III.

ТЕОРІЯ ДВИЖЕНІЯ ЖИДКИХЪ ТѢЛЪ.

Николая Архангельскаго.

ГЛАВА I.

Основанія Теоріи.

Опытъ показываетъ, что давленіе отъ жидкаго вещества, находящагося въ покоѣ, на стѣны сосуда, въ которомъ оно содержится, есть таково, что ежели на одномъ горизонтальномъ сѣченіи поверхности сосуда сдѣлаются отверстія, величиною равныя; то жидкое вещество начнетъ вытекать изъ оныхъ съ равною скоростію. Естьли на оное вещество будетъ дѣйствовать какая ни есть внѣшняя сила посредствомъ поршня, закрывающаго основаніемъ своимъ всю открытую поверхность вещества; то истеченіе изъ всѣхъ оныхъ отверстій такъ же будетъ происходить съ одинакою скоростію; и что бы запереть оныя, надобно для всѣхъ ихъ употребить одинакую силу, равную силѣ поршня. Причина, по которой истеченіе изъ равныхъ отверстій сдѣланныхъ на разныхъ горизонтальныхъ сѣченіяхъ поверхности сосуда не происходитъ съ одинакою скоростію, заключается въ тяжести частицъ. Нижнія частицы обременены будучи верхними, тѣмъ большею силою побуждаются, чѣмъ ближе находятся ко дну сосуда. Безъ тяжести, и безъ всякой другой силы, жидкія частицы не производили бы другъ на друга никакого давленія, и отъ внѣшней силы, дѣйствующей на поршень, давленіе разпространялося бы по всему жидкому составу и по всѣмъ направленіямъ одинаково, такъ, что гдѣ бы мы ни вообразили пространство равное основанію поршня, внутри ли жидкаго тѣла, или на внутренней поверхности сосуда, сіе пространство выдерживало бы давленіе равное давленію поршня, то есть, чтобы запереть открытую часть поверхности сосуда посредствомъ другаго поршня, то надобно употребить силу равную силѣ перваго поршня. Естьли бы сіе второе отверстіе было больше или меньше перваго, то бы и сила втораго поршня должна быть въ томъ же отношеніи больше или меньше силы перваго поршня.

Но для умозрѣнія ничто не возбраняетъ не принимать тяжести и подобныхъ ей силъ, такъ что равенство повсемѣстнаго давленія можно считать свойствомъ жидкихъ тѣлъ. Сіе свойство не токмо всѣ жидкія тѣла имѣютъ, но имъ однимъ оно и прилично; почему естьли въ какомъ тѣлѣ сіе свойство замѣчается, то оно по справедливости къ жидкимъ тѣламъ причисляется, и на противъ, ежели какое тѣло сего свойства не оказываетъ, то его жидкимъ считать не можно. Посему песокъ, муку и всякую тонкую пыль, въ которыхъ оное свойство не усматривается, жидкими тѣлами назвать не можно. Изъ сего слѣдуетъ, что жидкое вещество нельзя почитать за собраніе безчисленныхъ малѣйшихъ твердыхъ частицъ, хотя бы имъ придана была совершенная гладкость, и даже внутреннее сокровенное движеніе, какое отъ теплоты происходящимъ полагается. Ибо хотя изъ опытовъ извѣстно, что тончайшая мраморная пыль, поставленная въ сосудѣ на огонь, представляется жидкимъ веществомъ; однако можно сомнѣваться, разпространяется ли въ ней давленіе равно по всѣмъ направленіямъ.

Кромѣ сего, въ свойствѣ равнаго давленія заключаются всѣ тѣ принадлежности жидкихъ тѣлъ, которыя имъ обыкновенно приписуются, какъ то: чрезвычайная малость частицъ, недостатокъ взаимнаго сцѣпленія и проч.; ибо естьли бы жидкія частицы не были весьма малы и безъ междуусобной связи; то бы наше свойство не могло имѣть мѣста. Наконецъ изъ сего свойства всѣ начала, какъ движенія такъ и равновѣсія жидкихъ тѣлъ, весьма щастливо производятся, и всякое вещество симъ свойствомъ одаренное законамъ на оныхъ началахъ утвержденнымъ, какъ въ равновѣсіи такъ и въ движеніи, необходимо послѣдуетъ.

Утверждаяся на семъ, Л. Ейлеръ заключилъ, что истинное естество и сущность жидкихъ тѣлъ въ свойствѣ равнаго давленія состоять должно.

За мѣру давленія p на какую нибудь поверхность a берется вѣсъ столба, изъ извѣстнаго вещества, имѣющаго основаніе $= a$

и извѣстную высоту h, такъ что мѣра силы p есть толщина ah; мѣра давленія на поверхность b такъ же будетъ bh, и мѣра силы давленія на поверхность $= 1$ есть h высота онаго столба.

Притомъ давленіе всегда произходитъ по направленію перпендикулярному къ поверхности; кто въ семъ сомнѣвается, тотъ пусть косвенное давленіе разложитъ на два, изъ коихъ бы одно простиралося по направленію поверхности, а другое было перпендикулярно къ оной; первое не будетъ производить никакого дѣйствія на поверхность и одно только второе будетъ на оную дѣйствовать.

Весьма удивительно должно быть то, что отъ одной силы, какъ бы она мала ни была, могутъ раждаться безчисленныя новыя силы неопредѣленно великія, которыя умножаются съ увеличеніемъ поверхности сосуда; притомъ сіи силы могутъ оставаться таковыми же, хотя сила дѣйствующая на поршень будетъ уменьшаться даже до безконечности, для сего нужно, что бы основаніе поршня въ томъ же отношеніи уменьшалося: ибо какое дѣйствіе производитъ сила p на поверхность a, такое же дѣйствіе и сила $\frac{1}{1000}$ p производитъ на поверхность $\frac{1}{1000}$ a; и вообще сила np на основаніе na таковое же производитъ дѣйствіе, какое и сила p на основаніе a.

Замѣтить надлежитъ, что есть ли къ силѣ дѣйствующей на поршень придадимъ другую силу ей равную, и заставимъ сіи двѣ силы вмѣстѣ дѣйствовать; то отъ нихъ произойдетъ давленіе вдвое большее нежели отъ одной; но естьли вторую силу заставимъ дѣйствовать въ тоже время на второй поршень равнаго основанія; то чрезъ такое дѣйствіе давленіе ни мало неизмѣнится, то есть будетъ таково же каково отъ дѣйствія одного поршня. Ибо въ послѣднемъ случаѣ вторая сила употребляется на то, чтобы первую удержать въ равновѣсіи.

Жидкія тѣла раздѣляются на два вида: однѣ изъ нихъ такія, которыя никакою внѣшнею силою сжать не можно такъ, чтобы онѣ въ объемѣ своемъ чувствительно уменьшилися; и называются *несжимающимися*; таковы суть вода и другія такъ называемыя капельныя жидкія тѣла (liquida); другія же такого свойства, что чѣмъ большею силою сжимаются, тѣмъ меньшее занимаютъ пространство, пока не придутъ въ равновѣсіе; когда же сжимающая сила начнетъ уменьшаться, тогда онѣ стремятся занимать большее пространство, пока не придутъ въ равновѣсіе; тѣла имѣющія такое свойство называются *сжимающимися* и *упругими*; таковы суть воздухъ и всѣ воздухообразныя вещества.

Въ первыхъ слѣдовательно густота при всякомъ давленіи есть одинакова, даже хотя бы онаго совсѣмъ не было; въ послѣднихъ же каждому давленію соотвѣтствуетъ извѣстная степень густоты, и обратно каждая густота извѣстную сжимающую силу предполагаетъ. Хотя же густота отъ измѣненія сжимающей силы и измѣняется, однако должны быть предѣлы, при которыхъ густота болѣе не увеличивается или не уменьшается. Ибо нельзя положить, что когда сжимающая сила изчезнетъ, тогда изчезнетъ и густота воздуха, такъ чтобы малѣйшая его частица разширилася по безконечному пространству. Равнымъ образомъ нельзя принять, что отъ безконечной силы и густота сдѣлается безконечно великою, такъ что все количество воздуха, какъ бы оно велико ни было приведется въ изчезающее пространство. Посему должна быть и наименьшая и наибольшая густота воздуха, и обѣ должны имѣть опредѣленныя величины. И такъ естьли наименьшую густоту означимъ чрезъ b, а наибольшую чрезъ c; какую ниесть среднюю густоту чрезъ x и соотвѣтствующее оной давленіе чрезъ y; то между прочими сія формула $yy = nn\frac{(x-b)^3}{c-x}$ или $y = n\,(x-b)\sqrt{\left(\frac{x-b}{c-x}\right)}$ онымъ условіямъ удовлетворятъ будетъ; ибо при $x=b$ выходитъ $y=o$; а при $x=c$, дѣлается $y=\infty$; далѣе же сего для y выходитъ величина мнимая.

Сію формулу и къ водѣ примѣнить можно, ибо когда положится въ ней $b=c=x$; то выйдетъ $y=\frac{o}{o}$ величина неопредѣленная, то есть давленіе можетъ быть какое угодно, между тѣмъ какъ густота будетъ постоянно таже. И такъ вода и воздухъ разнятся между собою только тѣмъ, что въ воздухѣ наименьшая и наибольшая густота, какую онъ имѣть можетъ, между собою весьма различны; въ водѣ же онѣ одинаковы. Посему жидкое тѣло тѣмъ ближе подходитъ къ водѣ, чѣмъ менѣе бываетъ разность между наименьшею и наибольшею его густотою. Въ семъ разсужденiи о густотѣ разумѣть должно тѣла однородныя, то есть такiя, которыя чрезъ все пространство ими занимаемое имѣютъ одинакую густоту; естьли тѣло состоитъ изъ разныхъ веществъ, то къ каждой части особенно оное разсужденiе прилагать должно. Въ однородныхъ тѣлахъ густота обратно пропорцiональна обьему; посему въ нихъ о наименьшей густотѣ заключать должно по тому обьему, въ которомъ они содержатся безъ всякаго дѣйствiя силъ; о наибольшей же по наименьшему пространству, въ которое ихъ безконечною силою вмѣстить можно.

Достойно замѣчанiя, что когда поршень, запирающiй въ сосудѣ жидкое вещество, во время дѣйствiя на него силы вдругъ запаянъ будетъ и сила дѣйствовать перестанетъ; тогда, естьли запертое вещество есть упругое, давленiе на стѣны сосуда будетъ таково же, какъ и при самомъ дѣйствiи силы, когда поршень не былъ запаянъ; естьли же оное вещество есть несжимающееся; то по запаянiи поршня никакого давленiя на стѣны сосуда произходить не будетъ. Причиною такого различiя должно полагать упругость.

Изъ опыта извѣстно, что всѣ жидкiя тѣла отъ теплоты разширяются, а отъ холода сжимаются, естьли побуждающія силы тому не препятствуютъ. Въ предъидущемъ разсужденіи мы не принимали различія теплоты. Отъ увеличенія оной при той же густотѣ давленіе увеличивается, и при томъ же давленіи густота уменьшается; противное тому происходитъ отъ уменьшенія теплоты. Здѣсь вмѣсто давленія можно бы принять упругость; но чтобы не умножать понятій, мы удержимъ давленіе, чрезъ что тѣже начала могутъ принадлежать какъ упругимъ такъ и неупругимъ тѣламъ. И такъ поелику давленіе упругихъ тѣлъ зависитъ какъ отъ густоты такъ и отъ теплоты, то оное какъ функцію двухъ измѣняемыхъ величинъ разсматривать должно, и притомъ такую, которая отъ увеличенія каждой изъ нихъ увеличивается, а съ уменьшеніемъ каждой изъ нихъ уменьшается. Естьли означимъ давленіе чрезъ y, густоту чрезъ x, и теплоту чрезъ z; то оному условію можетъ удовлетворять уравненіе:

$$y = n(xz - A)\sqrt{\left(\frac{xz - A}{B - xz}\right)},$$

въ которомъ n, A, B суть постоянныя количества, и $B > A$. Когда при извѣстной теплотѣ z, будетъ густота $x = \frac{A}{z}$; тогда давленіе изчезнетъ, и оная густота будетъ наименьшая, какая только при извѣстной теплотѣ быть можетъ; когда же при оной теплотѣ густота будетъ $x = \frac{B}{z}$; тогда давленіе выйдетъ безконечное, и слѣдственно сія густота будетъ наибольшая. Оная формула такъ же показываетъ, что когда густота будетъ измѣняться обратно пропорціонально теплотѣ и xz будетъ постоянное, среднее между предѣлами A и B; тогда давленіе будетъ одинаково, что не противно и опыту. Естьли же положится $B=A$ и будетъ $xz=A$; то выдетъ $y=\frac{0}{0}$, то есть давленіе можетъ быть какое нибудь; сей случай относится къ несжимающимся жидкимъ тѣламъ; почему оная формула всѣмъ тѣламъ приличествуетъ. Изъ сего слѣдуетъ, что жидкія несжимающіяся тѣла можно подвести подъ одинакіе законы съ жидкими упругими тѣлами, такъ что всѣ изслѣдованія относящіяся вообще какъ къ движенію, такъ и къ равновѣсію, можно примѣнить къ тѣмъ и къ другимъ тѣламъ.

Впрочемъ не принимая въ щетъ густоты, Proній для опредѣленія давленія или расширительной силы паровъ нашелъ слѣдующую емпирическую формулу:

$$y=ah^{z}+bi^{z}+ck^{z},$$

въ которой y означаетъ давленіе, или лучше высоту ртутнаго столба, имѣющаго въ основаніи давимую поверхность, коего вѣсъ равняется давленію на оную поверхность; z число градусовъ Реомюрова термометра; a, b, c; h, i, k постоянныя количества производимыя изъ опытовъ; именно, сіи количества суть:

$$a=-0{,}0000007246;\quad h=1{,}172805;$$
$$b=+0{,}8648188303;\quad i=1{,}047773;$$
$$c=-0{,}8648181057;\quad k=1{,}028189.$$

Естьли сіи количества поставятся въ предъидущемъ уравненіи; то найдется, что давленія вычисленныя по сему уравненію весьма мало разнятся отъ давленій опредѣляемыхъ чрезъ опыты. Здѣсь замѣтимъ, что поелику количество a есть очень мало, то членъ ah^z можно презрѣть, начиная отъ $z = 0$, до $z = 80°$; и для опредѣленія силы упругости паровъ отъ точки замерзанія до точки кипѣнія можно употреблять уравненіе

$$y = bi^z + ck^z.$$

Отношеніе между температурою и упругостію *алкоголя* выразилъ Проній чрезъ уравненіе такого вида

$$y = ah^z + bi^z + ck^z + d,$$

для котораго онъ нашелъ

$$\begin{aligned} a &= -0{,}0021293; & h &= 1{,}11424; \\ b &= +0{,}9116186; & i &= 1{,}05714; \\ c &= +0{,}2097778; & k &= 0{,}79943. \\ d &= -1{,}1192671; \end{aligned}$$

поелику членъ ck^z для положительныхъ z очень малъ, то Проній его презираетъ, и для опредѣленія силы упругости виннаго спирта беретъ уравненіе

$$y = ah^z + bi^z + d.$$

Для выраженія отношенія между густотою и теплотою въ жидкихъ упругихъ тѣлахъ оный естествоиспытатель нашелъ сіе уравненіе.

$$x = m(l^z - 1),$$

въ которомъ z означаетъ температуру, x цѣлое разрѣженіе жидкаго тѣла, считая отъ температуры льда до температуры z, выражаемое въ частяхъ начальнаго обьема, такъ что естьли сей обьемъ означимъ чрезъ ν, то обьемъ v при температурѣ z будетъ

$$v=(m(l^z-1)+1)\nu;$$

l, m постоянныя количества опредѣляемыя по опытамъ, и разныя для различныхъ веществъ; такъ, на примѣръ,

для обыкновеннаго воздуха $l=1{,}0416$; $m=0{,}062629$;
для водотворнаго (hydrog.) газа $l=1{,}00845$; $m=0{,}510000$;
для селитротвор. (azot.) — $l=1{,}08587$; $m=0{,}00834$;
для селитроватаго (nitros.) — $l=1{,}02699$; $m=0{,}09274$;
для углекисл. (acid. carb.) — $l=1{,}029096$; $m=0{,}14265$;
для нашатырнаго газа $l=1{,}04370$; $m=0{,}19468$.

Естьли бы расширеніе считалося не отъ 0 до z°; но отъ одного градуса до другаго, то есть отъ z° до $(z+1)^\circ$; то бы для опредѣленія такого расширенія получилося уравненіе

$$\Delta v=m\nu(l-1)l^z,$$

полагая $\Delta z=1$. Изъ сего уравненія усматриваемъ, что когда температура возвышается по прогрессіи ариѳметической, тогда разрѣженіе увеличивается по прогрессіи геометрической; а посему упругія тѣла тѣмъ удобнѣе разрѣжаются, чѣмъ болѣе онѣ разрѣжены.

Отношеніе приращенія Δv обьема v къ самому обьему или расширяемость R упругихъ тѣлъ выражается слѣдовательно сею формулою

$$R = \frac{m(l^{\Delta z} - 1) l^z}{1 - m + m l^z}.$$

Отсюда усматриваемъ, что расширяемость можетъ быть постоянна только въ томъ случаѣ или въ томъ тѣлѣ, для котораго $m = 1$, но во всѣхъ прочихъ тѣлахъ она тѣмъ болѣе приближается къ постоянству, чѣмъ болѣе возвышается температура; предѣлъ сего приближенія есть $l - 1$, полагая $\Delta z = 1$. Замѣтимъ, что m не можетъ быть $= 1$ когда измѣненіе въ обьемѣ разсматривается относительно къ начальному обьему v, т. е. къ обьему при $z = o$; ибо если въ выраженіи

$$v = (m(l^z - 1) + 1) v$$

положимъ $z = -\infty$, то при $m = 1$ выдетъ $v = o$; изъ сего слѣдовало бы, что безконечное охлажденіе обращаетъ весь обьемъ въ геометрическую точку.

Изъ послѣдняго уравненія происходитъ

$$z = \frac{\log. R(1 - m) - \log. [m(l - 1 - R)]}{\log. l}$$

По сей формулѣ найдется, какому градусу температуры соотвѣтствуетъ данная величина R.

Разные Физики нашли для R разныя величины относительно къ атм. воздуху:

Соссюръ	нашелъ	$R = \frac{1}{235}$;	при $z = 13°,09$
Делюкъ	———	$R = \frac{1}{215}$;	— $z = 15°,53$

Тремблей	———	$R = \frac{1}{192}$;	— $z = 19°,68$
Монжъ, Бертолетъ, Вандермондъ	—	$R = \frac{1}{184,83}$;	— $z = 16°,75$
Роа	———	$R = \frac{1}{170}$;	— $z = 22°,12$.

И такъ разность въ величинахъ R произошла отъ того, что оные естествоиспытатели относили свои изчисленія къ разнымъ температурамъ. Къ сему присовокупиться могли и многія другія обстоятельства, какъ то: различная густота, влажность и проч. Но мы здѣсь сихъ послѣднихъ обстоятельствъ въ щетъ не принимали.

ГЛАВА II.

О движеніи жидкихъ тѣлъ вообще.

При движеніи жидкихъ тѣлъ слѣдующія обстоятельства разсматриванію представляются:

1) *Силы*, которыми частицы побуждаются; 2) *давленіе*, которое отъ нихъ происходитъ; 3) *густота* или плотность жидкаго состава; 4) *скорость* движенія каждой частицы. Всѣ сіи обстоятельства относятся къ извѣстной частицѣ или къ извѣстному мѣсту жидкаго состава и къ извѣстному времени t. Мѣсто сіе дано бываетъ чрезъ разстоянія его отъ трехъ взаимно перпендикулярныхъ неподвижныхъ плоскостей, или чрезъ координаты x, y, z параллельныя тремъ прямоугольнымъ неподвижнымъ осямъ. Силы и скорость приводятся въ три параллельныя осямъ координатъ. Означимъ таковыя силы чрезъ X, Y, Z взявъ силу тяжести за единицу. Пусть u, v, w означаютъ три скорости такъ же параллельныя осямъ, на которыя скорость разсматриваемой частицы разлагается. Для измѣренія давленія принимать будемъ вѣсъ жидкаго столба, имѣющаго основаніе $=1$, высоту $=p$ и густоту $=1$; къ сей густотѣ относить будемъ густоту D разсматриваемой частицы. При изслѣдованіи движенія жидкихъ тѣлъ силы X, Y, Z полагаются данными чрезъ функціи координатъ x, y, z, и по онымъ опредѣляются прочія обстоятельства движенія, то есть давленіе p, густота D и три скорости u, v, w. Посему для опредѣленія сихъ

пяти количествъ p, D, v, v, w нужно имѣть столько же уравненій. Естьли жидкое тѣло есть однородное и его густота не подлежитъ никакому измѣненію; то и количество D будетъ данное. Естьли же оное тѣло есть разнородное, или каждая частица имѣетъ густоту перемѣнную, то нужно знать густоту каждой частицы, то есть, какъ сія густота измѣняется отъ одной частицы до другой или отъ одной точки времени до другой.

И такъ вся теорія движенія жидкихъ тѣлъ состоитъ въ томъ, что бы для даннаго жидкаго тѣла по даннымъ силамъ опредѣлить пять количествъ D, p, v, v, w чрезъ функціи четырехъ измѣняемыхъ величинъ x, y, z, t, такъ чтобы каждое изъ нихъ извѣстно было какъ для каждой точки, такъ и для каждаго времени. Почему общее выраженіе дифференціала, на примѣръ, густоты D, будетъ

$$dD = \left(\frac{dD}{dx}\right)dx + \left(\frac{dD}{dy}\right)dy + \left(\frac{dD}{dz}\right)dz + \left(\frac{dD}{dt}\right)dt,$$

въ которомъ первые три члена относятся къ измѣненію густоты при томъ же времени t, и слѣдственно показываютъ измѣненіе густоты, въ опредѣленное время, отъ одной точки до другой; послѣдній же членъ принадлежитъ къ измѣненію густоты сопряженному съ измѣненіемъ времени, и слѣдовательно къ разнымъ частицамъ чрезъ ту же точку проходящимъ одна за другою въ продолженіе движенія. Все сіе разумѣть должно и о давленіи p и скоростяхъ u, v, w.

Хотя каждая частица жидкаго тѣла можетъ имѣть свое особенное движеніе; однако сіи движенія не должно почитать совсѣмъ независимыми между собою. Ибо естьли густота есть неизмѣнна; то ясно, что каждая частица не можетъ носиться произвольно и занимать то большее, то меньшее пространство; откуда происходитъ извѣстное нѣкоторое условіе между особенными движеніями частицъ. Хотя же каждая частица могла бы сгущаться и разрѣжаться; однако такая перемѣна не можетъ происходить безъ всякаго отношенія къ давленію, по которому всѣ движенія частицъ связуются извѣстнымъ нѣкоторымъ закономъ. Сей-то законъ разискивается въ теоріи движенія жидкихъ тѣлъ, и сіе разисканіе приводится къ тому, чтобы, при разсматриваніи движенія всѣхъ частицъ какъ извѣстнаго, опредѣлить измѣненіе въ густотѣ и въ движеніи каждой частицы.

Сверхъ означенныхъ нами четырехъ обстоятельствъ движенія могутъ представляться еще другія многія, какъ, на примѣръ, естьли жидкое вещество содержится въ сосудѣ, изъ котораго оно вытекаетъ; въ такомъ случаѣ надобно бываетъ знать время, въ которое сосудъ опорознится, количество вытекающаго въ данное время вещества, фигуру сосуда, и прочее; но здѣсь разсматривается движеніе вообще, и оныхъ четырехъ обстоятельствъ довольно для того, чтобы движеніе представить въ дифференціальныхъ уравненіяхъ; въ чемъ наипаче и состоитъ сущность теоріи. Когда же сіи уравненія будутъ найдены; тогда по интегрованіи ихъ всѣ оныя обстоятельства приемлются во вниманіе, и вычисленіе всегда выходитъ таково, что чрезъ него всѣмъ условіямъ, какія предписываются обстоятельствами, всегда удовлетворить можно.

ГЛАВА III.

Уравненія движенія жидкихъ тѣлъ.

Займемся теперь разсмотрѣніемъ обстоятельствъ въ предъидущей главѣ означенныхъ; и во первыхъ разыщемъ тѣ ускорительныя силы, которыми каждая частица въ данное мгновеніе дѣйствительно побуждается. На сей конецъ возмемъ въ разсмотрѣніе какую нибудь частицу жидкаго вещества и опредѣлимъ оныя силы для той ея точки, которой координаты суть x, y, z. Мы примѣчаемъ, что когда x приметъ приращеніе Δx; тогда сила X получитъ приращеніе $\left(\frac{\Delta X}{\Delta x}\right)\Delta x$, при тѣхъ же ординатахъ y, z; и сила параллельная ординатѣ x въ точкѣ, коея координаты суть $x+\Delta x$, y, z, будетъ $X+\left(\frac{\Delta X}{\Delta x}\right)\Delta x$. Сверхъ того ясно, что прямопротивныя давленія въ концахъ линеи Δx суть p и $p+\left(\frac{\Delta p}{\Delta x}\right)\Delta x$. Естьли перпендикулярное сѣченіе струи, коея длина Δx, означимъ чрезъ a; то, поелику избытокъ давленія въ каждой точкѣ втораго конца струи предъ давленіемъ въ противолежащей точкѣ перваго конца есть $\left(\frac{\Delta p}{\Delta x}\right)\Delta x$, количество $\left(\frac{\Delta p}{\Delta x}\right)a\Delta x$ будетъ выражать движущую силу, дѣйствующую въ сторону ординатъ x отрицательныхъ, произходящую отъ давленія.

Чтобы получить изъ нея ускорительную силу, то положимъ, что средняя густота струи $a\Delta x$ есть D', такъ что $aD'\Delta x$ есть составъ оной струи. Естьли на сей составъ раздѣлимъ оную движущую силу; то получимъ ускорительную силу $\frac{1}{D'}\left(\frac{\Delta p}{\Delta x}\right)$. Поелику сія сила противна силѣ $X+\left(\frac{\Delta X}{\Delta x}\right)\Delta x$; то дѣйствительная ускорительная сила, въ точкѣ коея координаты $x+\Delta x$, y, z, будетъ

$$X+\left(\frac{\Delta X}{\Delta x}\right)\Delta x-\frac{1}{D'}\left(\frac{\Delta p}{\Delta x}\right).$$

Но съ постепеннымъ уменьшеніемъ приращенія Δx сила $X+\left(\frac{\Delta X}{\Delta x}\right)\Delta x$ и густота D' приближаются къ своимъ предѣламъ (*) X и D; предѣлъ же отношенія $\left(\frac{\Delta p}{\Delta x}\right)$ изображается чрезъ $\left(\frac{dp}{dx}\right)$; посему по взятіи предѣловъ получится искомая ускорительная сила параллельная ординатѣ x:

$$X-\frac{1}{D}\left(\frac{dp}{dx}\right).$$

Такимъ же образомъ найдутся ускорительныя силы параллельныя ординатамъ y, z:

$$Y-\frac{1}{D}\left(\frac{dp}{dy}\right);\ Z-\frac{1}{D}\left(\frac{dp}{dz}\right).$$

(*) Для пріобрѣтенія полнаго познанія о теоріи предѣловъ читай *Основанія Геометріи* Академика

Въ сихъ силахъ заключаются всякія силы, какими только частицы жидкаго вещества побуждаемы быть могутъ. Ибо естьли на пр. жидкое тѣло подвержено дѣйствію поршня; то отъ сего произходитъ не другое какое дѣйствіе, какъ давленіе, которое уже входитъ въ составъ силы. Когда густота постоянна, тогда она бываетъ данная; когда же измѣняется, тогда она зависитъ отъ давленія. Посему когда побуждающія ускорительныя силы X, Y, Z и давленіе p будутъ извѣстны; тогда дѣйствительныя ускорительныя силы найдутся, и будутъ функціи координатъ x, y, z; ибо время t полагается здѣсь постояннымъ.

Ясно, что естьли бы жидкое тѣло находилося въ равновѣсіи; то бы дѣйствительныя ускорительныя силы были равны нулю. Не менѣе того понятно, что дабы жидкія частицы могли быть въ равновѣсіи, то оныя силы должны уничтожиться. Посему уравненія

$$X - \frac{1}{D}\left(\frac{dp}{dx}\right) = o,\ Y - \frac{1}{D}\left(\frac{dp}{dy}\right) = o,\ Z - \frac{1}{D}\left(\frac{dp}{dz}\right) = o$$

суть и слѣдствія и условія равновѣсія.

Зная теперь ускорительныя силы для каждой точки жидкаго состава, можемъ, на основаніи общихъ уравненій движенія, рѣшить всѣ динамическіе вопросы относящіяся къ движенію жидкихъ тѣлъ, входящіе въ одну статью съ вопросами принадлежащими къ движенію твердыхъ тѣлъ. Оныя силы прина-

---

Гурьева кн. вт. гл. III, стр. 295; и его же *Основанія Дифф. Изчисленія* гл. I и II.

длежатъ вообще къ движенію точки въ сопротивляющемся веществѣ; вторыя члены ихъ выраженій суть не иное что, какъ величины сопротивленій, которыя, какъ видимъ, зависятъ отъ густоты и отъ давленія.

И такъ мы имѣемъ сіи уравненія:

$$\frac{d^2x}{dt^2}=X-\frac{1}{D}\left(\frac{dp}{dx}\right),\ \frac{d^2y}{dt^2}=Y-\frac{1}{D}\left(\frac{dp}{dy}\right),\ \frac{d^2z}{dt^2}=Z-\left(\frac{dp}{dz}\right).$$

Естьли первое уравненіе умножимъ на dx, второе на dy, третіе на dz, и потомъ сложимъ, то, по причинѣ $\left(\frac{dp}{dx}\right)dx+\left(\frac{dp}{dy}\right)dy+\left(\frac{dp}{dz}\right)dz$ $=dp$, получимъ

$$\frac{dx.\,d^2x+dy\,d^2y+dz\,d^2z}{dt^2}=Xdx+Ydy+Zdz-\frac{1}{D}dp\,;$$

по взятіи интеграла,

$$\frac{1}{2}.\frac{dx^2+dy^2+dz^2}{dt^2}=\int\left(Xdx+Ydy+Zdz-\frac{dp}{D}\right)+C,$$

естьли дѣйствительную скорость частицы означимъ чрезъ u, то получимъ

$$u^2=2\int\left(Xdx+Ydy+Zdz-\frac{dp}{D}\right)+C.$$

Таково есть *уравненіе живыхъ силъ* относящееся къ жидкимъ тѣламъ.

Такъ же мы имѣемъ уравненія

$$\frac{dv}{dt}=X-\frac{1}{D}\left(\frac{dp}{dx}\right),\ \frac{dv}{dt}=Y-\frac{1}{D}\left(\frac{dp}{dy}\right),\ \frac{dw}{dt}=Z-\frac{1}{D}\left(\frac{dp}{dz}\right),$$

изъ коихъ находимъ

$$\frac{1}{D}\left(\frac{dp}{dx}\right)=X-\frac{dv}{dt},\ \frac{1}{D}\left(\frac{dp}{dy}\right)=Y-\frac{dv}{dt},\ \frac{1}{D}\left(\frac{dp}{dz}\right)=Z-\frac{dw}{dt}.$$

Поелику скорости u, v, w суть функціи количествъ x, y, z, t; то

$$du = \left(\frac{du}{dx}\right) dx + \left(\frac{du}{dy}\right) dy + \left(\frac{du}{dz}\right) dz + \left(\frac{du}{dt}\right) dt$$

$$dv = \left(\frac{dv}{dx}\right) dx + \left(\frac{dv}{dy}\right) dy + \left(\frac{dv}{dz}\right) dz + \left(\frac{dv}{dt}\right) dt$$

$$dw = \left(\frac{dw}{dx}\right) dx + \left(\frac{dw}{dy}\right) dy + \left(\frac{dw}{dz}\right) dz + \left(\frac{dw}{dt}\right) dt.$$

Поставивъ въ сихъ уравненіяхъ udt, vdt, wdt на мѣсто dx, dy, dz, и раздѣливъ ихъ на dt, получимъ

$$\frac{du}{dt} = \left(\frac{du}{dx}\right) u + \left(\frac{du}{dy}\right) v + \left(\frac{du}{dz}\right) w + \left(\frac{du}{dt}\right)$$

$$\frac{dv}{dt} = \left(\frac{dv}{dx}\right) u + \left(\frac{dv}{dy}\right) v + \left(\frac{dv}{dz}\right) w + \left(\frac{dv}{dt}\right)$$

$$\frac{dw}{dt} = \left(\frac{dw}{dx}\right) u + \left(\frac{dw}{dy}\right) v + \left(\frac{dw}{dz}\right) w + \left(\frac{dw}{dt}\right).$$

Посему

$$\left.\begin{aligned}
\frac{1}{D}\left(\frac{dp}{dx}\right) &= X - \left(\frac{du}{dx}\right) u - \left(\frac{du}{dy}\right) v - \left(\frac{du}{dz}\right) w - \left(\frac{du}{dt}\right) \\
\frac{1}{D}\left(\frac{dp}{dy}\right) &= Y - \left(\frac{dv}{dx}\right) u - \left(\frac{dv}{dy}\right) v - \left(\frac{dv}{dz}\right) w - \left(\frac{dv}{dt}\right) \\
\frac{1}{D}\left(\frac{dp}{dz}\right) &= Z - \left(\frac{dw}{dx}\right) u - \left(\frac{dw}{dy}\right) v - \left(\frac{dw}{dz}\right) w - \left(\frac{dw}{dt}\right)
\end{aligned}\right\} \ldots (A)$$

И такъ измѣненіе въ давленіи по направленію какой-либо оси зависитъ какъ отъ силы параллельной той оси, такъ и отъ всѣхъ трехъ скоростей u, v, w. Изъ сихъ трехъ уравненій найдутся ускоренія, какія происходятъ отъ ускорительныхъ силъ $X - \frac{1}{D}\left(\frac{dp}{dx}\right)$ и проч.

Разсмотримъ теперь, какъ измѣняется густота какой-либо частицы со временемъ. Пусть въ концѣ времени t величина и густота оной частицы будутъ U и D. Когда сія частица въ продолженіе приращенія времени Δt передвинется изъ прежняго своего мѣста въ другое, то составъ M ея чрезъ то не измѣнится, а измѣнятся ея величина U въ $U+\Delta U$ и густота D въ $D+\Delta D$, такъ что будетъ

$$M=UD=(U+\Delta U)(D+\Delta D).$$

Отсюда по уничтоженіи съ обѣихъ сторонъ UD происходитъ

$$o=D.\Delta U+(U+\Delta U)\,\Delta D,$$

а изъ сего находимъ

$$\frac{\Delta D}{\Delta U}=-\frac{D}{U+\Delta U}$$

по взятіи съ обѣихъ сторонъ предѣловъ, получится

$$\frac{dD}{dU}=-\frac{D}{U},$$

и выдетъ

$$dD=-D.\frac{dU}{U}=-D.d.\log.U.$$

Пусть $U=n.\ dxdydz$, разумѣя подъ n какое нибудь число; будетъ

$$\log.U=\log.n+\log.dx+\log.dy+\log.dz$$

$$d.\log.U=\left(\frac{d.dx}{dx}\right)+\left(\frac{d.dy}{dy}\right)+\left(\frac{d.dz}{dz}\right).$$

Поставляя vdt, vdt, wdt вмѣсто dx, dy, dz въ числителяхъ и полагая dt постояннымъ находимъ

$$dD=-D.d.\log.U=-D\left(\left(\frac{dv}{dx}\right)+\left(\frac{dv}{dy}\right)+\left(\frac{dw}{dz}\right)\right)dt$$

и слѣдовательно

$$\frac{dD}{dt} = -D\left(\left(\frac{dv}{dx}\right)+\left(\frac{dv}{dy}\right)+\left(\frac{dw}{dz}\right)\right).$$

Такова есть зависимость между измѣненіями движенія и густоты. Естьли густота частицъ въ продолженіе движенія не измѣняется, то скорости v, v, w всегда бываютъ таковы, что выходитъ

$$\left(\frac{dv}{dx}\right)+\left(\frac{dv}{dy}\right)+\left(\frac{dw}{dz}\right)=o.$$

Между безчисленными случаями сіе бываетъ тогда, когда v не зависитъ отъ x, v отъ y, w отъ z. На оборотъ когда оное уравненіе между скоростями v, v, w существуетъ, тогда густота не измѣняется. При семъ мы замѣчаемъ, что когда количество $\left(\frac{dv}{dx}\right)+\left(\frac{dv}{dy}\right)+\left(\frac{dw}{dz}\right)$ будетъ положительное, тогда густота уменьшается; когда же отрицательное, тогда она увеличивается.

Поелику

$$dD=\left(\frac{dD}{dx}\right)dx+\left(\frac{dD}{dy}\right)dy+\left(\frac{dD}{dz}\right)dz+\left(\frac{dD}{dt}\right)dt;$$

то поставляя vdt, vdt, wdt на мѣсто dx, dy, dz и раздѣляя на dt, находимъ

$$\frac{dD}{dt}=\left(\frac{dD}{dx}\right)v+\left(\frac{dD}{dy}\right)v+\left(\frac{dD}{dz}\right)w+\left(\frac{dD}{dt}\right)$$

сравнивая сіе выраженіе $\frac{dD}{dt}$ съ найденнымъ выше, получаемъ уравненіе

$$v\left(\frac{dD}{dx}\right)+D\left(\frac{dv}{dx}\right)+\nu\left(\frac{dD}{dy}\right)+D\left(\frac{d\nu}{dy}\right)+w\left(\frac{dD}{dz}\right)+D\left(\frac{dw}{dz}\right)+$$

$$\left(\frac{dD}{dt}\right)=o$$

или

$$\left(\frac{d.\,Dv}{dx}\right)+\left(\frac{d.\,D\nu}{dy}\right)+\left(\frac{d.\,Dw}{dz}\right)+\left(\frac{dD}{dt}\right)=o.\;.\;.\;.\;(B)$$

Естьли бы въ какомъ мѣстѣ жидкое тѣл[о] прервалося; то бы для онаго мѣста был[о] $D=o$, и уравненіе (B) вышло бы тожественн[о] и слѣдственно ничего бы не означало. Посем[у] оно выражаетъ условіе, что бы жидкое тѣл[о] было непрерывно, и называется *уравненіе[мъ] непрерывности*.

Въ уравненіяхъ (A) и (B) заключается вс[я] теорія движенія жидкихъ тѣлъ. Когда жид-кое тѣло есть несжимаемое и разнородное, тогда послѣднее уравненіе разлагается н[а] два; ибо тогда не токмо составъ каждой ча-стицы, но и плотность ея и величина не из-мѣняются, то есть тогда $\frac{dD}{dt}=o$ и $\frac{dU}{dt}=o$, ил[и]

$$\left(\frac{dD}{dx}\right)v+\left(\frac{dD}{dy}\right)\nu+\left(\frac{dD}{dz}\right)w+\left(\frac{dD}{dt}\right)=o$$

$$\text{и } U\left\{\left(\frac{dv}{dx}\right)+\left(\frac{d\nu}{dy}\right)+\left(\frac{dw}{dz}\right)\right\}=o$$

Сіи два уравненія совокупно съ тремя урав-неніями (A) служить будутъ къ опредѣлені[ю] пяти неизвѣстныхъ количествъ D, p, v, ν, [w] чрезъ функціи количествъ x, y, z, t. Когд[а] несжимающееся тѣло есть однородное, тог[да] густота его есть постоянна и бываетъ да[н]-ная; въ семъ случаѣ первое изъ предъидущ[ихъ] уравненій выходитъ тожественное, и опредѣленіе четырехъ неизвѣстныхъ p, u, v, w зависѣть будетъ отъ втораго изъ оныхъ уравненій и отъ трехъ уравненій (A).

Въ жидкихъ упругихъ тѣлахъ густота всегда зависитъ отъ давленія; почему два неизвѣстныя количества D и p приводятся въ одно; посему и въ семъ случаѣ для опредѣленія четырехъ неизвѣстныхъ количествъ имѣемъ четыре уравненія (A) и (B). Въ томъ случаѣ, въ которомъ давленіе зависитъ отъ D и отъ температуры, законъ, по которому измѣняется температура, бываетъ данъ, и слѣдовательно оно для каждой частицы жидкаго вещества будетъ данная функція количествъ x, y, z, t. И такъ во всѣхъ случаяхъ имѣется столько уравненій, сколько неизвѣстныхъ количествъ содержится въ вопросѣ. Но сіи уравненія суть уравненія частныхъ дифференціаловъ между четырьмя измѣняемыми количествами x, y, z, t, независящими другъ отъ друга. Общее ихъ интегрованіе по извѣстнымъ до сего времени правиламъ совершить невозможно. По сей причинѣ мы остановимся на нѣкоторыхъ частныхъ предположеніяхъ; чтобы удобнѣе совершить изчисленіе, мы приведемъ оныя уравненія въ наименьшее число. Для сего умножимъ уравненія (A) первое на dx, второе на dy, третіе на dz, и потомъ сложимъ, положивъ для сокращенія,

$$\left(\frac{du}{dx}\right)u+\left(\frac{du}{dy}\right)v+\left(\frac{du}{dz}\right)w+\left(\frac{du}{dt}\right)=U,$$

$$\left(\frac{dv}{dx}\right)u+\left(\frac{dv}{dy}\right)v+\left(\frac{dv}{dz}\right)w+\left(\frac{dv}{dt}\right)=V$$

$$\left(\frac{dw}{dx}\right)v+\left(\frac{dw}{dy}\right)v+\left(\frac{dw}{dz}\right)w+\left(\frac{dw}{dt}\right)=W,$$

мы вмѣсто трехъ уравненій (A) получимъ одно уравненіе

$$\frac{dp}{D}=Xdx+Ydx+Zdz-Udx-Vdy-Wdz \;.\;.\;.\;.\; (C),$$

которое имѣетъ обширность оныхъ трехъ уравненій вмѣстѣ взятыхъ, и ихъ замѣняетъ.

Естьли положится $dp=o$, то получится дифференціальное уравненіе свободной поверхности движущагося жидкаго тѣла, или поверхности слоя, по протяженію которой давленіе вездѣ одинаково; ибо dp бываетъ равенъ нулю въ двухъ случаяхъ; въ 1) когда $p=o$, и во 2) когда $p=$ постоян.

Здѣсь предполагается, что частицы которыя однажды находилися на поверхности жидкаго тѣла пребываютъ на оной во все продолженіе движенія. Сіе условіе должно выражаться особеннымъ уравненіемъ. Въ самомъ дѣлѣ, пусть $A=o$ будетъ уравненіе поверхности, разумѣя чрезъ A функцію количествъ x, y, z, t. Поелику чрезъ движеніе координаты x, y, z какой нибудь частицы обращаются въ $x+vdt$, $y+vdt$, $z+wdt$, когда t обращается въ $t+dt$; то, дабы тѣ же частицы находилися на поверхности и въ концѣ времени $t+dt$, уравненіе $A=o$ равно должно имѣть мѣсто по поставленіи въ немъ $x+vdt$, $y+vdt$, $z+wdt$ вмѣсто x, y, z. Но чрезъ сіе поставленіе A обратится въ $A+\left(\frac{dA}{dx}\right)vdt+\left(\frac{dA}{dy}\right)vdt+\left(\frac{dA}{dz}\right)wdt$

$+\left(\frac{dA}{dt}\right)dt$; посему оное условіе будетъ выражаться уравненіемъ

$$\left(\frac{dA}{dx}\right)v+\left(\frac{dA}{dy}\right)v+\left(\frac{dA}{dz}\right)w+\left(\frac{dA}{dt}\right)=o,$$

которое должно существовать вмѣстѣ съ уравненіемъ $A=o$.

Когда жидкое вещество содержится въ стѣнахъ извѣстную фигуру имѣющихъ; тогда часть поверхности онаго смежная со стѣнами имѣетъ одинакую съ ними фигуру; посему $A=o$ будетъ тогда уравненіе данной фигуры стѣнъ, съ коимъ въ одно время должно существовать и предъидущее уравненіе, чтобы частицы которыя одинъ разъ находилися при поверхности стѣнъ, пребывали при оной и въ продолженіе движенія.

Когда свободная поверхность жидкаго тѣла никакими силами не побуждается; тогда давленіе p на оной должно быть равно нулю; но когда она подвержена дѣйствію какихъ ни есть данныхъ силъ F; тогда сіи силы должны быть равны и противны давленію p. И такъ уравненіе свободной поверхности будетъ въ первомъ случаѣ $p=o$, а во второмъ $p=F$.

Естьли жидкія частицы находятся въ равновѣсіи; то $v=o$, $v=o$, $w=o$ и слѣд. $U=o$, $V=o$, $W=o$, и уравненіе равновѣсія будетъ

$$\frac{dp}{D}=Xdx+Ydy+Zdz.$$

Но $U=o$, $V=o$ и $W=o$, когда скорости v, v и w постоянны, или когда жидкое тѣло имѣетъ движенie единообразное, какое усматриваемъ въ теченiи рѣкъ; посему давленie какъ во время равновѣсiя, такъ и въ случаѣ движенiя единообразнаго, есть одинаково.

Послѣ сихъ краткихъ замѣчанiй приступимъ къ интегрованiю уравненiй (B) и (C). Относительно перваго уравненiя задача состоитъ въ томъ, чтобы разрѣшить уравненie вида

$$\left(\frac{dP}{dx}\right)+\left(\frac{dQ}{dy}\right)+\left(\frac{dR}{dz}\right)+\left(\frac{dS}{dt}\right)=o,$$

т. е. чтобы для четырехъ количествъ P, Q, R, S найти такiя функцiи четырехъ измѣняемыхъ x, y, z, t, которыя бы не токмо удовлетворяли сему уравненiю, но и всѣ рѣшенiя въ себѣ содержали. Чтобы удобнѣе и вѣрнѣе достигнуть сей цѣли, то мы начнемъ съ простѣйшихъ случаевъ; и во первыхъ, естьли будетъ одно токмо измѣняемое количество x, и въ уравненiи будетъ находиться одинъ членъ $\left(\frac{dP}{dx}\right)$; то полный интегралъ будетъ $P=$ пост.

Положимъ посемъ, что имѣются двѣ измѣняемыя величины x, y, и что должно найти интегралъ уравненiя $\left(\frac{dP}{dx}\right)+\left(\frac{dQ}{dy}\right)=o$. Сего вообще достигнуть можно, взимая по произволенiю функцiю двухъ измѣняемыхъ количествъ, которая пусть будетъ O, такъ что $dO=Kdx+Ldy$, и слѣдовательно $\left(\frac{dK}{dy}\right)-\left(\frac{dL}{dx}\right)=o$.

Оному уравненію совершенно удовлетворять будутъ сіи функціи:

$$P = L + F(y),\ Q = -K + F_{,}(x),$$

означая чрезъ $F(y)$ функцію одного y и чрезъ $F_{,}(x)$ функцію одного x.

Пусть теперь находятся три измѣняемыя количества x, y, z, и требуется найти интегралъ уравненія $\left(\frac{dP}{dx}\right) + \left(\frac{dQ}{dy}\right) + \left(\frac{dR}{dz}\right) = o$. Для сего можно взять двѣ произвольныя функціи трехъ измѣняемыхъ количествъ x, y, z, которыя пусть будутъ O и o, такъ что

$$dO = Kdx + Ldy + Mdz \text{ и } do = kdx + ldy + mdz,$$

и общее рѣшеніе будетъ содержаться въ уравненіяхъ

$$P = Lm - Ml + F(y,z),\ Q = Mk - Km + F_{,}(x,z)$$
$$R = Kl - Lk + F_{,,}(x,y).$$

Отсюда открывается способъ разрѣшенія самаго предложеннаго уравненія

$$\left(\frac{dP}{dx}\right) + \left(\frac{dQ}{dy}\right) + \left(\frac{dR}{dz}\right) + \left(\frac{dS}{dt}\right) = o.$$

Дѣйствительно, мы усматриваемъ, что здѣсь можно взять произвольно три функціи O, o, ω четырехъ измѣняемыхъ x, y, z, t, коихъ дифференціалы суть

$$dO = Kdx + Ldy + Mdz + Ndt$$
$$do = kdx + ldy + mdz + ndt$$
$$d\omega = \varkappa dx + \lambda dy + \mu dz + \nu dt;$$

и искомыя функціи будутъ

$$P = + Lm\nu + Mn\lambda + Nl\mu - Ln\mu - Ml\nu - N\lambda m + F(y,z,t)$$
$$Q = - Mn\varkappa - Nk\mu - Km\nu + Mk\nu + Nm\varkappa + Kn\mu + F_{,}(x,z,t)$$
$$R = + Nk\lambda + Kl\nu + Ln\varkappa - Nl\varkappa - Kn\lambda - Lk\nu + F_{,,}(x,y,t)$$
$$S = - Kl\mu - Lm\varkappa - Mk\lambda + Km\lambda + Lk\mu + Ml\varkappa + F_{,,,}(x,y,z)$$

или

$$D\upsilon = \left.\begin{aligned} &\left(\frac{dO}{dy}\right)\left(\frac{do}{dz}\right)\left(\frac{d\omega}{dt}\right) + \left(\frac{dO}{dz}\right)\left(\frac{do}{dt}\right)\left(\frac{d\omega}{dy}\right) \\ &+ \left(\frac{dO}{dt}\right)\left(\frac{do}{dy}\right)\left(\frac{d\omega}{dz}\right) - \left(\frac{dO}{dy}\right)\left(\frac{do}{dt}\right)\left(\frac{d\omega}{dz}\right) \\ &- \left(\frac{dO}{dz}\right)\left(\frac{do}{dy}\right)\left(\frac{d\omega}{dt}\right) - \left(\frac{dO}{dt}\right)\left(\frac{do}{dz}\right)\left(\frac{d\omega}{dy}\right) \end{aligned}\right\} + F(y,z,t)$$

$$D\nu = \left.\begin{aligned} &-\left(\frac{dO}{dz}\right)\left(\frac{do}{dt}\right)\left(\frac{d\omega}{dx}\right) - \left(\frac{dO}{dt}\right)\left(\frac{do}{dx}\right)\left(\frac{d\omega}{dz}\right) \\ &- \left(\frac{dO}{dx}\right)\left(\frac{do}{dz}\right)\left(\frac{d\omega}{dt}\right) + \left(\frac{dO}{dz}\right)\left(\frac{do}{dx}\right)\left(\frac{d\omega}{dt}\right) \\ &+ \left(\frac{dO}{dt}\right)\left(\frac{do}{dz}\right)\left(\frac{d\omega}{dx}\right) + \left(\frac{dO}{dx}\right)\left(\frac{do}{dt}\right)\left(\frac{d\omega}{dz}\right) \end{aligned}\right\} + F_{I}(x,z,t)$$

$$Dw = \left.\begin{aligned} &+\left(\frac{dO}{dt}\right)\left(\frac{do}{dx}\right)\left(\frac{d\omega}{dy}\right) + \left(\frac{dO}{dx}\right)\left(\frac{do}{dy}\right)\left(\frac{d\omega}{dt}\right) \\ &+ \left(\frac{dO}{dy}\right)\left(\frac{do}{dt}\right)\left(\frac{d\omega}{dx}\right) - \left(\frac{dO}{dt}\right)\left(\frac{do}{dy}\right)\left(\frac{d\omega}{dx}\right) \\ &- \left(\frac{dO}{dx}\right)\left(\frac{do}{dt}\right)\left(\frac{d\omega}{dy}\right) - \left(\frac{dO}{dy}\right)\left(\frac{do}{dx}\right)\left(\frac{d\omega}{dt}\right) \end{aligned}\right\} + F_{II}(x,y,t)$$

$$D = \left.\begin{aligned} &-\left(\frac{dO}{dx}\right)\left(\frac{do}{dy}\right)\left(\frac{d\omega}{dz}\right) - \left(\frac{dO}{dy}\right)\left(\frac{do}{dz}\right)\left(\frac{d\omega}{dx}\right) \\ &- \left(\frac{dO}{dz}\right)\left(\frac{do}{dx}\right)\left(\frac{d\omega}{dy}\right) + \left(\frac{dO}{dx}\right)\left(\frac{do}{dz}\right)\left(\frac{d\omega}{dy}\right) \\ &+ \left(\frac{dO}{dy}\right)\left(\frac{do}{dx}\right)\left(\frac{d\omega}{dz}\right) - \left(\frac{dO}{dz}\right)\left(\frac{do}{dy}\right)\left(\frac{d\omega}{dx}\right) \end{aligned}\right\} + F_{III}(x,y,z)$$

Не смотря на многочленность сихъ выраженій удобно замѣчаемъ законъ, по которому составляется каждое изъ нихъ: въ первое не входитъ dx, во второе dy, въ третье dz, въ четвертое dt; естьли въ первомъ на мѣсто dy поставится dx и перемѣнятся знаки; то произойдетъ второе; естьлижъ въ первомъ на мѣсто dz поставится dx, то произойдетъ третіе; такимъ образомъ естьли одно дано будетъ; то прочія изъ него удобно произведутся. При семъ замѣтить должно, что каждому члену каждаго выраженія въ прочихъ выраженіяхъ соотвѣтствуетъ одинъ токмо членъ, который имѣетъ съ онымъ двухъ общихъ множителей; такъ на примѣръ, естьли изъ выраженія $D\upsilon$ возмемъ членъ $\left(\frac{dO}{dy}\right)\left(\frac{do}{dz}\right)\left(\frac{d\omega}{dt}\right)$, то въ одномъ только выраженіи D находимъ такой членъ, которой имѣетъ двухъ общихъ съ онымъ множителей, т. е. членъ $\left(\frac{dO}{dy}\right)\left(\frac{do}{dz}\right)\left(\frac{d\omega}{dx}\right)$, ибо во второмъ выраженіи нѣтъ dy, въ третьемъ нѣтъ dz. Посему будетъ

$$\left(\frac{d.\,D\upsilon}{dx}\right)=+\left(\frac{dO}{dy}\right)\left(\frac{do}{dz}\right)\left(\frac{dd\omega}{dtdx}\right)+\text{ и проч.}$$

$$\left(\frac{dD}{dt}\right)=-\left(\frac{dO}{dy}\right)\left(\frac{do}{dz}\right)\left(\frac{dd\omega}{dxdt}\right)+\text{ и проч.}$$

которые члены въ суммѣ уничтожатся. Изъ сего заключаемъ, что естьли вмѣсто $D\upsilon$, Dv, Dw и D поставятся найденныя выраженія, и возмутся надлежащимъ образомъ ихъ дифференціалы, (отъ чего каждый членъ доставитъ три члена): то всѣ сіи члены должны взаимно уничтожиться.

Впрочемъ уравненію (B) удовлетворится, когда будетъ
$D\upsilon = F(y,z,t)$, $Dv = F_{,}(x,z,t)$, $Dw = F_{,,}(x,y,t)$ и $D = F_{,,,}(x,y,z)$;

ибо тогда каждый членъ особенно уничтожится, каковое рѣшеніе есть довольно обширно; ибо оно вводитъ четыре произвольныя функціи трехъ измѣняемыхъ величинъ.

Рѣшеніе будетъ обширнѣе, когда введется произвольная функція T четырехъ измѣняемыхъ x, y, z, t. Пусть

$$dT = Edx + Gdy + Hdz + Idt;$$

поелику

$$\left(\frac{dE}{dy}\right) - \left(\frac{dG}{dx}\right) = o; \left(\frac{dE}{dz}\right) - \left(\frac{dH}{dx}\right) = o; \left(\frac{dE}{dt}\right) - \left(\frac{dI}{dx}\right) = o;$$

$$\left(\frac{dG}{dz}\right) - \left(\frac{dH}{dy}\right) = o; \left(\frac{dG}{dt}\right) - \left(\frac{dI}{dy}\right) = o; \left(\frac{dH}{dt}\right) - \left(\frac{dI}{dz}\right) = o;$$

то по введеніи шести постоянныхъ количествъ $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta$, нашему уравненію удовлетворять будутъ слѣдующія выраженія

$$D\upsilon = -\alpha I - \delta G - \varepsilon H + F(y, z, t)$$
$$D\nu = -\beta I + \delta E - \zeta H + F_{,}(x, z, t)$$
$$Dw = -\gamma I + \varepsilon E + \zeta G + F_{,,}(x, y, t)$$
$$D = +\alpha E + \beta G + \gamma H + F_{,,,}(x, y, z).$$

Посредствомъ двухъ произвольныхъ функцій T и V четырехъ измѣняемыхъ x, y, z, t, коихъ дифференціалы суть

$$dT = Edx + Gdy + Hdz + Idt, \; dV = Kdx + Ldy + Mdz + Ndt,$$

рѣшенія будутъ таковы:

$$D\upsilon = (H + I)L + (I - G)M - (G + H)N + F(y, z, t)$$
$$D\nu = (I + F)M + (F - H)N - (H + I)K + F_{,}(x, z, t)$$
$$Dw = (F + G)N + (G - I)K - (I + F)L + F_{,,}(x, y, t)$$
$$D = (G + H)K + (H - F)L - (F + G)M + F_{,,,}(x, y, z).$$

Естьли густота въ тѣлѣ есть всегда и вездѣ одинакова, то уравненіе (B) обращается въ

$$\left(\frac{du}{dx}\right)+\left(\frac{dv}{dy}\right)+\left(\frac{dw}{dz}\right)=o,$$

которому тотчас удовлетворят величины: $u=F(y,z,t)$, $v=F'(x,z,t)$, $w=F''(x,y,t)$. Потомъ обширнѣе чрезъ введеніе функціи T, которой дифференціалъ $dT=Edx+Gdy+Hdz+Idt$; и будетъ

$$u=-\delta G-\varepsilon H+F(y,z,t),\; v=+\delta F-\zeta H+F_{,}(x,z,t)$$
$$w=+\varepsilon F+\zeta G+F_{,,}(x,y,t),$$

которое рѣшеніе произойдетъ изъ преждена йденнаго, чрезъ положеніе $\alpha=o$, $\beta=o$, $\gamma=o$.

Впрочемъ и здѣсь не нужно, чтобы δ, ε, ζ были постоянныя; онѣ могутъ быть измѣняемыя, лишь бы было $\left(\frac{d\delta}{dx}\right)-\left(\frac{d\zeta}{dz}\right)=o$, $\left(\frac{d\delta}{dy}\right)+\left(\frac{d\varepsilon}{dz}\right)=o$ и $\left(\frac{d\varepsilon}{dx}\right)+\left(\frac{d\zeta}{dy}\right)=o$, то есть лишь бы формула $\zeta dx-\varepsilon dy+\delta dz$ была полный дифференціалъ. Посему сверхъ произвольной функціи T можно еще ввести другую произвольную функцію V, такую, что $dV=Kdx+Ldy+Mdz+Ndt$; и получимъ выраженія болѣе общія

$$u=HL-GM+F(y,z,t)$$
$$v=EM-HK+F_{,}(x,z,t)$$
$$w=GK-EL+F_{,,}(x,y,t).$$

Займемся теперь уравненіемъ (C). Здѣсь вопервыхъ замѣтимъ, что формула $Xdx+Ydy+Zdz$ бываетъ точный дифференціалъ въ томъ случаѣ, въ которомъ ускорительныя силы направлены къ неподвижнымъ центрамъ и суть функціи разстояній побуждаемой точки отъ центра, и еще въ томъ, въ которомъ силы происходятъ отъ взаимныхъ притяженій частицъ и суть функціи ихъ разстояній (см. *Основанія Механики Франкера*, на Россійскомъ языкѣ, стр. 428). Но въ сихъ двухъ случаяхъ заключаются всѣ случаи естества. Естьли оный интегралъ означимъ чрезъ S, то уравненіе (C) приметъ видъ

$$\frac{dp}{D} = S - Udx - Vdy - Wdz.$$

Посему чтобы движеніе было возможно, то U, V и W должны быть такія функціи количествъ x, y, z, чтобы формула $Udx + Vdy + Wdz$ допускала интегрованіе; слѣдовательно должно быть

$$\left(\frac{dU}{dy}\right) = \left(\frac{dV}{dx}\right), \left(\frac{dU}{dz}\right) = \left(\frac{dW}{dx}\right), \left(\frac{dV}{dz}\right) = \left(\frac{dW}{dy}\right).$$

Но замѣтимъ, что третье изъ сихъ условій слѣдуетъ изъ двухъ прочихъ: ибо положимъ что двумъ первымъ условіямъ удовлетворено; изъ оныхъ чрезъ дальнѣйшее дифференцированіе получимъ

$$\left(\frac{ddU}{dydz}\right) = \left(\frac{ddV}{dxdz}\right) = \left(\frac{ddW}{dxdy}\right).$$

И такъ поелику изъ оныхъ двухъ уравненій происходитъ уравненіе $\left(\frac{ddV}{dxdz}\right) = \left(\frac{ddW}{dxdy}\right)$, въ которомъ заключается уравненіе $\left(\frac{dV}{dz}\right) = \left(\frac{dW}{dy}\right)$; то замѣченное нами есть справедливо. Пусть $Udx + Vdy + Wdz = dT$; будетъ

$$\frac{dp}{D} = dS - dT.$$

Естьли D постоянно или зависитъ отъ одного p; то интегралъ сего уравненія будетъ

$$\int \frac{dp}{D} = S - T - F(t),$$

разумѣя подъ $F\ (t)$ произвольную функцію времени t; ибо въ уравненіи (C) время t полагается постояннымъ. Такого пополненія интеграла требуетъ свойство самой вещи: ибо отъ внѣшнихъ силъ давленіе p въ каждое мгновеніе можетъ измѣняться. Естьли D зависитъ отъ p и отъ $S-T$; то уравненіе такъ же должно считать возможнымъ, а слѣдовательно и движеніе.

Изъ разсмотрѣнія уравненій (B) и (C) движенія жидкихъ тѣлъ заключаемъ, что найденныя нами общія рѣшенія уравненія (B) ограничиваются тѣмъ условіемъ, что скорости v, v, w должны быть такія функціи количествъ x, y, z, t, чтобы формула $Udx+Vdy+Wdz$ была дифференціалъ полный. Но достойно замѣчанія, что сія формула бываетъ полный дифференціалъ въ томъ случаѣ, весьма обширномъ, въ которомъ формула $vdx+vdy+wdz$ есть полный дифференціалъ функціи Φ измѣняемыхъ количествъ x, y, z, t, въ которой t полагается постояннымъ, такъ что не полагая ни одного изъ нихъ постояннымъ, есть

$$d\Phi = vdx + vdy + wdz + rdt.$$

Ибо по причинѣ уравненій

$$\left(\frac{dv}{dy}\right) = \left(\frac{dv}{dx}\right), \left(\frac{dv}{dz}\right) = \left(\frac{dw}{dx}\right), \left(\frac{dv}{dt}\right) = \left(\frac{dr}{dx}\right) \text{ и проч.}$$

выраженія количествъ U, V, W обращаются въ

$$U = \left(\frac{dv}{dx}\right)v + \left(\frac{d\nu}{dx}\right)\nu + \left(\frac{dw}{dx}\right)w + \left(\frac{dr}{dx}\right)$$

$$V = \left(\frac{dv}{dy}\right)v + \left(\frac{d\nu}{dy}\right)\nu + \left(\frac{dw}{dy}\right)w + \left(\frac{dr}{dy}\right)$$

$$W = \left(\frac{dv}{dz}\right)v + \left(\frac{d\nu}{dz}\right)\nu + \left(\frac{dw}{dz}\right)w + \left(\frac{dr}{dz}\right).$$

Поелику въ уравненіи $\frac{dp}{D} = S - Udx - Vdy - Wdz$ время t полагается постояннымъ; то по сему предположенію $\left(\frac{dr}{dx}\right)dx + \left(\frac{dr}{dy}\right)dy + \left(\frac{dr}{dz}\right)dz = dr$; тоже слѣдуетъ и въ разсужденіи скоростей v, ν, w.

По сей причинѣ будетъ

$$Udx + Vdy + Wdz = vdv + \nu d\nu + wdw + dr,$$

или означая дѣйствительную скорость чрезъ u, такъ что $u^2 = v^2 + \nu^2 + w^2$,

$$Udx + Vdy + Wdz = \tfrac{1}{2}du^2 + dr.$$

Въ семъ случаѣ интегралъ уравненія (C) будетъ

$$\int\frac{dp}{D} = S - \tfrac{1}{2}u^2 + r + f(t)$$

Изъ сего усматриваемъ, что давленіе тѣмъ болѣе уменьшается, чѣмъ болѣе квадратъ скорости увеличивается.

Слѣдуетъ теперь узнать тѣ случаи, въ которыхъ формула $vdx + \nu dy + wdz$ бываетъ полный дифференціалъ. Вопервыхъ сія формула бываетъ таковою во все продолженіе движенія или для всѣхъ величинъ времени t, когда она есть полный дифференціалъ при какомъ нибудь извѣстномъ времени, на примѣръ при

t'. Ибо пусть при семъ времени есть

$$vdx + vdy + wdz = d\varphi',$$

такъ что $v = \left(\frac{d\varphi'}{dx}\right)$, $v = \left(\frac{d\varphi'}{dy}\right)$, $w = \left(\frac{d\varphi'}{dz}\right)$ и $\left(\frac{dv}{dy}\right) = \left(\frac{dv}{dx}\right)$, $\left(\frac{dv}{dz}\right) = \left(\frac{dw}{dx}\right)$, $\left(\frac{dv}{dz}\right) = \left(\frac{dw}{dy}\right)$. Въ слѣдующее мгновеніе, то есть при $t' = \tau$, гдѣ τ есть неизмѣримо мало, сіи скорости, по Тейлоровой теоремѣ обратятся въ

$$v + \frac{dv}{dt}\tau, v + \frac{dv}{dt}\tau, w + \frac{dw}{dt}\tau,$$

или въ

$$\left(\frac{d\varphi'}{dx}\right) + v'\tau, \left(\frac{d\varphi'}{dy}\right) + v'\tau, \left(\frac{d\varphi'}{dz}\right) + w'\tau,$$

гдѣ v', v', w' означаютъ величины отношеній $\frac{dv}{dt}$, $\frac{dv}{dt}$, $\frac{dw}{dt}$ при ономъ времени t'; и формула $vdx + vdy + wdz$ обратится въ

$$d\varphi' + (v'dx + v'dy + w'dz)\tau.$$

Слѣдовательно оная формула будетъ полный дифференціалъ, когда формула $v'dx + v'dy + w'dz$ будетъ допускать интегрованіе.

Но естьли въ выраженіяхъ U, V, W поставимъ величины v, v, w, $\left(\frac{dv}{dt}\right)$, $\left(\frac{dv}{dt}\right)$, $\left(\frac{dw}{dt}\right)$ относящіяся ко времени t', то, поелику при x, y, z постоянныхъ, $\frac{dv}{dt} = \left(\frac{dv}{dt}\right)$ и проч., уравненіе (C) обратится въ

$$\frac{dp}{D} = dS - v'dx - v'dy - w'dz - vdv - vdv - wdw;$$

откуда выходитъ

$$v'dx+v'dy+w'dz=dS-\frac{dp}{D}-udu=dS-\frac{dp}{D}-\tfrac{1}{2}d.u^2,$$

полагая $u^2=v^2+v^2+w^2$. И такъ когда D будетъ постоянное или какая ни есть функція количества p; тогда $v'dx+v'dy+w'dz$ будетъ точный дифференціалъ; и слѣдовательно формула $vdx+vdy+wdz$ будетъ интегральна.

Такимъ образомъ мы доказали, что когда формула $vdx+vdy+wdz$ есть точный дифференціалъ въ концѣ времени t', тогда она есть такова же и въ слѣдующее мгновеніе или въ концѣ времени $t'+\tau$. По такой же причинѣ она будетъ точный дифференціалъ и въ концѣ времени $t'+2\tau$, естьли такова для $t'+\tau$; а когда для $t'+2\tau$, то и для $t'+3\tau$. И какъ τ можно брать положительно и отрицательно; то слѣдуетъ, что когда оная формула есть точный дифференціалъ для времени t', то она есть такова для предъидущихъ и послѣдующихъ мгновеній, или для всѣхъ величинъ t.

Когда движеніе жидкаго тѣла считается отъ того мгновенія, въ которое оно начало двигаться, или въ которое оно находилося въ равновѣсіи; тогда для сего мгновенія есть $v=o$, $v=o$ и $w=o$; а посему формула $vdx+vdy+wdz$ въ оное мгновеніе есть точный дифференціалъ; слѣдовательно когда жидкое тѣло начинаетъ двигаться отъ покоя; тогда формула $vdx+vdy+wdz$ есть точный дифференціалъ во все продолженіе движенія.

Формула $vdx+vdy+wdz$ будетъ еще точный дифференціалъ, когда жидкое тѣло въ началѣ движенія или при $t=o$ имѣетъ ту скорость, которую сообщаетъ ему поршень; ибо въ сіе мгновеніе скорости v, v, w будутъ постоянны.

Каково бы ни было начальное состояніе жидкаго тѣла, формула $vdx+vdy+wdz$ будетъ имѣть означенное свойство, когда жид. тѣло будетъ имѣть весьма малыя колебанія, для коихъ въ вычисленіи можно презрѣть квадраты и произведенія скоростей частицъ. Дѣйствительно, при семъ предположеніи уравненія (A) обратятся въ

$$\frac{1}{D}\left(\frac{dp}{dx}\right)=X-\left(\frac{dv}{dt}\right), \frac{1}{D}\left(\frac{dp}{dy}\right)=Y-\left(\frac{dv}{dt}\right), \frac{1}{D}\left(\frac{dp}{dz}\right)=Z-\left(\frac{dw}{dt}\right)$$

изъ коихъ произойдетъ уравненіе

$$\left(\frac{dv}{dt}\right)dx+\left(\frac{dv}{dt}\right)dy+\left(\frac{dw}{dt}\right)dz=dS-\frac{dp}{D};$$

умноживъ его на dt, и взявъ интегралы всѣхъ членовъ въ отношеніи къ t, получимъ

$$vdx+vdy+wdz=\int(dS.\ dt)-\int\left(\frac{dp\ dt}{D}\right)=d\int Sdt-d\int Pdt,$$

полагая $\int\frac{dp}{D}=P$. Слѣдовательно формула $vdx+vdy+wdz$ будетъ полный дифференціалъ функціи $Sdt-Pdt$.

Наконецъ наша формула бываетъ полнымъ дифференціаломъ во всѣхъ тѣхъ случаяхъ, въ которыхъ всѣ частицы жидкаго тѣла чрезъ ту же точку проходящія должны описывать одну и ту же извѣстную линею, шакъ какъ бы онѣ должны были двигаться въ трубкѣ безконечно узкой (которая впрочемъ можетъ имѣть различную ширину) имѣющей кривизну оной линеи. Оная кривая линея дана будетъ чрез функцію координатъ x, y, z. Направленіе движенія будетъ тоже, что и направленіе трубки, посему естьли истинную скорость означимъ чрезъ u и длину дуги въ концѣ времени t чрезъ s, то будетъ

$$v = u\frac{dx}{ds},\ v = u\frac{dy}{ds},\ w = u\frac{dz}{ds};$$

$\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}$ означаютъ, какъ извѣстно, косинусы угловъ составляемыхъ направленіемъ кривой линеи съ осями координатъ. Посему будетъ

$$vdx + vdy + wdz = u\left(\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{ds}\right) = uds.$$

Поелику скорость u можно положить функціею дуги s; то вторая часть сего уравненія допускаетъ интегрованіе. Замѣтимъ, что сей послѣдній случай одинаковъ съ тѣмъ случаемъ, въ которомъ жидкое вещество имѣетъ постоянное теченіе, такъ что всѣ частицы чрезъ ту же точку проходящія описываютъ тотъ же путь. И такъ въ семъ случаѣ оная формула всегда допускаетъ интегрованіе.

Можетъ быть кто усумнится въ томъ, что могутъ ли существовать такія движенія, для коихъ формула $vdx + vdy + wdz$ не есть полный дифференціалъ. Самой простой примѣръ такое сомнѣніе уничтожаетъ; дѣйствительно: пусть жидкое несжимающееся тѣло обращается около неподвижной оси съ постоянною скоростію, не измѣняя своего образа. Въ семъ случаѣ скорости составляющія истинную скорость суть таковы же, какъ естьли бы жидкій составъ образовалъ твердое тѣло. Означимъ угловую скорость въ разстояніи отъ оси вращенія, которая пусть будетъ ось ординатъ z, равномъ единицѣ, чрезъ ϑ; угловая скорость въ разстояніи r отъ оной оси будетъ $r\vartheta$, и будетъ

$$u = -\vartheta y,\ v = \vartheta x,\ w = o;$$

почему формула $udx + vdy + wdz$ обращается здѣсь въ $\vartheta(xdy - ydx)$, что не есть полный дифференціалъ.

Между тѣмъ формула $Udx + Vdy + Wdz$ есть дифференціалъ полный. Ибо въ семъ случаѣ $U = -\vartheta^2 x$, $V = -\vartheta^2 y$, $W = o$; и слѣдовательно

$$Udx + Vdy + Wdx = -\vartheta^2 (xdx + ydy), = -\frac{\vartheta^2}{2} d(x^2 + y^2).$$

Изъ сего слѣдуетъ заключить, что хотя при $udx + vdy + wdz$ полномъ дифференціалѣ и $Udx + Vdy + Wdz$ есть всегда полный дифференціалъ; однако отрицательное предложеніе мѣста не имѣетъ.

Въ заключеніе сей главы замѣтимъ, что когда количества u, v, w опредѣлены будутъ чрезъ функціи количествъ x, y, z, t; тогда положеніе какой ни есть частицы жидкаго тѣла въ каждое мгновеніе будетъ извѣстно, естьли только извѣстно оное въ началѣ движенія. Дѣйствительно, естьли мы будемъ почитать x, y, z принадлежащими той же частицѣ во все продолженіе движенія; то сіи измѣняемыя будутъ тогда функціи времени t; и въ концѣ сего времени скорости оной частицы, параллельныя осямъ координатъ, будутъ выражаться чрезъ $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$; посему будетъ

$$\frac{dx}{dt}=v, \quad \frac{dy}{dt}=\nu, \quad \frac{dz}{dt}=w.$$

По поставленіи вмѣсто v, ν, w ихъ величинъ выраженныхъ чрезъ функціи количествъ x, y, z, t, и по интегрованіи сихъ трехъ дифференціальныхъ уравненій перваго порядка, опредѣлятся величины x, y, z чрезъ функціи времени t. Сіи величины будутъ содержать три постоянныя количества, на прим. a, b, c, которыя найдутся по извѣстнымъ величинамъ x, y, z началу движенія соотвѣтствующимъ. Такимъ образомъ величины x, y, z, къ какому нибудь мгновенію относящіяся, будутъ совершенно опредѣлены; слѣдовательно въ каждое мгновеніе найдется положеніе жидкой частицы, которая имѣла данное положеніе при началѣ движенія.

Естьли чрезъ снесеніе трехъ выраженій величинъ координатъ x, y, z изключимъ время t; то получимъ два уравненія кривой линеи оною частицею описанной. Видъ и положеніе сей линеи для разныхъ частицъ будутъ различны, по причинѣ количествъ a, b, c въ сихъ уравненіяхъ содержащихся, и различныхъ по различнымъ положеніямъ частицъ въ началѣ движенія.

ГЛАВА IV.

О движеніи жидкаго тѣла въ трубкѣ.

Приложимъ предъидущія начала къ движенію жидкаго тѣла въ трубкѣ чрезвычайно тонкой, но не вездѣ равно широкой. Кривизна сей трубки дана посредствомъ двухъ уравненій между координатами x, y, z. Притомъ сія трубка полагается неподвижною.

Пусть въ извѣстномъ мѣстѣ трубки поперечное сѣченіе (т. е. перпендикулярное къ направленію оной въ томъ мѣстѣ) будетъ $=a$; къ концѣ времени t густота въ семъ мѣстѣ $=b$ и скорость $=c$. Какъ бы c и b ни измѣнялися, ихъ измѣненіе зависитъ единственно отъ времени t; почему c и b будутъ функціи одного времени t. Положимъ еще, что въ какомъ ни есть мѣстѣ трубки, опредѣляемомъ координатами x, y, z, поперечное сѣченіе $=o$, которое будетъ функція токмо координатъ x, y, z, не завися отъ времени t; и въ концѣ сего времени густота $=D$ и скорость $=u$. Поелику жидкое тѣло должно быть непрерывное отъ одного мѣста трубки до другаго; то между оными количествами двумъ мѣстамъ соотвѣтствующими должно быть нѣкоторое отношеніе. Найдемъ оное.

Означимъ длину трубки отъ перваго мѣста до втораго чрезъ s. Ясно, что въ концѣ времени t количество жидкаго вещества наполняющаго трубку s есть $=\int Dods$; поелику же въ концѣ времени $t+dt$ густота D перемѣняется въ $D+\left(\frac{dD}{dt}\right)dt$; то количество вещества наполняющаго ту же трубку s въ концѣ времени $t+dt$ будетъ $=\int Dods+dt\int ods\left(\frac{dD}{dt}\right)$; между тѣмъ въ продолженіе dt жидкость подвинется впередъ, съ задняго конца на пространство $=cdt$, а съ передняго на пространство $=udt$ и займетъ длину $=s+udt-cdt=s'$; посему съ одного конца прибавится составъ $=Doudt$, а съ другаго убавится составъ $=bacdt$, такъ что въ концѣ времени $t+dt$ количество жидкаго вещества по длинѣ s' будетъ $=$

$$\int Dods+dt\int ods\left(\frac{dD}{dt}\right)+Doudt-abcdt;$$

и какъ сіе количество должно быть равно прежнему по длинѣ s въ концѣ времени t, то есть количеству $\int Dods$; то выдетъ уравненіе

$$Dou=abc-\int ods\left(\frac{dD}{dt}\right),$$

которое замѣняетъ уравненіе непрерывности: Естьли сего уравненія возмемъ дифференціалъ въ отношеніи къ ds, то получимъ уравненіе:

$$\frac{d(Dou)}{ds}+o\left(\frac{dD}{dt}\right)=o:$$

ибо присемъ составъ $abcdt$ останется тотъ же.

Чтобы произвести второе уравненіе движенія, замѣтимъ, что поелику трубка s полагается линеею неподвижною и выражается двумя функціями координатъ x, y, z; то какъ y такъ и z могутъ выражаться чрезъ функціи количества x, равно и длина $s=$

$\int\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}$ и сѣченіе o; или обратно, количества x, y, z и o можно принимать за функціи одного перемѣннаго s, коего свойство будетъ извѣстно, когда фигура трубки положится данною.

Поелику истинная скорость u имѣетъ направленіе трубки; то скорости ее составлющія суть

$$v=u.\frac{dx}{ds},\ \nu=u.\frac{dy}{ds},\ w=u.\frac{dz}{ds};$$

откуда

$$vdy=\nu dx;\ vdz=wdx,\ \nu dz=wdy,$$

Замѣтимъ, что поелику y и z измѣняются только съ x, такъ что при x постоянномъ y и z не перемѣняются; то, относя все къ измѣняемости количества x, выраженія $\left(\frac{dv}{dy}\right)$, $\left(\frac{dv}{dz}\right)$, $\left(\frac{d\nu}{dy}\right)$ и проч. изчезаютъ, поелику въ нихъ полагаются x и t постоянными; посему мы здѣсь имѣемъ

$$U=\left(\frac{dv}{dx}\right)v+\left(\frac{dv}{dt}\right),\ V=\left(\frac{d\nu}{dx}\right)v+\left(\frac{d\nu}{dt}\right),$$

$$W=\left(\frac{dw}{dx}\right)v+\left(\frac{dw}{dt}\right),$$

такъ что перемѣнныя количества суть только x и t. И такъ здѣсь будетъ

$$Udx+Vdy+Wdz=\left(\frac{dv}{dx}\right)vdx+\left(\frac{d\nu}{dx}\right)vdy+\left(\frac{dw}{dx}\right)vdz$$
$$+\left(\frac{dv}{dt}\right)dx+\left(\frac{d\nu}{dt}\right)dy+\left(\frac{dw}{dt}\right)dz;$$

Но поелику $vdy=\nu dx$ и $vdz=wdx$; то выходитъ

$$\left(\frac{dv}{dx}\right)vdx+\left(\frac{dv}{dx}\right)vdy+\left(\frac{dw}{dx}\right)vdz=\left\{\left(\frac{vdv}{dx}\right)+\left(\frac{vdv}{dx}\right)\right.$$

$$\left.+\left(\frac{wdw}{dx}\right)\right\}dx=\left(\frac{udu}{dx}\right)dx=udu,$$

полагая только x перемѣннымъ или только t постояннымъ.

Потомъ поелику отношеніе $\frac{dx}{ds}$ не зависитъ отъ времени t; то по причинѣ, уравненія $v=u\ \frac{dx}{ds}$ имѣемъ $\left(\frac{dv}{dt}\right)=\left(\frac{du}{dt}\right)\frac{dx}{ds}$. По той же причинѣ $\left(\frac{dv}{dt}\right)=\left(\frac{du}{dt}\right).\frac{dy}{ds}$, $\left(\frac{dw}{dt}\right)=\left(\frac{du}{dt}\right)\frac{dz}{ds}$; и посему

$$\left(\frac{dv}{dt}\right)dx+\left(\frac{dv}{dt}\right)dy+\left(\frac{dw}{dt}\right)dz=\frac{dx^2+dy^2+dz^2}{ds}.\left(\frac{du}{dt}\right)$$

$$=\left(\frac{du}{dt}\right)ds.$$

Такимъ образомъ мы наконецъ находимъ

$$Udx+Vdy+Wdz=\left(\frac{du}{dt}\right)ds+udu,$$

полагая въ членѣ udu время t постояннымъ.

И такъ второе уравненіе движенія здѣсь есть

$$\frac{dp}{D}=Xdx+Ydy+Zdz-\left(\frac{du}{dt}\right)ds-udu,$$

въ которомъ t полагается постояннымъ. Чтобы все отнести къ направленію трубки, то означимъ чрезъ T силу дѣйствующую въ концѣ дуги s по оному направленію; будетъ

$$Tds=Xdx+Ydy+Zdz$$

(см. Основ. Мех. Франкера, стр. 72.)

Посему предъидущее уравненіе обратится въ

$$\frac{dp}{D} = Tds - \left(\frac{du}{dt}\right)ds - udu.$$

Сіе уравненіе совокупно съ найденнымъ выше уравненіемъ $\frac{d(Dou)}{ds} + o\left(\frac{dD}{dt}\right) = o$

служитъ къ полному опредѣленію движенія въ настоящемъ случаѣ.

Естьли бы мы взяли трубку одинакой кривизны или прямую; то бы чрезъ разсужденіе, подобное предъидущему, произвели такія же уравненія. Чрезъ сіе увѣрилися бы, что кривизна трубки не измѣняетъ обстоятельствъ движенія.

Естьли жидкое тѣло есть упругое; то должно положить, что движеніе сдѣлалося постояннымъ, или что въ томъ же мѣстѣ трубки какъ скорость такъ и густота суть всегда тѣже. Въ семъ случаѣ D и u будутъ функціи одного s или x, и посему $\left(\frac{dD}{dt}\right) = o$ и $\left(\frac{du}{dt}\right) = o$; количества b и c будутъ совершенно постоянныя. Посему уравненія движенія здѣсь будутъ

$$Dou = abc;\ \frac{dp}{D} = dS - udu.$$

Естьли густота D пропорціональна упругости p, или естьли $p = \frac{h}{g}D$, такъ что когда густота $= g$, тогда упругость $= h$; то будетъ по интегрованіи

$$\frac{h}{g}. \, log. \, D = S - \tfrac{1}{2} u^2 + C, \text{ или}$$

$$\frac{h}{g} \, log. \, \frac{D}{b} = S + \tfrac{1}{2} (c^2 - u^2),$$

полагая, что интегралъ S изчезаетъ, когда $D = b$.

Здѣсь мы полагали, что теплота по всей длинѣ трубки вездѣ одинакова и что упругость зависитъ только отъ густоты; но естьли теплота не будетъ въ трубкѣ s вездѣ одинакова; то упругость p будетъ зависѣть еще и отъ теплоты. Пусть при густотѣ D степень теплоты всегда $= q$ и при густотѣ b оная $= k$; будетъ $p = \frac{hDq}{gk}$; q дано чрезъ функцію количества s или x.

Отсюда получится $dp = \frac{h}{gk} \, (Ddq + qdD)$ и уравненіе движенія будетъ

$$\frac{h}{gk} \left(dq + \frac{qdD}{D} \right) = dS - udu;$$

по причинѣ же уравненія непрерывности: $Dou = abc$ выходитъ $\frac{dD}{D} = - \frac{do}{o} - \frac{du}{u}$, почему оное уравненіе обратится въ

$$\frac{h}{gk} \left(dq - \frac{qdo}{o} - \frac{qdu}{u} \right) = dS - udu.$$

Возьмемъ, для примѣра, трубку горизонтальную, вездѣ одинаковой ширины, наполненную жидкимъ веществомъ, на которое кромѣ тяжести никакія силы не дѣйствуютъ, Въ семъ случаѣ по причинѣ $o = a$, $do = o$, и $dS = o$, уравненія движенія будутъ

$$Du = bc; \frac{h}{gk}\left(dq - \frac{qdu}{u}\right) = udu.$$

Первое показываетъ, что скорости обратно пропорціональны густотамъ; второе же обращается въ

$$\frac{h}{gk}\left(\frac{udq - qdu}{uu}\right) = -du,$$

чего интегралъ есть

$$\frac{h}{gk}\,\frac{q}{u} = A - u,$$

или, по опредѣленіи постояннаго A,

$$\frac{hq}{gku} = \frac{h}{gc} + c - u;$$

откуда найдется скорость u; потомъ густота $D = \frac{bc}{u}$, и наконецъ упругость или давленіе $p = \frac{hq}{gk} D = \frac{hqc}{gku}.\, b = \frac{hb}{g} + cb\,(c - u)$.

Естьли h будетъ высота барометра въ началѣ трубки и p высота его въ концѣ оной, и обѣ будутъ данныя; то найдется $u = \frac{cbhq}{gkp} = \frac{chq}{kp}$; потому что когда h означаетъ давленіе въ началѣ трубки, тогда g означаетъ густоту въ томъ мѣстѣ, которая означена чрезъ b, и сіе по причинѣ $\frac{p}{h} = \frac{D}{g}$. Съ другой стороны изъ уравненія $p = h + cb\,(c - u)$ находимъ $u = c + \frac{h-p}{cb}$; посему $\frac{chq}{kp} = c + \frac{h-p}{cb}$; откуда найдется

$$c^2 = \frac{kp(h-p)}{b(hq-kp)}.$$

Откуда усматриваемъ, что естьли будетъ $h=p$; то выдетъ $c=o$, а посему и $u=o$; притомъ по причинѣ $D=\frac{cb}{u}=\frac{bkp}{hq}$, будетъ $D=\frac{bk}{q}$, то есть густоты будутъ въ обратномъ отношеніи температуръ. И такъ естьли въ концахъ трубки высоты барометра будутъ одинаковы, то хотя бы теплота въ тѣхъ концахъ была и различна, воздухъ теченія имѣть не будетъ.

Но естьли будетъ $h>p$; то воздухъ будетъ имѣть теченіе въ сторону меньшаго давленія, которое будетъ тѣмъ скорѣе чѣмъ hq будетъ становиться менѣе, а kp болѣе, полагая всегда $hq>kp$, или $\frac{h}{p}>\frac{k}{q}$, или чѣмъ сіи отношенія будутъ болѣе приближаться къ равенству, тѣмъ скорость болѣе приближается къ безконечной.

Естьли бы было $p>h$; то бы вышло

$$c^2 = \frac{kp(p-h)}{b(kp-hq)};$$

тогда воздухъ двигался бы въ противную сторону и при $\frac{p}{h}>\frac{q}{k}=$ пост. имѣлъ бы теченіе постоянное.

Естьли жидкое тѣло есть несжимаемое и вездѣ одинаковой густоты; то уравненіе непрерывности будетъ

$$ou = ac,$$

откуда явствуетъ, что въ такомъ тѣлѣ скорости обратно пропорціональны сѣченіямъ. Естьли бы сѣченія были вездѣ одинаковой величины, то бы скорость была постоянна въ отношеніи къ координатамъ; и измѣнялася бы только со временемъ.

Чтобы произвести второе уравненіе, то замѣтимъ, что поелику y и z опредѣлены чрезъ x, то каковы бы ни были силы X, Y, Z, формула $Xdx+Ydy+Zdz$ всегда есть интегральна. Потомъ, поелику o не зависитъ отъ t, а зависитъ отъ него только c, то изъ уравненія $u = \frac{a}{o}.c$ получится $\left(\frac{du}{dt}\right) = \frac{a}{o}\left(\frac{dc}{dt}\right)$, и выраженіе $\left(\frac{dc}{dt}\right)$ не будетъ зависѣть отъ x или s. Такимъ образомъ второе уравненіе выдетъ

$$\frac{dp}{D} = dS - \frac{a}{o} ds \left(\frac{dc}{dt}\right) - udu;$$

и поелику въ семъ уравненіи время t полагается постояннымъ; то интегралъ его будетъ

$$\frac{p}{D} = S - \left(\frac{dc}{dt}\right)\int\frac{ads}{o} - \tfrac{1}{2}u^2 + ft$$

или

$$\frac{p}{D} = S - \left(\frac{dc}{dt}\right)\int\frac{ads}{o} - \frac{a^2c^2}{2o^2} + ft.$$

Изъ сего уравненія весьма удобно произведется уравненіе движенія воды, изъ какого ни есть сосуда сквозь малое отверстіе вытекающей, основанное на предположеніи параллелизма горизонтальныхъ слоевъ; а изъ сего и всѣ прочія обстоятельства такого движенія. См. *Основанія Механики Франкёра* чл. 323 и слѣдующіе. И такъ обыкновенная теорія движенія жидкихъ тѣлъ есть токмо частный случай общей и строгой теоріи движенія таковыхъ тѣлъ въ тонкихъ трубкахъ. При семъ мы замѣчаемъ, что приложеніе сей общей теоріи къ тому частному случаю дѣлается токмо чрезъ приближеніе, полагая, что всѣ частицы одного и тогожъ слоя имѣютъ скорости равныя и параллельныя такъ что всѣ оныя частицы почитаются какъ бы соединенными въ одну точку.

Положимъ теперь, что сама трубка, въ которой движется жидкое вещество, имѣетъ какое ни есть движеніе. Здѣсь надлежитъ отличать относительное движеніе жидкаго тѣла отъ истиннаго его движенія. Относительное движеніе должно разсматривать такъ, какъ бы трубка находилася въ покоѣ; истинное же движеніе опредѣляется чрезъ сопряженіе относительнаго движенія съ движеніемъ трубки. И такъ истинное движеніе каждой частицы жидкаго тѣла должно состоять изъ ея движенія относительнаго и изъ движенія той части трубки, въ которой она находится.

Побуждающія силы принадлежатъ къ движенію истинному, а не къ относительному. Естьли бы движеніе трубки было таково, что всѣ ея точки стремилися бы съ равными и постоянными скоростями по одинакому направленію, или естьли бы все мѣсто занимаемое трубкою двигалося единообразно по одному направленію; то бы относительное движеніе подлежало тѣмъ же перемѣнамъ, какъ и истинное, и слѣдовательно для истиннаго движенія жидкой частицы потребны бы были такія же ускорительныя силы, какія и для относительнаго. Естьли бы въ семъ случаѣ ускорительныхъ силъ не было, то бы не было и движенія относительнаго, а жидкое вещество двигалося бы съ трубкою такъ, какъ бы составляло съ нею одно твердое тѣло.

И такъ относительное движеніе жидкаго тѣла возмущается потолику, поколику части трубки не движутся единообразно и по тому же направленію. Оно не разнствовало бы отъ истиннаго движенія еще и тогда, когда бы трубка получала такія же ускоренія, какія и жидкое тѣло.

Положимъ, что трубка есть прямая и имѣетъ вмѣстѣ съ жидкимъ веществомъ въ ней содержащемся движеніе единообразное по направленію своей длины. Вообразимъ теперь, что она стала получать ударенія по направленію движенія. Поелику между стѣнами трубки и жидкимъ веществомъ не предполагается никакой связи или сцѣпленія; то за каждымъ удареніемъ жидкое тѣло будетъ подвигаться въ трубкѣ назадъ, такъ какъ бы трубка двигалася единообразно, а оно получало побужденія въ противную сторону. Тоже бы слѣдовало естьли бы трубка сперва имѣла какое ни есть перемѣнное движеніе совершенно одинакое съ жидкимъ веществомъ, и послѣ стала получать одна новыя побужденія. Равнымъ образомъ, естьли бы трубка, въ которой движется жидкое тѣло, сперва находилася въ покоѣ, а потомъ стала получать какія нибудь побужденія; то бы относительное движеніе (или движеніе въ отношеніи къ трубки) жидкаго тѣла получало такія измѣненія, какъ бы оныя побужденія произведены были въ немъ самомъ по противнымъ направленіямъ, а трубка находилася въ покоѣ. Такимъ образомъ настоящій случай можемъ свести на случай предъ симъ разсмотрѣнный, присовокупивъ къ силамъ дѣйствительно побуждающимъ жидкое тѣло силы побуждающія трубку и заставивъ ихъ дѣйствовать въ стороны противныя тѣмъ, въ которыя онѣ дѣйствуютъ на трубку.