

Об одном методе решения краевой задачи N-го
порядка

Г. В. Сузиков, И. В. Воробьев, О. В. Розуменко

Харьковский государственный университет

В работе изучается метод решения краевых задач для обыкновенного дифференциального уравнения порядка N , состоящий в том, что решение "сложной" краевой задачи представляется в виде предела решений "простых" задач — задач Коши для того же уравнения. Основной результат состоит в том, что, по сути, добавление всего одного цикла в программу решения задачи Коши для дифференциального уравнения с простым пересчетом после каждого прохождения, превращает ее в программу решения краевой задачи. Метод чрезвычайно прост и эффективен, имеет широкую область применения.

1. Построение решения краевой задачи

Настоящая работа использует идеи, содержащиеся в [1], [2] и является продолжением работы [3].

Пусть требуется решить краевую задачу:

$$y^{(N)}(x) = f(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(N-1)}(x)), \quad a \leq x \leq b, \quad (1)$$

$$\begin{aligned} y(a) &= A_0, \dots, y^{(k-1)}(a) = A_{k-1}, \\ y^{(k+1)}(a) &= A_{k+1}, \dots, y^{(N-1)}(a) = A_{N-1}, \\ y^{(k-1)}(b) &= B, \end{aligned} \quad (2)$$

где $1 \leq k \leq N-1$ — порядок отсутствующей производной в точке a в краевых условиях, $f: D \rightarrow R$, $D = [a, b] \times R^N$, $y(x)$ — скалярная функция.

Рассмотрим последовательность решений задач Коши:

$$y_n^{(N)}(x) = f(x, y_n(x), y_n'(x), \dots, y_n^{(N-1)}(x)), \quad a \leq x \leq b, \quad (3)$$

$$\begin{aligned} y_n(a) &= A_0, \dots, y_n^{(k-1)}(a) = A_{k-1}, \\ y_n^{(k)}(a) &= -\tilde{\lambda}_n, \\ y_n^{(k+1)}(a) &= A_{k+1}, \dots, y_n^{(N-1)}(a) = A_{N-1}, \end{aligned} \quad (4)$$

$$\tilde{\lambda}_{n+1} = \tilde{\lambda}_n + \rho_n \left(y_n^{(k-1)}(b) - B \right), \quad (5)$$

где $\tilde{\lambda}_0$ выбирается произвольно, а числа $\rho_n > 0$ — параметры метода. Мы покажем, что при весьма общих предположениях последовательность функций $y_n(x)$, определяемых системой (3)–(5), равномерно сходится к решению $y(x)$ исходной краевой задачи (1)–(2), и таким образом решение “сложной” задачи — краевой задачи (1)–(2), представляется в виде предела решений “простых” задач — задач Коши (3)–(5). В самом деле, имеет место следующая

Теорема 1. Пусть краевая задача (1)–(2) имеет решение $y(x)$, функция f непрерывна в D и липшицева по $y, y', \dots, y^{(N-1)}$ в D , то есть

$$\forall (x, y_1, y_1', \dots, y_1^{(N-1)}) \in D, \quad \forall (x, y_2, y_2', \dots, y_2^{(N-1)}) \in D : \\ \left| f(x, y_1, \dots, y_1^{(N-1)}) - f(x, y_2, \dots, y_2^{(N-1)}) \right| \leq L \sum_{i=0}^{N-1} \left| y_1^{(i)} - y_2^{(i)} \right|, \quad (6)$$

где положительная константа L удовлетворяет условию:

1) если $k = N - 1$, то

$$\delta_1 = 1 - L \sum_{l=1}^N (b-a)^l > 0, \quad (7)$$

2) если $k < N - 1$, то

$$\delta_2 = 1 - L \frac{(b-a)^{N-k}}{1-Q} \sum_{l=0}^k (b-a)^l > 0, \quad (8)$$

где

$$Q = L \sum_{l=1}^{N-k-1} (b-a)^l < 1. \quad (9)$$

Тогда при ρ_n , удовлетворяющих соотношению

$$0 < r_0 \leq \rho_n \leq r_1 < \frac{2\delta_i}{b-a}, \quad (10)$$

где индекс i выбирается соответственно порядку k , и при любом начальном значении $\tilde{\lambda}_0$, последовательность решений задач Коши (3)–(5) $y_n(x)$ равномерно на $[a, b]$ сходится при $n \rightarrow \infty$ к решению задачи (1)–(2) $y(x)$.

Доказательство. Так как f непрерывна в D и выполнено (6), то согласно теореме существования и единственности решения задачи Коши существует единственное решение каждой такой задачи (3)–(5) на всем отрезке $[a, b]$, и таким образом соотношения (3)–(5) в самом деле определяют последовательность $y_n(x)$, $n = 0, 1, \dots$

Перепишем условия (2) в виде:

$$\begin{aligned} y(a) &= A_0, \dots, y^{(k-1)}(a) = A_{k-1}, \\ y^{(k+1)}(a) &= A_{k+1}, \dots, y^{(N-1)}(a) = A_{N-1}, \\ \lambda &= \lambda + \rho_n (y^{(k-1)}(b) - B). \end{aligned} \quad (11)$$

Образовав разности (3)–(5) и (1), (11) и положив

$$\begin{aligned} z_n(x) &= y_n(x) - y(x), \quad \lambda_n = \tilde{\lambda}_n - \lambda, \\ \tilde{f}_n &= f(x, y_n(x), \dots, y_n^{(N-1)}(x)) - f(x, y(x), \dots, y^{(N-1)}(x)), \end{aligned} \quad (12)$$

получаем:

$$z_n^{(N)}(x) = \tilde{f}_n, \quad (13)$$

$$\begin{aligned} z_n(a) &= \dots = z_n^{(k-1)}(a) = z_n^{(k+1)}(a) = \dots = z_n^{(N-1)}(a) = 0, \\ z_n^{(k)}(a) &= -\lambda_n, \end{aligned} \quad (14)$$

$$\lambda_{n+1} = \lambda_n + \rho_n z_n^{(k-1)}(b). \quad (15)$$

Далее под нормой будем понимать норму пространства $L_2[a, b]$.

Представляя функцию через интеграл от ее производной, учитывая (14) и применяя неравенство Коши-Буняковского, имеем:

$$\|z_n^{(i)}\| \leq (b-a) \|z_n^{(i+1)}\|, \quad i = 0, 1, \dots, k-1, k+1, \dots, N-1, \quad (16)$$

$$\begin{aligned} |z_n^{(i)}(x)| &\leq \sqrt{b-a} \|z_n^{(i+1)}\|, \quad \forall x \in [a, b], \\ i &= 0, \dots, k-1, k+1, \dots, N-1. \end{aligned} \quad (17)$$

Далее, по формуле Ньютона-Лейбница:

$$z_n^{(k)}(b) - z_n^{(k)}(a) = \int_a^b z_n^{(k+1)}(x) dx, \quad (18)$$

и поскольку

$$(z_n^{(k-1)}(x) z_n^{(k)}(x))' = (z_n^{(k)}(x))^2 + z_n^{(k-1)}(x) z_n^{(k+1)}(x),$$

то

$$z_n^{(k-1)}(b) z_n^{(k)}(b) = \|z_n^{(k)}\|^2 + \int_a^b z_n^{(k-1)}(x) z_n^{(k+1)}(x) dx. \quad (19)$$

Используя соотношения (14), (15), (18) и (19), получаем:

$$\begin{aligned} \lambda_n^2 - \lambda_{n+1}^2 &= 2\rho_n z_n^{(k)}(a) z_n^{(k-1)}(b) - \rho_n^2 z_n^{(k-1)}(b)^2 = 2\rho_n z_n^{(k-1)}(b) z_n^{(k)}(b) - \\ &- 2\rho_n z_n^{(k-1)}(b) \int_a^b z_n^{(k+1)}(x) dx - \rho_n^2 z_n^{(k-1)}(b)^2 = 2\rho_n \|z_n^{(k)}\|^2 + \\ &+ 2\rho_n \int_a^b z_n^{(k-1)}(x) z_n^{(k+1)}(x) dx - 2\rho_n z_n^{(k-1)}(b) \int_a^b z_n^{(k+1)}(x) dx - \rho_n^2 z_n^{(k-1)}(b)^2 = \end{aligned}$$

$$= 2\rho_n \left[\|z_n^{(k)}\|^2 - \int_a^b \int_x^b z_n^{(k)}(t) dt z_n^{(k+1)}(x) dx \right] - \rho_n^2 z_n^{(k-1)}(b)^2. \quad (20)$$

Далее возможны два случая:

1) случай: $k = N - 1$.

Используя свойства интеграла, неравенство (6) и оценки (16)–(17) легко устанавливаем, что:

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b \left[\int_x^b z_n^{(N-1)}(t) dt \right] \tilde{f}_n dx \right| &\leq L(b-a) \|z_n^{(N-1)}\| \sum_{l=0}^{N-1} \|z_n^{(l)}\| \leq \\ &\leq L(b-a) \|z_n^{(N-1)}\|^2 \sum_{l=0}^{N-1} (b-a)^l. \end{aligned} \quad (21)$$

Тогда положив

$$\gamma_1(n) = 2\rho_n \left[1 - L \sum_{l=1}^N (b-a)^l - \frac{\rho_n}{2} (b-a) \right], \quad (22)$$

из (20) получаем:

$$\lambda_n^2 - \lambda_{n+1}^2 \geq \gamma_1(n) \|z_n^{(N-1)}\|^2. \quad (23)$$

Так как выполнено условие (7) и параметры метода ρ_n удовлетворяют условию (10), то, очевидно, $\gamma_1(n) > 0$.

Следовательно, мы получили последовательность невозрастающих неотрицательных чисел λ_n^2 . Значит, она имеет предел, и следовательно, $\lambda_n^2 - \lambda_{n+1}^2 \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Кроме того, в силу (10) и (23)

$$\lambda_n^2 - \lambda_{n+1}^2 \geq 2r_0(\delta_1 - 0, 5r_1(b-a)) \|z_n^{(N-1)}\|^2,$$

где $2r_0(\delta_1 - 0, 5r_1(b-a)) > 0$, следовательно $\|z_n^{(N-1)}\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Из (12), (16) и (17) получаем:

$$|y_n(x) - y(x)| = |z_n(x)| \leq \sqrt{b-a} \|z_n'\| \leq \dots \leq (b-a)^{N-1,5} \|z_n^{(N-1)}\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

равномерно на $[a, b]$.

В этом случае теорема доказана.

2) случай: $k < N - 1$

Положим $\alpha = \int_a^b \left[\int_x^b z_n^{(k)}(t) dt \right] z_n^{(k+1)}(x) dx$. Тогда используя неравенство Коши-Буняковского и краевые условия на левом конце (14), легко получаем:

$$|\alpha| \leq \sqrt{b-a} \|z_n^{(k)}\| \int_a^b |z_n^{(k+1)}(x)| dx = \sqrt{b-a} \|z_n^{(k)}\| \int_a^b \left| \int_a^x z_n^{(k+2)}(t) dt \right| dx \leq$$

$$\leq (b-a)^{1,5} \|z_n^{(k)}\| \int_a^b |z_n^{(k+2)}(x)| dx \leq \dots \leq (b-a)^{N-k-0,5} \|z_n^{(k)}\| \int_a^b |z_n^{(N)}(x)| dx.$$

Используя теперь (13), определение $\tilde{f}_n$ (12), условие Липшица (6), и далее применяя неравенство Коши-Буняковского и аналогично повышая порядок производной через интеграл, имеем:

$$\begin{aligned} |\alpha| &\leq L(b-a)^{N-k-0,5} \|z_n^{(k)}\| \int_a^b \sum_{l=0}^{N-1} |z_n^{(l)}(x)| dx \leq \\ &\leq L(b-a)^{N-k-0,5} \|z_n^{(k)}\| \left[\sqrt{b-a} \sum_{l=0}^k \|z_n^{(l)}\| + \int_a^b |\tilde{f}_n| dx \sum_{l=1}^{N-k-1} (b-a)^l \right]. \end{aligned}$$

Подставляя теперь рекуррентно оценку для $\int_a^b |\tilde{f}_n| dx$, имеем:

$$\begin{aligned} |\alpha| &\leq L(b-a)^{N-k} \|z_n^{(k)}\| \sum_{l=0}^k \|z_n^{(l)}\| + \\ &+ L^2(b-a)^{N-k-0,5} \|z_n^{(k)}\| \sum_{l=1}^{N-k-1} (b-a)^l \times \\ &\times \left[\sqrt{b-a} \sum_{l=0}^k \|z_n^{(l)}\| + \int_a^b |\tilde{f}_n| dx \sum_{l=1}^{N-k-1} (b-a)^l \right] \leq \\ &\leq \dots \leq L(b-a)^{N-k} \|z_n^{(k)}\| \sum_{l=0}^k \|z_n^{(l)}\| \sum_{i=0}^{\infty} \left[L \sum_{j=1}^{N-k-1} (b-a)^j \right]^i. \end{aligned}$$

Поскольку выполнено (9), то справедлива следующая оценка:

$$\left| \int_a^b \int_x^b z_n^{(k)}(t) dt z_n^{(k+1)}(x) dx \right| \leq \frac{L(b-a)^{N-k}}{1-Q} \sum_{l=0}^k (b-a)^l \|z_n^{(k)}\|^2. \quad (24)$$

Полагая

$$\gamma_1(n) = 2\rho_n \left[1 - \frac{L(b-a)^{N-k}}{1-Q} \sum_{l=0}^k (b-a)^l - \frac{\rho_n}{2} (b-a) \right], \quad (25)$$

из (20) теперь снова получаем оценку (23) с $\gamma_1(n)$, определенным в (25). И таким образом, поскольку выполнено (8), и параметры метода ρ_n удовлетворяют (10), то аналогично 1-му случаю получаем, что решения последовательности задач Коши (3)–(5) равномерно сходятся к решению краевой задачи (1)–(2), то есть

$$|y_n(x) - y(x)| \leq (b-a)^{k-0,5} \|z_n^{(k)}\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \quad \text{равномерно на } [a, b].$$

Теорема полностью доказана.

2. Оценка скорости сходимости

Теорема 2. Пусть выполнены условия теоремы 1 и пусть

1) если $k = N - 1$, то

$$\rho_n = \rho^* = \frac{1}{b-a} - L \sum_{l=0}^{N-1} (b-a)^l = \frac{\delta_1}{b-a}, \quad (26)$$

2) если $k < N - 1$, то

$$\rho_n = \rho^* = \frac{1}{b-a} - \frac{L(b-a)^{N-k-1}}{1-Q} \sum_{l=0}^k (b-a)^l = \frac{\delta_2}{b-a} \quad (27)$$

оптимальные параметры метода и имеет место оценка

$$|y_n(x) - y(x)| \leq C\varepsilon^n, \quad (28)$$

где

$$C = \sqrt{\frac{\lambda_0^2}{\gamma_1^*} (b-a)^{2k-1}}, \quad \varepsilon = \sqrt{1 - \frac{\gamma_1^*}{\gamma_2^*}}, \quad (29)$$

причем здесь

1) если $k = N - 1$, то

$$\gamma_1^* = \frac{1}{b-a} \left[1 - L \sum_{l=1}^N (b-a)^l \right]^2 = \frac{(\delta_1)^2}{b-a}, \quad (30)$$

$$\gamma_2^* = \frac{1}{b-a} \left[1 + L \sum_{l=1}^N (b-a)^l \right]^2 = \frac{(2 - \delta_1)^2}{b-a}, \quad (31)$$

2) если $k < N - 1$, то

$$\gamma_1^* = \frac{1}{b-a} \left[1 - \frac{L(b-a)^{N-k}}{1-Q} \sum_{l=0}^k (b-a)^l \right]^2 = \frac{(\delta_2)^2}{b-a}, \quad (32)$$

$$\gamma_2^* = \frac{1}{b-a} \left[1 + \frac{L(b-a)^{N-k}}{1-Q} \sum_{l=0}^k (b-a)^l \right]^2 = \frac{(2 - \delta_2)^2}{b-a}, \quad (33)$$

и $C \geq 0$, $0 < \varepsilon < 1$, и таким образом решения последовательности задач Коши (3)–(5) сходятся равномерно на $[a, b]$ к решению граничной задачи (1)–(2) со скоростью геометрической прогрессии.

Доказательство. 1) случай: $k = N - 1$

Аналогично неравенству (21) можно получить, что:

$$\int_a^b |\tilde{f}_n| dx \leq L\sqrt{b-a} \sum_{l=0}^{N-1} (b-a)^l \|z_n^{(N-1)}\| = \eta.$$

Так как $\forall x \in [a, b]$

$$\lambda_n = z_n^{(N-1)}(x) - \int_a^x \tilde{f}_n dt,$$

то, применяя неравенство треугольника, находим:

$$|\lambda_n| \leq |z_n^{(N-1)}(x)| + \eta.$$

Откуда, интегрируя от a до b и применяя неравенство Коши-Буняковского, получаем:

$$(b-a)|\lambda_n| \leq \sqrt{b-a} \|z_n^{(N-1)}\| + (b-a)\eta.$$

Возводя это неравенство в квадрат и учитывая (31), получаем, что

$$\lambda_n^2 \leq \gamma_2^* \|z_n^{(N-1)}\|^2. \quad (34)$$

2) случай: $k < N-1$

Аналогично неравенству (24) можно получить, что

$$\left| \int_a^b z_n^{(k+1)}(x) dx \right| \leq L\sqrt{b-a} \frac{(b-a)^{N-k-1}}{1-Q} \sum_{l=0}^k (b-a)^l \|z_n^{(k)}\| = \eta.$$

Применяя неравенство треугольника, находим:

$$|\lambda_n| \leq |z_n^{(k)}(x)| + \eta.$$

Откуда, интегрируя, получаем:

$$(b-a)|\lambda_n| \leq \sqrt{b-a} \|z_n^{(k)}\| + (b-a)\eta.$$

Возводя это неравенство в квадрат и учитывая (33), получаем соответствующее неравенство (34).

Возвращаясь к общему случаю, из (34) и (23) следует, что

$$\lambda_n^2 - \lambda_{n+1}^2 \geq \gamma_1(n) \|z_n'\|^2 \geq \frac{\gamma_1(n)}{\gamma_2^*} \lambda_n^2.$$

Откуда окончательно получаем скорость сходимости для начальных условий:

$$\lambda_{n+1}^2 \leq \left(1 - \frac{\gamma_1(n)}{\gamma_2^*}\right) \lambda_n^2 \leq \lambda_0^2 \prod_{k=0}^n \left(1 - \frac{\gamma_1(k)}{\gamma_2^*}\right), \quad (35)$$

что при $\rho_n = \rho^*$ (см. (26), (27)) дает $\gamma_1(n) = \gamma_1^*$ и соответствующую оценку

$$\lambda_n^2 \leq \left(1 - \frac{\gamma_1^*}{\gamma_2^*}\right)^n \lambda_0^2, \quad (36)$$

причем $0 < \frac{\gamma_1^*}{\gamma_2^*} = \frac{\delta_i^2}{(2-\delta_i)^2} < 1$, так как $0 < \delta_i < 1$.

Заметим, что наиболее быстрая оценка для убывания в (35) получается тогда, когда $\gamma_1(n)$ как функция от ρ_n принимает максимальное значение. Поскольку $\gamma_1(n)$ (см. (22), (25)) квадратный многочлен относительно ρ_n с отрицательным старшим коэффициентом, то его максимум (γ_1^* из (30), (32)) лежит посередине между его корнями (при $\rho_n = \rho^*$ из (26), (27)), и поэтому, оценка (36) в определенном смысле наилучшая.

Получим теперь скорость сходимости для решений. Из (16)–(17) и (23) следует:

$$\begin{aligned} |y_n(x) - y(x)|^2 &= |z_n(x)|^2 \leq (b-a)^{2k-1} \|z_n^{(k)}\|^2 \leq \frac{(b-a)^{2k-1}}{\gamma_1^*} (\lambda_n^2 - \lambda_{n+1}^2) \leq \\ &\leq \frac{(b-a)^{2k-1}}{\gamma_1^*} \lambda_n^2 \leq \frac{\lambda_0^2}{\gamma_1^*} (b-a)^{2k-1} \left(1 - \frac{\gamma_1^*}{\gamma_2^*}\right)^n, \end{aligned}$$

откуда и получаем необходимую оценку (28). Теорема доказана.

3. Существование решения и оценка погрешности вычислений

Теорема 3. Пусть в задаче (1)–(2) функция f непрерывна в D , удовлетворяет условию Липшица (6), и пусть

1) если $k = N - 1$, то выполнено (7),

2) если $k < N - 1$, то выполнено (8).

Тогда краевая задача (1)–(2) имеет решение, которое можно получить как предел решений задач Коши (3)–(5) с произвольным $\tilde{\lambda}_0$ и любыми ρ_n , удовлетворяющими условию (10).

Если задана точность вычислений ε_0 , то условие выхода из итераций есть

$$\frac{|\tilde{\lambda}_{n+1} - \tilde{\lambda}_n|}{1 - \varepsilon} \sqrt{\frac{(b-a)^{2k-1}}{\gamma_1^*}} < \varepsilon_0, \quad (37)$$

при $\rho_n = \rho^*$ из теоремы 2. Константы ε , γ_1^* и γ_2^* также определены в теореме 2.

Доказательство. Покажем, что последовательность решений задач Коши (3)–(5) $\{y_n(x)\}_{n=0}^\infty$ при $\rho_n = \rho^*$ (см. (26), (27)) сходится к решению задачи (1)–(2).

Введем обозначения:

$$\begin{aligned} z_n(x) &= y_{n+1}(x) - y_n(x), \quad \lambda_n = \tilde{\lambda}_{n+1} - \tilde{\lambda}_n, \\ \tilde{f}_n &= f(x, y_{n+1}(x), \dots, y_{n+1}^{(N-1)}(x)) - f(x, y_n(x), \dots, y_n^{(N-1)}(x)). \end{aligned} \quad (38)$$

Тогда из (3)–(5) и (38) получаем:

$$z_n^{(N)}(x) = \tilde{f}_n, \quad (39)$$

$$\begin{aligned} z_n(a) &= \dots = z_n^{(k-1)}(a) = 0, \\ z_n^{(k)}(a) &= -\lambda_n, \\ z_n^{(k+1)}(a) &= \dots = z_n^{(N-1)}(a) = 0, \end{aligned} \quad (40)$$

$$\lambda_{n+1} = \lambda_n + \rho^* z_n^{(k-1)}(b). \quad (41)$$

Таким образом, задача (39)–(41) эквивалентна задаче (13)–(15), а значит для нее справедливы все соответствующие формулы.

Из (29) и (36) следует:

$$(\lambda_n)^2 \leq \varepsilon^2 (\lambda_{n-1})^2 \leq \varepsilon^{2n} (\lambda_0)^2,$$

то есть

$$|\tilde{\lambda}_{n+1} - \tilde{\lambda}_n| \leq \tilde{C} \varepsilon^n, \quad 0 < \varepsilon < 1, \quad (42)$$

где

$$\tilde{C} = |\tilde{\lambda}_1 - \tilde{\lambda}_0|.$$

Из (42), очевидно, для любого натурального $p > 0$, имеем:

$$|\tilde{\lambda}_{n+p} - \tilde{\lambda}_n| \leq \frac{\tilde{C} \varepsilon^n}{1 - \varepsilon}. \quad (43)$$

Следовательно, последовательность $\{\tilde{\lambda}_n\}_{n=0}^{\infty}$ фундаментальна, и тем самым существует конечный предел:

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{\lambda}_n = \lambda.$$

Таким образом (см. например [4]), в силу непрерывной зависимости решения задачи Коши от начальных данных, предельное решение $y(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n(x)$ задачи (3)–(5) удовлетворяет уравнению (1) и начальным условиям на левом конце.

Переходя к пределу в (5) при $n \rightarrow \infty$ и учитывая, что $\rho_n = \rho^* > 0$, получаем:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n(b) = y(b) = B.$$

Следовательно, предельное решение есть решение исходной краевой задачи (1)–(2).

Рассмотренный выше метод позволяет найти условие выхода из итераций для обеспечения заданной точности вычислений ε_0 . По аналогии с выводом (28) и учитывая, что

$$|\tilde{\lambda}_{n+1} - \tilde{\lambda}_n| \leq \varepsilon |\tilde{\lambda}_n - \tilde{\lambda}_{n-1}|,$$

можно получить:

$$|y_{n+p}(x) - y_n(x)|^2 \leq \left[\sum_{k=n}^{n+p-1} |z_k(x)| \right]^2 \leq (\tilde{\lambda}_{n+1} - \tilde{\lambda}_n)^2 \frac{(b-a)^{2k-1}}{\gamma_1^* (1-\varepsilon)^2}.$$

Устремляя $p \rightarrow \infty$, получаем условие выхода из итераций (37). Теорема доказана.

4. Единственность решения

Теорема 4. Пусть в задаче (1)-(2) функция f непрерывна в D , удовлетворяет условию Липшица (6), и пусть выполнено условие

$$L(b-a) \left[\sum_{i=0}^{N-1} (b-a)^i + \frac{1}{\sqrt{3}} \sum_{i=N-k-1}^{N-1} (b-a)^i \right] < 1. \quad (44)$$

Тогда краевая задача (1)-(2) имеет не более одного решения.

Доказательство. От противного. Составляя разность двух различных решений $y_1(x)$ и $y_2(x)$ и обозначая

$$\begin{aligned} u(x) &= y_1(x) - y_2(x), \\ \hat{f} &= f(x, y_1(x), \dots, y_1^{(N-1)}(x)) - f(x, y_2(x), \dots, y_2^{(N-1)}(x)), \end{aligned} \quad (45)$$

получаем задачу для разности

$$u^{(N)}(x) = \hat{f}, \quad a \leq x \leq b, \quad (46)$$

$$u(a) = \dots = u^{(k-1)}(a) = u^{(k+1)}(a) = \dots = u^{(N-1)}(a) = u^{(k-1)}(b) = 0. \quad (47)$$

Аналогично (16)-(17), справедливы следующие оценки:

$$\|u^{(i)}\| \leq (b-a) \|u^{(i+1)}\|, \quad i = 0, \dots, k-1, k+1, \dots, N-1, \quad (48)$$

$$\begin{aligned} |u^{(i)}(x)| &\leq \sqrt{b-a} \|u^{(i+1)}\|, \quad \forall x \in [a, b], \\ i &= 0, \dots, k-1, k+1, \dots, N-1. \end{aligned} \quad (49)$$

Так как

$$\begin{aligned} 0 &= u^{(k-1)}(b) - u^{(k-1)}(a) = \int_a^b u^{(k)}(x) dx = xu^{(k)}(x) \Big|_a^b - \int_a^b xu^{(k+1)}(x) dx = \\ &= b(u^{(k)}(b) - u^{(k)}(a)) + (b-a)u^{(k)}(a) - \int_a^b xu^{(k+1)}(x) dx = \\ &= (b-a)u^{(k)}(a) + \int_a^b (b-x)u^{(k+1)}(x) dx, \end{aligned}$$

и следовательно, $u^{(k)}(a) = -\frac{1}{b-a} \int_a^b (b-x)u^{(k+1)}(x) dx$, то применяя неравенство Коши-Буняковского и замечая, что

$$\int_a^b (b-x)^2 dx = \frac{(b-a)^3}{3},$$

получаем следующую оценку:

$$|u^{(k)}(a)| \leq \frac{\sqrt{b-a}}{\sqrt{3}} \|u^{(k+1)}\|.$$

Далее, применяя неравенство Коши-Буняковского, находим:

$$|u^{(k)}(x)| \leq |u^{(k)}(a)| + \left| \int_a^x u^{(k+1)}(x) dx \right| \leq \sqrt{b-a} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \|u^{(k+1)}\|, \quad (50)$$

$$\forall x \in [a, b].$$

Возведя (50) в квадрат, интегрируя от a до b и извлекая корень, получим:

$$\|u^{(k)}\| \leq (b-a) \left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \|u^{(k+1)}\|, \quad (51)$$

Используя неравенство (6), а также неравенства (48)–(51), находим:

$$\begin{aligned} |u^{(N)}(x)| &\leq L \sum_{i=0}^{N-1} |u^{(i)}(x)| \leq L\sqrt{b-a} \sum_{i=1}^k \|u^{(i)}\| + \\ &+ L\sqrt{b-a} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \|u^{(k+1)}\| + L\sqrt{b-a} \sum_{i=k+2}^N \|u^{(i)}\| \leq \\ &\leq L\sqrt{b-a} \sum_{i=0}^{k-1} (b-a)^i \|u^{(k)}\| + L\sqrt{b-a} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \|u^{(k+1)}\| + \\ &+ L\sqrt{b-a} \sum_{i=0}^{N-k-2} (b-a)^i \|u^{(N)}\| \leq L\sqrt{b-a} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \times \\ &\times \sum_{i=0}^k (b-a)^i \|u^{(k+1)}\| + L\sqrt{b-a} \sum_{i=0}^{N-k-2} (b-a)^i \|u^{(N)}\| \leq \\ &\leq L\sqrt{b-a} \left[\left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \sum_{i=N-k-1}^{N-1} (b-a)^i + \sum_{i=0}^{N-k-2} (b-a)^i \right] \|u^{(N)}\|. \end{aligned}$$

Возводя полученное неравенство в квадрат, интегрируя от a до b и извлекая квадратный корень, получаем:

$$\|u^{(N)}\| \leq L(b-a) \left[\left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \sum_{i=N-k-1}^{N-1} (b-a)^i + \sum_{i=0}^{N-k-2} (b-a)^i \right] \|u^{(N)}\|.$$

Следовательно, поскольку выполнено (44), имеем $\|u^{(N)}\| = 0$, откуда $u^{(N)}(x) \equiv 0$, $\forall x \in [a, b]$. Следовательно, $u(x) = \sum_{i=0}^{N-1} c_i x^i$. Возможны два случая:

1) случай: $k = N - 1$. Тогда продифференцировав $u(x)$ $(k - 1)$ раз, из (47) получим:

$$\left. \begin{aligned} u^{(k-1)}(a) &= k!c_k a + (k-1)!c_{k-1} = 0 \\ u^{(k-1)}(b) &= k!c_k b + (k-1)!c_{k-1} = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow c_k = c_{k-1} = 0.$$

2) случай: $k < N - 1$. Тогда дифференцируем $u(x)$ $N - 1$ раз:

$$u^{(N-1)}(a) = (N-1)!c_{N-1} = 0 \Rightarrow c_{N-1} = 0.$$

Таким образом, из индукции будет следовать, что $c_i = 0$, $i = 0, \dots, N - 1$, поскольку последовательно дифференцируя i раз $u(x)$ мы будем иметь только что рассмотренные два случая для этих i .

Следовательно, $u(x) \equiv 0$, $\forall x \in [a, b]$. Мы пришли к противоречию. Теорема доказана.

5. Заключение

Отметим, что предложенный в работе алгоритм (3)–(5) решения краевой задачи (1)–(2) чрезвычайно прост в практической реализации. В самом деле, добавляя к программе решения задачи Коши (3)–(4) всего один цикл с пересчетом после каждого прохождения по формуле (5), мы получаем программу решения краевой задачи (1)–(2).

Нами было проведено большое число численных экспериментов, которые показали, что метод высокоэффективен и что область его применения значительно шире, чем это было установлено в теоремах 1 и 2. На практике этим методом можно решить фактически любую краевую задачу вида (1)–(2), возможно, после нескольких “неудачных” попыток выбора λ_0 и ρ_n .

ЛИТЕРАТУРА

1. Гловински Р. Г., Лионс Ж.Л., Тремольер Р. Численное исследование вариационных неравенств. – М.: Мир, 1979. – 574 с.
2. Сузиков Г. В. Об одном новом методе решения краевых задач. // Тр. Междунар. конф. “Ляпуновские чтения”. – Харьков: – 1992. – С. 157–158.
3. Сузиков Г. В., Воробьев И. В., Розуменко О. В. Об одном методе решения краевой задачи 2-го порядка // Вестн. Харьк. ун-та. Сер. математика, прикладная математика и механика. – 1999. – 444. – С. 61–70.
4. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – М.: Гос. изд. физ.-мат. литературы, 1961. – 704 с.

К теореме Вимана-Валирона

И. И. Марченко

Харьковский государственный университет

Исследуется влияние числа разделенных точек максимума модуля целой функции на окружности $\{z : |z| = r\}$ на неравенство Вимана-Валирона.

Пусть f — целая функция,

$$M(r, f) = \max_{|z|=r} |f(z)|, \quad \mu(r, f) = \min_{|z|=r} |f(z)|.$$

Теорема Вимана-Валирона [1, 2] утверждает, что если f — целая функция порядка $\rho < 1$, то

$$\limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\log \mu(r, f)}{\log M(r, f)} \geq \cos \pi \rho. \quad (1)$$

В 1960 году Б. Чельберг [3] доказал неравенство (1) для целых функций нижнего порядка $\lambda < 1$.

В работах [4, 5] мы ввели и исследовали число разделенных точек максимума модуля целой функции на окружности $\{z : |z| = r\}$. Напомним основные определения. Пусть $p(r)$ — число составляющих интервалов на множестве $\{\varphi : |f(re^{i\varphi})| > 1\}$, в каждом из которых есть точка максимума модуля функции f на окружности $\{z : |z| = r\}$,

$$p = \liminf_{r \rightarrow \infty} p(r).$$

В настоящей работе мы исследуем влияние этой величины на неравенство (1). Основным результатом работы является следующая теорема.

Теорема 1 Пусть f — целая функция конечного нижнего порядка $\lambda \leq \frac{p}{2}$. Тогда

$$\limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\log \mu(r, f)}{\log M(r, f)} \geq \cos \frac{\pi \lambda}{p}.$$

При $p \geq 2$ неравенство в теореме 1 уточняет неравенство (1).

Доказательство теоремы 1 основывается на неравенстве типа Гаришпи-Льюиса [6] для T^* -функции Бернштейна, доказанное нами в работе [4]. Напомним определение T^* -функции Бернштейна [7].

$$T^*(r, \theta, f) = T^*(re^{i\theta}) = \sup_{|E|=2\theta} \frac{1}{2\pi} \int_E \log |f(re^{i\varphi})| d\varphi,$$

где $r \in (0, \infty)$, $\theta \in [0, \pi]$, $|E|$ — лебеговская мера множества E . Легко видеть, что

$$T^*(re^{i\theta}) = \frac{1}{\pi} \int_0^\theta \tilde{u}(re^{i\varphi}) d\varphi,$$

где $\tilde{u}(z)$ — круговая перестройка функции $\log |f(z)|$ [8]. Основным свойством T^* является её субгармоничность в верхней полуплоскости [6].

Далее определим величину

$$h(r, f, \lambda) = h(r, f, \lambda, \alpha, \psi, p) := \log \max_{|z|=r} |f(z)|^p \cos \frac{\lambda\psi}{p} - \\ - \frac{\pi\lambda}{p} T^*(r, \alpha, f) \sin \frac{\lambda(\alpha + \psi)}{p} - \tilde{u}(re^{i\alpha}) \cos \frac{\lambda(\alpha + \psi)}{p}.$$

В работе [4] мы доказали неравенство, которое здесь сформулируем в виде леммы.

Лемма А Пусть f — целая функция конечного нижнего порядка λ . Тогда при $0 < \alpha \leq \min \left\{ \pi, \frac{\pi p}{2\lambda} \right\}$, $-\frac{\pi p}{2\lambda} \leq \psi \leq \frac{\pi p}{2\lambda} - \alpha$ справедливо неравенство

$$\int_{S_k}^{R_k} \frac{h(r, f, \lambda)}{r^{\lambda+1}} dr < \varepsilon \int_{S_k}^{R_k} \frac{\log M(r, f)}{r^{\lambda+1}} dr \quad (k \rightarrow \infty),$$

где $\varepsilon > 0$ — произвольное число, S_k, R_k — некоторые последовательности, стремящиеся к бесконечности такие, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{R_k}{S_k} = \infty.$$

Пусть $\lambda \leq \frac{p}{2}$. В лемме А положим $\alpha = \pi$, $\psi = -\alpha$. Тогда

$$h(r, f, \lambda) = \log M(r, f) \cos \frac{\pi\lambda}{p} - \log \mu(r, f). \quad (2)$$

Следовательно, в силу леммы А существует последовательность $r_k \in [2S_k, R_k]$ такая, что

$$h(r_k, f, \lambda) < \varepsilon \log M(r_k, f) \quad (k \rightarrow \infty). \quad (3)$$

Подставляя (2) в (3), имеем

$$\log M(r_k, f) \cos \frac{\pi \lambda}{p} - \log \mu(r_k, f) < \varepsilon \log M(r_k, f).$$

Отсюда

$$\limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\log \mu(r, f)}{\log M(r, f)} \geq \cos \frac{\pi \lambda}{p} - \varepsilon.$$

В силу произвольности числа $\varepsilon > 0$ приходим к утверждению теоремы 1.

ЛИТЕРАТУРА

1. Valiron G. Sur les fonctions entières d'ordre nul et d'ordre fini et en particulier les fonctions à correspondance régulière // Ann.fac.sci.Univ.Toulouse – 1914. – 5. – P. 117–257.
2. Wiman A. Über eine Eigenschaft der ganzen Funktionen von der Höhe Null // Mat.Ann. – 1915. – 76. – P. 197–211.
3. Kjellberg B. On the minimum modulus of entire functions of lower order less than one // Math.Scand. – 1960. – V. 8 – P. 189–197.
4. Марченко И.И. О величинах отклонений и протяжений мероморфных функций конечного нижнего порядка // Матем.сб. – 1995. – Т. 186, 3. – С. 85–102.
5. Марченко И.И. О росте целых и мероморфных функций // Матем.сб. – 1998. – Т. 189, 6. – С. 59–85.
6. Gariepy R., Lewis I.L. Space analogues of some theorems for subharmonic and meromorphic functions // Ark.Math. – 1975. – V. 13, 1. – P. 91–105.
7. Baernstein A. Proof of Edrei's conjecture // Proc.London Math. Soc. – 1973. – V. 26, 3. – P. 418–434.
8. Хейман У.К. Многолистные функции. М.: ИЛ, 1960.

Использование метода суперэлементов для расчета
напряженно-деформированного состояния оболочек
вращения

Т. И. Левицкая

Запорожский государственный университет

Применение метода суперэлементов для составных оболочек вращения позволило разработать эффективный алгоритм нахождения их напряженно-деформированного состояния. Построение локальной матрицы жесткости для элемента кольцевого типа дало возможность рассматривать как шпангоуты оболочечного типа, так и шпангоуты кольцевого типа, размеры поперечного сечения которых малы по сравнению с их радиусом. Проведен ряд расчетов для сравнения влияния формы шпангоутов на напряженное состояние оболочек.

Для расчета напряженного состояния замкнутой оболочки вращения при осесимметричном нагружении будем использовать систему дифференциальных уравнений [2]:

$$\begin{cases} \sin \varphi \cdot N_S + r \cdot \frac{dN_S}{ds} - \sin \varphi N_\theta - \frac{r}{r_1} Q_S + r q_s = 0, \\ \sin \varphi \cdot Q_S + r \cdot \frac{dQ_S}{ds} + \frac{r}{r_1} N_S + \cos \varphi N_\theta - r q_\zeta = 0, \\ \sin \varphi \cdot M_S + r \cdot \frac{dM_S}{ds} - \sin \varphi M_\theta + r Q_S = 0, \end{cases} \quad (1)$$

где

$$N_S = D_N (\varepsilon_s + \nu \varepsilon_\theta), \quad M_S = D_M (\chi_s + \nu \chi_\theta), \quad D_N = Eh / (1 - \nu^2),$$

$$N_\theta = D_N (\nu \varepsilon_s + \varepsilon_\theta), \quad M_\theta = D_M (\nu \chi_s + \chi_\theta), \quad D_M = Eh^3 / (12 \cdot (1 - \nu^2)),$$

$$\varepsilon_s = \frac{dU}{ds} + \frac{W}{r_1}, \quad \varepsilon_\theta = \frac{\sin \varphi}{r} U + \frac{\cos \varphi}{r} W,$$

$$\chi_s = \frac{d\theta_S}{ds}, \quad \chi_\theta = \frac{\sin \varphi}{r} \theta_S, \quad \theta_S = -\frac{dW}{ds} + \frac{U}{r_1}. \quad (2)$$

В формулах (1), (2) E — модуль Юнга, ν — коэффициент Пуассона, h — толщина оболочки, r_1 — радиус кривизны меридианной линии, q_s, q_ζ — касательная и нормальная составляющие поверхностной нагрузки.

Введем неизвестные $y_1 = N_S$ — растягивающее усилие, $y_2 = Q_S$ — поперечное усилие, $y_3 = M_S$ — изгибающий момент, $y_4 = U$, $y_5 = W$ — перемещения, $y_6 = -\theta_S$ — угол поворота нормали.

При этом система (1) приводится к нормальной системе обыкновенных дифференциальных уравнений относительно неизвестных функций, которая примет вид:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{dy_1}{ds} &= -\frac{\sin \varphi}{r} (1 - \nu) y_1 + \frac{1}{r_1} y_2 + \frac{\sin^2 \varphi}{r^2} D_N (1 - \nu^2) y_4 + \\ &\quad + \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{r^2} D_N (1 - \nu^2) y_5 - q_s, \\ \frac{dy_2}{ds} &= \left(-\frac{1}{r_1} - \frac{\nu \cos \varphi}{r} \right) y_1 - \frac{\sin \varphi}{r} y_2 - \frac{\cos \varphi \sin \varphi}{r^2} D_N (1 - \nu^2) y_4 - \\ &\quad - \frac{\cos^2 \varphi}{r^2} D_N (1 - \nu^2) y_5 + q_\zeta, \\ \frac{dy_3}{ds} &= -y_2 - \frac{\sin \varphi}{r} (1 - \nu) y_3 - \frac{\sin^2 \varphi}{r^2} D_M (1 - \nu^2) y_6, \\ \frac{dy_4}{ds} &= \frac{1}{D_N} y_1 - \nu \frac{\sin \varphi}{r} y_4 - \left(\frac{1}{r_1} + \frac{\nu \cos \varphi}{r} \right) y_5, \\ \frac{dy_5}{ds} &= \frac{1}{r_1} y_4 + y_6, \\ \frac{dy_6}{ds} &= -\frac{1}{D_M} y_3 - \nu \frac{\sin \varphi}{r} y_6. \end{aligned} \right. \quad (3)$$

Срединную линию поверхности будем задавать в параметрической форме:

$$\left\{ \begin{aligned} x &= x(t) \\ y &= y(t) \end{aligned} \right., \quad (t_0 \leq t \leq t_1) \quad (4)$$

Функции, входящие в систему (3), определяются при этом по формулам

$$\begin{aligned} \sin \varphi &= \frac{x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}; & \cos \varphi &= \frac{y'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}; \\ \frac{1}{r_1} &= \frac{x''y' - y''x'}{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}; & ds &= \sqrt{x'^2 + y'^2} dt. \end{aligned} \quad (5)$$

Применим метод суперэлементов, который использует алгоритм метода ко-

нечных элементов, однако позволяет рассматривать более протяженные оболочки. Для построения локальных матриц жесткости суперэлементов используем метод Годунова решения систем дифференциальных уравнений, имеющего повышенную точность решения [3]. Этого удалось достичь за счет ортогонализации промежуточных решений.

Чтобы построить локальную матрицу жесткости суперэлемента следует решить ряд краевых двухточечных задач для однородной системы

$$\frac{1}{B} \frac{dy}{dt} = Ay : \quad (6)$$

$$\begin{array}{lll} y_4(t_0) = 1 & y_4(t_0) = 0 & y_4(t_0) = 0 \\ y_5(t_0) = 0 & y_5(t_0) = 1 & y_5(t_0) = 0 \\ y_6(t_0) = 0 & y_6(t_0) = 0 & y_6(t_0) = 0 \\ 1) \quad y_4(t_1) = 0, & 2) \quad y_4(t_1) = 0, \dots, & 6) \quad y_4(t_1) = 0 \\ y_5(t_1) = 0 & y_5(t_1) = 0 & y_5(t_1) = 0 \\ y_6(t_1) = 0 & y_6(t_1) = 0 & y_6(t_1) = 1 \end{array} \quad (7)$$

Здесь $y^T = (y_1 \dots y_6)$, $B = \sqrt{x'^2 + y'^2}$, A — линейный оператор системы (3).

Первый столбец локальной матрицы жесткости $\bar{k}^e$ заполнится как вектор решений для 1-го варианта условий, второй — для варианта 2, ..., шестой столбец будет соответствовать 6-му варианту задач (6), (7).

Решением неоднородной задачи

$$\frac{1}{B} \frac{dy}{dt} = Ay + q \quad (8)$$

при нулевых граничных условиях $y_4(t_0) = 0$, $y_5(t_0) = 0$, $y_6(t_0) = 0$, $y_4(t_1) = 0$, $y_5(t_1) = 0$, $y_6(t_1) = 0$ находится вектор усилий, действующих на левом и на правом краях в локальной системе координат этих краев, который будет иметь вид:

$$\bar{f}^e = \left(f_1^e \ f_2^e \ f_3^e \ f_4^e \ f_5^e \ f_6^e \right)^T, \quad (9)$$

где $q^T = (-q_s \ q_c \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)$ действующая нагрузка.

Для формирования глобальной матрицы жесткости и векторов силовых нагрузок следует построить локальные матрицы жесткости и усилий в узлах для глобальной системы координат. Это преобразование совершается по формулам:

$$\begin{aligned} k^e &= T^T \cdot \bar{k}^e \cdot T \cdot \theta \\ f^e &= -T^T \cdot \bar{f}^e \cdot T \cdot \theta \end{aligned} \quad (10)$$

где

$$T = \begin{pmatrix} \cos \varphi_0 & \sin \varphi_0 & & & 0 \\ -\sin \varphi_0 & \cos \varphi_0 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \cos \varphi_1 & \sin \varphi_1 \\ & 0 & & -\sin \varphi_1 & \cos \varphi_1 \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}, \quad (11)$$

$$\theta = 2\pi \begin{pmatrix} -R_0 & & & & \\ & R_0 & & & 0 \\ & & R_0 & & \\ & & & R_1 & \\ & 0 & & & -R_1 \\ & & & & & -R_1 \end{pmatrix}.$$

Здесь $\cos \varphi_0$, $\sin \varphi_0$, $\cos \varphi_1$, $\sin \varphi_1$, $R_0 = y(t_0)$, $R_1 = y(t_1)$ — функции, найденные по формулам (4), (5) для начального и конечного узла суперэлемента.

Матрица θ появляется вследствие учета реакций суперэлемента на концах. Разрешающая система линейных алгебраических уравнений для нахождения перемещений в местах стыка оболочечных суперэлементов будет иметь вид:

$$K \cdot \sigma = f, \quad (12)$$

где $K = \sum_e' k^e$ — глобальная матрица жесткости, $f = \sum_e' f^e$ — глобальный вектор усилий, $\sigma^T = (U_1, W_1, -\theta_{S1}, \dots, U_k, W_k, -\theta_{Sk})$ — глобальные перемещения в местах стыка. Знак $\sum'$ означает процесс ансамблирования, используемый в методе конечных элементов [4].

Эта методика позволила рассматривать шпангоуты как оболочечные конструкции. В случае, когда размеры шпангоутов малы по сравнению с их радиусами, то можно для учета их влияния воспользоваться узловыми локальными матрицами жесткости. Эти матрицы были построены с использованием результатов [1] при рассмотрении Z-образного шпангоута. В глобальной системе координат они имеют вид

$$k_r = 2\pi \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{EF}{R} & -\frac{aFE}{R} \\ 0 & -\frac{aFE}{R} & \frac{EJ_y + a^2FE}{R} \end{pmatrix}, \quad (13)$$

где E — модуль Юнга, F — площадь сечения, R — радиус оболочки в узловой точке, J_y — момент инерции относительно оси Oy , проходящей через центр масс сечения, a — отклонение узловой точки от центра масс шпангоута.

Локальная матрица k_r добавляется в матрицу K также методом ансамблирования.

Наличие симметрии в локальных матрицах жесткости обеспечивает симметрию глобальной матрицы и для решения (12) можно использовать матричные операции с ленточными матрицами. После решения системы, будем иметь перемещения в глобальной системе координат в местах стыка суперэлементов.

Для нахождения напряженного состояния суперэлемента из глобального решения σ выбираются перемещения на его концах σ^e и затем они пересчитываются в перемещения в локальной системе координат

$$\overline{\sigma^e} = T \cdot \sigma^e. \quad (14)$$

После чего решается соответствующая неоднородная двухточечная крайняя задача (6) с условиями:

$$\begin{aligned} y_4(t_0) &= \overline{\sigma_1^e}, & y_5(t_0) &= \overline{\sigma_2^e}, & y_6(t_0) &= \overline{\sigma_3^e}, \\ y_4(t_1) &= \overline{\sigma_4^e}, & y_5(t_1) &= \overline{\sigma_5^e}, & y_6(t_1) &= \overline{\sigma_6^e}, \end{aligned} \quad (15)$$

где $\overline{\sigma_1^e}, \dots, \overline{\sigma_6^e}$ — элементы матрицы $\overline{\sigma^e}$.

Для рассматриваемой методики был разработан пакет прикладных программ.

Для сравнительного анализа были сделаны расчеты напряженно-деформированного состояния цилиндрических оболочек: 1) без шпангоутов, 2) с пластинчатым шпангоутом оболочечного типа, 3) с прямоугольным шпангоутом кольцевого типа, имеющим характеристики случая 2, 4) Z-образный шпангоут. В случаях 3 и 4 при расчете использовалась локальная матрица жесткости (13). Вид шпангоутов и их геометрические характеристики представлены на рис. 1. Цилиндрическая оболочка и шпангоуты изготовлены из материала с $E = 2.1 \cdot 10^5$ МПа — модуль Юнга, $\nu = 0.3$ — коэффициент Пуассона. Толщина оболочки $h = 0.03$ м. Левый край оболочки свободен, правый — зашпелен. Оболочка нагружена нормальным давлением $q_z = 200$ Н/м².

Указанные выше варианты просчитаны для данных: $r = 1$ м, $l = 0.5$ м, $h = 0.03$ м, $a = -0.0275$ м, $b = 0.2$ м, $c = 0.14$ м, $d = 0.12$ м.

Z-образный шпангоут имеет площадь поперечного сечения такую же, как и шпангоуты 2, 3.

Результаты расчетов прогиба W , поперечного усилия Q_S и изгибающего момента M_S в зависимости от расстояния точек срединной поверхности от левого торца оболочки приведены на рис. 2.

Из сравнения видно, что результаты расчетов оболочечной конструкции (2) и оболочки со шпангоутом кольцевого типа (3) практически совпадают. Таким образом, имеется возможность рассчитывать оболочки со шпангоутами произвольного сечения, например, случай 4, близко примыкающих к поверхности оболочки.

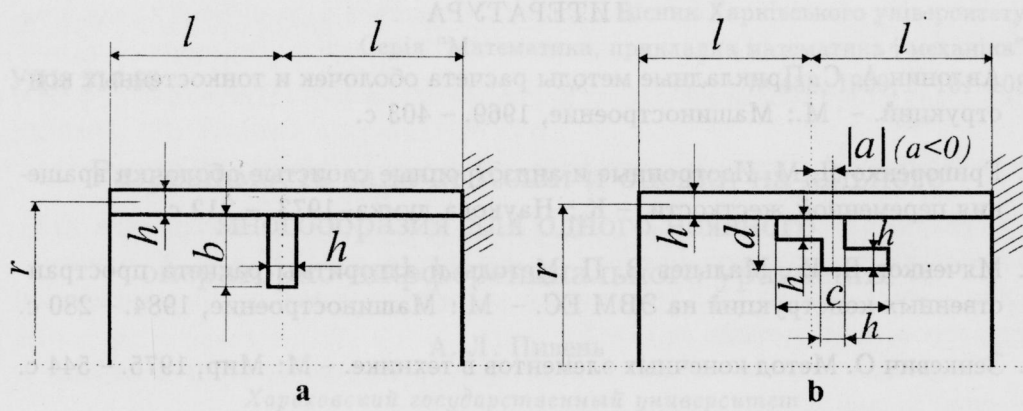


Рис. 1: Геометрические характеристики цилиндрической оболочки со шпангоутами: а – кольцеобразного типа (сл.2,3), б – z-образный шпангоут (сл.4).

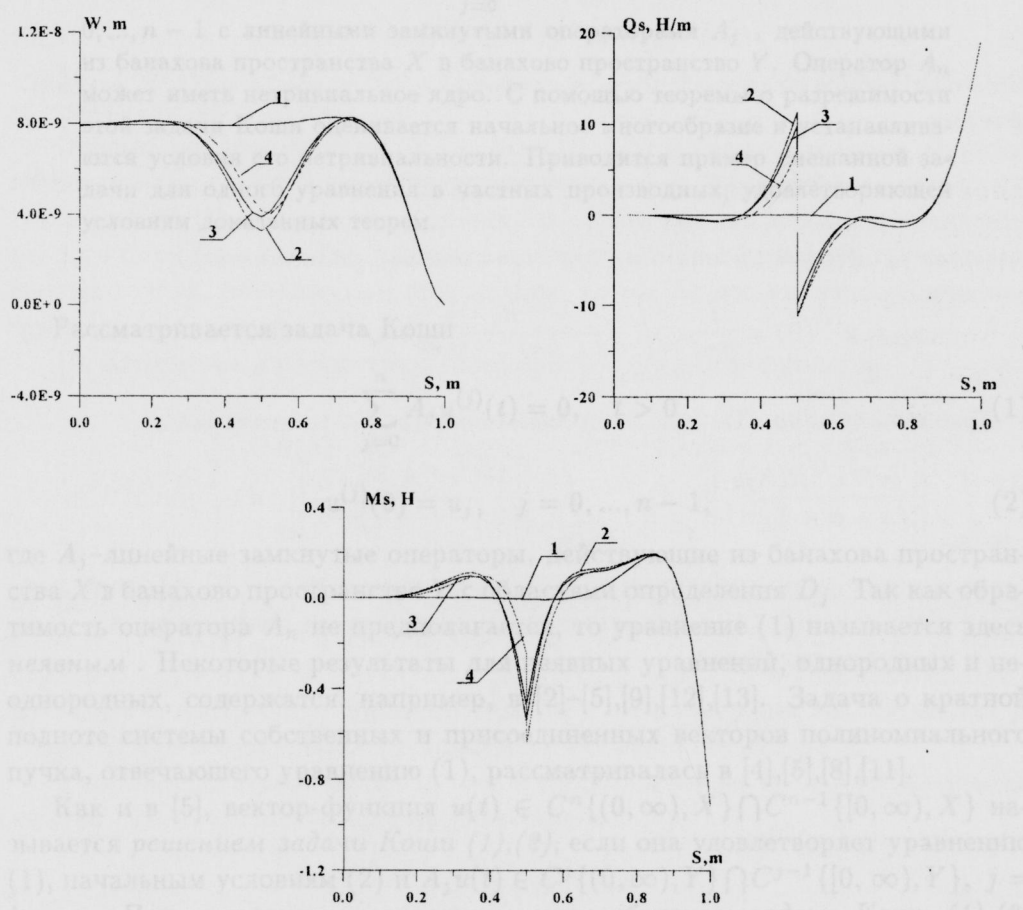


Рис. 2: Результаты расчетов $W(S)$, $Q_s(S)$ и $M_s(S)$ для различных типов шпангоутов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Авдонин А. С. Прикладные методы расчета оболочек и тонкостенных конструкций. — М.: Машиностроение, 1969. — 403 с.
2. Григоренко Я. М. Изотропные и анизотропные слоистые оболочки вращения переменной жесткости. — К.: Наукова думка, 1973. — 212 с.
3. Мяченков В. И., Мальцев В. П. Методы и алгоритмы расчета пространственных конструкций на ЭВМ ЕС. — М.: Машиностроение, 1984. — 280 с.
4. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. — М: Мир, 1975. — 544 с.

После чего вычисляются соответствующая неоднородная двухточечная краевая задача для функции W и однородная трехточечная краевая задача для функции Q_2 . Геометрические характеристики цилиндрической оболочки (рис. 1) — радиус R , высота H , толщина h — заданы. Внутренний радиус r определяется по формуле $r = R - h$. Коэффициент Пуассона ν задан. Для рассматриваемой оболочки приняты следующие значения параметров: $R = 1$ м, $H = 0.5$ м, $h = 0.03$ м, $\nu = 0.3$. Модуль Юнга $E = 2.1 \cdot 10^5$ МПа. Для оболочки приняты следующие значения параметров: $a = -0.0275$ м, $b = 0.2$ м, $c = 0.14$ м, $d = 0.12$ м. Оболочка нагружена нормальным давлением $q = 200$ Н/м². Указанные выше варианты просчетов для данных: $r = 1$ м, $l = 0.5$ м, $h = 0.03$ м, $a = -0.0275$ м, $b = 0.2$ м, $c = 0.14$ м, $d = 0.12$ м.

Z-образный шпангоут имеет площадь поперечного сечения такую же, как и шпангоуты 2, 3.

Результаты расчетов прогиба W , поперечного усилия Q_2 и изгибающего момента M_x в зависимости от расстояния точек срединной поверхности от левого торца оболочки приведены на рис. 2.

Из сравнения видно, что результаты расчетов оболочечной конструкции (2) и оболочки со шпангоутом кольцевого типа (3) практически совпадают. Таким образом, имеется возможность рассчитывать оболочки со шпангоутами произвольного сечения, например, в случае 4 можно принять шпангоут в поперечном сечении в виде Z-образной формы (рис. 2). Результаты расчетов $W(2)$, $Q_2(2)$ и $M_x(2)$ для оболочки (2) приведены на рис. 2.

Разрешимость задачи Коши и оценки начального
многообразия для одного неявного
операторно-дифференциального уравнения

А. Л. Пивень

Харьковский государственный университет

Рассматривается задача Коши $\sum_{j=0}^n A_j u^{(j)}(t) = 0, t > 0; u^{(j)}(0) = u_j, j = 0, \dots, n-1$ с линейными замкнутыми операторами A_j , действующими из банахова пространства X в банахово пространство Y . Оператор A_n может иметь нетривиальное ядро. С помощью теоремы о разрешимости этой задачи Коши оценивается начальное многообразие и устанавливаются условия его нетривиальности. Приводится пример смешанной задачи для одного уравнения в частных производных, удовлетворяющей условиям доказанных теорем.

Рассматривается задача Коши

$$\sum_{j=0}^n A_j u^{(j)}(t) = 0, \quad t > 0 \quad (1)$$

$$u^{(j)}(0) = u_j, \quad j = 0, \dots, n-1, \quad (2)$$

где A_j – линейные замкнутые операторы, действующие из банахова пространства X в банахово пространство Y с областями определения D_j . Так как обратимость оператора A_n не предполагается, то уравнение (1) называется здесь *неявным*. Некоторые результаты для неявных уравнений, однородных и неоднородных, содержатся, например, в [2]–[5], [9], [12], [13]. Задача о кратной полноте системы собственных и присоединенных векторов полиномиального пучка, отвечающего уравнению (1), рассматривалась в [4], [5], [8], [11].

Как и в [5], вектор-функция $u(t) \in C^n\{(0, \infty), X\} \cap C^{n-1}\{[0, \infty), X\}$ называется *решением задачи Коши (1), (2)*, если она удовлетворяет уравнению (1), начальным условиям (2) и $A_j u(t) \in C^j\{(0, \infty), Y\} \cap C^{j-1}\{[0, \infty), Y\}, j = 1, \dots, n$. Под *n-кратным начальным многообразием задачи Коши (1), (2)* понимается множество всех векторов $\{u_j\}_{j=0}^{n-1} \in X^n = X \times \dots \times X$, для которых задача разрешима. *Подпространством решений Λ задачи Коши (1), (2) (n-кратным)* называется замыкание начального многообразия в X^n

[5]. Через X_j обозначается замыкание (в X) векторов $u_j = u^{(j)}(0)$ (2) для всех решений уравнения (1). С уравнением (1) связывается операторный пучок $L(\lambda) = \sum_{j=0}^n \lambda^j A_j$, определенный на $D_L = \bigcap_{j=0}^n D_j \neq \{0\}$. Пусть $E = \bigcap_{j=1}^n D_j$ —

банахово пространство с нормой $\|x\|_E = \|x\|_X + \sum_{j=1}^n \|A_j x\|_Y$. На множестве

ρ регулярных точек пучка $L(\lambda)$ ($R(\lambda) = L^{-1}(\lambda) \in [Y, X]$) резольвента $R(\lambda)$ голоморфна как оператор-функция со значениями из $[Y, E]$ и $[Y, X]$ одновременно. Здесь символ $[Y, X]$ обозначает множество линейных ограниченных операторов, действующих из Y в X .

Следующая теорема описывает некоторое множество начальных данных и решений задачи Коши (1), (2).

Теорема 1. *Предположим, что прямая $\operatorname{Re} \lambda = \alpha$ состоит из регулярных точек пучка $L(\lambda)$ и при некотором целом $m \geq -n$ на этой прямой выполняется оценка*

$$\|R(\lambda)\|_{[Y, E]} \leq C_0(1 + |\lambda|^m), \quad C_0 > 0. \quad (3)$$

Тогда для любого целого $p \geq 2n + m$, любого $l \in \{0, \dots, n-1\}$ и $y \in Y$ вектор-функция

$$u(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\operatorname{Re} \lambda = \alpha} \frac{\lambda^l e^{\lambda t} R(\lambda) y}{(\lambda - \alpha - 1)^{p+1}} d\lambda, \quad y \in Y \quad (4)$$

является решением уравнения (1) с начальными условиями

$$u_j = u^{(j)}(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\operatorname{Re} \lambda = \alpha} \frac{\lambda^{j+l} R(\lambda) y}{(\lambda - \alpha - 1)^{p+1}} d\lambda, \quad j = 0, \dots, n-1. \quad (5)$$

Доказательство. Так как выполнена оценка (3), то интегралы

$$\int_{\operatorname{Re} \lambda = \alpha} \left\| \frac{\lambda^{j+l} e^{\lambda t} R(\lambda) y}{(\lambda - \alpha - 1)^{p+1}} \right\|_X d\lambda, \quad \int_{\operatorname{Re} \lambda = \alpha} \left\| \frac{\lambda^{j+l} e^{\lambda t} A_j R(\lambda) y}{(\lambda - \alpha - 1)^{p+1}} \right\|_Y d\lambda, \quad j = 1, \dots, n$$

сходятся равномерно относительно t на каждом сегменте $[0, T]$. Отсюда для вектор-функции $u(t)$ (4) с использованием замкнутости операторов A_j , $j = 1, \dots, n$ получаем равенства

$$u^{(j)}(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\operatorname{Re} \lambda = \alpha} \frac{\lambda^{j+l} e^{\lambda t} R(\lambda) y}{(\lambda - \alpha - 1)^{p+1}} d\lambda, \\ A_j u^{(j)}(t) = (A_j u)^{(j)}(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\operatorname{Re} \lambda = \alpha} \frac{\lambda^{j+l} e^{\lambda t} A_j R(\lambda) y}{(\lambda - \alpha - 1)^{p+1}} d\lambda, \quad j = 1, \dots, n, \quad t > 0.$$

Имеем

$$\sum_{j=1}^n A_j u^{(j)}(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\operatorname{Re} \lambda = \alpha} \frac{\lambda^l e^{\lambda t} y}{(\lambda - \alpha - 1)^{p+1}} d\lambda - A_0 u(t), \quad t > 0.$$

В силу леммы Жордана $\int_{\operatorname{Re} \lambda = \alpha} \frac{\lambda^l e^{\lambda t} y}{(\lambda - \alpha - 1)^{p+1}} d\lambda = 0, \quad t > 0$. Таким образом, вектор-функция $u(t)$ (4) является решением задачи Коши (1), (2) с начальными данными (5). Теорема доказана.

Очевидно, имеет место система включений

$$X_{n-1} \subset X_{n-2} \subset \dots \subset X_0. \quad (6)$$

В общем случае подпространства X_j не совпадают. Однако если $0 \in \varrho$, то имеют место равенства $X_0 = \dots = X_{n-1}$. Действительно, пусть $u(t)$ — решение уравнения (1). Тогда вектор-функция

$$v(t) = \int_0^t u(s) ds - R(0) \sum_{j=1}^n A_j u^{(j-1)}(0)$$

также является решением уравнения (1) с $v^{(j)}(0) = u^{(j-1)}(0)$ ($j = 1, \dots, n$). Отсюда следует, что $X_j \subset X_{j+1}$ ($j = 0, \dots, n-2$) и в силу системы включений (6) получаем $X_0 = \dots = X_{n-1}$.

Опишем подпространства $X_j (\subset X)$, $\Lambda (\subset X^n)$ и укажем условия нетривиальности начального многообразия, отправляясь от соответствующих результатов работы [7] для явного уравнения и работы [2] для неявного уравнения первого порядка. Так как понижение порядка в уравнении (1) приводит к, вообще говоря, незамкнутым операторам, то мы не можем непосредственно применить эти результаты.

На множестве ϱ рассмотрим голоморфные оператор-функции

$$F_{jk}(\lambda) = \begin{cases} \lambda^j R(\lambda) \sum_{l=0}^{n-k-1} \lambda^l A_{l+k+1} - \lambda^{j-k-1} I, & 0 \leq k < j \leq n-1 \\ \lambda^j R(\lambda) \sum_{l=0}^{n-k-1} \lambda^l A_{l+k+1}, & 0 \leq j \leq k \leq n-1 \end{cases} \quad (7)$$

со значениями в $[E, E]$. С их помощью введем блочную оператор-функцию $F(\lambda) = \{F_{jk}(\lambda)\}_{j,k=0}^{n-1}$ со значениями в $[E^n, E^n]$ ($E^n = E \times \dots \times E$) и блочстроки $F_j(\lambda) = (F_{j0}(\lambda), F_{j1}(\lambda), \dots, F_{jn-1}(\lambda))$, $j = 0, \dots, n-1$ со значениями в $[E^n, E]$. По построению функции $F(\lambda)$, $F_j(\lambda)$ голоморфны на множестве ϱ . Через $\Re(A)$ мы будем обозначать область значений оператора A .

Теорема 2. Предположим, что в полуплоскости $\operatorname{Re} \lambda \geq \alpha$ выполнена оценка (3). Тогда имеют место равенства

$$\Lambda = \overline{\Re(F^{(p)}(\lambda))}, \quad (8)$$

$$X_j = \overline{\Re(F_j^{(p)}(\lambda))}, \quad j = 0, \dots, n-1 \quad (9)$$

для каждого $p \geq 2n + t$ и каждого $\lambda \in \varrho$.

Замечание. В формуле (8) черта обозначает замыкание в X^n , а в формулах (9) – замыкание в X . Производные $F^{(p)}(\lambda)$, $F_j^{(p)}(\lambda)$ берутся в нормах пространств $[E^n, E^n]$, $[E^n, E]$ соответственно.

Доказательство. В силу теоремы о вычетах соотношения (5) записываются в виде

$$u_j = \frac{1}{p!} \frac{d^p}{d\lambda^p} (\lambda^{j+l} R(\lambda) y) |_{\lambda=\alpha+1}.$$

Отсюда с учетом определения $F(\lambda)$ получаем $\Re(F^{(p)}(\alpha+1)) \subset \Lambda$. Теперь докажем обратное включение $\Lambda \subset \Re(F^{(p)}(\alpha+1))$. Обозначим через D_ν множество n -кратных начальных значений $\{u^{(j)}(0)\}_{j=0}^{n-1}$ для всех решений $u(t)$ уравнения (1) класса $C^\nu\{[0, \infty), E\}$, $\nu = 2n - 2$. Так как любое решение аппроксимируется гладкими решениями класса $C^\nu\{[0, \infty), E\}$ в норме $C^{n-1}\{[0, T], X\}$ [5], то $\Lambda = \overline{D_\nu}$, где замыкание берется в норме X^n . Для всех $\lambda \in \varrho$ и $t \geq 0$ справедливо следующее соотношение (см. формулу (6) в [5]):

$$\begin{aligned} \int_0^t u(s) e^{-\lambda s} ds &= R(\lambda) \sum_{m=1}^n \sum_{k=0}^{m-1} \lambda^{m-1-k} A_m u^{(k)}(0) - \\ &- e^{-\lambda t} R(\lambda) \sum_{m=1}^n \sum_{k=0}^{m-1} \lambda^{m-1-k} A_m u^{(k)}(t). \end{aligned} \quad (10)$$

С помощью (10) и интегрирования по частям получаем при $j = 0, \dots, n-1$

$$\begin{aligned} \int_0^t u^{(j)}(s) e^{-\lambda s} ds &= \lambda^j R(\lambda) \sum_{m=1}^n \sum_{k=0}^{m-1} \lambda^{m-1-k} A_m u^{(k)}(0) - \sum_{k=0}^{j-1} \lambda^{j-1-k} u^{(k)}(0) - \\ &- e^{-\lambda t} \left(\lambda^j R(\lambda) \sum_{m=1}^n \sum_{k=0}^{m-1} \lambda^{m-1-k} A_m u^{(k)}(t) - \sum_{k=0}^{j-1} \lambda^{j-1-k} u^{(k)}(t) \right). \end{aligned} \quad (11)$$

Для каждого решения $u(t) \in C^\nu\{[0, \infty), E\}$ рассмотрим вектор-функцию $\bar{u}(t) = \{u^{(j)}(t)\}_{j=0}^{n-1}$ со значениями в X^n . С учетом определения (7) соотношения (10), (11) записываются в виде:

$$\int_0^t \bar{u}(s) e^{-\lambda s} ds = F(\lambda) \bar{u}(0) - e^{-\lambda t} F(\lambda) \bar{u}(t).$$

Отсюда следует, что

$$F(\lambda) \bar{u}(t) = e^{\lambda t} \left(F(\lambda) \bar{u}(0) - \int_0^t \bar{u}(s) e^{-\lambda s} ds \right), \quad \lambda \in \varrho, \quad t \geq 0.$$

Дифференцируя по t , получим

$$\frac{d}{dt} F(\lambda) \bar{u}(t) = \lambda F(\lambda) \bar{u}(t) - \bar{u}(t). \quad (12)$$

Подставляя в (12) $t = 0$, $\lambda = \alpha + 1$, получаем включение $D_\nu \subset \overline{F(\lambda)(D_\nu)}$. Отсюда

$$\Lambda \subset \overline{F(\alpha + 1)(D_\nu)}. \quad (13)$$

Продифференцируем (12) q раз по λ ($q = 1, 2, \dots$) и положим $\lambda = \alpha + 1$:

$$\frac{d}{dt} F^{(q)}(\alpha + 1) \bar{u}(t) = (\alpha + 1) F^{(q)}(\alpha + 1) \bar{u}(t) + q F^{(q-1)}(\alpha + 1) \bar{u}(t), \quad t \geq 0.$$

Поэтому $F^{(q)}(\alpha + 1)(D_\nu) \subset \overline{F^{(q+1)}(\alpha + 1)(D_\nu)}$ при всех целых $q \geq 0$. Отсюда и из (13) получаем, что $\Lambda \subset \overline{F^{(q)}(\alpha + 1)(D_\nu)} \subset \mathfrak{R}(F^{(q)}(\alpha + 1))$.

Следовательно, $\Lambda = \mathfrak{R}(F^{(p)}(\alpha + 1))$. Непосредственные вычисления показывают, что при $\lambda, \mu \in \rho$ справедливо тождество $F(\lambda) - F(\mu) = (\mu - \lambda)F(\mu)F(\lambda)$ (ср. тождество Гильберта для линейного пучка [9]). Поэтому $\frac{1}{p!} F^{(p)}(\lambda) \equiv (-1)^p F^{p+1}(\lambda)$. Следовательно, область значений $F^{(p)}(\lambda)$ не зависит от выбора $\lambda \in \rho$. Таким образом, соотношение (8) доказано. Из этого соотношения следует, что при каждом $\lambda \in \rho$ и целом $p \geq 2n + m$ множество векторов вида $\sum_{k=0}^{n-1} F_{jk}^{(p)}(\lambda) u_k$, $u_k \in E$ плотно в X_j . Поэтому выполнены равенства (9). Теорема доказана.

Замечание. В конечномерном пространстве любое решение уравнения (1) представляет собой линейную комбинацию решений, построенных по формуле (4).

Из теоремы 2 получаем следующий признак нетривиальности начального многообразия.

Следствие 1. Пусть выполнены условия теоремы 2. Начальное многообразие задачи Коши (1), (2) нетривиально в том и только в том случае, когда все производные $R(\lambda)$ со значениями в $[Y, X]$ не равны тождественно нулю на ρ .

Доказательство. Из теоремы 2 следует, что если $R^{(p)}(\lambda) \equiv 0$ при некотором $p > 0$, то $\Lambda = \{0\}$. Покажем обратное: если $\Lambda = \{0\}$, то $R^{(p)}(\lambda) \equiv 0$ при некотором целом p . Для этого достаточно доказать тождество $R^{(p)}(\lambda)L(\lambda)x \equiv 0$ при всех $x \in D_L$. Действительно, в силу предыдущей теоремы $F^{(p)}(\lambda) \equiv 0$, $p \geq 2n + m$. Тогда из определения $F(\lambda)$ следует, что $R^{(p)}(\lambda)A_j x \equiv 0$, $x \in D_L$, $p \geq 3n + m$, $j = 1, \dots, n$. Так как $R(\lambda)A_0 = I - \sum_{j=1}^n \lambda^j R(\lambda)A_j$, то $R^{(p)}(\lambda)A_0 x \equiv 0$, $p \geq 4n + m$, $x \in D_L$. Поэтому $R^{(p)}(\lambda)L(\lambda)x \equiv 0$ при всех $x \in D_L$ и $p \geq 4n + m$. Следствие доказано.

Заметим, что использование производных функций $R(\lambda)A_j$ является естественным при изучении уравнения (1) n -го порядка (см., например, условия равномерной корректности для явного уравнения в [6]). Для неявного линейного уравнения первого порядка равенство $\frac{dp}{d\lambda^p}(R(\lambda)A_1) = (-1)^p p!(R(\lambda)A_1)^{p+1}$ позволяет заменить соответствующие производные на степени функции $R(\lambda)A_1$. Поэтому установленный в [9] признак равномерной корректности задачи

Коши (1),(2) при $n = 1$ сохраняет степенную форму известного условия Феллера – Миядера – Филлипса [10].

Методом, развитым в [7], можно доказать еще один признак нетривиальности начального многообразия.

Теорема 3. Пусть спектр пучка $L(\lambda)$ не пуст, полуплоскость $\operatorname{Re} \lambda \geq \alpha$ состоит из регулярных точек, и на прямой $\operatorname{Re} \lambda = \alpha$ выполнена оценка (3). Тогда начальное многообразие задачи Коши (1),(2) нетривиально.

При доказательстве этой теоремы используется следующее резольвентное тождество

$$R(\lambda) = R(\mu) + \sum_{j=1}^n (\mu^j - \lambda^j) R(\lambda) A_j R(\mu), \lambda, \mu \in \varrho,$$

которое является обобщением тождества Гильберта для линейного пучка двух операторов из [9].

Замечание. Как показывают примеры из [2],[7], при выполнении условий теоремы 2 пустота спектра пучка $L(\lambda)$ еще не означает тривиальность начального многообразия задачи Коши (1),(2).

Рассмотрим пример дифференциального уравнения в частных производных. Пусть Ω – ограниченная область пространства R^N с достаточно гладкой границей Γ . Рассмотрим следующую смешанную задачу:

$$\sum_{j=n-1}^n \sum_{|\beta| \leq m_j} (-1)^{|\beta|} \frac{\partial^{|\beta|}}{\partial x_1^{\beta_1} \dots \partial x_N^{\beta_N}} \left(a_{j,\beta}(x) \frac{\partial^{|\beta|+j} u(x,t)}{\partial x_1^{\beta_1} \dots \partial x_N^{\beta_N} \partial t^j} \right) + \sum_{j=0}^{n-2} \sum_{|\beta| \leq m_j} a_{j,\beta}(x) \frac{\partial^{|\beta|+j} u(x,t)}{\partial x_1^{\beta_1} \dots \partial x_N^{\beta_N} \partial t^j} = 0, \quad t > 0, \quad x \in \Omega \quad (14)$$

$$u(x,t)|_{x \in \Gamma} = \frac{\partial u(x,t)}{\partial \nu} |_{x \in \Gamma} = \dots = \frac{\partial^{m_{n-1}-1} u(x,t)}{\partial \nu^{m_{n-1}-1}} |_{x \in \Gamma} = 0, \quad t > 0 \quad (15)$$

$$\frac{\partial^j}{\partial t^j} u(x,0) = u_j(x), \quad j = 0, \dots, n-1; \quad x \in \Omega \quad (16)$$

Здесь $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_N)$ – мультииндекс, $\left(|\beta| = \sum_{j=1}^N \beta_j \right)$, $\frac{\partial}{\partial \nu}$ – производная по внешней нормали к Γ , коэффициенты $a_{j,\beta}(x) \in C^\infty(\bar{\Omega})$, $j = 0, \dots, n$, $|\beta| \leq m_j$, причем $a_{n,\beta}(x) \geq 0$, $|\beta| \leq m_n$, $\operatorname{Re} a_{n-1,\beta}(x) \geq \sigma$, $|\beta| \leq m_{n-1}$, $x \in \Omega$ при некотором $\sigma > 0$. Предположим, что $m_{n-1} \geq m_j$, $j = 0, \dots, n-2$ и $m_{n-1} \geq 2m_n$. Обозначим через $W_2^l = W_2^l(\Omega)$ пространство Соболева [1]. Введем в пространстве $X = Y = L_2(\Omega) = L_2$ следующие дифференциальные операторы:

$$A_j u(x) = l_j[u] = \sum_{|\beta| \leq m_j} (-1)^{|\beta|} \frac{\partial^{|\beta|}}{\partial x_1^{\beta_1} \dots \partial x_N^{\beta_N}} \left(a_{j,\beta}(x) \frac{\partial^{|\beta|} u(x)}{\partial x_1^{\beta_1} \dots \partial x_N^{\beta_N}} \right),$$

$$j = n - 1, n;$$

$$A_j u(x) = l_j[u] = \sum_{|\beta| \leq m_j} a_{j,\beta}(x) \frac{\partial^{|\beta|} u(x)}{\partial x_1^{\beta_1} \dots \partial x_N^{\beta_N}}, \quad j = 0, \dots, n - 2.$$

с областями определения $D_j = \{u \in L_2(\Omega) : l_j[u] \in L_2(\Omega)\}$, $j = 0, \dots, n - 2, n$; $D_{n-1} = \{u \in W_2^{2m_{n-1}} : u(x) \text{ удовлетворяет условиям (15)}\}$, Тогда в пространстве L_2 смешанная задача (14)–(16) записывается в виде задачи Коши (1), (2), где оператор A_n может быть вырожденным.

Пусть $u \in D_{n-1}$. Интегрируя по частям $(A_{n-1}u, u)$ по каждой из переменных $x_1, \dots, x_N$, можно доказать, что $Re(A_{n-1}u, u) \geq \sigma \|u\|_{W_2^{m_{n-1}}}^2$. Отсюда с учетом неравенства $(A_n u, u) \geq 0$ получаем следующую оценку:

$$Re((\lambda A_n + A_{n-1})u, u) \geq \sigma \|u\|_{W_2^{m_{n-1}}}^2, \quad u \in D_{n-1}, \quad Re \lambda \geq 0. \quad (17)$$

Поэтому (см., например, [1]) при $Re \lambda \geq 0$ дифференциальное выражение $\lambda l_n[u] + l_{n-1}[u]$ является сильно эллиптическим в области Ω . Тогда при $Re \lambda \geq 0$ оператор $L_1(\lambda) = \lambda A_n + A_{n-1}$ имеет обратный $R_1(\lambda) = (\lambda A_n + A_{n-1})^{-1} \in [L_2, W_2^{m_{n-1}}]$ [1]. Отсюда с учетом оценки (17) следует, что резольвента $R_1(\lambda)$ пучка $L_1(\lambda)$ равномерно ограничена в правой полуплоскости как оператор-функция со значениями в $[L_2, W_2^{m_{n-1}}]$. Так как $m_{n-1} \geq m_j$ ($j = 0, \dots, n - 2$) и $m_{n-1} \geq 2m_n$, то оператор-функции $A_j R_1(\lambda)$ ($j = 0, \dots, n - 2, n$) со значениями в $[L_2, L_2]$ также равномерно ограничены в правой полуплоскости. Поэтому при некоторых $\alpha > 0$ и $0 < q < 1$ в полуплоскости $Re \lambda \geq \alpha$ справедлива

оценка
$$\left\| \sum_{j=0}^{n-2} \lambda^{j-n+1} A_j R_1(\lambda) \right\|_{[Y,Y]} \leq q. \quad \text{Тогда из представления}$$

$$L(\lambda) = \lambda^{n-1} \left(I + \sum_{j=0}^{n-2} \lambda^{j-n+1} A_j R_1(\lambda) \right) L_1(\lambda), \quad Re \lambda \geq \alpha$$

следует, что полуплоскость $Re \lambda \geq \alpha$ состоит из регулярных точек пучка $L(\lambda)$ и в этой полуплоскости справедлива оценка (3) с $m = -n + 2$. Следовательно, для задачи (14)–(16) условия теорем 1, 2 выполняются. Поэтому мы можем описать некоторое множество решений задачи (14)–(16) по формулам (4) и описать n -кратное подпространство решений в виде (8). Из доказательства теоремы 2 видно, что линейная оболочка n -кратных начальных векторов $\{u_j\}_{j=0}^{n-1}$ вида (5) является плотной в подпространстве решений Λ . В частности, по следствию 1, начальное многообразие задачи (14)–(16) нетривиально.

Автор выражает благодарность доц. Власенко Л.А. за постановку задачи и внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Березанский Ю. М. Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов // К.: Наукова думка, 1965. – 800 с.
2. Власенко Л. А. Задача Коши для дифференциального уравнения в банаховом пространстве с условиями на резольвенту пучка: Дисс... канд. физ.-мат. наук: – Харьков, 1988. – 106 с.
3. Власенко Л. А. Построение решений некоторых классов уравнений $Au'(t) + Bu(t) = f(t)$ // Вестн. Харьк. ун-та. Сер. математика, механика. – 1986. – 286. – С. 24–28.
4. Власенко Л. А., Руткас А. Г. Разрешимость и полнота для электродинамической системы не типа Ковалевской // Матем. заметки. – 1993. – Т.53, 1. – С. 138–140.
5. Власенко Л. А., Руткас А. Г. Теоремы единственности и аппроксимации для одного вырожденного операторно-дифференциального уравнения // Матем. заметки. – 1996. – Т.60, 4. – С. 597–600.
6. Голдстейн Дж. Полугруппы линейных операторов и их приложения. – К.: Выща школа, 1989. – 348 с.
7. Любич Ю. И. Классическое и локальное преобразование Лапласа в абстрактной задаче Коши // Успехи мат. наук. – 1966. – Т.21, 3. – С. 3–51.
8. Радзиевский Г. В. Задача о полноте корневых векторов в спектральной теории оператор-функций // Успехи мат. наук. – 1982. – Т.37, 2. – С. 81–145.
9. Руткас А. Г. Задача Коши для уравнения $Ax'(t) + Bx(t) = f(t)$ // Диф. уравнения. – 1975. – Т. 11, 11. – С. 1996–2010.
10. Хилле Э., Филлипс Р. Функциональный анализ и полугруппы. – М.: ИЛ, 1962. – 829 с.
11. Шкаликов А. А. Эллиптические уравнения в гильбертовом пространстве и спектральные задачи, связанные с ними // Труды сем. им. И.Г.Петровского. – 1989. – 14. – С.140 – 224.
12. Favini A. Abstract potential operators and spectral methods for a class of degenerate evolution problems // J. Differential Equations. – 1981. – V 39, P. 212–225.
13. Showalter R. Monotone operators in Banach spaces and nonlinear partial differential equations // Math. Surveys and monographs, AMS, Providence. – 1997. – V.49. – 278 p.

Вісник Харківського університету
Серія "Математика, прикладна математика і механіка"

УДК 517.948

№ 458, 1999, с. 109–118

Многомерные треугольные модели систем линейных операторов с нильпотентными коммутаторами

Н. Н. Черновол

Харьковский государственный университет

Построена треугольная модель вполне несамосопряженной системы линейных ограниченных операторов A_1, A_2 , действующих в гильбертовом пространстве H , для которой коммутаторы $D = [A_1, A_2]$ и $C = [A_1^*, A_2]$ являются нильпотентными. Выделен специальный класс систем операторов A_1, A_2 , для которого получена модельная реализация операторами интегрирования по независимым переменным x_1 и x_2 (соответственно) в пространстве $L^2(\Omega)$, где Ω — область в R^2 , определяемая свойствами нильпотентности коммутаторов D и C .

Построение треугольных моделей для линейных несамосопряженных операторов, действующих в бесконечномерном гильбертовом пространстве, было начато М. С. Лившицем (1946). Эти исследования были продолжены в работах М. С. Бродского, М. С. Лившица, И. Ц. Гохберга, М. Г. Крейна, М. С. Лившица и А. А. Янцевича, А. В. Кужеля и других математиков. Одним из основных инструментов для изучения несамосопряженных операторов является характеристическая оператор-функция, введенная М. С. Лившицем [1]. Однако вопрос о построении модельных представлений для систем линейных операторов долго оставался открытым. Первые результаты в этом направлении были получены Л. Л. Ваксманом и В. А. Золотаревым (1976).

В работе [2] были построены треугольные модели систем линейных ограниченных дважды перестановочных операторов A_1, A_2 , действующих в гильбертовом пространстве H , т.е. систем, для которых коммутаторы $D = [A_1, A_2]$ и $C = [A_1^*, A_2]$ удовлетворяют условию: $D = C = 0$. Было показано, что в случае вполне несамосопряженности каждого из операторов A_1, A_2 модельные представления реализуются операторами интегрирования по независимым переменным в пространстве $L^2(\Omega)$, где $\Omega \in R^2$ является прямоугольником. Последующие исследования были направлены на ослабление требования $D = C = 0$. Так в работах [3], [4] были получены треугольные модели в случае нильпотентности коммутатора C и $D = 0$, а также в случае, когда оба коммутатора C и D нильпотентны. В настоящей работе построена треугольная модель для более широкого класса систем линейных операторов, коммутаторы

C и D которого также являются нильпотентными, но обладают свойствами, отличными от свойств, рассмотренных в работе [4]. Модельная реализация состоит в том, что A_1, A_2 являются операторами интегрирования по независимым переменным в пространстве $L^2(\Omega)$, где область $\Omega \in R^2$ имеет более сложную конфигурацию.

Итак, рассмотрим в гильбертовом пространстве H систему линейных ограниченных операторов A_1, A_2 . Напомним, что оператор A называется вполне несамосопряженным, если не существует приводящего оператор A подпространства, на котором он индуцирует самосопряженный оператор. Под $(A_p)_I$ будем понимать мнимую компоненту оператора $A_p : (A_p)_I = \frac{A_p - A_p^*}{2i}$ ($p = 1, 2$), а символ $\bigvee_{k \geq 0} g_k$ обозначает замкнутую линейную оболочку векторов g_k ($k \geq 0$).

Определение. Будем говорить, что система линейных ограниченных операторов A_1, A_2 , определенных в гильбертовом пространстве H , принадлежит классу $K^{1,1}$, если выполнены следующие условия:

1. $\dim DH = 1, D = A_1 A_2 - A_2 A_1$;
2. $\dim CH = 1, C = A_1^* A_2 - A_2 A_1^*$;
3. $D^* H = C^* H$;
4. $DH \perp CH$;
5. $D^2 H = 0, C^2 H = 0$;

Рассмотрим следующий пример системы двух операторов $\dot{A}_1, \dot{A}_2$, который, как легко показать, является модельным.

Пусть $\Omega = \bigcup_{i=1}^5 \Omega_i$, где

$$\Omega_1 = \{(x_1, x_2) \in R^2 : 0 \leq x_1 \leq a_1, b_1 < x_2 \leq b_2\},$$

$$\Omega_2 = \{(x_1, x_2) \in R^2 : 0 \leq x_1 \leq a_1, 0 \leq x_2 \leq b_1\},$$

$$\Omega_3 = \{(x_1, x_2) \in R^2 : 0 < x_1 < a_2, 0 \leq x_2 \leq b_1\},$$

$$\Omega_4 = \{(x_1, x_2) \in R^2 : a_2 \leq x_1 \leq a_3, 0 \leq x_2 \leq b_1\},$$

$$\Omega_5 = \{(x_1, x_2) \in R^2 : a_2 \leq x_1 \leq a_3, b_1 < x_2 \leq b_2\},$$

$$a_1 < a_2 < a_3, b_1 < b_2.$$

Определим пространство измеримых на Ω функций:

$$L^2(\Omega) = \{f(x), x = (x_1, x_2) \in \Omega : \int_{\Omega} |f(x)|^2 dx < \infty, dx = dx_1 dx_2\} \quad (1)$$

и два оператора в нем:

$$(\dot{A}_1 f)(x) = \alpha_1(x_1) f(x) + i \int_0^{x_1} f(t, x_2) I_1 dt, \quad (2)$$

$$(\dot{A}_2 f)(x) = \alpha_2(x_2)f(x) + i \int_0^{x_2} f(x_1, t) I_2 dt, \quad (3)$$

$x = (x_1, x_2) \in \Omega$, $f(x) \in L^2(\Omega)$, $\alpha_k(x_k)$ — вещественные, неубывающие, ограниченные функции, $I_k = \pm 1$ ($k = 1, 2$). При этом предполагается, что функции $f(x_1, x_2)$ из $L^2(\Omega)$ продолжены нулевым образом вне области Ω .

Из определения класса $K^{1,1}$ следует, что

$$DH = \bigvee h, \quad CH = \bigvee g, \quad D^*H = C^*H = \bigvee \varphi,$$

$\|h\| = \|g\| = \|\varphi\| = 1$. Обозначим

$$\frac{(A_1)_I \varphi}{\|(A_1)_I \varphi\|} = \psi_0, \quad \frac{(A_2)_I h}{\|(A_2)_I h\|} = \psi_1, \quad \frac{(A_2)_I g}{\|(A_2)_I g\|} = \psi_2$$

и введем в рассмотрение операторы

$$B_1 = \frac{D - C}{2i} = (A_1)_I A_2 - A_2 (A_1)_I, \quad B_2 = \frac{D + C^*}{2i} = A_1 (A_2)_I - (A_2)_I A_1.$$

Основным результатом работы является следующая теорема.

Теорема 1. Пусть система операторов A_1, A_2 , каждый из которых вполне несамосопряжен, принадлежит классу $K^{1,1}$ и обладает свойствами:

1. $\dim H_0 = 1$, $H_0 = \overline{(A_1)_I H} \cap \overline{(A_2)_I H}$;
2. $(A_1)_I \psi_0 = \alpha_0 \psi_0$, $(A_1)_I h = \alpha_1 h$, $(A_1)_I g = \alpha_2 g$, $(A_2)_I \varphi = \beta_0 \varphi$, $(A_2)_I \psi_1 = \beta_1 \psi_1$, $(A_2)_I \psi_2 = \beta_2 \psi_2$, где $\alpha_i, \beta_i \neq 0$ ($i = \overline{0, 2}$), $\alpha_1 \neq \alpha_2$.
3. Спектр каждого из операторов A_1, A_2 вещественен.

Тогда существует пространство $L^2(\Omega)$ и операторы $\dot{A}_1, \dot{A}_2$ в нем (см. (1)–(3)), а также изометрический оператор U из H в $L^2(\Omega)$ такой, что $U A_k = \dot{A}_k U$ ($k = 1, 2$).

Доказательство этой теоремы основано на следующем утверждении, которое устанавливает структуру систем операторов из класса $K^{1,1}$.

Теорема 2. Пусть система операторов A_1, A_2 находится в условиях предположений теоремы 1 (за исключением условия 3). Тогда H можно разложить в ортогональную сумму подпространств $H = H_1 \oplus H_2$ так, что сужение системы A_1, A_2 на H_2 является дважды перестановочной системой, а на H_1 — системой из класса K_1 [3], причем H_2 приводит A_2 и инвариантно относительно A_1 .

Введем в рассмотрение следующие пространства:

$$L_1 = \bigvee_{m \geq 0} A_2^m DH, \quad L_2 = \bigvee_{m \geq 0} A_2^m CH,$$

$$L_3 = \bigvee_{m \geq 0} A_1^m (A_2)_I D H, \quad L_4 = \bigvee_{m \geq 0} A_1^{*m} (A_2)_I C H.$$

Для доказательства теоремы 2 понадобятся несколько вспомогательных лемм.

Лемма 1. В условиях предположений теоремы 2 пространство $N = \overline{(A_1)_I H}$ можно разложить в ортогональную сумму подпространств:

$$N = G_0 \oplus G_1 \oplus G_2,$$

где $G_1 = L_1$, $G_2 = L_2$, причем $(A_1)_I l_k = \alpha_k l_k$, $l_k \in G_k$, $\alpha_k \neq 0$ ($k = 0, 1, 2$) и $G_i \subset \text{Ker } B_1$ ($i = 1, 2$), $G_1 \subset \text{Ker } B_2$, $G_2 \subset \text{Ker } B_2^*$, $G_0 \subset \text{Ker } B_1^*$, $G_0 \subset \text{Ker } B_2^2$.

Доказательство. 1. Докажем сначала скалярность оператора $(A_1)_I$ на пространстве L_1 . Покажем, что

$$(A_1)_I A_2^m h = \alpha_1 A_2^m h, \quad m \geq 0.$$

При $m=0$ это верно, что следует из условия 2 теоремы 1. Пусть при всех $m: 0 \leq m \leq n-1$

$$(A_1)_I A_2^m h = \alpha_1 A_2^m h,$$

т.е. оператор $(A_1)_I$ на пространстве

$$L_1^{n-1} = \bigvee_{0 \leq m \leq n-1} A_2^m h$$

действует как оператор умножения на α_1 . Отсюда очевидным образом получается, что при $1 \leq m \leq n-1$ $B_1 A_2^{m-1} h = 0$. Покажем скалярность оператора $(A_1)_I$ на пространстве

$$L_1^n = \bigvee_{0 \leq m \leq n} A_2^m h.$$

Из включения $L_1^{n-1} \subset L_1^n$ следует, что существует вектор

$$h_n \in L_1^n : h_n \perp L_1^{n-1}$$

(в противном случае $L_1^{n-1} = L_1^n$ и утверждение доказано). Вектор $h_n \in L_1^n$ представим в виде:

$$h_n = \sum_{m=0}^n \xi_m^n A_2^m h,$$

где $\xi_m^n \neq 0$ (поскольку $h_n \perp L_1^{n-1}$). Из легко получаемого равенства

$$(A_1)_I h_n = \alpha_1 h_n + \xi_n^n B_1 A_2^{n-1} h = \alpha_1 h_n + \alpha' \xi_n^n h + \beta' \xi_n^n g$$

и того, что

$$h_n \perp h, \quad g \perp h, \quad (A_1)_I h = \alpha h$$

следует, что $\alpha' = 0$, т.е. $DA_2^{n-1}h = 0$. Отсюда следует, что $A_2^{n-1}h \perp C^*H$, т.е. $CA_2^{n-1}h = 0$. Таким образом, $\beta' = 0$ и, следовательно, $B_1A_2^{n-1}h = 0$. Итак, получили, что $(A_1)_I h_n = \alpha_1 h_n$ и

$$(A_1)_I A_2^m h = \alpha_1 A_2^m h, \quad m \geq 0.$$

Отсюда вытекает, что $(A_1)_I$ скалярен на пространстве L_1 и $L_1 \subset \text{Ker } B_1$. Аналогичным образом доказывается, что $(A_1)_I$ скалярен на L_2 и $L_2 \subset \text{Ker } B_1$.

Поскольку L_1 и L_2 — собственные подпространства оператора $(A_1)_I$, отвечающие различным собственным значениям, то $L_1 \perp L_2$. Отсюда следует, что $L_1 \subset \text{Ker } C^*$, $L_2 \subset \text{Ker } D^*$. Таким образом,

$$L_1 \subset \text{Ker } B_2, \quad L_2 \subset \text{Ker } B_2^*.$$

2. Положим $G_1 = L_1$, $G_2 = L_2$. Тогда

$$G_0 = N \ominus (G_1 \oplus G_2).$$

Из вида пространства G_0 легко получается, что $G_0 \subset \text{Ker } D^*$ и $G_0 \subset \text{Ker } C^*$, а отсюда — $G_0 \subset \text{Ker } B_1^*$, $G_0 \subset \text{Ker } B_2^2$ и $G_0 \subset \text{Ker } B_2^{*2}$. Поскольку $P_{G_0}(A_2)_I G_0$ является одномерным по предположению 1 теоремы 1 и $\psi_0 \in P_{G_0}(A_2)_I G_0$, то

$$P_{G_0}(A_2)_I G_0 = \bigvee \psi_0.$$

Из вполне несамосопряженности оператора A_2^* следует, что

$$G_0 = \bigvee_{n \geq 0} A_2^{*n} \psi_0.$$

Из того, что $G_0 \subset \text{Ker } B_1^*$, т.е. $(A_1)_I A_2^{*n} G_0 = A_2^*(A_1)_I G_0$ и формулы

$$(A_1)_I A_2^{*n} \psi_0 = A_2^*(A_1)_I A_2^{*n-1} \psi_0 = \dots = A_2^{*n} (A_1)_I \psi_0 = \alpha_0 A_2^{*n} \psi_0$$

получаем, что

$$(A_1)_I l_0 = \alpha_0 l_0, \quad l_0 \in G_0.$$

Лемма 1 доказана.

Лемма 2. В условиях предположений теоремы 2 пространство $M = \overline{(A_2)_I H}$ можно разложить в ортогональную сумму подпространств:

$$M = S_0 \oplus S_1 \oplus S_2,$$

где $S_1 = L_3$, $S_2 = L_4$, причем $(A_2)_I l_k = \beta_k l_k$, $l_k \in S_k$, $\beta_k \neq 0$ ($k = 0, 1, 2$) и $S_i \subset \text{Ker } B_1$ ($i = 1, 2$), $S_1 \subset \text{Ker } B_2$, $S_2 \subset \text{Ker } B_2^*$, $S_0 \subset \text{Ker } B_1^*$, $S_0 \subset \text{Ker } B_2^2$, $S_0 \subset \text{Ker } B_2^{*2}$.

Доказательство. 1. Покажем, что

$$(A_2)_I A_1^m \psi_1 = \beta_1 A_1^m \psi_1, \quad m \geq 0.$$

При $m=0$ это утверждение верно, что вытекает из условия 2 теоремы 1. Пусть при $m: 0 \leq m \leq n-1$

$$(A_2)_I A_1^m \psi_1 = \beta_1 A_1^m \psi_1,$$

т.е. оператор $(A_2)_I$ на пространстве

$$L_3^{n-1} = \bigvee_{0 \leq m \leq n-1} A_1^m \psi_1$$

действует как оператор умножения на β_1 . Отсюда при $1 \leq m \leq n-1$ легко получить, что $B_2 A_1^{m-1} \psi_1 = 0$, т.е. $A_1^{m-1} \psi_1 \in \text{Ker } C^*$ и $A_1^{m-1} \psi_1 \in \text{Ker } D$, а следовательно, и $A_1^{m-1} \psi_1 \in \text{Ker } C$. Покажем скалярность оператора $(A_2)_I$ на пространстве

$$L_3^n = \bigvee_{0 \leq m \leq n} A_1^m \psi_1.$$

Из того, что $L_3^{n-1} \subset L_3^n$ вытекает, что существует вектор

$$g_n \in L_3^n : g_n \perp L_3^{n-1}$$

(в противном случае $L_3^{n-1} = L_3^n$ и утверждение доказано). Вектор g_n можно представить в виде:

$$g_n = \sum_{m=0}^n \eta_m^n A_1^m \psi_1,$$

где $\eta_m^n \neq 0$ (т.к. $g_n \perp L_3^{n-1}$). Легко получить следующую формулу:

$$(A_2)_I g_n = \beta_1 g_n - \frac{1}{2i} \eta_n^n D A_1^{n-1} \psi_1 - \frac{1}{2i} \eta_n^n C^* A_1^{n-1} \psi_1. \quad (4)$$

Поскольку

$$\varphi \perp \psi_1, \quad h \perp \psi_1, \quad (A_2)_I \psi_1 = \beta_1 \psi_1,$$

то после умножения равенства (4) на ψ_1 получаем, что $D A_1^{n-1} \psi_1 = 0$. Отсюда следует, что и $C A_1^{n-1} \psi_1 = 0$, а значит, и $B_1 A_1^{n-1} \psi_1 = 0$. Итак,

$$(A_2)_I g_n = \beta_1 g_n - \frac{1}{2i} \eta_n^n C^* A_1^{n-1} \psi_1. \quad (5)$$

Допустим, что $C^* A_1^{n-1} \psi_1 \neq 0$. Введем пространства

$$\tilde{L}_3^k = L_3^k \bigvee C^* A_1^{n-1} \psi_1, \quad k \geq 0.$$

Из включения $\tilde{L}_3^{n-1} \subset \tilde{L}_3^n$ (в противном случае $\tilde{L}_3^{n-1} = \tilde{L}_3^n$ и утверждение доказано) вытекает, что существует вектор

$$\tilde{g}_n \in \tilde{L}_3^n : \tilde{g}_n \perp \tilde{L}_3^{n-1}.$$

Вектор $\tilde{g}_n$ представим в виде:

$$\tilde{g}_n = \sum_{m=0}^n \xi_m^n A_1^m \psi_1 + \mu C^* A_1^{n-1} \psi_1, \quad (6)$$

где $\xi_n^n \neq 0$ (т.к. $\tilde{g}_n \perp \tilde{L}_3^{n-1}$). Из равенств (5), (6) получаем, что

$$(A_2)_I \tilde{g}_n = \beta_1 \sum_{m=0}^n \xi_m^n A_1^m \psi_1 - \frac{1}{2i} \xi_n^n C^* A_1^{n-1} \psi_1 + \mu \beta_0 C^* A_1^{n-1} \psi_1.$$

Отсюда,

$$(\tilde{\beta} - \beta_1) \tilde{g}_n = \left(\mu (\beta_0 - \beta_1) - \frac{1}{2i} \xi_n^n \right) C^* A_1^{n-1} \psi_1. \quad (7)$$

Поскольку $\tilde{g}_n \perp \tilde{L}_3^{n-1}$, то из равенства (7) вытекает, что

$$\tilde{\beta} = \beta_1, \quad \mu = \frac{\xi_n^n}{2i(\beta_0 - \beta_1)}.$$

(здесь $\beta_0 \neq \beta_1$, т.к. в противном случае это противоречит тому, что $\xi_n^n \neq 0$).
Итак,

$$\tilde{g}_n = \sum_{m=0}^n \xi_m^n A_1^m \psi_1 + \frac{\xi_n^n}{2i(\beta_0 - \beta_1)} C^* A_1^{n-1} \psi_1. \quad (8)$$

Поскольку $\tilde{g}_n \perp \varphi$, $A_1^m \psi_1 \in \text{Ker } C$ для $0 \leq m \leq n-1$, то после умножения (8) на φ , и проделав очевидные преобразования, получаем:

$$2i(\beta_0 - \beta_1)(A_1^{n-1} \psi_1, A_1^* \varphi) + (A_1^{n-1} \psi_1, C \varphi) = 0.$$

Пусть $C \varphi = \alpha g$, $\alpha \neq 0$. Тогда предыдущее равенство можно записать в виде:

$$(A_1^{n-1} \psi_1, \alpha g - 2i(\beta_0 - \beta_1) A_1^* \varphi) = 0. \quad (9)$$

Проведем следующие преобразования равенства (9):

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\beta_1} \left((A_2)_I A_1^{n-1} \psi_1, \alpha g - 2i(\beta_0 - \beta_1) A_1^* \varphi \right) = \\ & = \frac{1}{\beta_1} \left(A_1^{n-1} \psi_1, \alpha (A_2)_I g - 2i(\beta_0 - \beta_1) (A_2)_I A_1^* \varphi \right) = \\ & = \frac{1}{\beta_1} \left(A_1^{n-1} \psi_1, \alpha \psi_2 - 2i(\beta_0 - \beta_1) \left(\frac{1}{2i} C \varphi + \frac{1}{2i} D^* \varphi + A_1^* (A_2)_I \varphi \right) \right) = 0. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\left(A_1^{n-1} \psi_1, \alpha \psi_2 - (\beta_0 - \beta_1)(\alpha g + 2i\beta_0 A_1^* \varphi) \right) = 0, \quad (10)$$

Вычитая из равенства (9), умноженного на β_0 , равенство (10), имеем:

$$\begin{aligned} & \left(A_1^{n-1} \psi_1, \alpha (2\beta_0 - \beta_1) g - \alpha \psi_2 \right) = \left(A_1^{n-1} \psi_1, \alpha (2\beta_0 - \beta_1) g \right) - \\ & - \left(A_1^{n-1} \psi_1, \alpha (A_2)_I g \right) = \left(A_1^{n-1} \psi_1, \alpha (2\beta_0 - \beta_1) g \right) - \left(A_1^{n-1} \psi_1, \alpha \beta_1 g \right) = \end{aligned}$$

$$= (A_1^{n-1} \psi_1, 2\alpha(\beta_0 - \beta_1)g) = 0.$$

Так как $\alpha \neq 0$ и $\beta_0 \neq \beta_1$, то $A_1^{n-1} \psi_1 \perp g$. Но это противоречит допущению того, что $C^* A_1^{n-1} \psi_1 \neq 0$. Таким образом, из формулы (5) следует, что $(A_2)_I g_n = \beta_1 g_n$ и, значит,

$$(A_2)_I A_1^m \psi_1 = \beta_1 A_1^m \psi_1, \quad m \geq 0.$$

Итак, получили, что $(A_2)_I$ скалярен на пространстве L_3 и $L_3 \subset \text{Ker } B_1$, $L_3 \subset \text{Ker } B_2$. Аналогично можно доказать, что оператор $(A_2)_I$ скалярен на L_4 и $L_4 \subset \text{Ker } B_1$, $L_4 \subset \text{Ker } B_2^*$.

2. Положим $S_1 = L_3$, $S_2 = L_4$. Тогда

$$S_0 = M \ominus (S_1 \oplus S_2).$$

Из вида пространства S_0 заключаем, что $(A_2)_I S_0 \subset \text{Ker } D^*$ и $(A_2)_I S_0 \subset \text{Ker } C^*$. Можно легко показать, что $(A_2)_I S_0 = S_0$. Таким образом, $S_0 \subset \text{Ker } D^*$, C^* , а отсюда следует, что $S_0 \subset \text{Ker } B_1^*$ и $S_0 \subset \text{Ker } B_2^2$, $S_0 \subset \text{Ker } B_2^{*2}$.

Поскольку $P_{S_0}(A_1)_I S_0$ является одномерным по предположению 1 теоремы 1 и $P_{S_0} \psi_0 \in P_{S_0}(A_1)_I S_0$, то

$$P_{S_0}(A_1)_I S_0 = \bigvee P_{S_0} \psi_0.$$

Из вполне несамосопряженности оператора A_1 следует, что пространство

$$S_0 = \bigvee_{n \geq 0} (P_{S_0} A_1)^n P_{S_0} \psi_0.$$

Из того, что $S_0 \subset \text{Ker } C^*$, $S_0 \subset \text{Ker } D$ и равенства

$$\begin{aligned} (A_2)_I (P_{S_0} A_1)^n P_{S_0} \psi_0 &= P_{S_0} (A_2)_I A_1 (P_{S_0} A_1)^{n-1} P_{S_0} \psi_0 = \\ &= P_{S_0} \left(A_1 (A_2)_I (P_{S_0} A_1)^{n-1} P_{S_0} \psi_0 - B_2 (P_{S_0} A_1)^{n-1} P_{S_0} \psi_0 \right) = \\ &= P_{S_0} A_1 (A_2)_I (P_{S_0} A_1)^{n-1} P_{S_0} \psi_0 = \dots = (P_{S_0} A_1)^n (A_2)_I P_{S_0} (A_1)_I \varphi = \\ &= (P_{S_0} A_1)^n P_{S_0} \left((A_1)_I (A_2)_I \varphi + \frac{B_1 - B_1^*}{2i} \varphi \right) = \beta_0 (P_{S_0} A_1)^n P_{S_0} \psi_0 \end{aligned}$$

получаем, что

$$(A_2)_I l_0 = \beta_0 l_0, \quad l_0 \in S_0.$$

Лемма 2 доказана.

Используя лемму 1 (и лемму 1 в [3]) легко доказать следующую лемму.

Лемма 3. Пусть выполнены условия теоремы 2. Тогда,

$$L_1 \ominus DH \subset \text{Ker}(A_2)_I \quad \text{и} \quad L_2 \ominus CH \subset \text{Ker}(A_2)_I.$$

На основе лемм 2, 3 очевидным образом получается

Лемма 4. В условиях предположений теоремы 2 для пространств L_k ($k = \overline{1, 4}$) справедливы следующие свойства: $L_1 \perp L_4$, $L_2 \perp L_3$.

Доказательство теоремы 2. Рассмотрим пространство

$$H_2 = \bigvee_{n,m \geq 0} A_2^{*n} A_1^m \psi_1 \quad (H_1 = H \ominus H_2).$$

и покажем, что разложение $H = H_1 \oplus H_2$ искомо. В силу леммы 4 заключаем, что $A_2^{*n} A_1^m \psi_1 \perp CH$. Поэтому $H_2 \subset \text{Ker } C^*$. Покажем, что $P_{H_2}(A_2)_I H_2$ совпадает с пространством L_3 . Допустим, что существует $\xi \neq 0$ такое, что $\xi \in P_{H_2}(A_2)_I H_2$ и $\xi \perp L_3$. Рассмотрим пространство

$$L_\xi = \bigvee_{k_i, p_i \geq 0 \ (i \geq 0)} (A_1^*)^{k_1} (A_2)_I^{p_1} (A_1^*)^{k_2} (A_2)_I^{p_2} (A_1^*)^{k_3} \dots \xi,$$

которое представляет собой замкнутую линейную комбинацию всевозможных степеней $(A_1^*)^{k_i}$, $(A_2)_I^{p_i}$ ($k_i, p_i \geq 0$, $i \geq 0$), примененных в любом порядке к вектору ξ , заключаем, что сужение $(A_1)_I$ на каждое из пространств L_ξ , L_3 одномерно (по условию 1 теоремы 1) и $L_\xi \perp L_3$, т.е. сужение $(A_1)_I$ на $L_\xi \oplus L_3$ двумерно, что противоречит условию 1 теоремы 1. Таким образом, предположение о существовании $\xi \neq 0$ не верно, т.е. $P_{H_2}(A_2)_I H_2 = L_3$. Отсюда по лемме 1 (см. [3]) пространство H_2 приводит A_2 . Итак, $(A_2)_I H_2 = L_3$. Поскольку $(A_2)_I H_2 \perp S_0$, $\varphi \in S_0$ и $(A_2)_I \varphi = \beta_0 \varphi$, то $H_2 \perp \varphi$, т.е. $H_2 \subset \text{Ker } D$ и $H_2 \subset \text{Ker } C$. Это и обозначает дважды перестановочность сужения системы A_1, A_2 на H_2 . Так как $h \perp S_0$, $h \perp S_2$ и $(A_2)_I h \neq 0$, то $h \in L_3$, т.е. $DH \subset H_2$. Значит, сужение оператора D на H_1 равно нулю. Теорема 2 доказана.

Справедлива вспомогательная

Лемма 5. В условиях предположений теоремы 2 имеет место:

$$\text{sign } \beta_k = \text{sign } \beta_0 \quad (k = 1, 2),$$

где β_k — собственные значения, отвечающие собственным подпространствам S_k оператора $(A_2)_I$ ($k = 0, 1, 2$).

В [3], [4] доказаны соответствующие леммы, но для собственных значений, отвечающих собственным подпространствам оператора $(A_1)_I$. Повторяя аналогичные рассуждения для оператора $(A_2)_I$, получим утверждение леммы 5.

Доказательство теоремы 1. Рассмотрим модели систем дважды перестановочных операторов A_1, A_2 в H_2 (см. [2]) и систем из класса K_1 в H_1 (см. [3]). Из модели систем класса K_1 следует, что $|\beta_0| < |\beta_2|$. Докажем, что $|\beta_0| < |\beta_1|$. Рассмотрим сужение $(A_2)_I$ на $N \ominus G_2$, которое является одномерным по предположению 1 теоремы 1. Собственное число сужения $(A_2)_I$ на G_0 равно β_0 , так как g_0 — вектор из образа сужения $(A_2)_I$ на G_0 можно представить как $g_0 = \varphi + \varphi'$, где $\varphi \in G_0$ приводит $(A_2)_I$. Через каналовые вектора h и ψ_0 происходит сплетение сужений оператора A_2 на G_0 и G_1 . Поэтому модуль собственного числа сужения $(A_2)_I$ на $G_0 \oplus G_1$ больше $|\beta_0|$.

Очевидно, что $g_1 = \psi_1 \oplus \psi'_1$, $g_1 \in P_{G_0 \oplus G_1}(\overline{(A_2)_I H})$, поскольку ψ_1 имеет ненулевую проекцию на N и $\psi_1 \perp G_2$. А так как $(A_2)_I \psi_1 = \beta_1 \psi_1$, то β_1 является собственным числом сужения $(A_2)_I$ на $G_0 \oplus G_1$. Итак, $|\beta_0| < |\beta_1|$.

Воспользуемся теперь соответствующими моделями систем класса K_1 и класса дважды перестановочных операторов. Пусть $\dot{A}_1, \dot{A}_2$ в $L_2(\Omega'_1)$ — модель сужения A_1, A_2 на H_2 и $\dot{A}_1, \dot{A}_2$ в $L_2(\Omega'_2)$ — на H_1 , где $\Omega'_1 = \Omega_4 \cup \Omega_5$ — прямоугольник, $\Omega'_2 = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Omega_3$. Так как H_2 приводит A_2 и инвариантно относительно A_1 , то $L_2(\Omega'_1)$ и $L_2(\Omega'_2)$ "склеиваются" по отрезку $x_1 = a_2 = \max\{x_1, x_1 \in \Omega'_2\}$, $0 \leq x_2 \leq |\beta_0|$. Через этот отрезок происходит сцепление $\dot{A}_1$ в $L_2(\Omega'_1)$ с A_1 в $L_2(\Omega'_2)$. Совпадение точек спектра $\dot{A}_2$ в $L_2(\Omega'_1)$ с $\dot{A}_2$ в $L_2(\Omega'_2)$ при $0 \leq x_2 \leq |\beta_0|$ следует из одномерности сужения $(A_2)_I$ на G_0 . Теорема 1 доказана.

Теорема 1 устанавливает, что алгебраические свойства операторов A_1, A_2 из класса $K^{1,1}$ определяют конфигурацию области Ω и, наоборот, конфигурация области Ω определяет алгебраические свойства системы A_1, A_2 .

ЛИТЕРАТУРА

1. Лившиц М. С., Янцевич А. А. Теория операторных узлов в гильбертовых пространствах. — Харьков: ХГУ, 1971. — 160 с.
2. Золотарев В. А. О треугольных моделях систем дважды перестановочных операторов// ДАН. Арм. ССР. — 1976. — LXIII. — 3. — С. 136-140.
3. Золотарев В. А. Об одном классе перестановочных операторов. — Деп. в ВИНТИ, № 2437. — Харьков, 1976. — 9 с.
4. Золотарев В. А. О треугольных моделях систем одного класса перестановочных операторов. — Деп. в ВИНТИ, № 3433. — Харьков, 1976. — 15 с.

Нормальный метрический узел

В. А. Золотарев, И. В. Воробьев

Харьковский государственный университет

Операторные узлы позволяют изучать спектральные свойства различных семейств операторов. Такие узлы были построены для операторов, близких к эрмитовым и унитарным. В данной статье представлена модель такого узла для операторов, близких к нормальным и показано, что характеристическая функция узла является унитарным инвариантом этих узлов, а также описан класс функций, являющихся характеристическими.

1. Определение метрического узла

Спектральные свойства операторов в гильбертовых пространствах удобно изучать с помощью метрических узлов операторов, близких к эрмитовым, унитарным и нормальным. В [1] рассмотрены метрические узлы операторов, близких к эрмитовым. В [2] такие узлы построены для операторов, близких к унитарным. Для нормального случая в [5] и [6] описаны свойства гипонормальных операторов (самокоммутатор которых положительно определен, т. е. понятие гипонормальности является обобщением понятия нормальности). В данной статье мы представим модель нормального метрического узла и таким образом восполним пробел, связанный с нормальным случаем.

Определение. Нормальным метрическим узлом будем называть совокупность $\Delta = \left(\sigma_1, H \oplus E, V = \begin{bmatrix} T & \Phi \\ \Phi^* & K \end{bmatrix}, H \oplus E, \sigma_2 \right)$, для которой справедливо условие:

$$V^* \begin{pmatrix} I_H & 0 \\ 0 & \sigma_1 \end{pmatrix} V = V \begin{pmatrix} I_H & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{pmatrix} V^*, \quad (1)$$

оператор V отображает гильбертово пространство $H \oplus E$ в себя, оператор Φ действует из E в H , а операторы σ_1 и σ_2 являются эрмитовыми операторами в E .

Условие (1) эквивалентно следующим соотношениям:

$$T^*T - TT^* = \Phi(\sigma_2 - \sigma_1)\Phi^*, \quad (2)$$

$$T^* \Phi + \Phi \sigma_1 K = T \Phi + \Phi \sigma_2 K^* \quad (\Phi^* T + K^* \sigma_1 \Phi^* = \Phi^* T^* + K \sigma_2 \Phi^*), \quad (3)$$

$$K^* \sigma_1 K = K \sigma_2 K^*. \quad (4)$$

Произвольный обратимый оператор T из H может быть неоднозначным образом включен в метрический узел. Приведем несколько способов такого включения. Легко проверить, что

$$\Delta = \left(TT^*, H \oplus H, V = \begin{bmatrix} T & I \\ I & (T^*)^{-1} \end{bmatrix}, H \oplus H, T^* T \right),$$

$$\Delta = \left((T^*)^{-1} T T^* T^{-1}, H \oplus H, V = \begin{bmatrix} T & T^* \\ T & T \end{bmatrix}, H \oplus H, I \right),$$

$$\Delta = \left(I, H \oplus H, V = \begin{bmatrix} T & T \\ T^* & T \end{bmatrix}, H \oplus H, T^{-1} T^* T (T^*)^{-1} \right),$$

являются нормальными метрическими узлами.

2. Открытые системы и характеристические функции

Определение. Открытой системой $\{\mathfrak{R}_V, S_V\}$ ассоциированной с оператором V называется пара отображений

$$\begin{cases} \mathfrak{R}_V : x_{n+1} = T x_n + \Phi u_n, & x_n|_{n=0} = x_0, \\ S_V : v_n = \Phi^* x_n + K u_n. \end{cases} \quad (5)$$

Уравнения (5) можно записать в следующей форме:

$$V \begin{pmatrix} x_n \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ v_n \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Если мы будем искать решения (5) в виде гармонических колебаний, отвечающих частоте z , $x_n = z^n x_0$, $v_n = z^n v_0$, когда $u_n = z^n u_0$, то мы получим следующие представления отображений $\mathfrak{R}_V$ и S_V (на частоте z):

$$\begin{cases} \mathfrak{R}_V : x_0 = (zI - T)^{-1} \Phi u_0, \\ S_V : v_0 = S_V(z) u_0, \end{cases} \quad (7)$$

где

$$S_V(z) = K + \Phi^* (zI - T)^{-1} \Phi. \quad (8)$$

Определение. Функция $S_V(z)$ называется передаточной функцией открытой системы (5). В случае, если для V справедливо узловое соотношение (1), функция $S_V(z)$, которую мы будем обозначать $S_\Delta(z)$, называется характеристической функцией узла Δ .

Определение. Двойственной открытой системой $\{\mathfrak{R}_V^+, S_V^+\}$ по отношению к $\{\mathfrak{R}_V, S_V\}$ будем называть

$$\begin{cases} \mathfrak{R}_V^+ : x_{n-1} = T^* x_n + \Phi u_n, & x_n|_{n=0} = x_0, \\ S_V^+ : w_n = \Phi^* x_n + K^* u_n. \end{cases} \quad (9)$$

Эти уравнения можно переписать в виде:

$$V^* \begin{pmatrix} x_n \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ w_n \end{pmatrix}. \quad (10)$$

На гармонических последовательностях отображения $\mathfrak{R}_V^+$ и S_V^+ имеют вид:

$$\begin{cases} \mathfrak{R}_V^+ : x_0 = \left(\frac{1}{z}I - T^*\right)^{-1} \Phi u_0, \\ S_V^+ : w_0 = S_{V+}(z) u_0, \end{cases} \quad (11)$$

где

$$S_{V+}(z) = K^* + \Phi^* \left(\frac{1}{z}I - T^*\right)^{-1} \Phi = S_V^* \left(\frac{1}{z}\right). \quad (12)$$

3. Энергетический закон сохранения и свойства характеристической функции

Пусть оператор V удовлетворяет узловому соотношению (1), и для некоторых двух пар $\begin{pmatrix} x_n \\ u_n \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} \tilde{x}_n \\ \tilde{u}_n \end{pmatrix}$ выполнены соотношения

$$\begin{aligned} V \begin{pmatrix} x_n \\ u_n \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ v_n \end{pmatrix}, & V \begin{pmatrix} \tilde{x}_n \\ \tilde{u}_n \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \tilde{x}_{n+1} \\ \tilde{v}_n \end{pmatrix}, \\ V^* \begin{pmatrix} x_n \\ u_n \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ w_n \end{pmatrix}, & V^* \begin{pmatrix} \tilde{x}_n \\ \tilde{u}_n \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \tilde{x}_{n-1} \\ \tilde{w}_n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Тогда используя узловые соотношения (2)-(4), легко установить следующий энергетический закон сохранения:

$$\langle x_{n+1}, \tilde{x}_{n+1} \rangle + \langle \sigma_1 v_n, \tilde{v}_n \rangle = \langle x_{n-1}, \tilde{x}_{n-1} \rangle + \langle \sigma_2 w_n, \tilde{w}_n \rangle. \quad (13)$$

Непосредственно из вида характеристической функции (8) следует, что

$$\frac{S_V(z) - S_V(w)}{w - z} = \Phi^* (zI - T)^{-1} (wI - T)^{-1} \Phi. \quad (14)$$

4. Теорема о разложении пространства в прямую сумму приводящих подпространств

Определение. Оператор $T \in [H, H]$ называется вполне ненормальным (см. [6]), если не существует приводящего T подпространства, на котором T индуцирует нормальный оператор.

Теорема. Для любого оператора $T \in [H, H]$ существует единственное разложение в сумму $H = H_1 \oplus H_0$ приводящих T подпространств, такое что $T|_{H_0}$ нормален, а $T|_{H_1}$ вполне ненормален. Кроме того

$$\begin{aligned} H_1 &= \text{span} \{ (T^*)^m T^n [T^*, T] H, \quad m, n \geq 0 \} = \\ &= \text{span} \{ T^n (T^*)^m [T^*, T] H, \quad m, n \geq 0 \} = \\ &= \text{span} \{ ((T^*)^m T^n - T^n (T^*)^m) H, \quad m, n \geq 1 \}, \end{aligned} \quad (15)$$

$$H_0 = \bigcap_{m, n \geq 1} \ker ((T^*)^m T^n - T^n (T^*)^m). \quad (16)$$

Доказательство. Проверим сначала эквивалентность определений (15). Предположим, что выполнено

$$H_1 = \text{span} \{ (T^*)^m T^n [T^*, T] H, \quad m, n \geq 0 \}.$$

Тогда из тождества

$$T^* T = T T^* + [T^*, T], \quad (17)$$

следует, что

$$\begin{aligned} &(T^*)^{m-1} T^* T T^{n-1} [T^*, T] H = \\ &(T^*)^{m-1} T T^* T^{n-1} [T^*, T] H + (T^*)^{m-1} [T^*, T] T^{n-1} [T^*, T] H. \end{aligned}$$

Очевидно, что второе слагаемое принадлежит H_1 . Откуда следует, что первое слагаемое принадлежит H_1 . Применяя последовательно к первому слагаемому формулу (17), мы получим, что

$$T (T^*)^m T^{n-1} [T^*, T] H \subset H_1, \quad \forall m \geq 0, \quad n \geq 1.$$

В частности,

$$T (T^*)^m [T^*, T] H \subset H_1, \quad \forall m \geq 0.$$

Применяя далее аналогичным образом формулу (17), получаем:

$$T^n (T^*)^m [T^*, T] H \subset H_1, \quad \forall m, n \geq 0,$$

а значит и замкнутая линейная оболочка лежит в H_1 . Обратное включение показывается аналогично. Поэтому первые два определения (15) эквивалентны.

Теперь докажем, что третье определение (15) эквивалентно первым двум. Пользуясь тождеством (17), преобразуем:

$$\begin{aligned} &(T^*)^m T^n - T^n (T^*)^m = (T^*)^m T^n - (T^*)^{m-1} T T^* T^{n-1} + \\ &+ (T^*)^{m-1} T T^* T^{n-1} - T^n (T^*)^m = (T^*)^{m-1} [T^*, T] T^{n-1} + \\ &+ (T^*)^{m-1} T [T^*, T] T^{n-2} + (T^*)^{m-1} T^2 T^* T^{n-2} - T^n (T^*)^m. \end{aligned}$$

Очевидно, что образы первого и второго слагаемых лежат в H_1 . Прodelывая далее аналогичные выкладки, мы получим, что

$$(T^*)^m T^n - T^n (T^*)^m = R + (T^*)^{m-1} T^n T^* - T^n (T^*)^m,$$

где $RH \subset H_1$. Применяя аналогичным образом ко второму слагаемому формулу (17), получаем:

$$(T^*)^m T^n - T^n (T^*)^m = R_0 + T^n (T^*)^m - T^n (T^*)^m = R_0,$$

причем $R_0 H \subset H_1$. Таким образом,

$$\tilde{H}_1 = \text{span} \{((T^*)^m T^n - T^n (T^*)^m) H, m, n \geq 1\} \subset H_1.$$

Для проверки эквивалентности определений (15) осталось доказать, что $H_1 \subset \tilde{H}_1$. Очевидно, что $[T^*, T] H \subset \tilde{H}_1$. Из тождеств

$$T [T^*, T] = T^* T^2 - T^2 T^* - [T^*, T] T,$$

$$T^* [T^*, T] = (T^*)^2 T - T (T^*)^2 - [T^*, T] T^*,$$

следует, что $T [T^*, T] H \subset \tilde{H}_1$ и $T^* [T^*, T] H \subset \tilde{H}_1$. Домножая вышеуказанные тождества на T и T^* и применяя формулу (17), мы получим:

$$T^n [T^*, T] = T^* T^{n+1} - T^{n+1} T^* - R_1,$$

$$(T^*)^m [T^*, T] = (T^*)^{m+1} T - T (T^*)^{m+1} - R_2,$$

где R_1 и R_2 — слагаемые, образы которых лежат в $\tilde{H}_1$ из принципа индукции. Следовательно, образы левых частей также лежат в $\tilde{H}_1$. Проверим, что $T \tilde{H}_1 \subset \tilde{H}_1$ и $T^* \tilde{H}_1 \subset \tilde{H}_1$. Так как

$$T ((T^*)^m T^n - T^n (T^*)^m) = T (T^*)^m T^n - T^{n+1} (T^*)^m,$$

то применяя последовательно к первому слагаемому формулу (17) и учитывая, что $(T^*)^k [T^*, T] H \subset \tilde{H}_1$, $k \geq 0$, получим что $T \tilde{H}_1 \subset \tilde{H}_1$. Аналогично, $T^* \tilde{H}_1 \subset \tilde{H}_1$. Таким образом, $(T^*)^m T^n \tilde{H}_1 \subset \tilde{H}_1$. В частности, $(T^*)^m T^n [T^*, T] H \subset \tilde{H}_1$, то есть $H_1 \subset \tilde{H}_1$. Таким образом, все определения (15) эквивалентны.

Поскольку пространство H разлагается в сумму

$$H = ((T^*)^m T^n - T^n (T^*)^m) H \oplus \ker ((T^*)^n T^m - T^m (T^*)^n),$$

то беря объединение по m, n с одной стороны и пересечение с другой, мы получаем, что $H = H_1 \oplus H_0$, то есть справедлива формула (16).

Из (15) следует, что $T H_1 \subset H_1$ и $T^* H_1 \subset H_1$, то есть подпространство H_1 приводит T (а значит и H_0 приводит T). Поскольку $[T^*, T] H \subset H_1$, то $H_0 = H_1^\perp \subset \ker [T^*, T]$, и поэтому $T|_{H_0}$ нормален. Предположим, что в H_1

существует подпространство L , которое приводит T и на котором T нормален. Тогда $L \subset \ker [T^*, T]$, и следовательно $[T^*, T](T^*)^m T^n l = 0, \forall l \in L$. Поэтому $\forall g \in H$ имеем:

$$0 = \langle [T^*, T](T^*)^m T^n l, g \rangle = \langle l, (T^*)^n T^m [T^*, T] g \rangle,$$

то есть подпространства L и H_1 ортогональны. Таким образом подпространство L тривиально, а значит $T|_{H_1}$ вполне ненормален и разложение $H = H_1 \oplus H_0$ единственно. Теорема доказана.

Заметим, что для оператора T , включенного в нормальный метрический узел, в силу (2), подпространство H_1 может быть записано в виде:

$$H_1 = \text{span} \{ (T^*)^m T^n \Phi E, m, n \geq 0 \} = \text{span} \{ T^n (T^*)^m \Phi E, m, n \geq 0 \}. \quad (18)$$

Определение. Нормальный метрический узел Δ называется простым, если $H = H_1$, где H_1 имеет вид (18).

5. Теорема об унитарной эквивалентности

Определение. Два нормальных метрических узла

$$\Delta = \left(\sigma_1, H \oplus E, V = \begin{bmatrix} T & \Phi \\ \Phi^* & K \end{bmatrix}, H \oplus E, \sigma_2 \right),$$

$$\Delta' = \left(\sigma'_1, H \oplus E, V' = \begin{bmatrix} T' & \Phi' \\ \Phi'^* & K' \end{bmatrix}, H \oplus E, \sigma'_2 \right)$$

называются унитарно-эквивалентными, если $\sigma_1 = \sigma'_1, \sigma_2 = \sigma'_2$, и существует унитарный оператор $U: H \rightarrow H$, такой что

$$\begin{bmatrix} U & 0 \\ 0 & I_E \end{bmatrix} V = V' \begin{bmatrix} U & 0 \\ 0 & I_E \end{bmatrix}. \quad (19)$$

Условие (19) означает, что $UT = T'U, U\Phi = \Phi', K = K'$ и кроме того, очевидно, что $S_\Delta(z) = S_{\Delta'}(z)$.

Теорема. Предположим, что заданы два простых нормальных метрических узла Δ и Δ' , у которых совпадают метрики $\sigma_1 = \sigma'_1, \sigma_2 = \sigma'_2$, и в окрестности хотя бы одной комплексной точки аналитичности z_0 совпадают характеристические функции $S_\Delta(z) = S_{\Delta'}(z)$. Тогда узлы Δ и Δ' унитарно-эквивалентны.

Доказательство. Поскольку $K = S_\Delta(\infty)$ и

$$(zI - T)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{T^n}{z^{n+1}},$$

то у узлов Δ и Δ' совпадают операторы:

$$K = K', \quad \Phi^* T^n \Phi = \Phi'^* T'^n \Phi' \quad (n \geq 0). \quad (20)$$

Домножим $S_\Delta(z)$ на $\sigma_1 K$ справа и воспользуемся узловым соотношением (3):

$$S_\Delta(z) \sigma_1 K = K \sigma_1 K + \Phi^* (zI - T)^{-1} T \Phi + \\ + \Phi^* (zI - T)^{-1} \Phi \sigma_2 K - \Phi^* (zI - T)^{-1} T^* \Phi.$$

Из (20) следует, что первые три слагаемых у узлов Δ и Δ' совпадают. Следовательно у них совпадают также операторы:

$$\Phi^* T^n T^* \Phi = \Phi'^* T'^n T'^* \Phi' \quad (n \geq 0). \quad (21)$$

Домножая $S_\Delta(z) (\sigma_1 K)^{k-1}$ по индукции на $\sigma_1 K$ справа, отщепляя на каждом шаге последнее слагаемое $\Phi^* (zI - T)^{-1} (T^*)^{k-1} \Phi$ и применяя к нему формулу (3), будем иметь:

$$S_0 \sigma_1 K = \Phi^* (zI - T)^{-1} (T^*)^{k-1} \Phi \sigma_1 K + \\ + \Phi^* (zI - T)^{-1} (T^*)^{k-1} T \Phi - \Phi^* (zI - T)^{-1} (T^*)^k \Phi,$$

где S_0 – оператор, который совпадает у узлов Δ и Δ' . Таким образом, в силу предположения индукции, первое слагаемое у узлов совпадает. Во втором слагаемом применим узловое соотношение (2), заменяя последовательно $T^* T$ на $TT^* + \Phi(\sigma_2 - \sigma_1)\Phi^*$. Тогда в силу (20) и

$$\Phi^* T^n (T^*)^l \Phi = \Phi'^* T'^n (T'^*)^l \Phi' \quad (n \geq 0, \quad 0 \leq l \leq k-1),$$

мы будем иметь, что все получаемые слагаемые у узлов Δ и Δ' будут совпадать. Таким образом, и слагаемое

$$\Phi^* T^n (T^*)^k \Phi = \Phi'^* T'^n (T'^*)^k \Phi' \quad (n \geq 0, \quad k \geq 0), \quad (22)$$

у узлов также совпадает.

Далее, аналогичным образом последовательно домножая характеристическую функцию справа на $\sigma_1 K$, и применяя узловые соотношения (3) и (2), мы получим, что у узлов Δ и Δ' совпадают операторы

$$\Phi^* T^n (T^*)^k T^s (T^*)^l \Phi = \Phi'^* T'^n (T'^*)^k T'^s (T'^*)^l \Phi' \quad (n, k, s, l \geq 0). \quad (23)$$

Зададим оператор U на линейной оболочке следующим образом:

$$UT^n (T^*)^k \Phi h = T'^n (T'^*)^k \Phi' h, \quad h \in H \quad (n, k \geq 0). \quad (24)$$

В силу простоты узлов Δ и Δ' оператор U отображает все пространство H на все пространство H , и поэтому для того, чтобы проверить его унитарность,

достаточно проверить его изометричность. Проверим сохранение скалярного произведения. В силу (23) и (24) имеем:

$$\begin{aligned} \langle UT^s (T^*)^l \Phi h, UT^k (T^*)^n \Phi \hat{h} \rangle &= \langle T'^s (T'^*)^l \Phi' h, T'^k (T'^*)^n \Phi' \hat{h} \rangle = \\ &= \langle \Phi'^* T'^n (T'^*)^k T'^s (T'^*)^l \Phi' h, \hat{h} \rangle = \langle \Phi^* T^n (T^*)^k T^s (T^*)^l \Phi h, \hat{h} \rangle = \\ &= \langle T^s (T^*)^l \Phi h, T^k (T^*)^n \Phi \hat{h} \rangle, \quad \forall h, \hat{h} \in H \quad (\forall n, k, s, l \geq 0). \end{aligned}$$

Таким образом, оператор U унитарный.

Проверим, что U удовлетворяет определению унитарной эквивалентности. В силу (24) $U\Phi = \Phi'$ (при $n = k = 0$). Из (24) также следует:

$$\begin{aligned} 0 &= UTT^{n-1} (T^*)^k \Phi h - T' T'^{n-1} (T'^*)^k \Phi' h = \\ &= (UT - T'U) T^{n-1} (T^*)^k \Phi h, \quad \forall h \in H \quad (\forall n \geq 1, k \geq 0). \end{aligned}$$

Таким образом, в силу простоты узла Δ , равенство $UT = T'U$ выполнено во всем пространстве H . Таким образом, узлы Δ и Δ' унитарно-эквивалентны. Теорема доказана.

6. Теорема существования

В силу (22) следующие выражения:

$$F(S_\Delta(\bar{w}), \sigma_1, \sigma_2, z) = \Phi^* (\bar{w}I - T)^{-1} (zI - T^*)^{-1} \Phi, \quad (25)$$

$$\hat{F}(S_\Delta(w), \sigma_1, \sigma_2, z) = \Phi^* (\bar{w}I - T^*)^{-1} (zI - T)^{-1} \Phi, \quad (26)$$

являются функциями только характеристических функций, метрик и переменных z и w . Образует следующую операторно-значную функцию $K(z, w)$ в $E \oplus E$:

$$K(z, w) = \begin{pmatrix} \hat{F}(S_\Delta(w), \sigma_1, \sigma_2, z) & \frac{S_\Delta^*(\bar{z}) - S_\Delta^*(w)}{\bar{w} - z} \\ \frac{S_\Delta(z) - S_\Delta(\bar{w})}{\bar{w} - z} & F(S_\Delta(\bar{w}), \sigma_1, \sigma_2, z) \end{pmatrix}, \quad (27)$$

которую мы будем называть ядром I-форм нормального метрического узла Δ . Из формул (14), (25), (26) следует, что ядро $K(z, w)$ является эрмитово-положительным, так как $K(z, w) = \Pi^*(w) \Pi(z)$, где

$$\Pi(z) = [(zI - T)^{-1} \Phi, (zI - T^*)^{-1} \Phi]. \quad (28)$$

Через $\{K_{i,j}(z, w)\}_{i,j=1}^2$ мы будем обозначать соответствующие блоки операторно-значной функции $K(z, w)$. Следующая теорема дает ответ на вопрос, какими свойствами должна обладать операторно-значная функция $S(z) : E \rightarrow E$, чтобы существовал нормальный метрический узел Δ с характеристической функцией $S(z)$.

Теорема (существования). *Предположим, что операторно-значная функция $S(z)$ обладает следующими свойствами:*

1) *Существуют самосопряженные операторы σ_1, σ_2 в E такие, что ядро I -форм $K(z, w)$ (27), составленное по $S(z)$ является эрмитово-положительным в некоторой окрестности бесконечно удаленной точки комплексной плоскости $G_R = \{z : |z| > R > 0\}$.*

2) *Ядро $K(z, w)$ является аналитической (в смысле сходимости соответствующих рядов) операторно-значной функцией в $G_R \times G_R$ от z и $\bar{w}$, причем $K(z, w) = \frac{1}{z\bar{w}} K_0 + \dots$ ($K_0 \neq 0, S(\infty) \neq 0$).*

3) *Характеристическая функция $S(z)$ в G_R удовлетворяет соотношению:*

$$S^*(w) \sigma_1 S(z) = S(\bar{w}) \sigma_2 S^*(\bar{z}). \quad (29)$$

Тогда существует нормальный метрический узел

$$\Delta = \left(\sigma_1, H \oplus E, V = \begin{bmatrix} T & \Phi \\ \Phi^* & K \end{bmatrix}, H \oplus E, \sigma_2 \right),$$

такой что $S_\Delta(z) = S(z)$.

Заметим, что если в (29) устремить $z \rightarrow \infty, w \rightarrow \infty$, то в силу определения характеристической функции (8), мы получим узловое соотношение (4). Таким образом, для существования нормального метрического узла мы требуем выполнение соотношения (4) для характеристической функции в окрестности G_R .

Доказательство. Рассмотрим линейную оболочку векторно-значных " δ "-функций, носители которых сосредоточены только в точках $z \in G_R$, со значениями в $E \oplus E$: $f(z) = e_z f, f = (u, \tilde{u}) \in E \oplus E$. После замыкания данной линейной оболочки относительно следующего скалярного произведения

$$\langle f(z), g(w) \rangle_H = \langle K(z, w) f, g \rangle_{E \oplus E}, \quad (30)$$

$g(w) = e_w g, g \in E \oplus E, w \in G_R$, и факторизации по ядру данной метрики (поскольку ядро эрмитово-положительно, то оно является метрикой), мы получим гильбертово пространство H .

Обозначим через H_E и $\hat{H}_E$ подпространства в H , которые получаются в результате замыкания линейной оболочки векторов $e_z(u, 0)$ и $e_z(0, \tilde{u})$ соответственно, относительно введенной метрики. Теперь определим оператор V на $H_E \oplus E$ следующим образом:

$$V \begin{pmatrix} e_z u \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z e_z u \\ S(z) u \end{pmatrix}. \quad (31)$$

Определим также оператор V_1 на $\hat{H}_E \oplus E$ посредством формулы:

$$V_1 \begin{pmatrix} e_z \tilde{u} \\ \tilde{u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z e_z \tilde{u} \\ S^*(\bar{z}) \tilde{u} \end{pmatrix}. \quad (32)$$

Из очевидного тождества

$$z \langle K_{1,2}(z, w) u, \tilde{u} \rangle + \langle S(z) u, \tilde{u} \rangle = \bar{w} \langle K_{1,2}(z, w) u, \tilde{u} \rangle + \langle u, S^*(\bar{w}) \tilde{u} \rangle,$$

с учетом определений (30)-(32) следует, что

$$\left\langle V \begin{pmatrix} e_z u \\ u \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e_w \tilde{u} \\ \tilde{u} \end{pmatrix} \right\rangle_{H \oplus E} = \left\langle \begin{pmatrix} e_z u \\ u \end{pmatrix}, V_1 \begin{pmatrix} e_w \tilde{u} \\ \tilde{u} \end{pmatrix} \right\rangle_{H \oplus E}. \quad (33)$$

Из равенства (33) следует, что $V(V_1)$ можно корректным образом продолжить на $\hat{H}_E \oplus E$ ($H_E \oplus E$) так, чтобы

$$V|_{\hat{H}_E \oplus E} = V_1^*|_{\hat{H}_E \oplus E}.$$

В силу (29), из тождества

$$z \bar{w} \langle K_{1,1}(z, w) u, \tilde{u} \rangle + \langle S^*(w) \sigma_1 S(z) u, \tilde{u} \rangle = z \bar{w} \langle K_{1,1}(z, w) u, \tilde{u} \rangle + \langle S(\bar{w}) \sigma_2 S^*(z) u, \tilde{u} \rangle,$$

следует, что

$$\left\langle \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & \sigma_1 \end{pmatrix} V \begin{pmatrix} e_z u \\ u \end{pmatrix}, V \begin{pmatrix} e_w \tilde{u} \\ \tilde{u} \end{pmatrix} \right\rangle_{H \oplus E} = \left\langle \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{pmatrix} V_1 \begin{pmatrix} e_z u \\ u \end{pmatrix}, V_1 \begin{pmatrix} e_w \tilde{u} \\ \tilde{u} \end{pmatrix} \right\rangle_{H \oplus E}, \quad (34)$$

то есть выполнено узловое соотношение (1) на плотных множествах в $H \oplus E$.

Записывая V по-блочному относительно разложения $H \oplus E$ и учитывая (31), получаем:

$$\begin{cases} T e_z u + \Phi u = z e_z u \\ \Phi^* e_z u + K u = S(z) u. \end{cases}$$

Откуда следует, что характеристическая функция узла

$$\Delta = \left(\sigma_1, H \oplus E, V = \begin{bmatrix} T & \Phi \\ \Phi^* & K \end{bmatrix}, H \oplus E, \sigma_2 \right),$$

равняется $S(z)$. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лившиц М. С., Янцевич А. А. Теория операторных узлов в гильбертовых пространствах. – Харьков: Изд. харьковского университета, 1971. – 160 с.
2. Бродский М. С. Унитарные операторные узлы и их характеристические функции // УМН. – 1978. – Т. 33, вып. 4 /202/. – С. 141-168.

3. Золотарев В. А. Метод открытых систем. Треугольные и функциональные модели коммутативных систем двух операторов // Рукопись. Деп. в укр. НИИНТИ РЖ. Мат. 9Б630. Деп. 1984. – 166 с.
4. С.-Надь Б., Фояш Ч. Гармонический анализ операторов в гильбертовом пространстве. – М.: Мир, 1970. – 431 с.
5. Вольберг А. Л., Пеллер В. В., Якубович Д. В. Небольшая экскурсия в теорию гипонормальных операторов // Ленингр. отд. Мат. инстит. им. В. А. Стеклова АН СССР. – Алгебра и анализ. – 1990. – Т. 2, вып. 2 – 38 с.
6. Xia Daoxing. Spectral theory of hyponormal operators. Operator Theory: Advances and Applications // Basel; Boston; Stuttgart: Birkhauser-Verlag. – 1983. – V. 10 – 242 p.

Глобальная нуль управляемость линейных
дискретных систем

А. В. Луценко, В. А. Скорик

Харьковский государственный университет

Рассматривается проблема глобальной нуль управляемости линейной неавтономной дискретной системы. Даны необходимые и достаточные условия глобальной нуль управляемости как при ограничениях на управления, так и без них. Даны также достаточные условия сохранения глобальной нуль управляемости при малых возмущениях.

1. Введение

В данной работе рассматривается проблема глобальной нуль управляемости для линейных систем

$$x(k+1) = A(k)x(k) + B(k)u(k), \quad k \in \mathbb{N}_0, \quad (1)$$

где $\mathbb{N}_0$ – множество целых неотрицательных чисел, $x(k) \in \mathbb{R}^n$, $u(k) \in \Omega \subset \mathbb{R}^r$, $r \leq n$, $A(\cdot)$, $B(\cdot)$ – матрицы соответствующих размеров. Для системы (1) определим матричнозначную функцию Φ в $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ формулами

$$\begin{aligned} \Phi(k, j) &= A(k-1)A(k-2)\dots A(j+1)A(j) \quad \text{при } k > j, \\ \Phi(k, k) &= I \quad (I - \text{единичная матрица}), \\ \Phi(k, j) & - \text{не определена при } k < j. \end{aligned}$$

Все матрицы в данной работе предполагаются вещественными. Через A^* будем обозначать матрицу, транспонированную к матрице A , через $[p, q]$ – дискретный промежуток, т.е. множество $[p, q] = \{p, p+1, \dots, q\}$.

Применив индукцию, легко получаем, что решение системы (1), начинающееся в момент k_0 в точке x_0 , имеет вид

$$x(k, k_0, x_0, u) = \Phi(k, k_0)x_0 + \sum_{j=k_0}^{k-1} \Phi(k, j+1)B(j)u(j). \quad (2)$$

В приводимых в дальнейшем определениях будем говорить, что последовательность $\{u(k_0), u(k_0+1), \dots, u(k_0+k_1-1)\} \subset \Omega$ переводит точку x_0 в

точку x_1 за промежуток $[k_0, k_1]$ в силу системы (1), если решение $x(k, k_0, x_0, u)$ системы (1) удовлетворяет в момент k_1 условию $x(k_1, k_0, x_0, u) = x_1$.

Определение. Система (1) называется глобально нуль управляемой на $\mathbb{N}_0$, если для любой точки $x_0 \in \mathbb{R}^n$ найдется $N \in \mathbb{N}_0$ и последовательность $\{u(0), u(1), \dots, u(N-1)\} \subset \Omega$, которая переводит x_0 в точку 0 за промежуток $[0, N]$ в силу системы (1).

Систему (1) можно рассматривать как конечно-разностную аппроксимацию непрерывной системы

$$\dot{x} = A_0(t)x + B_0(t)u, \quad t \in [0, \infty), \quad u \in \Omega. \quad (3)$$

Большинство результатов по управляемости для системы (3) при ограничениях на управление установлены для автономных систем. В случае, когда $\Omega = \mathbb{R}^r$ Р. Е. Калман [1] показал, что необходимым и достаточным условием глобальной нуль управляемости является $\text{rank}(B_0, A_0 B_0, \dots, A_0^{n-1} B_0) = n$. Ж. Ла-Салль [2] рассмотрел случай, когда Ω есть единичный шар в $\mathbb{R}^r$, и показал, что необходимыми и достаточными условиями глобальной нуль управляемости являются: 1) $\text{rank}(B_0, A_0 B_0, \dots, A_0^{n-1} B_0) = n$ и 2) каждое собственное значение λ матрицы A_0 удовлетворяет неравенству $\text{Re} \lambda \leq 0$.

С. Саперстон [3], Р. Браммер [4], В. И. Коробов, А. П. Маринич, Е. Н. Подольский [5] распространили предыдущий результат на случай, когда $0 \notin \text{int } \Omega$ и дали необходимые и достаточные условия глобальной нуль управляемости.

Для неавтономных систем Р. Е. Калман [1] показал, что когда $\Omega = \mathbb{R}^r$, система (3) глобально нуль управляема на $[0, \infty)$ тогда и только тогда, когда матрица $Q(0, t_1)$ положительно определена при некотором $t_1 \in [0, \infty)$, где

$$Q(0, t_1) = \int_0^{t_1} \Phi(t_1, \tau) B_0(\tau) B_0^*(\tau) \Phi^*(t_1, \tau) d\tau$$

и $\Phi(t, \tau)$ — матрица Коши системы $\dot{x} = A_0(t)x$. При наличии ограничений на управление более общий результат представлен в работах Ж. Л. Ле-Мей [6] и Р. Конти [7], которые при условии $0 \in \text{int } \Omega$ дали необходимые и достаточные условия глобальной нуль управляемости в форме:

$$\int_0^\infty \|B_0^*(t) \Phi^*(0, t)x\| dt = +\infty$$

для любого вектора $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. З. Бенсаид [8] рассмотрел систему (3) с почти постоянными матрицами и получил достаточные условия глобальной нуль управляемости.

Проблемы, перечисленные выше, в данной работе исследуются для случая дискретных систем.

2. Глобальная управляемость без ограничений на управление

Следующая теорема дает решение вопроса о глобальной управляемости без ограничений на управление.

Теорема 1. Для того, чтобы система (1) была глобально нуль управляема на $\mathbb{N}_0$ достаточно, а если матрицы $A(k)$ невырождены, то и необходимо, чтобы существовало $N \in \mathbb{N}_0$ такое, при котором матрица

$$Q(0, N) = \sum_{j=0}^{N-1} \Phi(N, j+1) B(j) B^*(j) \Phi^*(N, j+1)$$

будет положительно определена.

Доказательство. Для доказательства достаточности предположим, что существует $N \in \mathbb{N}_0$ такое, что матрица $Q(0, N)$ положительно определена. Тогда, взяв произвольную точку $x_0 \in \mathbb{R}^n$ и положив

$$u(j) = -B^*(j) \Phi^*(N, j+1) Q^{-1}(0, N) \Phi(N, 0) x_0,$$

получим, в силу формулы (2), $x(N, 0, x_0, u) = 0$.

Для доказательства необходимости предположим, что система (1) глобально нуль управляема. Мы должны доказать, что матрица $Q(0, N)$ положительно определена при некотором N . Действуя от противного, предположим, что для любого $N \in \mathbb{N}_0$ матрица $Q(0, N)$ не является положительно определенной, то есть не является положительно определенной квадратичная форма

$$W(x) = \sum_{j=0}^{N-1} x^* \Phi(N, j+1) B(j) B^*(j) \Phi^*(N, j+1) x = \sum_{j=0}^{N-1} \|x^* \Phi(N, j+1) B(j)\|^2.$$

Следовательно, найдется последовательность векторов $\{y_N\}_{N=1}^\infty \subset \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ таких, что

$$W(y_N) = \sum_{j=0}^{N-1} \|y_N^* \Phi(N, j+1) B(j)\|^2 = 0, \quad N = 1, 2, \dots$$

Последнее равенство означает, что

$$y_N^* \Phi(N, j+1) B(j) = 0, \quad j = \overline{0, N-1}. \quad (4)$$

Рассмотрим ограниченную последовательность векторов, задаваемых равенством

$$\xi_N = \frac{\Phi^*(N, 0) y_N}{\|\Phi^*(N, 0) y_N\|}, \quad N = \overline{1, \infty}.$$

Очевидно, $\|\xi_N\| = 1$. Так как

$$\Phi(N, j+1) \Phi(j+1, 0) = \Phi(N, 0), \quad (5)$$

то, представив (4) в виде

$$y_N^* \Phi(N, 0) \Phi^{-1}(N, 0) \Phi(N, j+1) B(j) = 0,$$

получаем, что векторы ξ_N удовлетворяют соотношениям

$$\xi_N^* \Phi^{-1}(j+1, 0) B(j) = 0, \quad N = \overline{1, \infty}, \quad j = \overline{0, N-1}. \quad (6)$$

Из последовательности ξ_N , ввиду ее ограниченности, можно выделить сходящуюся подпоследовательность. Во избежание двойной индексации, будем считать, что сама последовательность ξ_N сходится, то есть существует ξ_0 такое, что

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \xi_N = \xi_0, \quad \|\xi_0\| = 1. \quad (7)$$

Покажем теперь, что точка ξ_0 не может быть переведена в нуль в силу системы (1). Принимая во внимание (6), имеем:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \xi_N^* \Phi^{-1}(j+1, 0) B(j) = 0, \quad j \in \mathbb{N}_0,$$

откуда, в силу (7), получаем для любого $j \in \mathbb{N}_0$

$$\xi_0^* \Phi^{-1}(j+1, 0) B(j) = 0. \quad (8)$$

Рассмотрим решение системы (1), порожденное начальной точкой ξ_0 :

$$x(k, 0, \xi_0, u) = \Phi(k, 0) \xi_0 + \sum_{j=0}^{k-1} \Phi(k, j+1) B(j) u(j).$$

Умножим это равенство на матрицу $\Phi^{-1}(k, 0)$:

$$\Phi^{-1}(k, 0) x(k, 0, \xi_0, u) = \xi_0 + \sum_{j=0}^{k-1} \Phi^{-1}(k, 0) \Phi(k, j+1) B(j) u(j).$$

Принимая во внимание (5), получаем

$$\Phi^{-1}(k, 0) x(k, 0, \xi_0, u) = \xi_0 + \sum_{j=0}^{k-1} \Phi^{-1}(j+1, 0) B(j) u(j).$$

Умножив полученное равенство на ξ_0^* , в силу (8) имеем:

$$\xi_0^* \Phi^{-1}(k, 0) x(k, 0, \xi_0, u) = \xi_0^* \xi_0 = 1.$$

Следовательно, функция $x(k, 0, \xi_0, u)$ не может обратиться в нуль, что противоречит глобальной нуль управляемости.

Теорема 1 доказана.

Приведем пример, показывающий, что без требования невырожденности матриц $A(k)$ положительная определенность матрицы $Q(0, N)$ является только достаточным условием глобальной нуль управляемости. Рассмотрим систему

$$x(k+1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ k+1 & 0 \end{pmatrix} x(k) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(k), \quad k \in \mathbb{N}_0. \quad (9)$$

Здесь

$$A(k) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ k+1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B(k) = B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Матрица $Q(0, N)$ в данном случае имеет вид

$$Q(0, N) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad N \geq 1,$$

и, очевидно, не является положительно определенной. Тем не менее, так как решение системы (9) имеет вид

$$x(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x(0) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(0), \quad x(k) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(k-1), \quad k \geq 2,$$

то уже при $k=2$ будет $x(k)=0$, если положить $\{u(0), u(1)\} = \{u(0), 0\}$, то есть система (9) глобально нуль управляема.

3. Глобальная нуль управляемость при ограничениях на управление

Следующая теорема дает решение вопроса о глобальной нуль управляемости при условии, что ограничения на управление имеют вид выпуклого компакта.

Теорема 2. Пусть матрицы $A(k)$ невырождены, Ω – выпуклый компакт, $0 \in \text{int } \Omega$. Для того, чтобы система (1) была глобально нуль управляема, необходимо и достаточно, чтобы соотношение

$$\sum_{j=0}^{\infty} \|y^* \Phi^{-1}(j+1, 0) B(j)\| = \infty \quad (10)$$

выполнялось для любого вектора $y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

Для доказательства теоремы 2 понадобится следующая лемма.

Лемма. Пусть D – выпуклое множество из $\mathbb{R}^n$. Для того, чтобы $D = \mathbb{R}^n$, необходимо и достаточно, чтобы для любого числа $L \in \mathbb{R}$ и любого ненулевого вектора $y \in \mathbb{R}^n$ нашелся вектор $x \in D$ такой, что $(y, x) > L$.

Доказательство леммы. Предположим, что условия выполнены, но $D \neq \mathbb{R}^n$. Тогда, в силу свойств выпуклых множеств, существуют $L \in \mathbb{R}$ и $y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$

такие, что множество $\mathbf{D}$ полностью содержится в полупространстве $(y, x) \leq L$, $x \in \mathbb{R}^n$. Противоречие.

Обратно, пусть $\mathbf{D} = \mathbb{R}^n$. Возьмем произвольное число $L \in \mathbb{R}$ и произвольный вектор $y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Положим $x = \lambda y$, $\lambda \in \mathbb{R}$, тогда $(y, x) = \lambda \|y\|^2$, откуда следует, что $(y, x) > L$ при $\lambda > \frac{L}{\|y\|^2}$. Лемма доказана.

Доказательство теоремы. Обозначим через $\mathbf{K}$ множество всех точек $x \in \mathbb{R}^n$, которые могут быть переведены всевозможными последовательностями вида $\{u(0), u(1), \dots, u(m)\} \subset \Omega$, $m \in \mathbb{N}_0$ в точку 0 в силу системы (1). Точки, которые переводятся в 0 за промежутки $[0, m]$, задаются, в силу (2), равенством

$$x = - \sum_{j=0}^{m-1} \Phi^{-1}(m, 0) \Phi(m, j+1) B(j) u(j), \quad u(j) \in \Omega.$$

Принимая во внимание (5), последнее равенство представим в виде

$$x = - \sum_{j=0}^{m-1} \Phi^{-1}(j+1, 0) B(j) u(j), \quad u(j) \in \Omega.$$

Таким образом, множество $\mathbf{K}$ имеет вид:

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &= \left\{ x : x = - \sum_{j=0}^{m-1} \Phi^{-1}(j+1, 0) B(j) u(j), \quad u(j) \in \Omega, \quad m = \overline{1, \infty} \right\} = \\ &= \bigcup_{m=1}^{\infty} \left\{ x : x = - \sum_{j=0}^{m-1} \Phi^{-1}(j+1, 0) B(j) u(j), \quad u(j) \in \Omega \right\}. \end{aligned}$$

В силу выпуклости Ω , множество $\mathbf{K}$ – выпукло. Докажем теперь соотношение $\mathbf{K} = \mathbb{R}^n$, что эквивалентно глобальной нуль управляемости системы (1). Вычислим скалярное произведение (y, x) , где $x \in \mathbf{K}$, $y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$:

$$\begin{aligned} (y, x) &= - \sum_{j=0}^{m-1} \left(y, \Phi^{-1}(j+1, 0) B(j) u(j) \right) = \\ &= - \sum_{j=0}^{m-1} \left(B^*(j) \left[\Phi^{-1}(j+1, 0) \right]^* y, u(j) \right), \quad u(j) \in \Omega. \end{aligned} \quad (11)$$

Выберем управление $u(j) = u(j, y)$ следующим образом:

$$u(j, y) = -\alpha \operatorname{sign} \left(B^*(j) \left[\Phi^{-1}(j+1, 0) \right]^* y \right), \quad \alpha > 0, \quad (12)$$

где через $\operatorname{sign} a$, $a = (a_1, \dots, a_r)^*$, обозначен вектор $(\operatorname{sign} a_1, \dots, \operatorname{sign} a_r)^*$. Константу α будем считать настолько малой, чтобы $u(j, y) \in \Omega$ при $j \in \mathbb{N}_0$.

Под нормой вектора $a \in \mathbb{R}^r$ будем понимать $\|a\| = \sum_{i=1}^r |a_i|$. Через $x(m, y)$ обозначим следующий вектор из K :

$$x(m, y) = - \sum_{j=0}^{m-1} \Phi^{-1}(j+1, 0) B(j) u(j, y).$$

Тогда, в силу (11), (12), получаем

$$(y, x(m, y)) = \alpha \sum_{j=0}^{m-1} \|B^*(j) \Phi^{-1*}(j+1, 0) y\|. \quad (13)$$

Для доказательства достаточности предположим, что выполнено условие (10). Тогда из (13) следует, что для любого $L \in \mathbb{R}$ и любого $y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ найдется $m \in \mathbb{N}_0$ такое, что $(y, x(m, y)) > L$. В силу леммы заключаем, что $K = \mathbb{R}^n$.

Для доказательства необходимости предположим, что система (1) глобально нуль управляема, но условие (10) не выполняется. Тогда существует вектор $y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ такой, что

$$\sum_{j=0}^{\infty} \|y^* \Phi^{-1}(j+1, 0) B(j)\| = L < \infty. \quad (14)$$

Так как Ω – компакт, то найдется число $M > 0$ такое, что для любого вектора $u(j) \in \Omega$ будет $\|u(j)\| \leq M$, $j \in \mathbb{N}_0$. Принимая во внимание (11), (14), для любого $x \in K$ получаем

$$(y, x) \leq M \sum_{j=0}^{m-1} \|B^*(j) \Phi^{-1*}(j+1, 0) y\| \leq ML.$$

Тогда, в силу леммы, должно быть $K \neq \mathbb{R}^n$, что противоречит глобальной нуль управляемости.

Теорема доказана.

4. Глобальная нуль управляемость систем с почти постоянными матрицами

В этой части работы покажем, что глобальная нуль управляемость сохраняется при малых возмущениях. В качестве предварительного шага мы доказываем 3 леммы.

Лемма 1. Пусть $A, A_1(j)$ – квадратные матрицы порядка n , $\Phi_1(k, m) = A^{k-m}$, $\Phi_2(k, m) = (A + A_1(k-1))(A + A_1(k-2)) \dots (A + A_1(m))$, $k \geq m+1$.

Тогда справедливо равенство

$$\Phi_2(k, m) = \Phi_1(k, m) + \sum_{j=m}^{k-1} \Phi_1(k, j+1) A_1(j) \Phi_2(j, m). \quad (15)$$

Доказательство. В силу (2) решение системы

$$x(k+1) = (A + A_1(k))x(k), \quad x(m) = x_0$$

удовлетворяет соотношению

$$x(k) = \Phi_1(k, m)x_0 + \sum_{j=m}^{k-1} \Phi_1(k, j+1)A_1(j)x(j).$$

С другой стороны, это решение имеет вид $x(k) = \Phi_2(k, m)x_0$. Принимая во внимание последние два равенства, получаем:

$$\Phi_2(k, m)x_0 = \left(\Phi_1(k, m) + \sum_{j=m}^{k-1} \Phi_1(k, j+1)A_1(j)\Phi_2(j, m) \right) x_0,$$

что эквивалентно, ввиду произвольности x_0 , соотношению (15).

Лемма доказана.

Лемма 2. Пусть B, D – симметрические матрицы одинакового порядка. Если B – положительно определена и $\|B - D\| < \varepsilon$, где ε – положительное число, меньшее минимального собственного значения матрицы B , то D – также положительно определена.

Доказательство. Справедливость утверждения леммы 2 вытекает из равенства $(x, Dx) = (x, Bx) - (x, (B - D)x)$ и неравенств $(x, Bx) \geq m(x, x)$, $|(x, (B - D)x)| \leq \|B - D\|(x, x)$.

Лемма 3. Пусть A, B – постоянные матрицы размеров $n \times n$ и $n \times r$, $A_1(j)$ – квадратная матрица порядка n . Если $\text{rank}(B, AB, \dots, A^{n-1}B) = n$ и $A_1(j) \rightarrow 0$ при $j \rightarrow \infty$, то система

$$x(k+1) = (A + A_1(k))x(k) + Bu(k), \quad \Omega = \mathbb{R}^r \quad (16)$$

глобально нуль управляема на $\mathbb{N}_0$.

Доказательство. Рассмотрим матрицу Калмана

$$Q(m, N) = \sum_{j=m}^{N-1} \Phi(N, j+1)B(j)B^*(j)\Phi^*(N, j+1).$$

Так как $Q(m, N)$ неотрицательна, то $Q(m, N) \geq Q(k, N)$ для любого $k \in [m, N-1]$. Поэтому, чтобы установить глобальную нуль управляемость системы (16), достаточно показать, что соответствующая матрица Калмана положительно определена в некотором промежутке $[N, N+p]$, где $N \in \mathbb{N}_0$, $p \geq 1$.

Возьмем произвольное $\varepsilon \in (0, 1)$ и целое $p \geq 1$. В силу условий леммы, найдется $N_1 \in \mathbb{N}_0$ такое, что $\|A_1(j)\| < \frac{\varepsilon}{p}$ при $j \geq N_1$, следовательно

$$\sum_{j=N}^{N+p-1} \|A_1(j)\| < p \cdot \frac{\varepsilon}{p} = \varepsilon \quad \text{при} \quad N \geq N_1. \quad (17)$$

Принимая во внимание лемму 1, имеем при $N \geq N_1$ и $m \in [N, N+p]$:

$$\|\Phi_2(N+p, m)\| \leq \|\Phi_1(N+p, m)\| + \sum_{j=m}^{N+p-1} \|\Phi_1(N+p, j+1)\| \|A_1(j)\| \|\Phi_2(j, m)\|.$$

Так как

$$\|\Phi_1(N+p, j+1)\| \leq \|A\|^{p-1-(j-N)} \leq L_1, \quad (18)$$

где $L_1 = \max\{1, \|A\|^{p-1}\}$, то

$$\|\Phi_2(N+p, m)\| \leq L_1 + L_1 \sum_{j=m}^{N+p-1} \|A_1(j)\| \|\Phi_2(j, m)\|.$$

Так как $\|\Phi_2(m, m)\| = \|I\| \leq L_1$, то применив дискретный аналог леммы Гронуолла-Беллмана [9], получаем при $N \geq N_1$ и $m \in [N, N+p]$:

$$\|\Phi_2(N+p, m)\| \leq L_1 \exp \left(L_1 \sum_{j=m}^{N+p-1} \|A_1(j)\| \right) \leq L_1 \exp(L_1 \varepsilon). \quad (19)$$

Кроме того, в силу (17) – (19) и леммы 1, имеем при $N \geq N_1$ и $m \in [N, N+p]$:

$$\begin{aligned} \|\Phi_2(N+p, m) - \Phi_1(N+p, m)\| &\leq \sum_{j=m}^{N+p-1} \|\Phi_1(N+p, j+1)\| \|A_1(j)\| \|\Phi_2(j, m)\| \leq \\ &\leq L_1^2 \exp(L_1 \varepsilon) \sum_{j=m}^{N+p-1} \|A_1(j)\| < \varepsilon L_1^2 \exp(L_1 \varepsilon). \end{aligned} \quad (20)$$

Введем следующие матрицы Калмана:

$$Q_k(m, N) = \sum_{j=m}^{N-1} \Phi_k(N, j+1) B B^* \Phi_k^*(N, j+1), \quad k = 1, 2. \quad (21)$$

При $N \geq N_1$, в силу (18) – (20), получаем оценку

$$\begin{aligned} &\|Q_2(N, N+p) - Q_1(N, N+p)\| \leq \\ &\leq \sum_{j=N}^{N+p-1} \|\Phi_2(N+p, j+1) - \Phi_1(N+p, j+1)\| \|B\| \|B^*\| \|\Phi_2^*(N+p, j+1)\| + \\ &+ \sum_{j=N}^{N+p-1} \|\Phi_1(N+p, j+1)\| \|B\| \|B^*\| \|\Phi_2^*(N+p, j+1) - \Phi_1^*(N+p, j+1)\| \leq \\ &\leq \sum_{j=N}^{N+p-1} \varepsilon L_1^3 \|B\|^2 \exp(2L_1 \varepsilon) + \sum_{j=N}^{N+p-1} \varepsilon L_1^3 \|B\|^2 \exp(L_1 \varepsilon) \leq \end{aligned}$$

$$\leq \varepsilon p L_1^3 \|B\|^2 (\exp(2L_1) + \exp(L_1)) = M\varepsilon.$$

Из равенства $Q_2(0, N+p) = Q_2(0, N) + Q_2(N, N+p)$ следует, что положительной определенности матрицы $Q_2(N, N+p)$ достаточно для того, чтобы $Q_2(0, N+p)$ была положительно определенной.

Так как $\text{rank } Q = n$, где $Q = (B, AB, \dots, A^{n-1}B)$, то легко обнаружить, что для любого целого $p \geq n$ и любого $N \in \mathbb{N}_0$ матрица $Q_1(N, N+p)$ будет положительно определена. Действительно, произведя в равенстве

$$Q_1(N, N+p) = \sum_{j=N}^{N+p-1} A^{N+p-1-j} B B^* A^{N+p-1-j}$$

замену индекса суммирования, положив $k = N+p-1-j$, получаем

$$Q_1(N, N+p) = \sum_{k=0}^{p-1} A^k B B^* A^{*k}.$$

Если допустить, что существует $p \geq n$, при котором эта матрица не будет положительно определенной, то найдется вектор $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ такой, что

$$\xi^* Q_1(N, N+p) \xi = \sum_{k=0}^{p-1} \|\xi^* A^k B\|^2 = 0,$$

откуда получаем

$$\xi^* A^k B = 0, \quad k = \overline{0, p-1},$$

что противоречит условию $\text{rank } Q = n$.

Итак, существует целое $p > 0$ такое, что $Q_1(N, N+p)$ положительно определена при любом $N \in \mathbb{N}_0$. Тогда, в силу леммы 2, матрица $Q_2(N, N+p)$ также положительно определена при достаточно малом ε . На основании теоремы 1 заключаем, что система (16) глобально нуль управляема.

Лемма доказана.

Теорема 3. Пусть A, B – постоянные матрицы размеров $n \times n$ и $n \times r$, $A_1(j), B_1(j)$ – матрицы размеров $n \times n$ и $n \times r$. Если $\text{rank}(B, AB, \dots, A^{n-1}B) = n$ и $A_1(j) \rightarrow 0, B_1(j) \rightarrow 0$ при $j \rightarrow \infty$, то система

$$x(k+1) = (A + A_1(k))x(k) + (B + B_1(k))u(k), \quad \Omega = \mathbb{R}^r \quad (22)$$

глобально нуль управляема.

Доказательство. Пусть Q_1, Q_2 – матрицы, задаваемые соотношениями (21). Обозначим через Q_3 матрицу

$$Q_3(m, N) = \sum_{j=m}^{N-1} \Phi_2(N, j+1)(B + B_1(j))(B^* + B_1^*(j))\Phi_2^*(N, j+1).$$

Для любого целого $p \geq 1$ и для любого $N \in \mathbb{N}_0$ имеем:

$$\|Q_3(N, N+p) - Q_1(N, N+p)\| \leq \|Q_3(N, N+p) - Q_2(N, N+p)\| +$$

$$+\|Q_2(N, N+p) - Q_1(N, N+p)\|. \quad (23)$$

Для любого $\varepsilon > 0$, в силу леммы 3, существует $N_1 \in \mathbb{N}_0$ такое, что для всех $N \geq N_1$ будет $\|Q_2(N, N+p) - Q_1(N, N+p)\| < \varepsilon$. Первый член правой части (23) может быть оценен следующим образом:

$$\begin{aligned} & \|Q_3(N, N+p) - Q_2(N, N+p)\| \leq \\ & \leq \sum_{j=N}^{N+p-1} \|\Phi_2(N+p, j+1)\| (\|B_1(j)\| \|B^* + B_1^*(j)\| + \|B\| \|B_1^*(j)\|) \|\Phi_2^*(N+p, j+1)\|. \end{aligned}$$

Существует $N_2 \in \mathbb{N}_0$ такое, что для любого $N \geq N_2$ будет

$$\|\Phi_2(N+p, j+1)\| \leq L_2 \quad (\text{в силу (19)}),$$

$$\|B^* + B_1^*(j)\| \leq L_3, \quad \|B\| \leq L_3, \quad \sum_{j=N}^{N+p-1} (\|B_1(j)\| + \|B_1^*(j)\|) < \varepsilon.$$

Тогда $\|Q_3(N, N+p) - Q_2(N, N+p)\| < L_4\varepsilon$ при $N > N_2$. Таким образом, $\|Q_3(N, N+p) - Q_1(N, N+p)\| < (1 + L_4)\varepsilon$ при $N \geq \max\{N_1, N_2\}$. Это означает, в силу лемм 2 и 3, что матрица $Q_3(N, N+p)$ положительно определена при достаточно больших N . Следовательно, система (22) глобально нуль управляема. Теорема доказана.

Теорема 4. Рассмотрим систему

$$x(k+1) = (A + A_1(k))x(k) + (B + B_1(k))u(k), \quad u(k) \in \Omega \subset \mathbb{R}^r. \quad (24)$$

Предположим, что $A + A_1(k)$ – невырожденные матрицы и что

- (а) $\text{rank}(B, AB, \dots, A^{n-1}B) = n$;
- (б) Ω – выпуклый компакт, $0 \in \text{int}\Omega$;
- (в) $|\lambda_i| < 1$ для всех обобщенных значений матрицы A ;
- (г) $\lim_{k \rightarrow \infty} A_1(k) = \lim_{k \rightarrow \infty} B_1(k) = 0$.

Тогда система (24) глобально нуль управляема на $\mathbb{N}_0$.

Доказательство. Воспользуемся критерием, полученным в теореме 2. При доказательстве леммы 3 установлено, что $Q_1(N, N+p) = \sum_{k=0}^{p-1} A^k B B^* A^{*k}$ и что при $p \geq n$ существует $m > 0$ такое, что $Q_1(N, N+p) \geq mI$ при любом $N \in \mathbb{N}_0$. Учитывая, что $|y^*(Q_3 - Q_1)y| \leq \|Q_3 - Q_1\| \|y\|^2$, из равенства $y^*Q_3y = y^*Q_1y + y^*(Q_3 - Q_1)y$ получаем

$$y^*Q_3(N, N+p)y \geq m\|y\|^2 - \|Q_3(N, N+p) - Q_1(N, N+p)\| \|y\|^2.$$

При доказательстве теоремы 3 показано, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется $N_1 \in \mathbb{N}_0$ такое, что при $N \geq N_1$ будет $\|Q_3(N, N+p) - Q_1(N, N+p)\| < \varepsilon$, а значит для любого $y \in \mathbb{R}^n$

$$y^*Q_3(N, N+p)y \geq (m - \varepsilon)\|y\|^2 \quad \text{при } N \geq N_1.$$

Таким образом, можно выбрать $\mu > 0$, зависящее только от p , так, что при всех $N \geq N_1$ будет

$$y^* Q_3(N, N+p)y \geq \mu \|y\|^2,$$

откуда получаем, что существует $\gamma > 0$, зависящее только от p такое, что для любого $y \in \mathbb{R}^n$ при всех $N \geq N_1$ справедливо неравенство

$$\sum_{j=N}^{N+p-1} \|(B^* + B_1^*(j))\Phi_2^*(N+p, j+1)y\| \geq \gamma \|y\|. \quad (25)$$

Соотношение (в) означает, что система $x(k+1) = Ax(k)$ асимптотически устойчива, т.е. существуют положительные числа L_1 и $\alpha \in (0, 1)$ такие, что $\|A^{k-j}\| \leq L_1 \alpha^{k-j}$ при $0 \leq j \leq k$. Из леммы 1 и леммы Гронуолла-Беллмана получаем

$$\|\Phi_2(k, j)\| \leq L_1 \alpha^{k-j} \exp \left(L_1 \sum_{i=j}^k \|A_1(i)\| \right), \quad 0 \leq j \leq k,$$

откуда следует, что при любом $N \in \mathbb{N}_0$ и любом $m \geq 1$

$$\|\Phi_2(N+mp, N+(m-1)p)\| \leq L_1 \alpha^p \exp \left(L_1 \sum_{j=N+(m-1)p}^{N+mp} \|A_1(j)\| \right).$$

Из условия (г) вытекает, что для любого $\varepsilon \in (0, 1)$ и любого $p \geq 1$ найдется N_2 такое, что при $N \geq N_2$ и $m \geq 1$

$$\|\Phi_2(N+mp, N+(m-1)p)\| \leq L_1 \alpha^p \exp(L_1 \varepsilon) \leq L \alpha^p,$$

где можно считать $L > 1$. Отсюда следует, что для любого целого $k > 0$ и любого $N \geq N_2$

$$\|\Phi_2(N+kp, N)\| \leq L^k \alpha^{kp}$$

и, следовательно, для любого $y \in \mathbb{R}^n$ при $N \geq N_2$

$$\|[\Phi_2^*(N+kp, N)]^{-1} y\| \geq \frac{1}{L^k \alpha^{kp}} \|y\|. \quad (26)$$

В силу теоремы 2, мы должны показать, что для любого $y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$

$$\sum_{j=0}^{\infty} \|(B^* + B_1^*(j)) [\Phi_2^{-1}(j+1, 0)]^* y\| = +\infty. \quad (27)$$

Выбрав N достаточно большим, будем иметь в силу (25), (26)

$$\sum_{j=N}^{\infty} \|(B^* + B_1^*(j)) [\Phi_2^{-1}(j+1, 0)]^* y\| =$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=N+(k-1)p}^{N+(k-1)p+p-1} \left\| (B^* + B_1^*(j)) [\Phi_2^{-1}(j+1, 0)]^* y \right\| = \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=\tilde{N}}^{\tilde{N}+p-1} \left\| (B^* + B_1^*(j)) \Phi_2^*(\tilde{N} + p, j+1) [\Phi_2^*(\tilde{N} + p, 0)]^{-1} y \right\| \geq \\
&\geq \sum_{k=1}^{\infty} \gamma \left\| [\Phi_2^*(N + kp, 0)]^{-1} y \right\| = \sum_{k=1}^{\infty} \gamma \left\| [\Phi_2^*(N + kp, N)]^{-1} [\Phi_2^*(N, 0)]^{-1} y \right\| \geq \\
&\geq \sum_{k=1}^{\infty} \gamma \frac{1}{L^k \alpha^{kp}} \left\| [\Phi_2^*(N, 0)]^{-1} y \right\|.
\end{aligned}$$

Если выбрать p таким, чтобы было $L\alpha^p < 1$, то последний ряд будет расходиться, следовательно, будет расходиться и ряд (27). Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Kalman R. E. On the general theory of control systems // Proc. First IFAC, Butterworth's. - 1960. - P. 481-492.
2. Lasalle J. P. The time optimal control problem // Contrib. Theory Nonlinear Oscillations. - 1960. - V. 5. - P. 1-24.
3. Saperstone S. H. Global controllability of linear systems with positive controls // SIAM J. Control. - 1973. - V. 11. - P. 417-423.
4. Brammer R. F. Controllability in linear autonomous systems with positive controllers // SIAM J. Control. - 1972. - V. 10. - P. 339-353.
5. Коробов В. И., Маринич А. П., Подольский Е. Н. Управляемость линейных автономных систем при наличии ограничений на управление // Дифференц. уравнения. - 1975. - Т. 11, 11. - С. 1967-1979.
6. Lemay J. L. Recoverable and reachable zones for control systems with linear plants and bounded controller outputs // IEEE Trans. Autom. Contr. - 1964. - V. AC-9, 4. - P. 346-354.
7. Conti R. Linear differential equations and control. - New York / London: Academic Press, 1976/
8. Benzaid Z. Global null controllability of perturbed linear systems with constrained controls // J. Math. Anal. Appl. - 1988. - P. 201-216/
9. Мартынюк Д. И. Лекции по теории устойчивости решений систем с последствием. - Киев. - 1970. - 177 с.

Мультипликативная структура резольвентных матриц интерполяционных задач в классе Стильеса

Ю. М. Дюкарев

Харьковский государственный университет

В этой статье введены специальные представления для резольвентных матриц интерполяционных задач в классе Стильеса. Изучена мультипликативная структура резольвентных матриц и рассмотрены примеры.

1. Введение

Обозначим через $\mathbf{W}$ множество всех оператор-функций (о.-ф.) $U(z)$, определенных и мероморфных в $C_+ = \{z \in C : \text{Im } z > 0\}$ и принимающих значения во множестве ограниченных линейных операторов в гильбертовом пространстве $H \oplus H$ таких, что

$$U^*(z)JU(z) - J \geq 0, \quad J = \begin{bmatrix} 0 & -iI \\ iI & 0 \end{bmatrix}, \quad I - \text{единичный оператор в } H.$$

Основной задачей анализа о.-ф. класса $\mathbf{W}$ является их представление в виде произведения простейших сомножителей класса $\mathbf{W}$. Фундаментальные результаты в этом направлении были получены В.П. Потаповым в [1], которые затем использовались и развивались в работах многих авторов (см., например, [2-4]). Классу $\mathbf{W}$ принадлежат резольвентные матрицы интерполяционных задач для неванлинновских функций [5]. В этом контексте факторизация является аналогом пошагового процесса Шура решения интерполяционных задач.

Вместе с тем, в интерполяционных задачах типа проблемы моментов Стильеса [6-8], в некоторых физических задачах [2] и в других вопросах появляются специального вида о.-ф. класса $\mathbf{W}$. А именно, обозначим через $\mathbf{W}_S$ множество всех о.-ф. $U(z)$, определенных и мероморфных в $C \setminus [0, +\infty)$ и принимающих значения во множестве ограниченных линейных операторов в $H \oplus H$ таких, что

$$\frac{U^*(z)JU(z) - J}{i(\bar{z} - z)} \geq 0, \quad \text{Im } z \neq 0, \quad (1.1)$$

$$U^*(z)jU(z) - j \geq 0, \quad \text{Re } z < 0, \quad j = \begin{bmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{bmatrix}. \quad (1.2)$$

Сужение о.-ф. класса W_S на полуплоскость C_+ приводит к о.-ф. класса W . Поэтому представляется естественной попытка применить для факторизации о.-ф. класса W_S методов, ранее развитых для класса W . Однако применение к о.-ф. класса W_S таких методов факторизации приводит к сомножителям, которые *удовлетворяют* (1.1) и *не удовлетворяют* (1.2). Наложение на сомножители дополнительно к условию (1.1) условия (1.2) делает более сложной процедуру факторизации и структуру соответствующих сомножителей. О.-ф. класса W_S называются *о.-ф. мультипликативного класса Стильеса*. В статье введены специальные представления для о.-ф. класса W_S и решена задача их факторизации. Рассмотрены типичные примеры.

2. Параметризация оператор-функций класса W_S

Пусть G_1, G_2, H - гильбертовы пространства. Пусть символ $\{G_1, G_2\}$ обозначает множество всех ограниченных линейных операторов, действующих из G_1 в G_2 , а символ $\{G_1, G_1\}_+$ - множество ограниченных эрмитовых и неотрицательных операторов в G_1 .

Пусть заданы операторы $K_1 \in \{G_1, G_1\}_+$, $K_2 \in \{G_2, G_2\}_+$, $L_1, L_2 \in \{G_2, G_1\}$, $v_1 \in \{H, G_1\}$, $u_2 \in \{H, G_2\}$. Будем считать, что введенные операторы удовлетворяют *Основному Тождеству* (ОТ)

$$K_1 L_1 - L_2 K_2 = -v_1 u_2^*. \quad (2.1)$$

Введем операторы

$$T_1 = L_2 L_1^* \in \{G_1, G_1\}, \quad T_2 = L_1^* L_2 \in \{G_2, G_2\}, \quad (2.2)$$

$$u_1 = L_2 u_2 \in \{H, G_1\}, \quad v_2 = L_1^* v_1 \in \{H, G_2\}. \quad (2.3)$$

Непосредственно из определений операторов T_1 и T_2 имеем

$$T_1 L_2 = L_2 T_2, \quad T_2 L_1^* = L_1^* T_1. \quad (2.4)$$

Будем считать, что мероморфны в $C \setminus [0, +\infty)$ обе о.-ф.:

$$R_{T_1}(z) = (I - zT_1)^{-1}, \quad R_{T_2}(z) = (I - zT_2)^{-1}. \quad (2.5)$$

Пусть в окрестности точки z_0 эти о.-ф. голоморфны. Тогда $R_{T_1}(z)$ и $R_{T_2}(z)$ разлагаются по степеням операторов T_1 и T_2 в ряд Тейлора. Отсюда, в силу (2.4), в окрестности z_0 имеем

$$R_{T_1}(z) L_2 = L_2 R_{T_2}(z), \quad R_{T_2}(z) L_1^* = L_1^* R_{T_1}(z). \quad (2.6)$$

В силу аналитичности последнее соотношение имеет место во всех точках, где голоморфны $R_{T_1}(z)$ и $R_{T_2}(z)$. Непосредственно из определений получаются тождества

$$R_{T_r}(z) T_r R_{T_r}(t) = \frac{R_{T_r}(t) - R_{T_r}(z)}{t - z}, \quad r = 1, 2. \quad (2.7)$$

Всюду в дальнейшем считаем, что операторы K_1 и K_2 имеют ограниченные обратные операторы K_1^{-1} и K_2^{-1} .

Теорема 2.1 Пусть о.-ф. $U(z)$ определена равенством

$$U(z) = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -zv_1^* K_1^{-1} R_{T_1}(z) u_1 & -zv_1^* K_1^{-1} R_{T_1}(z) v_1 \\ u_2^* K_2^{-1} R_{T_2}(z) u_2 & zu_2^* K_2^{-1} R_{T_2}(z) v_2 \end{bmatrix}. \quad (2.8)$$

Тогда

1. Имеют место равенства

$$\begin{aligned} U^*(z)JU(z) - J &= i(\bar{z} - z) \begin{bmatrix} u_1^* \\ v_1^* \end{bmatrix} R_{T_1}^*(z) K_1^{-1} R_{T_1}(z) [u_1 \ v_1], \\ U^*(z)jU(z) - j &= -(z + \bar{z}) \begin{bmatrix} u_1^* \\ v_1^* \end{bmatrix} R_{T_1}^*(z) K_1^{-1} R_{T_1}(z) [u_1 \ v_1] \\ &\quad + 2 \begin{bmatrix} u_2^* \\ \bar{z}v_2^* \end{bmatrix} R_{T_2}^*(z) K_2^{-1} R_{T_2}(z) [u_2 \ zv_2]. \end{aligned}$$

2. О.-ф. $U(z) \in W_S$.

Доказательство. Первое утверждение теоремы проверяется прямым вычислением с использованием соотношений (2.1)-(2.7). Второе утверждение теоремы следует из первого.

3. Факторизация оператор-функций класса W_S

Пусть G_1 и G_2 представлены в виде ортогональной суммы своих нетривиальных подпространств

$$G_r = \tilde{G}_r \oplus \hat{G}_r, \quad r = 1, 2. \quad (3.1)$$

Это равенство понимается в смысле естественного изоморфизма G_r и $\tilde{G}_r \oplus \hat{G}_r$. А именно, пусть $\tilde{P}_r$ (соотв. $\hat{P}_r$) обозначает ортопроектор пространства G_r на подпространство $\tilde{G}_r$ (соотв. $\hat{G}_r$). Тогда соответствующий изоморфизм имеет вид $\forall f \in G_r \leftrightarrow \text{col}[\tilde{P}_r f, \hat{P}_r f] \in \tilde{G}_r \oplus \hat{G}_r$.

В соответствии с представлениями (3.1) введем естественные матричные обозначения для операторов

$$K_r = \begin{bmatrix} \tilde{K}_r & B_r \\ B_r^* & C_r \end{bmatrix}, \quad L_r = \begin{bmatrix} \tilde{L}_r & D_r \\ E_r & \hat{L}_r \end{bmatrix}, \quad v_1 = \begin{bmatrix} \tilde{v}_1 \\ \hat{v}_1 \end{bmatrix}, \quad u_2 = \begin{bmatrix} \tilde{u}_2 \\ \hat{u}_2 \end{bmatrix}.$$

Отметим, что операторы в левых частях этих равенств являются операторами в пространствах G_r , а в правых частях записаны матричные элементы тех же самых операторов в пространствах $\tilde{G}_r \oplus \hat{G}_r$. Например, матричные элементы операторов K_r имеют вид

$$\tilde{K}_r = \tilde{P}_r K_r|_{\tilde{G}_r}, \quad \tilde{B}_r = \tilde{P}_r K_r|_{\hat{G}_r}, \quad \tilde{B}_r^* = \hat{P}_r K_r|_{\tilde{G}_r}, \quad \tilde{C}_r = \hat{P}_r K_r|_{\hat{G}_r}.$$

Пусть выполнены условия

$$L_1 \tilde{P}_2 = \tilde{P}_1 L_1 \tilde{P}_2, \quad \tilde{P}_1 L_2 = \tilde{P}_1 L_2 \tilde{P}_2. \quad (3.2)$$

Отсюда следует, что $E_1 = 0$, $D_2 = 0$. Введем операторы

$$\begin{aligned} \tilde{v}_1 &= -B_1^* \tilde{K}_1^{-1} \tilde{v}_1 + \tilde{v}_1, \quad \tilde{u}_2 = -B_2^* \tilde{K}_2^{-1} \tilde{u}_2 + \tilde{u}_2, \\ \tilde{v}_2 &= \tilde{L}_1^* \tilde{v}_1, \quad \tilde{v}_2 = \hat{L}_1^* \tilde{v}_1, \quad \tilde{u}_1 = \tilde{L}_2 \tilde{u}_2, \quad \hat{u}_1 = \hat{L}_2 \tilde{u}_2. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Из этих определений следует, что

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \tilde{v}_1 \\ \tilde{v}_1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} I & 0 \\ -B_1^* \tilde{K}_1^{-1} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{v}_1 \\ \tilde{v}_1 \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} \tilde{u}_2 \\ \hat{u}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} I & 0 \\ -B_2^* \tilde{K}_2^{-1} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{u}_2 \\ \tilde{u}_2 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Пусть $\hat{K}_r = C_r - B_r^* \tilde{K}_r^{-1} B_r$, $r = 1, 2$. Тогда операторы K_1 и K_2 допускают представления

$$K_r = \begin{bmatrix} I & 0 \\ B_r^* \tilde{K}_r^{-1} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{K}_r & 0 \\ 0 & \hat{K}_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & \tilde{K}_r^{-1} B_r \\ 0 & I \end{bmatrix}, \quad r = 1, 2.$$

Подпространства в (3.1) нетривиальны. Поэтому операторы $\tilde{K}_r$ и $\hat{K}_r$ имеют ограниченные обратные $\tilde{K}_r^{-1}$ и $\hat{K}_r^{-1}$. Следовательно,

$$K_r^{-1} = \begin{bmatrix} I & -\tilde{K}_r^{-1} B_r \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{K}_r^{-1} & 0 \\ 0 & \hat{K}_r^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ -B_r^* \tilde{K}_r^{-1} & I \end{bmatrix}, \quad r = 1, 2. \quad (3.5)$$

Подставим в ОТ (2.1) блочные представления соответствующих операторов. Получим

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -\tilde{K}_1 \tilde{L}_1 + \tilde{L}_2 \tilde{K}_2 & \tilde{K}_1 \tilde{L}_1 \tilde{K}_2^{-1} B_2 - \tilde{K}_1 D_1 - B_1 \hat{L}_1 \\ -B_1^* \tilde{K}_1^{-1} \tilde{L}_2 \tilde{K}_2 + E_2 \tilde{K}_2 + \hat{L}_2 B_2^* & -\hat{K}_1 \hat{L}_1 + \hat{L}_2 \hat{K}_2 \end{bmatrix} = \\ = \begin{bmatrix} \tilde{v}_1 \tilde{u}_2^* & \tilde{v}_1 \hat{u}_2^* \\ \tilde{v}_1 \tilde{u}_2^* & \tilde{v}_1 \hat{u}_2^* \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Отсюда следуют индуцированные ОТ

$$\tilde{K}_1 \tilde{L}_1 - \tilde{L}_2 \tilde{K}_2 = -\tilde{v}_1 \tilde{u}_2^*, \quad (3.6)$$

$$\hat{K}_1 \hat{L}_1 - \hat{L}_2 \hat{K}_2 = -\hat{v}_1 \hat{u}_2^*, \quad (3.7)$$

$$\tilde{K}_1 \tilde{L}_1 \tilde{K}_2^{-1} B_2 - \tilde{K}_1 D_1 - B_1 \hat{L}_1 = \tilde{v}_1 \hat{u}_2^*, \quad (3.8)$$

$$B_1^* \tilde{K}_1^{-1} \tilde{L}_2 \tilde{K}_2 - E_2 \tilde{K}_2 - \hat{L}_2 B_2^* = -\hat{v}_1 \tilde{u}_2^*. \quad (3.9)$$

Пусть $\tilde{T}_1 = \tilde{L}_2 \tilde{L}_1^*$, $\tilde{T}_2 = \tilde{L}_1^* \tilde{L}_2$, $\hat{T}_1 = \hat{L}_2 \hat{L}_1^*$, $\hat{T}_2 = \hat{L}_1^* \hat{L}_2$. Тогда

$$\begin{aligned} T_1 &= \begin{bmatrix} \tilde{L}_2 \tilde{L}_1^* & 0 \\ E_2 \tilde{L}_1^* + \hat{L}_2 D_1^* & \hat{L}_2 \hat{L}_1^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{T}_1 & 0 \\ E_2 \tilde{L}_1^* + \hat{L}_2 D_1^* & \hat{T}_1 \end{bmatrix}, \\ T_2 &= \begin{bmatrix} \tilde{L}_1^* \tilde{L}_2 & 0 \\ D_1^* \tilde{L}_2 + \hat{L}_1^* E_2 & \hat{L}_1^* \hat{L}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{T}_2 & 0 \\ D_1^* \tilde{L}_2 + \hat{L}_1^* E_2 & \hat{T}_2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Пусть $R_{\tilde{T}_r}(z) = (I - z\tilde{T}_r)^{-1}$, $R_{\hat{T}_r}(z) = (I - z\hat{T}_r)^{-1}$, $r = 1, 2$. Тогда

$$\begin{aligned} R_{T_1}(z) &= \begin{bmatrix} I - z\tilde{L}_2 \tilde{L}_1^* & 0 \\ -z(E_2 \tilde{L}_1^* + \hat{L}_2 D_1^*) & I - z\hat{L}_2 \hat{L}_1^* \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} R_{\tilde{T}_1}(z) & 0 \\ zR_{\hat{T}_1}(z)(E_2 \tilde{L}_1^* + \hat{L}_2 D_1^*)R_{\tilde{T}_1}(z) & R_{\hat{T}_1}(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{\tilde{T}_1}(z) & 0 \\ R_{T_1}^{21}(z) & R_{\hat{T}_1}(z) \end{bmatrix}, \\ R_{T_2}(z) &= \begin{bmatrix} I - z\tilde{L}_1^* \tilde{L}_2 & 0 \\ -z(D_1^* \tilde{L}_2 + \hat{L}_1^* E_2) & I - z\hat{L}_1^* \hat{L}_2 \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} R_{\tilde{T}_2}(z) & 0 \\ zR_{\hat{T}_2}(z)(D_1^* \tilde{L}_2 + \hat{L}_1^* E_2)R_{\tilde{T}_2}(z) & R_{\hat{T}_2}(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{\tilde{T}_2}(z) & 0 \\ R_{T_2}^{21}(z) & R_{\hat{T}_2}(z) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Здесь

$$R_{T_1}^{21}(z) = zR_{\hat{T}_1}(z)(E_2 \tilde{L}_1^* + \hat{L}_2 D_1^*)R_{\tilde{T}_1}(z), \quad (3.10)$$

$$R_{T_2}^{21}(z) = zR_{\hat{T}_2}(z)(D_1^* \tilde{L}_2 + \hat{L}_1^* E_2)R_{\tilde{T}_2}(z).$$

Исходя из ОТ (3.6) и (3.7) определим о.-ф. $\tilde{U}(z)$ и $b(z)$ по аналогии с тем, как была определена о.-ф. $U(z)$ (см. (2.8)) исходя из ОТ (2.1):

$$\tilde{U}(z) = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -z\tilde{v}_1^* \hat{K}_1^{-1} R_{\tilde{T}_1}(z) \tilde{u}_1 & -z\tilde{v}_1^* \hat{K}_1^{-1} R_{\tilde{T}_1}(z) \tilde{v}_1 \\ \tilde{u}_2^* \hat{K}_2^{-1} R_{\tilde{T}_2}(z) \tilde{u}_2 & z\tilde{u}_2^* \hat{K}_2^{-1} R_{\tilde{T}_2}(z) \tilde{v}_2 \end{bmatrix},$$

$$b(z) = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -z\hat{v}_1^* \hat{K}_1^{-1} R_{\hat{T}_1}(z) \hat{u}_1 & -z\hat{v}_1^* \hat{K}_1^{-1} R_{\hat{T}_1}(z) \hat{v}_1 \\ \hat{u}_2^* \hat{K}_2^{-1} R_{\hat{T}_2}(z) \hat{u}_2 & z\hat{u}_2^* \hat{K}_2^{-1} R_{\hat{T}_2}(z) \hat{v}_2 \end{bmatrix}.$$

По теореме 2.1 $\tilde{U}(z) \in \mathbf{W}_S$ и $b(z) \in \mathbf{W}_S$.

Теорема 3.1 (Основная теорема о факторизации). При сделанных выше предположениях имеет место равенство

$$U(z) = b(z) \cdot \tilde{U}(z). \quad (3.11)$$

Доказательство. Введем обозначения для блоков $U(z)$ (см. (2.8)):

$$\begin{bmatrix} U_{11}(z) & U_{12}(z) \\ U_{21}(z) & U_{22}(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I - zv_1^* K_1^{-1} R_{T_1}(z) u_1 & -zv_1^* K_1^{-1} R_{T_1}(z) v_1 \\ u_2^* K_2^{-1} R_{T_2}(z) u_2 & I + zu_2^* K_2^{-1} R_{T_2}(z) v_2 \end{bmatrix}.$$

Преобразуем $U_{11}(z)$. Для этого заменим u_1 на $L_2 u_2$ (см. (2.3)). После этого подставим вместо v_1^* , K_1^{-1} , $R_{T_1}(z)$, L_2 , u_2 их блочные представления. Воспользовавшись (3.4) получим

$$\begin{aligned} U_{11}(z) = & I - z\hat{v}_1^* \hat{K}_1^{-1} R_{\hat{T}_1}(z) \hat{u}_1 - z\tilde{v}_1^* \tilde{K}_1^{-1} R_{\tilde{T}_1}(z) \tilde{u}_1 \\ & - z\hat{v}_1^* \hat{K}_1^{-1} \{-B_1^* \tilde{K}_1^{-1} R_{\tilde{T}_1}(z) \tilde{L}_2 \\ & + R_{\tilde{T}_1}^{21}(z) \tilde{L}_2 + R_{\tilde{T}_1}(z) E_2 + R_{\hat{T}_1}(z) \hat{L}_2 B_2^* \tilde{K}_2^{-1}\} \tilde{u}_2. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Аналогичным образом убеждаемся в том, что

$$\begin{aligned} U_{12}(z) = & -z\hat{v}_1^* \hat{K}_1^{-1} R_{\hat{T}_1}(z) \hat{v}_1 - z\tilde{v}_1^* \tilde{K}_1^{-1} R_{\tilde{T}_1}(z) \tilde{v}_1 - z\hat{v}_1^* \hat{K}_1^{-1} \\ & \times \{-B_1^* \tilde{K}_1^{-1} R_{\tilde{T}_1}(z) + R_{\tilde{T}_1}^{21}(z) + R_{\hat{T}_1}(z) B_1^* \tilde{K}_1^{-1}\} \tilde{v}_1, \end{aligned} \quad (3.13)$$

$$\begin{aligned} U_{21}(z) = & \hat{u}_2^* \hat{K}_2^{-1} R_{\hat{T}_2}(z) \hat{u}_2 + \tilde{u}_2^* \tilde{K}_2^{-1} R_{\tilde{T}_2}(z) \tilde{u}_2 + \hat{u}_2^* \hat{K}_2^{-1} \\ & \times \{-B_2^* \tilde{K}_2^{-1} R_{\tilde{T}_2}(z) + R_{\tilde{T}_2}^{21}(z) + R_{\hat{T}_2}(z) B_2^* \tilde{K}_2^{-1}\} \tilde{u}_2, \end{aligned} \quad (3.14)$$

$$\begin{aligned} U_{22}(z) = & I + z\hat{u}_2^* \hat{K}_2^{-1} R_{\hat{T}_2}(z) \hat{v}_2 + z\tilde{u}_2^* \tilde{K}_2^{-1} R_{\tilde{T}_2}(z) \tilde{v}_2 \\ & + z\hat{u}_2^* \hat{K}_2^{-1} \{-B_2^* \tilde{K}_2^{-1} R_{\tilde{T}_2}(z) \tilde{L}_1^* \\ & + R_{\tilde{T}_2}^{21}(z) \tilde{L}_1^* + R_{\tilde{T}_2}(z) D_1^* + R_{\hat{T}_2}(z) \hat{L}_1^* B_1^* \tilde{K}_1^{-1}\} \tilde{v}_1. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Введем о.-ф.

$$X(z) = \begin{bmatrix} X_{11}(z) & X_{12}(z) \\ X_{21}(z) & X_{22}(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -z\hat{v}_1^* \hat{K}_1^{-1} R_{\hat{T}_1}(z) \hat{u}_1 & -z\hat{v}_1^* \hat{K}_1^{-1} R_{\hat{T}_1}(z) \hat{v}_1 \\ \hat{u}_2^* \hat{K}_2^{-1} R_{\hat{T}_2}(z) \hat{u}_2 & \hat{u}_2^* \hat{K}_2^{-1} R_{\hat{T}_2}(z) \hat{v}_2 \end{bmatrix},$$

$$Y(z) = \begin{bmatrix} Y_{11}(z) & Y_{12}(z) \\ Y_{21}(z) & Y_{22}(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -z\tilde{v}_1^* \tilde{K}_1^{-1} R_{\tilde{T}_1}(z) \tilde{u}_1 & -z\tilde{v}_1^* \tilde{K}_1^{-1} R_{\tilde{T}_1}(z) \tilde{v}_1 \\ \tilde{u}_2^* \tilde{K}_2^{-1} R_{\tilde{T}_2}(z) \tilde{u}_2 & \tilde{u}_2^* \tilde{K}_2^{-1} R_{\tilde{T}_2}(z) \tilde{v}_2 \end{bmatrix},$$

$$W(z) = \begin{bmatrix} W_{11}(z) & W_{12}(z) \\ W_{21}(z) & W_{22}(z) \end{bmatrix}.$$

Здесь

$$\begin{aligned} W_{11}(z) = & -z\hat{v}_1^* \hat{K}_1^{-1} \{-B_1^* \tilde{K}_1^{-1} R_{\tilde{T}_1}(z) \tilde{L}_2 \\ & + R_{\tilde{T}_1}^{21}(z) \tilde{L}_2 + R_{\tilde{T}_1}(z) E_2 + R_{\hat{T}_1}(z) \hat{L}_2 B_2^* \tilde{K}_2^{-1}\} \tilde{u}_2, \end{aligned}$$

$$W_{12}(z) = -z\hat{v}_1^* \hat{K}_1^{-1} \{-B_1^* \tilde{K}_1^{-1} R_{\tilde{T}_1}(z) + R_{\tilde{T}_1}^{21}(z) + R_{\hat{T}_1}(z) B_1^* \tilde{K}_1^{-1}\} \tilde{v}_1,$$

$$W_{21}(z) = \hat{u}_2^* \hat{K}_2^{-1} \{-B_2^* \tilde{K}_2^{-1} R_{\tilde{T}_2}(z) + R_{\tilde{T}_2}^{21}(z) + R_{\hat{T}_2}(z) B_2^* \tilde{K}_2^{-1}\} \tilde{u}_2,$$

$$\begin{aligned} W_{22}(z) = & z\hat{u}_2^* \hat{K}_2^{-1} \{-B_2^* \tilde{K}_2^{-1} R_{\tilde{T}_2}(z) \tilde{L}_1^* \\ & + R_{\tilde{T}_2}^{21}(z) \tilde{L}_1^* + R_{\tilde{T}_2}(z) D_1^* + R_{\hat{T}_2}(z) \hat{L}_1^* B_1^* \tilde{K}_1^{-1}\} \tilde{v}_1. \end{aligned}$$

Легко видеть, что (см. (3.12)-(3.15))

$$\begin{aligned} U(z) &= I + X(z) + Y(z) + W(z), \\ b(z) &= I + X(z), \quad \tilde{U}(z) = I + Y(z). \end{aligned} \quad (3.16)$$

Покажем, что $X(z)Y(z) = W(z)$. Имеем

$$\begin{aligned} &X_{11}(z)Y_{11}(z) + X_{12}(z)Y_{21}(z) \\ &= -z\hat{v}_1^* \hat{K}_1^{-1} R_{\hat{T}_1}(z) \{-z\hat{L}_2 \hat{u}_2 \hat{v}_1^* \hat{K}_1^{-1} \tilde{L}_2 + \hat{v}_1 \hat{u}_2^* \tilde{K}_2^{-1}\} R_{\tilde{T}_2}(z) \tilde{u}_2 \\ &= -z\hat{v}_1^* \hat{K}_1^{-1} R_{\hat{T}_1}(z) \{-z\hat{L}_2 (B_2^* \tilde{K}_2^{-1} \tilde{L}_1^* \tilde{K}_1 - D_1^* \tilde{K}_1 - \hat{L}_1^* B_1^*) \tilde{K}_1^{-1} \tilde{L}_2 \\ &\quad + (-B_1^* \tilde{K}_1^{-1} \tilde{L}_2 \tilde{K}_2 + E_2 \tilde{K}_2 + \hat{L}_2 B_2^*) \tilde{K}_2^{-1}\} R_{\tilde{T}_2}(z) \tilde{u}_2 \\ &= -z\hat{v}_1^* \hat{K}_1^{-1} R_{\hat{T}_1}(z) \{-z\hat{L}_2 B_2^* \tilde{K}_2^{-1} \tilde{T}_2 + z\hat{L}_2 D_1^* \tilde{L}_2 + z\hat{T}_1 B_1^* \tilde{K}_1^{-1} \tilde{L}_2 \\ &\quad - B_1^* \tilde{K}_1^{-1} \tilde{L}_2 + E_2 + \hat{L}_2 B_2^* \tilde{K}_2^{-1}\} R_{\tilde{T}_2}(z) \tilde{u}_2 \\ &= -z\hat{v}_1^* \hat{K}_1^{-1} R_{\hat{T}_1}(z) \{\hat{L}_2 B_2^* \tilde{K}_2^{-1} R_{\tilde{T}_2}^{-1}(z) \\ &\quad + z\hat{L}_2 D_1^* \tilde{L}_2 - R_{\hat{T}_1}^{-1}(z) B_1^* \tilde{K}_1^{-1} \tilde{L}_2 + E_2\} R_{\tilde{T}_2}(z) \tilde{u}_2 \\ &= -z\hat{v}_1^* \hat{K}_1^{-1} R_{\hat{T}_1}(z) \{zE_2 \tilde{L}_1^* \tilde{L}_2 - zE_2 \tilde{L}_1^* \tilde{L}_2 + \hat{L}_2 B_2^* \tilde{K}_2^{-1} R_{\tilde{T}_2}^{-1}(z) \\ &\quad + z\hat{L}_2 D_1^* \tilde{L}_2 - R_{\hat{T}_1}^{-1}(z) B_1^* \tilde{K}_1^{-1} \tilde{L}_2 + E_2\} R_{\tilde{T}_2}(z) \tilde{u}_2 \\ &= -z\hat{v}_1^* \hat{K}_1^{-1} \{-B_1^* \tilde{K}_1^{-1} R_{\hat{T}_1}(z) \tilde{L}_2 \\ &\quad + R_{\hat{T}_1}^{21}(z) \tilde{L}_2 + R_{\hat{T}_1}(z) E_2 + R_{\hat{T}_1}(z) \hat{L}_2 B_2^* \tilde{K}_2^{-1}\} \tilde{u}_2 = W_{11}(z). \end{aligned}$$

В этой цепочке равенств первое следует из (2.3) и (2.6), второе - из (3.8) и (3.9). Аналогичным образом убеждаемся в том, что

$$\begin{aligned} X_{11}(z)Y_{12}(z) + X_{12}(z)Y_{22}(z) &= W_{12}(z), \\ X_{21}(z)Y_{11}(z) + X_{22}(z)Y_{21}(z) &= W_{21}(z), \\ X_{21}(z)Y_{12}(z) + X_{22}(z)Y_{22}(z) &= W_{22}(z). \end{aligned}$$

Итак, $W(z) = X(z)Y(z)$. Учитывая это равенство и соотношения (3.16) получим

$$\begin{aligned} U(z) &= I + X(z) + Y(z) + W(z) = I + X(z) + Y(z) + X(z)Y(z) \\ &= (I + X(z))(I + Y(z)) = b(z)\tilde{U}(z). \end{aligned}$$

Теорема 3.1 доказана.

Замечание 1. Мы считали, что в (3.1) все подпространства нетривиальны. От этого ограничения можно избавиться. Например, если в $\tilde{G}_1 = G_1$, то в формуле для $\tilde{U}(z)$ нужно убрать символ “тильда” над операторами первой строки, а в формуле для $b(z)$ операторы первой строки, над которыми стоит символ “шапочка”, заменить нулевыми операторами. При выполнении

условий (3.2) остается справедливой формула (3.10). Аналогичным образом рассматриваются и другие вырожденные случаи.

Замечание 2. Формула (3.10) является следствием ОТ (2.1), представления (2.8) и условий (3.2). Поэтому вместо строгой положительности операторов $K_r, \tilde{K}_r, \hat{K}_r$, $r = 1, 2$, можно требовать лишь их эрмитовости и существования ограниченных обратных операторов. При этом имеет место формула (3.10), но участвующие в ней о.-ф. не обязательно попадают в класс $\mathbf{W}_S$.

Теорема 3.2 Пусть $U(z) \in \mathbf{W}_S$ и допускает представление (2.8). И пусть, далее, в пространствах G_1 и G_2 заданы две неубывающие последовательности проекторов

$$P_r^1 \leq P_r^2 \leq \dots \leq P_r^{n-1}, \quad r = 1, 2, \quad (3.17)$$

для которых выполнены условия

$$L_1 P_2^q = P_1^q L_1 P_2^q, \quad P_1^q L_2 = P_1^q L_2 P_2^q, \quad q = 1, \dots, n-1. \quad (3.18)$$

Тогда о.-ф. $U(z)$ допускает мультипликативное представление

$$U(z) = b_n(z)b_{n-1}(z) \dots b_1(z), \quad b_q(z) \in \mathbf{W}_S, \quad q = 1, \dots, n. \quad (3.19)$$

Доказательство этой теоремы получается последовательным применением теоремы 3.1.

3. Примеры

Приведем примеры применения полученных результатов для анализа мультипликативной структуры о.-ф. класса $\mathbf{W}_S$. Эти примеры связаны с интерполяционными задачами в классе Стильтеса ([6-8]). Разложение на простейшие сомножители этих о.-ф. является аналогом *пошагового процесса Шура* решения интерполяционных задач.

Пример 1. Рассмотрим резольвентную матрицу задачи Неванлинны-Пика в классе Стильтеса (см. [6-8]). Пусть даны комплексные числа $z_1, \dots, z_n$, $\text{Im } z_j > 0$, $z_j \neq z_k$, $j \neq k$ и ограниченные операторы $s_1, \dots, s_n$ в гильбертовом пространстве H . Положим $G = G_1 = G_2 = \underbrace{H \oplus H \oplus \dots \oplus H}_n$. С помощью естественных матричных представлений зададим операторы

$$L_2 = \text{diag}\{z_1^{-1}I, \dots, z_n^{-1}I\}, \quad u_2 = L_2^{-1} \cdot \text{col}\{s_1, \dots, s_n\}, \quad v_1 = \text{col}\{I, \dots, I\},$$

$$K_r = L_2^{-1} \cdot \left\{ \frac{z_j^{r-1} s_j - \bar{z}_k^{r-1} s_k^*}{z_j - \bar{z}_k} \right\}_{j,k=1, \dots, n} \cdot L_2^{-1*}, \quad r = 1, 2.$$

Пусть операторы $K_1, K_2, K_1^{-1}, K_2^{-1}$ ограничены и строго положительны, а L_1 является тождественным оператором в G . Тогда $L_2 = T_1 = T_2$. Легко видеть,

что введенные операторы удовлетворяют ОТ (2.1) и, следовательно, построенная по формуле (2.8) о.-ф. $U(z) \in \mathbf{W}_S$.

Векторы пространства G имеют вид $\text{col}\{f_1, \dots, f_n\}$, $f_j \in H$, $1 \leq j \leq n$. Обозначим символом G^q подпространство в G векторов вида $\text{col}\{f_1, \dots, f_q, 0, \dots, 0\}$, $1 \leq q \leq n$. Обозначим через $P_1^q, q = 1, \dots, n-1$ оператор ортогонального проектирования пространства G на подпространство G_q . И пусть $P_2^q = P_1^q, q = 1, \dots, n-1$. Эта последовательность проекторов удовлетворяет условиям (3.17) и (3.18) теоремы 3.2. Следовательно, рассматриваемая нами о.-ф. $U(z)$ допускает представление (3.19)

$$U(z) = b_n(z)b_{n-1}(z) \dots b_1(z), \quad b_q(z) \in \mathbf{W}_S, \quad q = 1, \dots, n.$$

Участвующие в этом произведении сомножители являются простейшими сомножителями Бляшке-Потапова. Единственной особенностью каждого из сомножителей $b_q(z)$ является простой полюс в точке z_q .

Пример 2. Рассмотрим резольвентную матрицу задачи Каратеодори в классе Стильеса [8]. Пусть дано комплексное число z_0 , $\text{Im } z_0 > 0$ и ограниченные линейные операторы $s_0, s_1, \dots, s_n$ в гильбертовом пространстве H . Пространство G будет таким же, как и в предыдущей задаче, но в ортогональной сумме H берется $(n+1)$ раз. С помощью матричных представлений зададим операторы

$$L_2 = \begin{bmatrix} z_0 I & 0 & \dots & 0 & 0 \\ I & z_0 I & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & I & z_0 I \end{bmatrix}^{-1}, \quad u_2 = L_2^{-1} \begin{bmatrix} s_0 \\ s_1 \\ \vdots \\ s_n \end{bmatrix}, \quad v_1 = \begin{bmatrix} I \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Оператор L_1 является тождественным оператором в G . Поэтому $L_2 = T_1 = T_2$.

Пусть операторы K_1 и K_2 действуют в пространстве G и имеют вид

$$K_1 = L_2^{-1} \cdot \{P_{jk}\}_{1 \leq j, k \leq n} \cdot L_2^{-1*}, \quad K_2 = L_2^{-1} \cdot \{Q_{jk}\}_{1 \leq j, k \leq n} \cdot L_2^{-1*}.$$

Матричные элементы P_{jk} оператора K_1 задаются рекуррентными формулами

$$P_{00} = \frac{s_0 - s_0^*}{z_0 - \bar{z}_0}, \quad P_{0k} = \frac{P_{0k-1} - s_k^*}{z_0 - \bar{z}_0}, \quad 1 \leq k \leq n, \\ P_{j0} = \frac{-P_{j-10} + s_j}{z_0 - \bar{z}_0}, \quad 1 \leq j \leq n, \quad P_{jk} = \frac{P_{jk-1} - P_{j-1k}}{z_0 - \bar{z}_0}, \quad 1 \leq j, k \leq n.$$

Матричные элементы Q_{jk} оператора K_2 тоже задаются предыдущими рекуррентными формулами, но операторы $s_0, \dots, s_n$ заменяются операторами $S_0, \dots, S_n$, определяемыми равенством $\text{col}[S_0 \dots S_n] = L_2 \text{col}[s_0 \dots s_n]$. Пусть операторы $K_1, K_2, K_1^{-1}, K_2^{-1}$ ограничены и строго положительны. Введенные операторы удовлетворяют ОТ (2.1) и построенная по формуле (2.8) о.-ф.

$U(z) \in \mathbf{W}_S$. Рассуждения, аналогичные приведенным в примере 1, приводят к разложению $U(z)$ в произведение из $n+1$ простейших сомножителей Бляшке-Потапова следующего вида

$$U(z) = b_n(z)b_{n-1}(z)\dots b_0(z), \quad b_q(z) \in \mathbf{W}_S, \quad q = 0, \dots, n.$$

Участвующие в этом произведении сомножители являются простейшими сомножителями Бляшке-Потапова. Единственной особенностью каждого из сомножителей $b_q(z)$ является простой полюс в точке z_0 .

Пример 3. Рассмотрим резольвентную матрицу проблемы моментов Стильтеса [8]. Пусть даны линейные операторы $s_0, \dots, s_{2n}$ в гильбертовом пространстве H . Пространства G_1 и G_2 зададим так: $G_1 = \underbrace{H \oplus H \oplus \dots \oplus H}_{n+1}$, $G_2 = \underbrace{H \oplus H \oplus \dots \oplus H}_n$. В очевидных матричных представлениях имеем

$$K_1 = \{s_{j+k}\}_{j,k=0,\dots,n}, \quad K_2 = \{s_{j+k+1}\}_{j,k=0,\dots,n-1},$$

$$L_1 = \underbrace{\begin{bmatrix} I & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & I \\ 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}}_n, \quad L_2 = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 \\ I & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & I \end{bmatrix}}_n, \quad v_1 = \begin{bmatrix} I \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad u_2 = \begin{bmatrix} -s_0 \\ -s_1 \\ \vdots \\ -s_{n-1} \end{bmatrix}.$$

Пусть операторы $K_1, K_2, K_1^{-1}, K_2^{-1}$ ограничены и строго положительны. Введенные операторы удовлетворяют ОТ (2.1) и, следовательно, построенная по формуле (2.8) о.-ф. $U(z) \in \mathbf{W}_S$. Векторы пространства G_1 имеют вид $\text{col} \{f_1, \dots, f_{n+1}\}$, $f_j \in H$, $1 \leq j \leq n+1$. Обозначим символом G_1^q подпространство в G_1 векторов вида $\text{col} \{f_1, \dots, f_q, 0, \dots, 0\}$, $1 \leq q \leq n+1$. Пусть $P_1^q, q = 1, \dots, n$ обозначает оператор ортогонального проектирования пространства G_1 на подпространство G_1^q . Аналогичным образом определяем проекторы $P_2^q, q = 1, \dots, n$ в пространстве G_2 (отметим, что P_2^n — тождественный оператор). Рассмотрим две последовательности проекторов

$$P_1^1, P_1^2, P_1^2, \dots, P_1^{n-1}, P_1^n, P_1^n, \quad P_2^1, P_2^1, P_2^2, \dots, P_2^{n-1}, P_2^{n-1}, P_2^n.$$

Теперь, учитывая теорему 3.2 и замечание 2 к теореме 3.1, получаем разложение $U(z)$ на простейшие сомножители следующего вида

$$U(z) = \begin{bmatrix} I & -zM_n \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ L_n & I \end{bmatrix} \dots \begin{bmatrix} I & 0 \\ L_1 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & -zM_0 \\ 0 & I \end{bmatrix}.$$

Здесь положительные операторы $M_0 \dots M_n$ и $L_1 \dots L_n$ строятся по операторам $s_0 \dots s_{2n}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Потапов В.П. Мультипликативная структура J -растягивающих матриц-функций // Труды ММО. – 1955. – Т.4. – С. 125-236.
2. Ефимов А.В., Потапов В.П. J -растягивающие матрицы-функции и их роль в аналитической теории электрических цепей // Усп. мат. наук. – 1973. – 28, вып. 1. – С. 65-130.
3. Сахнович Л.А. О факторизации передаточной оператор-функции // Докл. АН СССР. – 1976. – Т. 226, 4 – С. 781-784.
4. Zolotariov V.A. La factorisation des fonctions // Universite Pierre et Marie Curie. – 1983. – P. 1-35.
5. Ковалишина И.В. Аналитическая теория одного класса интерполяционных задач // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1983. – Т. 47, 3. – С. 455-497.
6. Дюкарев Ю.М., Кашнельсон В.Э. Мультипликативные и аддитивные классы Стильтеса аналитических матриц-функций и связанные с ними интерполяционные задачи // Теория функций, функцион. анализ и их прил. – 1981. – Вып. 36. – С. 13-27.
7. Dyukarev Yu. M. Integral representations of a pair of nonnegative operators and interpolations problems on the Stieltjes class // Operator Theory: Advances and Applications. – 1997. – V. 95. – P. 165-184.
8. Дюкарев Ю.М. Общая схема решения интерполяционных задач в классе Стильтеса, основанная на согласованных интегральных представлениях пар неотрицательных операторов. 1 // Математическая физика, анализ, геометрия. – 1999. – Т. 6, 1/2. – С. 30-54.