphi) = (\hat{a} \circ \Sigma(L))(\varphi) =$$

$$= \hat{a}(\varphi \circ L) = \varphi(L(a))$$

$$(\Gamma_{A_2, B_2} \circ L)(a)(\varphi) = (\Gamma_{A_2, B_2}(L(a)))(\varphi) = \widehat{L(a)}(\varphi) = \varphi(L(a))$$

Отже, діаграма комутативна, і тоді функтори C та Σ встановлюють еквівалентність цих категорій, що завершує доведення.

□

Висновки

У цій дипломній роботі було досліджено зв'язок між категорією замкнених відношень еквівалентності та категорією пар комутативних C^* -алгебр за допомогою функторів C та Σ .

Було введено поняття замкненого відношення еквівалентності на компактному хаусдорфовому топологічному просторі та наведено приклади таких відношень. Також було введено категорію замкнених відношень еквівалентності, де об'єктами є пари (X, R) , де X - компактний хаусдорфів простір, а R - замкнене відношення еквівалентності на X , а морфізмами - неперервні траєкторні відображення.

Було введено категорію пар комутативних C^* -алгебр, де об'єктами є пари (A, B) , де A - комутативна C^* -алгебра, а B - її C^* -підалгебра. Морфізмами категорії є такі гомоморфізми $L : A_1 \rightarrow A_2$, що $L(B_1) \subset B_2$, де (A_1, B_1) і (A_2, B_2) - об'єкти розглянутої категорії.

Було доведено, що функтори C та Σ встановлюють еквівалентність цих категорій. Це означає, що між ними існує взаємно-однозначна відповідність, яка зберігає структуру категорій.

Цей результат має ряд наслідків. Наприклад, він дає нове розуміння структури комутативних C^* -алгебр та замкнених відношень еквівалентності. Він також може бути використаний для вирішення задач в цих областях.

Список використаних джерел

- [1] Gel'fand S. I., Manin Y. I. Methods of homological algebra. 2nd ed. Berlin : Springer, 2003. P. 372.
- [2] Rudin W. Functional analysis. 2nd ed. New York: McGraw-Hill, 1991. P. 424.
- [3] Davidson K. R. C^* -algebras by example. Providence, R.I : American Mathematical Society, 1996. P. 309.
- [4] Stone M. H. The Generalized Weierstrass Approximation Theorem. Mathematics Magazine. 1948. Vol. 21, no. 4. P. 167. URL: <https://doi.org/10.2307/3029750> (date of access: 02.05.2024).
- [5] Tikhomirov V. M. On Rings of Continuous Functions on Topological Spaces. Selected Works of A. N. Kolmogorov. Dordrecht, 1991. P. 291–297.
- [6] Shilov G. Ideals and subrings of the ring of continuous functions. C. R. (Dokl.) Acad. Sci. URSS, n. Ser. 1939. Vol. 22. P. 7–10.
- [7] Bourbaki N. Part 1, paragraph 10, Proposition 8. Elements of mathematics: General topology. 1966. P. 105.