ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ, ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ
Выпуск 10 1970

ОБОСНОВАНИЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ОПТИКИ В ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ТЕОРИИ ДИФРАКЦИИ

Г. Н. Гестрин

§ 1. ВВЕДЕНИЕ

В работе [1] дано строгое обоснование коротковолнового приближения геометрической оптики и приближения Кирхгофа в скалярной задаче о дифракции плоской волны на плоском экране произвольной формы.

В настоящей статье одна частная электродинамическая задача такого рода рассматривается в случае скользящего падения волны на плоский экран*. С точки зрения геометрической оптики, такой экран не представляет препятствия для лучей. Оправданию, следовательно, подлежит тот факт, что с уменьшением длины волны падающего поля присутствие экрана должно оказывать исчезающе малое воздействие на общую картину волнового поля в пространстве.

Как и в [1], средством исследования служат парные интегральные уравнения, которым удовлетворяет преобразование Фурье возникающего на проводящем экране тока. Эти уравнения получены в § 2. Для их изучения в § 3 по аналогии с [1] введены специальные функциональные пространства. Когда доказательства утверждений этого параграфа несущественно отличаются от соответствующих доказательств в [1], мы ограничиваемся только формулировками. В последнем, четвертом параграфе приводятся оценки энергии рассеянного поля.

Переходим к точному изложению.

На идеально проводящую решетку, образованную бесконечно тонкими лентами $x = md$ $(m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$; $|y| < a$ $-\infty < z < +\infty$, набегает электромагнитная волна**

$$E_x^{(0)} = 0; \quad E_y^{(0)} = 0; \quad E_z^{(0)} = e^{-iky};$$

$$H_x^{(0)} = e^{-iky}; \quad H_y^{(0)} = 0; \quad H_z^{(0)} = 0,$$

где $k = k_1 + ik_2$; $k_1 > 0$; $k_2 > 0$.
Рассеянное решеткой поле имеет компоненты E_z, H_x, H_y, и его электрическая компонента $E_z^{(1)}(x, y)$ определяется как решение уравнения Гельмгольца

$$\Delta E_z^{(1)}(x, y) + k^2 E_z^{(1)}(x, y) = 0 \tag{1.1}$$

во всей плоскости XOY за исключением отрезков прямых $x = md$ $(m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$, $|y| < a$, подчиненное дополнительным требованиям

$$E_z^{(1)}(x + d;\ y) = E_z^{(1)}(x;\ y);\quad E_z^{(1)}(-x;\ y) = E_z^{(1)}(x;\ y), \tag{1.2}$$

$$E_z^{(1)}(+0;\ y) = -e^{-iky}\ |y| < a, \tag{1.3}$$

---

* Волновой вектор параллелен плоскости экрана.

** Временной множитель $e^{-i\omega t}$ опущен.

$$E_z^{(1)}(x,\ y) \text{ и } \frac{\partial E_z^{(1)}(x,\ y)}{\partial y} \tag{1.4}$$

стремятся к нулю при $y \to \pm\infty$ равномерно относительно x.

Для каждой конечной области D плоскости XOY

$$\iint_D \left(\left| E_z^{(1)}(x,\ y) \right|^2 + \left| \operatorname{grad} E_z^{(1)}(x,\ y) \right|^2 \right) dxdy < +\infty. \tag{1.5}$$

В [2] показано, что перечисленным требованиям удовлетворяет единственная функция и что она представима в виде

$$E_z^{(1)}(x,\ y) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\delta_m}{S_m} \int_{-a}^{+a} e^{-s_m|y-\eta|} \cdot \varphi(\eta)\, d\eta \cos \frac{2m\pi x}{d}, \tag{1.6}$$

где

$$\delta_m = \begin{cases} 1 \text{ при } m = 0 \\ 2 \text{ при } m > 0 \end{cases}, \quad S_m = \begin{cases} -ik \text{ при } m = 0 \\ \sqrt{-k^2 + \dfrac{4m^2\pi^2}{d^2}}^{\,*} \text{ при } m > 0, \end{cases}$$

а $\varphi(\eta)$ определяется из интегрального уравнения

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\delta_m}{s_m} \int_{-a}^{+a} e^{-s_m|y-\eta|} \varphi(\eta)\, d\eta = -e^{-iky}. \tag{1.7}$$

При этом установлено, что $\varphi(\eta)$ суммируема на интервале $(-a,\ +a)$ с любой степенью, меньшей двух.

Нас интересует поведение $E_z^{(1)}(x,\ y)$ при $k_1 \to \infty$. Покажем, что энергия этой компоненты рассеянного поля во всяком брусе $0 \leqslant x \leqslant d$; $-\infty \leqslant y \leqslant \leqslant +\infty$; $z_1 \leqslant z \leqslant z_2$ (z_1 и z_2 — любые конечные числа) стремится к нулю при $k_1 \to \infty$. Как будет видно из оценок, можно одновременно стремить к нулю и k_2, однако не слишком быстро. Вообще конечность энергии в бесконечном брусе является следствием существования поглощения ($k_2 > 0$).

§ 2. ПАРНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И НЕКОТОРЫЕ ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ОЦЕНКИ

Пусть $\tilde{\varphi}(\lambda)$ есть преобразование Фурье функции $\varphi(\eta)$, продолженной нулем за интервал $(-a,\ +a)$. Простое вычисление показывает, что

$$\frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\varphi}(\lambda) \frac{e^{i\lambda y} d\lambda}{\lambda^2 - k^2 + \dfrac{4m^2\pi^2}{d^2}} = \frac{1}{s_m} \int_{-a}^{+a} e^{-s_m|y-\eta|} \varphi(\eta)\, d\eta \tag{2.1}$$

и, следовательно,

$$E_z^{(1)}(x,\ y) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2\delta_m}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\varphi}(\lambda) \frac{e^{i\lambda y}}{\lambda^2 - k^2 + \dfrac{4m^2\pi^2}{d^2}} d\lambda \cos \frac{2m\pi x}{d}. \tag{2.2}$$

* Ветвь корня $\sqrt{z^2 + \dfrac{4m^2\pi^2}{d^2}}$ определяется разрезами, идущими от точек $\pm \dfrac{2m\pi i}{d}$ к $\pm i\infty$ соответственно, и значением в нуле, равным $\dfrac{2m\pi}{d}$. Для любого z $\operatorname{Re} \sqrt{z^2 + \dfrac{4m^2\pi^2}{d^2}} > 0$.

Пользуясь теоремой Хаусдорфа — Юнга (см. [3]), в силу которой

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left|\tilde{\varphi}(\lambda)\right|^q d\lambda \leqslant \frac{1}{(2\pi)^{\frac{q}{2}-1}} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p-1}} \left(p > 1;\ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right), \quad (2.3)$$

легко проверить перестановочность интегрирования и суммирования в (2.2). Действительно, если N достаточно велико, то

$$\left| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_N^{\infty} 2\delta_m \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\varphi}(\lambda) \frac{e^{i\lambda y} d\lambda}{\lambda^2 - k^2 + \frac{4m^2\pi^2}{d^2}} \cos\frac{2m\pi x}{d} \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_N^{\infty} \frac{2\delta_m}{\sqrt{2\pi}} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} |\tilde{\varphi}(\lambda)|^q d\lambda \right\}^{\frac{1}{q}} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\lambda}{\left|\lambda^2 - k^2 + \frac{4m^2\pi^2}{d^2}\right|^p} \right\}^{\frac{1}{p}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{4}{\sqrt{2\pi}\,(2\pi)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{q}}} \|\varphi\|_{L_p} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\lambda}{(\lambda^2+1)^p} \right\}^{\frac{1}{p}} \sum_N^{\infty} \frac{1}{\left(\frac{4m^2\pi^2}{d^2} - k_1^2\right)^{1-\frac{1}{2p}}} \to 0$$

при $N \to \infty$, так как $1 - \frac{1}{2p} > \frac{1}{2}$.

С другой стороны, поскольку на любом конечном промежутке $(-R, +R)$

$$\int_{-R}^{+R} |\tilde{\varphi}(\lambda)| \sum_N^{\infty} \frac{1}{\left|\lambda^2 - k^2 + \frac{4m^2\pi^2}{d^2}\right|} d\lambda = \sum_N^{\infty} \int_{-R}^{+R} |\tilde{\varphi}(\lambda)| \frac{d\lambda}{\left|\lambda^2 - k^2 + \frac{4m^2\pi^2}{d^2}\right|} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{q}}} \|\varphi\|_{L_p} \sum_N^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\lambda}{\left|\lambda^2 - k^2 + \frac{4m^2\pi^2}{d^2}\right|} \right\}^{\frac{1}{p}} \to 0$$

и правая часть от R не зависит, то, устремляя R к ∞, получим, что интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\tilde{\varphi}(\lambda)| \sum_N^{\infty} \frac{1}{\left|\lambda^2 - k^2 + \frac{4m^2\pi^2}{d^2}\right|} d\lambda$$

существует и стремится к нулю при $N \to \infty$, откуда сразу вытекает указанная перестановочность.

Из разложения

$$\frac{\operatorname{ch} tz}{\operatorname{sh} \pi z} = \frac{1}{\pi z} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2z \cos nt}{z^2 + n^2} \quad (-\pi \leqslant t \leqslant \pi), \qquad (2.4)$$

справедливого при любом комплексном z, получаем окончательное выражение рассеянного поля в виде

$$E_z^{(1)}(x, y) = \frac{d}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\varphi}(\lambda) \frac{e^{i\lambda y} \operatorname{ch}(d - 2x) \frac{\sqrt{\lambda^2 - k^2}}{2}}{\sqrt{\lambda^2 - k^2}\, \operatorname{sh}\frac{d}{2}\sqrt{\lambda^2 - k^2}} d\lambda^*. \qquad (2.5)$$

* Отметим, что подынтегральная функция в (2.5) и (2.6) однозначна. Поэтому из двух значений корня $\sqrt{\lambda^2 - k^2}$ мы всякий раз будем брать то, у которого вещественная часть положительна.

Заменяя в формуле (1.7) слагаемые левой части с помощью (2.1), приходим к парным интегральным уравнениям для $\tilde{\varphi}(\lambda)$:

$$\frac{d}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\tilde{\varphi}(\lambda)\frac{e^{i\lambda x}\operatorname{cth}\frac{d}{2}\sqrt{\lambda^2-k^2}}{\sqrt{\lambda^2-k^2}}\,d\lambda=-e^{-iky},\quad |y|<a, \tag{2.6}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\tilde{\varphi}(\lambda)e^{i\lambda y}\,d\lambda=0,\quad |y|>a.$$

Первое уравнение (2.6) получается и формальным предельным переходом под знаком интеграла в (2.5) при $x\to+0$ из (1.3).

Так как далее в (2.3) $q>2$, то

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{|\tilde{\varphi}(\lambda)|^2\,d\lambda}{|\sqrt{\lambda^2-k^2}|}\leqslant\left(\int_{-\infty}^{+\infty}|\tilde{\varphi}(\lambda)|^q d\lambda\right)^{\frac{2}{q}}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\lambda}{|\sqrt{\lambda^2-k^2}|^{\frac{q}{q-2}}}\right)^{\frac{q-2}{q}}<+\infty. \tag{2.7}$$

Отсюда следует, что $|\tilde{\varphi}(\lambda)|^2|\lambda^2-k^2|^{-\frac{1}{2}}\in L(-\infty,\ +\infty)$, а тем более $|\tilde{\varphi}(\lambda)||\lambda^2-k^2|^{-\frac{1}{2}}\in L_2(-\infty,\ +\infty)$. Наконец, поскольку при любом x из $(0,\ d)$ отношение

$$\frac{\left|\operatorname{ch}(d-2x)\frac{\sqrt{\lambda^2-k^2}}{2}\right|}{\left|\operatorname{sh}\frac{d}{2}\sqrt{\lambda^2-k^2}\right|} \tag{2.8}$$

ограничено на бесконечности, то

$$\frac{\tilde{\varphi}(\lambda)\operatorname{ch}(d-2x)\frac{\sqrt{\lambda^2-k^2}}{2}}{\sqrt{\lambda^2-k^2}\operatorname{sh}\frac{d}{2}\sqrt{\lambda^2-k^2}}\in L_2(-\infty,\ +\infty). \tag{2.9}$$

Поэтому из (2.5) найдем

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|E_z^{(1)}(x,\ y)|^2dy=d^2\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{|\tilde{\varphi}(\lambda)|^2\left|\operatorname{ch}(d-2x)\frac{\sqrt{\lambda^2-k^2}}{2}\right|^2}{|\lambda^2-k^2|\left|\operatorname{sh}\frac{d}{2}\sqrt{\lambda^2-k^2}\right|^2}\,d\lambda. \tag{2.10}$$

Полагая

$$\sqrt{\lambda^2-k^2}=\alpha+i\beta\quad(\alpha>0), \tag{2.11}$$

видим, что

$$\alpha^2=\frac{\lambda^2-k_1^2+k_2^2}{2}+\sqrt{\left(\frac{\lambda^2-k_1^2+k_2^2}{2}\right)^2+k_1^2k_2^2} \tag{2.12}$$

и

$$\beta=-\frac{k_1k_2}{\alpha}<0. \tag{2.13}$$

Легко убеждаемся, что

$$\alpha_{\min}=k_2. \tag{2.14}$$

Отметим следующие, необходимые в дальнейшем неравенства:

$$\left|\operatorname{cth}\frac{d}{2}\sqrt{\lambda^2-k^2}\right|=\frac{|e^{d\alpha}-e^{-d\alpha}-2i\sin d\beta|}{e^{d\alpha}+e^{-d\alpha}-2\cos d\beta}\geqslant\frac{e^{d\alpha}-e^{-d\alpha}}{e^{d\alpha}+e^{-d\alpha}+2}\geqslant\frac{1-e^{-2dk_2}}{4}, \tag{2.15}$$

$$\int_0^d \frac{\left|\operatorname{ch}(d-2x)\frac{\sqrt{\lambda^2-k^2}}{2}\right|^2}{\left|\operatorname{sh}\frac{d}{2}\sqrt{\lambda^2-k^2}\right|^2}dx = \frac{\frac{1}{\alpha}\left(e^{d\alpha}-e^{-d\alpha}\right)+\frac{2\sin d\beta}{\beta}}{e^{d\alpha}-2\cos d\beta+e^{-d\alpha}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2}{\alpha\left(1-e^{-dk_2}\right)}+\frac{2}{|\beta|\left(1-e^{-dk_2}\right)^2} < \frac{2(\alpha+|\beta|)}{\left(1-e^{-dk_2}\right)^2 k_1k_2} < \frac{2\sqrt{2}\,|\lambda^2-k^2|^{\frac{1}{2}}}{\left(1-e^{-dk_2}\right)^2 k_1k_2}. \quad (2.16)$$

Интегрируя (2. 10) по x от 0 до d и учитывая оценки (2. 16) и (2. 15) последовательно, будем иметь

$$\int_0^d\int_{-\infty}^{+\infty} |E_z^{(1)}(x,y)|^2 dx dy \leqslant \frac{2\sqrt{2}\,d^2}{\left(1-e^{-dk_2}\right)^2 k_1k_2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{|\tilde{\varphi}(\lambda)|^2 d\lambda}{|\sqrt{\lambda^2-k^2}|} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{8\sqrt{2}\,d^2}{\left(1-e^{-dk_2}\right)^2\left(1-e^{-2dk_2}\right)k_1k_2}\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\operatorname{cth}\frac{d}{2}\sqrt{\lambda^2-k^2}\right|\frac{|\tilde{\varphi}(\lambda)|^2 d\lambda}{|\sqrt{\lambda^2-k^2}|}. \quad (2.17)$$

Причины, по которым понадобилось в неравенстве (2. 17) ввести под знак интеграла гиперболический котангенс, станут ясными в § 3.

§ 3. ИССЛЕДОВАНИЕ ПАРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Обозначим через Δ интервал $(-a, +a)$ и через $L_2(\Delta)$ — совокупность всех суммируемых с квадратом функций, равных нулю вне Δ, а через $\tilde{L}_2(\Delta)$ — совокупность их преобразований Фурье. В $\tilde{L}_2(\Delta)$ введем скалярное произведение, положив

$$(\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}) = d\int_{-\infty}^{+\infty}\tilde{\varphi}(\lambda)\bar{\tilde{\psi}}(\lambda)\frac{\left|\operatorname{cth}\frac{d}{2}\sqrt{\lambda^2-k^2}\right|}{|\sqrt{\lambda^2-k^2}|}d\lambda, \quad (3.1)$$

и в соответствии с этим определим

$$\|\tilde{\varphi}\|^2 = d\int_{-\infty}^{+\infty}|\tilde{\varphi}(\lambda)|^2\frac{\left|\operatorname{cth}\frac{d}{2}\sqrt{\lambda^2-k^2}\right|}{|\sqrt{\lambda^2-k^2}|}d\lambda. \quad (3.2)$$

Замыкая совокупность $\tilde{L}_2(\Delta)$ по норме (3. 2), получим полное гильбертово пространство, обозначаемое ниже через $H(\Delta)$.

Лемма 1. Пространство $H(\Delta)$ совпадает с множеством всех решений уравнения

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\tilde{\varphi}(\lambda)e^{i\lambda y}d\lambda = 0, \quad |y| > a, \quad (3.3)$$

удовлетворяющих условию

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|\tilde{\varphi}(\lambda)|^2\frac{\left|\operatorname{cth}\frac{d}{2}\sqrt{\lambda^2-k^2}\right|}{|\sqrt{\lambda^2-k^2}|}d\lambda < +\infty. \quad (3.4)$$

Доказательство получается так же, как в [1].

Введем в рассмотрение множество $T(\Delta)$ функций $f(y)$, суммируемых на Δ и допускающих такое продолжение $\hat{f}(y)$ на всю ось, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left|\tilde{\hat{f}}(\lambda)\right|^2 \left|\sqrt{\lambda^2-k^2}\right| \left|\operatorname{th}\frac{d}{2}\sqrt{\lambda^2-k^2}\right| d\lambda < +\infty. \tag{3.5}$$

Полагая

$$\|f\|^2_{T(\Delta)} = \inf \frac{1}{d}\int_{-\infty}^{+\infty} \left|\tilde{\hat{f}}(\lambda)\right|^2 \left|\sqrt{\lambda^2-k^2}\right| \left|\operatorname{th}\frac{d}{2}\sqrt{\lambda^2-k^2}\right| d\lambda, \tag{3.6}$$

где нижняя грань берется по всем допустимым продолжениям $\hat{f}(y)$ функции $f(y)$, получаем полное линейное нормированное пространство.

Лемма 2. *Линейный оператор U, определенный на элементах $\tilde{\varphi}(\lambda)$ пространства $H(\Delta)$ формулой*

$$U\tilde{\varphi} = \frac{d}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\varphi}(\lambda)\, \frac{\left|\operatorname{cth}\frac{d}{2}\sqrt{\lambda^2-k^2}\right|}{\left|\sqrt{\lambda^2-k^2}\right|}\, e^{i\lambda y}\, d\lambda, \tag{3.7}$$

взаимнооднозначно и изометрично отображает пространство $H(\Delta)$ на пространство $T(\Delta)$.

Доказательство получается, как в [1].

Лемма 3. *Всякий функционал $\Phi(f)$ в пространстве $T(\Delta)$ задается формулой*

$$\Phi(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\hat{f}}(\lambda)\, \overline{\tilde{\psi}(\lambda)}\, d\lambda, \tag{3.8}$$

где $\tilde{\hat{f}}(\lambda)$ — преобразование Фурье какого-либо продолжения функции $f \in T(\Delta)$, а $\tilde{\psi}(\lambda) \in H(\Delta)$. *Кроме того,*

$$\|\Phi\| \leqslant \|\psi\|_{H(\Delta)}. \tag{3.9}$$

Доказательство получается, как в [1].

Лемма 4. *Линейный оператор V, определенный на всех функциях $\tilde{\varphi}(\lambda)$ пространства $H(\Delta)$ формулой*

$$V\tilde{\varphi} = \frac{d}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\tilde{\varphi}(\lambda)}{\sqrt{\lambda^2-k^2}} \operatorname{cth}\frac{d}{2}\sqrt{\lambda^2-k^2}\, e^{i\lambda y}\, d\lambda, \tag{3.10}$$

отображает пространство $H(\Delta)$ на все пространство $T(\Delta)$. Отображение взаимнооднозначно, и кроме того

$$\|V\| \leqslant 1, \quad \|V^{-1}\| \leqslant \sqrt{2}\left(1+\frac{12}{k_2^3 d^3}\right). \tag{3.11}$$

Доказательство этой леммы отличается от соответствующего в [1]. Проводимое по такой же схеме, оно нуждается в видоизменении при оценке нормы обратного оператора. Мы изложим его полностью. Включение $V(H(\Delta)) \subseteq T(\Delta)$ и оценка $\|V\| \leqslant 1$ устанавливаются, как в лемме 2. Пусть $\tilde{\varphi}_0$ — произвольный элемент из $H(\Delta)$ и

$$V\tilde{\varphi}_0 = f_0.$$

Зададим линейный функционал $\Phi_0(f)$ на пространстве $T(\Delta)$ с помощью формулы

$$\Phi_0(f)=\int_{-\infty}^{+\infty}\tilde{\hat{f}}(\lambda)\overline{\tilde{\varphi}_0(\lambda)}\,d\lambda. \tag{3.12}$$

Так как значение интеграла (3.12) не зависит от способа допустимого продолжения функции $f(y)$ за интервал Δ, то при вычислении этого функционала на элементе $f=f_0$ в качестве $\tilde{\hat{f}}_0(\lambda)$ можно, например, взять функцию

$$\tilde{\hat{f}}_0(\lambda)=\frac{d\,\tilde{\varphi}_0(\lambda)\operatorname{cth}\frac{d}{2}\sqrt{\lambda^2-k^2}}{\sqrt{\lambda^2-k^2}}. \tag{3.13}$$

Поэтому

$$\Phi_0(f_0)=d\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\left|\tilde{\varphi}_0(\lambda)\right|^2\operatorname{cth}\frac{d}{2}\sqrt{\lambda^2-k^2}}{\sqrt{\lambda^2-k^2}}\,d\lambda. \tag{3.14}$$

Тогда в силу (3.9)

$$\left|d\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\left|\tilde{\varphi}_0(\lambda)\right|^2\operatorname{cth}\frac{d}{2}\sqrt{\lambda^2-k^2}}{\sqrt{\lambda^2-k^2}}\,d\lambda\right|\leqslant\|\Phi_0\|\,\|f_0\|_{T(\Delta)}\leqslant\left\|\tilde{\varphi}_0\right\|\|f_0\|_{T(\Delta)}. \tag{3.15}$$

Из (2.11), (2.13) и (2.14) следует

$$\operatorname{Re}\frac{d\operatorname{cth}\frac{d}{2}\sqrt{\lambda^2-k^2}}{\sqrt{\lambda^2-k^2}}=\frac{d^2}{4}\,\frac{d\alpha\left(e^{d\alpha}-e^{-d\alpha}\right)-2d\,\beta\sin d\beta}{\left|e^{\frac{d\alpha+id\beta}{2}}-e^{-\frac{d\alpha+id\beta}{2}}\right|^2\left|\frac{d\alpha}{2}+i\frac{d\beta}{2}\right|^2}, \tag{3.16}$$

$$\operatorname{Im}\frac{d\operatorname{cth}\frac{d}{2}\sqrt{\lambda^2-k^2}}{\sqrt{\lambda^2-k^2}}=-\frac{d^2}{4}\,\frac{\beta d\left(e^{e\alpha}-e^{-d\alpha}\right)+2d\,\alpha\sin d\beta}{\left|e^{\frac{d\alpha+id\beta}{2}}-e^{-\frac{d\alpha+id\beta}{2}}\right|^2\left|\frac{d\alpha}{2}+i\frac{d\beta}{2}\right|^2}\geqslant$$

$$\geqslant\frac{d^2}{4}\,\frac{-\beta d\left(2d\alpha+\frac{2}{3!}d^3\alpha^3\right)+2d^2\alpha\beta}{\left|e^{\frac{d\alpha+id\beta}{2}}-e^{-\frac{d\alpha+id\beta}{2}}\right|^2\left|\frac{d\alpha}{2}+i\frac{d\beta}{2}\right|^2}\geqslant$$

$$\geqslant\frac{-\beta d^6k_2^3}{12\left|e^{\frac{d\alpha+id\beta}{2}}-e^{-\frac{d\alpha+id\beta}{2}}\right|^2\left|\frac{d\alpha}{2}+i\frac{d\beta}{2}\right|^2}>0. \tag{3.17}$$

Формулы (3.16) и (3.17) теперь дают

$$\left|\operatorname{Re}\frac{d\operatorname{cth}\frac{d}{2}\sqrt{\lambda^2-k^2}}{\sqrt{\lambda^2-k^2}}\right|\leqslant\operatorname{Re}\frac{d\operatorname{cth}\frac{d}{2}\sqrt{\lambda^2-k^2}}{\sqrt{\lambda^2-k^2}}-$$

$$-\frac{d^3\beta}{\left|e^{\frac{d\alpha+id\beta}{2}}-e^{-\frac{d\alpha+id\beta}{2}}\right|^2\left|\frac{d\alpha}{2}+i\frac{d}{2}\right|^2}\leqslant$$

$$\leqslant\operatorname{Re}\frac{d\operatorname{cth}\frac{d}{2}\sqrt{\lambda^2-k^2}}{\sqrt{\lambda^2-k^2}}+\frac{12}{d^3k_2^3}\operatorname{Im}\frac{d\operatorname{cth}\frac{d}{2}\sqrt{\lambda^2-k^2}}{\sqrt{\lambda^2-k^2}}. \tag{3.18}$$

Далее согласно (3.2)

$$\left\|\tilde{\varphi}_0\right\|^2_{H(\Delta)} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left|\tilde{\varphi}_0(\lambda)\right|^2 \frac{\left|d \operatorname{cth} \frac{d}{2}\sqrt{\lambda^2 - k^2}\right|}{\sqrt{\lambda^2 - k^2}}\, d\lambda \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left|\tilde{\varphi}_0(\lambda)\right|^2 \left(\left|\operatorname{Re} \frac{d \operatorname{cth} \frac{d}{2}\sqrt{\lambda^2 - k^2}}{\sqrt{\lambda^2 - k^2}}\right| + \left|\operatorname{Im} \frac{d \operatorname{cth} \frac{d}{2}\sqrt{\lambda^2 - k^2}}{\sqrt{\lambda^2 - k^2}}\right|\right) d\lambda \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left|\tilde{\varphi}_0(\lambda)\right|^2 \operatorname{Re} \frac{d \operatorname{cth} \frac{d}{2}\sqrt{\lambda^2 - k^2}}{\sqrt{\lambda^2 - k^2}}\, d\lambda + \left(1 + \frac{12}{d^3 k_2^3}\right) \times$$

$$\times \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left|\tilde{\varphi}_0(\lambda)\right|^2 \operatorname{Im} \frac{d \operatorname{cth} \frac{d}{2}\sqrt{\lambda^2 - k^2}}{\sqrt{\lambda^2 - k^2}}\, d\lambda =$$

$$= \operatorname{Re} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left|\tilde{\varphi}_0(\lambda)\right|^2 \frac{d \operatorname{cth} \frac{d}{2}\sqrt{\lambda^2 - k^2}}{\sqrt{\lambda^2 - k^2}}\, d\lambda +$$

$$+ \left(1 + \frac{12}{d^3 k_2^3}\right) \operatorname{Im} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left|\tilde{\varphi}_0(\lambda)\right|^2 \frac{d \operatorname{cth} \frac{d}{2}\sqrt{\lambda^2 - k^2}}{\sqrt{\lambda^2 - k^2}}\, d\lambda \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{2}\left(1 + \frac{12}{d^3 k_2^3}\right) \left| \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left|\tilde{\varphi}_0(\lambda)\right|^2 \frac{d \operatorname{cth} \frac{d}{2}\sqrt{\lambda^2 - k^2}}{\sqrt{\lambda^2 - k^2}}\, d\lambda \right|. \tag{3.19}$$

Таким образом, оказывается (см. (3.14) и (3.15))

$$\left\|\tilde{\varphi}_0\right\|^2_{H(\Delta)} \leqslant \sqrt{2}\left(1 + \frac{12}{d^3 k_2^3}\right) \left|\Phi_0(f_0)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{2}\left(1 + \frac{12}{d^3 k_2^3}\right) \left\|\tilde{\varphi}_0\right\|_{H(\Delta)} \left\|f_0\right\|_{T(\Delta)}. \tag{3.20}$$

И окончательно

$$\left\|\tilde{\varphi}_0\right\|_{H(\Delta)} \leqslant \sqrt{2}\left(1 + \frac{12}{d^3 k_2^3}\right) \left\|V\tilde{\varphi}_0\right\|_{T(\Delta)}. \tag{3.21}$$

Как показывает оценка (3.21), множество элементов пространства $T(\Delta)$, имеющих вид $V\tilde{\varphi}$, где $\tilde{\varphi} \in H(\Delta)$, замкнуто в $T(\Delta)$, и чтобы показать, что оно совпадает со всем пространством $T(\Delta)$, достаточно проверить, что всякий линейный функционал, действующий в $T(\Delta)$ и равный нулю на $V(H(\Delta))$, равен нулю тождественно. Поскольку такой функционал порождается функцией $\tilde{\psi}(\lambda) \in H(\Delta)$ по формуле (3.8), то из обращения его в нуль на $V(H(\Delta))$ вытекает

$$\Phi\left(V\tilde{\varphi}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\varphi}(\lambda) \frac{d \operatorname{cth} \frac{d}{2}\sqrt{\lambda^2 - k^2}}{\sqrt{\lambda^2 - k^2}} \bar{\tilde{\psi}}(\lambda)\, d\lambda = 0 \tag{3.22}$$

для всякой $\tilde{\varphi}(\lambda) \in H(\Delta)$. Возьмем, в частности, $\tilde{\varphi}(\lambda) = \tilde{\psi}(\lambda)$.

Тогда получится

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left|\tilde{\varphi}(\lambda)\right|^2 \frac{d \operatorname{cth} \frac{d}{2} \sqrt{\lambda^2-k^2}}{\sqrt{\lambda^2-k^2}} d\lambda = 0, \tag{3.23}$$

а следовательно, и

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left|\tilde{\varphi}(\lambda)\right|^2 \operatorname{Im} \frac{d \operatorname{cth} \frac{d}{2} \sqrt{\lambda^2-k^2}}{\sqrt{\lambda^2-k^2}} d\lambda = 0. \tag{3.24}$$

На основании (3.17) $\tilde{\varphi}=0$ и $\Phi(f)\equiv 0$. Тем самым установлено, что $V(H(\Delta)) = T(\Delta)$. Из (3.21) видно также, что отображение $H(\Delta)$ на $T(\Delta)$, даваемое оператором V, взаимнооднозначно, а, следовательно, обратный оператор существует и справедлива оценка

$$\|V^{-1}\| \leqslant \sqrt{2}\left(1+\frac{12}{d^3 k_2^3}\right). \tag{3.25}$$

Применяя последний результат к парным интегральным уравнениям типа (2.6), сформулируем теорему.

Теорема. *Система парных интегральных уравнений*

$$\frac{d}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\varphi}(\lambda) \frac{e^{i\lambda y} \operatorname{cth} \frac{d}{2} \sqrt{\lambda^2-k^2}}{\sqrt{\lambda^2-k^2}} d\lambda = f(y),\ |y|<a, \tag{3.26}$$

$$\frac{d}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\varphi}(\lambda) e^{i\lambda y} d\lambda = 0, \quad |y|<a,$$

где $k=k_1+ik_2$ $(k_1>0,\ k_2>0)$ и $f(y)\in T(\Delta)$, *имеет в пространстве* $H(\Delta)$ *единственное решение и при этом*

$$\left\|\tilde{\varphi}\right\|_{H(\Delta)} \leqslant \sqrt{2}\left(1+\frac{12}{d^3 k_2^3}\right)\|f\|_{T(\Delta)}. \tag{3.27}$$

Разрешимость системы при $f(y) = -e^{-iky}$ следует из [2], так как там доказана разрешимость уравнения (1.7), из которого, как это было видно в §2, система (2.6) вытекает*. Существенную роль, однако, играет оценка (3.27), которая в следующем параграфе приводит к требуемому результату.

§ 4. СЛУЧАЙ БОЛЬШИХ k

Неравенство (2.17) в обозначениях § 3 переписывается в виде

$$\int_0^d \int_{-\infty}^{+\infty} |E_z^{(1)}(x, y)|^2 dxdy \leqslant \frac{8\sqrt{2}\, d \left\|\tilde{\varphi}\right\|^2_{H(\Delta)}}{(1-e^{-dk_2})^2 (1-e^{-2dk_2}) k_1 k_2}. \tag{4.1}$$

Для того, чтобы воспользоваться оценкой (3.27), нужно продолжить функцию $f(y) = -e^{-iky}$ за пределы интервала $(-a, +a)$ так, чтобы удовлетворялось условие (3.5). Преобразование Фурье указанного про-

* Тот факт, что ранее найденное решение системы (2.6) входит в $H(\Delta)$, следует из оценки (2.7) и ограниченности снизу функции $\left|\operatorname{cth} \frac{d}{2}\sqrt{\lambda^2-k^2}\right|$.

должения должно достаточно быстро убывать на бесконечности. Возьмем $h=\frac{1}{k_1}$ и положим

$$\tilde{\hat{f}}(y)\begin{cases} 0, & -\infty<y<-a-h \\ \frac{e^{ika}}{h}y+e^{ika}+a\frac{e^{ika}}{h}, & -a-h<y<-a \\ e^{-iky}, & -a\leqslant y\leqslant a \\ -\frac{e^{-ika}}{h}y+e^{-ika}+\frac{ae^{-ika}}{h}, & a\leqslant y<a+h \\ 0, & a+h\leqslant y<+\infty \end{cases} \tag{4.2}$$

$$\tilde{\hat{f}}(\lambda)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left\{\frac{2\sin(k+\lambda)a}{k+\lambda}\left(-\frac{k}{\lambda}+\frac{(k+\lambda)\sin\lambda h}{\lambda^2 h}\right)+\frac{4}{\lambda^2 h}\cos(k+\lambda)a\sin^2\frac{\lambda h}{2}\right\}. \tag{4.3}$$

Согласно определению нормы в пространстве $T(\Delta)$ (3. 6)

$$\|f\|^2_{T(\Delta)}\leqslant\frac{1}{d}\int_{-\infty}^{+\infty}|\tilde{\hat{f}}(\lambda)|^2\left|\sqrt{\lambda^2-k^2}\right|\left|\operatorname{th}\frac{d}{2}\sqrt{\lambda^2-k^2}\right|d\lambda. \tag{4.4}$$

В силу (2. 15) можем написать

$$\|f\|^2_{T(\Delta)}\leqslant\frac{4}{d\left(1-e^{-2dk_2}\right)}\int_{-\infty}^{+\infty}|\tilde{\hat{f}}(\lambda)|^2\left|\sqrt{\lambda^2-k^2}\right|d\lambda. \tag{4.5}$$

Подставляя (4. 3) в (4. 5) и усиливая неравенство, находим далее

$$\|f\|^2_{T(\Delta)}\leqslant\frac{16}{\pi d\left(1-e^{-2dk_2}\right)}\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\frac{\sin(k+\lambda)a}{k+\lambda}\left(-\frac{k}{\lambda}+\frac{(k+\lambda)\sin\lambda h}{\lambda^2 h}\right)\right|^2\times$$
$$\times\left|\sqrt{\lambda^2-k^2}\right|d\lambda+\frac{64}{\pi d\left(1-e^{-2dk_2}\right)}\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\frac{\cos(k+\lambda)a\sin^2\frac{\lambda h}{2}}{\lambda^2 h}\right|^2\left|\sqrt{\lambda^2-k^2}\right|d\lambda. \tag{4.6}$$

Обозначив интегралы в правой части (4. 6) через J_1 и J_2 соответственно, оценим каждый из них:

$$J_2\leqslant k_1^2\operatorname{ch}^2 k_2 a\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin^4\frac{\lambda h}{2}}{\lambda^4}\left|\sqrt{\lambda^2-k^2}\right|d\lambda=\operatorname{ch}^2 k_2 a\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin^4\frac{t}{2}}{t^4}\sqrt{\left|t^2-\frac{k^2}{k_1^2}\right|}\,dt, \tag{4.7}$$

$$J_1=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\left|\sin k_1\left(t+\frac{k}{k_1}\right)a\right|^2}{\left|t+\frac{k}{k_1}\right|^{\frac{3}{2}}}\left|-\frac{k}{k_1 t}+\frac{\left(t+\frac{k}{k_1}\right)\sin t}{t^2}\right|^2\sqrt{\left|t-\frac{k}{k_1}\right|}\,dt. \tag{4.8}$$

Поскольку

$$\frac{\left|\sin k_1\left(t+\frac{k}{k_1}\right)a\right|}{\left|t+\frac{k}{k_1}\right|}\leqslant\frac{|\sin k_1(t+1)a|}{|t+1|}\operatorname{ch}k_2 a+k_1 a\left|\frac{\sin ik_2 a}{ik_2 a}\right|\leqslant$$
$$\leqslant k_1 a\left(1+\frac{1}{ak_2}\right)\operatorname{ch}k_2 a, \tag{4.9}$$

то, разбивая дробь под интегралом в (4.8) на множители

$$\frac{\left|\sin k_1\left(t+\frac{k}{k_1}\right)a\right|^{\frac{1}{2}+\varepsilon}}{\left|t+\frac{k}{k_1}\right|^{\frac{1}{2}+\varepsilon}} \quad \text{и} \quad \frac{\left|\sin k_1\left(t+\frac{k}{k_1}\right)a\right|^{\frac{3}{2}-\varepsilon}}{\left|t+\frac{k}{k_1}\right|^{1-\varepsilon}},$$

оценим первый из них, пользуясь (4.9), а второй заменим величиной

$$2^{\frac{3}{2}-\varepsilon}(\operatorname{ch} k_2 a)^{\frac{3}{2}-\varepsilon}\frac{1}{\left|t+\frac{k}{k_1}\right|^{1-\varepsilon}}.$$

Тогда получим

$$J_1 \leqslant (k_1 a)^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\left(1+\frac{1}{ak_2}\right)^{\frac{1}{2}+\varepsilon} 2^{\frac{3}{2}}\operatorname{ch}^2 k_2 a \times$$

$$\times \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sqrt{\left|t-\frac{k}{k_1}\right|}}{\left|t+\frac{k}{k_1}\right|^{1-\varepsilon}}\left|-\frac{k}{k_1 t}+\frac{\left(t+\frac{k}{k_1}\right)\sin t}{t^2}\right|^2 dt. \qquad (4.10)$$

Наконец, отметим, что интегральные множители в правых частях (4.7) и (4.10) стремятся к пределам

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin^4\frac{t}{2}}{t^4}\sqrt{|t^2-1|}\,dt \quad \text{и} \quad \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sqrt{|t-1|}}{|t+1|^{1-\varepsilon}}\left|-\frac{1}{t}+\frac{(t+1)\sin t}{t^2}\right|^2 dt \qquad (4.11)$$

соответственно равномерно относительно k_2 в любой конечной области.

Возвращаясь к (4.6) с использованием (4.7) и (4.10), получим

$$\|f\|^2_{T(\Delta)} \leqslant \frac{16\operatorname{ch}^2 k_2 aC}{\pi d\left(1-e^{-2dk_2}\right)}\left(2^{\frac{3}{2}}\left(1+\frac{1}{ak_2}\right)^{\frac{1}{2}+\varepsilon}(k_1 a)^{\frac{1}{2}+\varepsilon}+4\right), \qquad (4.12)$$

где через C обозначен бóльший из интегралов (4.11).

Теперь из (3.27) и (4.11) заключаем:

$$\int\limits_0^d\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|E_z^{(1)}(x,y)|^2\,dxdy \leqslant$$

$$\leqslant \frac{256\sqrt{2}C\operatorname{ch}^2 k_2 a\left(1+\frac{12}{d^3k_2^3}\right)^2\left(2^{\frac{3}{2}}\left(1+\frac{1}{ak_2}\right)^{\frac{1}{2}+\varepsilon}(k_1 a)^{\frac{1}{2}+\varepsilon}+4\right)}{\pi\left(1-e^{-dk_2}\right)^4 k_1 k_2}.$$

Так как ε можно считать сколь угодно малым (от него зависит только константа C), то отсюда видно, что при фиксированном или даже достаточно медленно убывающем k_2 электрическое поле, рассеянное решеткой, становится исчезающе малым.

Полное оправдание геометрической оптики требует также оценки энергии магнитных компонент, которой мы, однако, в данной работе заниматься не будем.

Автор считает своим приятным долгом поблагодарить В. А. Марченко и К. В. Маслова за внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. А. Марченко и К. В. Маслов. Коротковолновое приближение в задаче о дифракции на плоском экране. Сб. «Теория функций, функциональный анализ и их приложения», вып. 3. Изд-во ХГУ, Харьков, 1966.

2. Г. Н. Гестрин. О дифракции плоской электромагнитной волны на гребенчатой структуре. Зап. мех.-матем. ф-та и ХМО, т. 34, 1969.

3. Е. Титчмарш. Введение в теорию интегралов Фурье. Гостехиздат, 1948.

Поступила 1 декабря 1968 г.