ЗАПИСКИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА ХАРЬКОВСКОГО ГОСУНИВЕРСИТЕТА имени А. М. ГОРЬКОГО И ХАРЬКОВСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

Том XXVII. Серия 4 1961

ОБ ОДНОМ ОБОБЩЕНИИ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ В ПРОСТРАНСТВЕ ВЕКТОР-ФУНКЦИЙ

В. М. Кабанова

Мы будем рассматривать вектор-функции

$$\overline{y} = \overline{y}(x),$$

значениями которых являются не числа, а векторы из m-мерного пространства. Таким образом, вектор-функция есть просто система m числовых функций:

$$\overline{y}(x) = (y_1(x),\ y_2(x)\ , \ldots\ y_m(x)).$$

$y_i(x)$ — компонента вектор-функции. Мы будем рассматривать также квадратные матрицы порядка m.

$$A(x) = \begin{pmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \ldots & a_{1m}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & \ldots & a_{2m}(x) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1}(x) & a_{m2}(x) & \ldots & a_{mm}(x) \end{pmatrix}$$

с элементами $a_{ij}(x)$ — числовыми функциями. Такие матрицы назовем матричными функциями. Роль нуля в пространстве матричных функций играет матрица с равными нулю всеми компонентами, единицей является матрица

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}.$$

Под абсолютной величиной матрицы будем понимать

$$|A| = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{m} |a_{ij}|^2}.$$

Аналогично определяется абсолютная величина вектора.

Норму вектор-функции $\overline{y}(x)$ определим так

$$\|\overline{y}\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |\overline{y}(x)|^2\, dx,$$

а для матричной функции

$$\|Y\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |Y(x)|^2\, dx.$$

Непрерывность, дифференцируемость, интегрируемость векторных и матричных функций определяется как непрерывность, дифференцируемость, интегрируемость всех компонент.

§ 1. Пусть $\bar{f}(x) = (f_1(x),\ f_2(x),\ \ldots\ f_m(x))$ — вектор-функция, принадлежащая $L_m^2(-\infty,\ \infty)$, т. е. $f_i(x) \in L_2(-\infty,\ \infty)$. Обычное преобразование Фурье для $\bar{f}(x)$ можно определить следующим образом:

$$\bar{\varphi}(\lambda) = \text{l.i.m.}\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x} I \bar{f}(x)\, dx.$$

Это векторное равенство эквивалентно скалярным равенствам

$$\varphi_i(\lambda) = \text{l.i.m.}\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x} f_i(x)\, dx \quad i = 1,2 \ldots m.$$

Для вектор-функций очевидно сохраняется вся теория Фурье—Планшереля. Справедлива формула обращения

$$\bar{f}(x) = \text{l.i.m.}\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda x} I \bar{\varphi}(\lambda)\, d\lambda$$

и равенство Парсеваля

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \sum_{i=1}^{m} |f_i(x)|^2\, dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \sum_{i=1}^{m} |\varphi_i(\lambda)|^2\, d\lambda,$$

т. е.

$$\|\bar{f}\| = \|\bar{\varphi}\|.$$

§ 2. Матрицы $e^{i\lambda x} I$ и $e^{-i\lambda x} I$ являются решениями матричного уравнения

$$Y'' + \lambda^2 Y = 0,$$

где λ — числовой параметр. Значит, преобразование Фурье в обе стороны осуществляется с помощью двух линейно независимых решений простейшего матричного дифференциального уравнения второго порядка. В настоящей заметке мы рассматриваем обобщенное преобразование Фурье с помощью решения $Y(x,\ \lambda)$ более общего уравнения второго порядка

$$Y'' - YP(x) + \lambda^2 Y = 0 \quad 0 \leqslant x < \infty. \tag{1}$$

$P(x)$ — комплекснозначная матрица-функция, λ — числовой параметр. Будем предполагать, что решение $Y(x,\ \lambda)$ имеет такую же асимптотику при больших x, что и $e^{i\lambda x} I$. Эта задача была решена Б. Я. Левиным для скалярного случая в работе [1]. При этом использовались «операторы преобразования», сохраняющие асимптотику решений дифференциальных уравнений при больших значениях x.

Б. Я. Левин доказал что при выполнении условия

$$\int\limits_{0}^{\infty} (1 + x^2)\, |P(x)|\, dx < \infty$$

существует оператор Вольтерра

$$K_f = f(x) + \int\limits_{x}^{\infty} K(x,\ t) f(t)\, dt,$$

который преобразует любое решение $A \sin(\lambda x + \delta)$ уравнения

$$y'' + \lambda^2 y = 0$$

в решение $\varphi(x, \lambda)$ уравнения

$$y'' - p(x) y + \lambda^2 y = 0,$$

удовлетворяющее условию

$$\lim_{x \to \infty} |\varphi(x, \lambda) - A \sin(\lambda x + \delta)| = 0\ ^*.$$

Затем операторы преобразования, сохраняющие асимптотику, в пространстве вектор-функций были построены в совместной работе З. С. Аграновича и В. А. Марченко [2], посвященной решению обратной задачи спектрального анализа для самосопряженного случая. Мы приведем формулировку теоремы о существовании «операторов преобразования» в форме, данной З. С. Аграновичем и В. А. Марченко [2].

Назовем *основным* решение уравнения (1), удовлетворяющее условию

$$\lim_{x \to \infty} |Y(x, \lambda) - e^{i\lambda x} I| = 0.$$

Теорема 1. *При выполнении условия*

$$\int_0^\infty x |P(x)| dx < \infty$$

существует основное решение уравнения (1), *которое представляется в виде*

$$Y(x, \lambda) = e^{i\lambda x} I + \int_x^\infty K(x, t) e^{i\lambda t} dt \qquad (Im \lambda \geqslant 0) \tag{2}$$

причем ядро-матрица $K(x, t)$ *непрерывна в области* $0 < x \leqslant t < \infty$ *и удовлетворяет условию*

$$\int_0^\infty \int_x^\infty |K(x, t)|^2 dt\, dx < \infty, \qquad \int_x^\infty |K(x, t) dt < \infty \quad x \geqslant 0.$$

Условие $\int_0^\infty x |P(x)| dx < \infty$ в дальнейшем предполагается выполненным.

При доказательстве этой теоремы получается следующая оценка для ядра $K(x, t)$, которую мы используем в дальнейшем. Обозначив

$$\sigma(x) = \int_x^\infty |P(x)| dx, \qquad \sigma_1(x) = \int_x^\infty x |P(x)| dx,$$

имеем

$$|K(x, t)| < e^{\sigma_1(x)} \sigma\left(\frac{x+t}{2}\right). \tag{3}$$

* Другие операторы преобразования, а именно, сохраняющие начальные условия, были значительно раньше рассмотрены Дельсартом и А. Я. Повзнером, и широко применялись в работах Б. М. Левитана и В. А. Марченко.

Меняя λ на $-\lambda$, мы получаем второе решение уравнения (1)

$$Y(x, -\lambda) = e^{-i\lambda x} I + \int_x^\infty K(x, t) e^{-i\lambda t} dt, \tag{3}$$

линейно независимое с $Y(x, \lambda)$ ввиду различной асимптотики при больших x.

§ 3. При построении формулы обращения существенную роль играют матрицы

$$Z(x, \lambda) = e^{-i\lambda x} I + \int_0^x R(s, x) e^{-i\lambda s} ds$$

и

$$\hat{Z}(x, \lambda) = e^{-i\lambda x} I + \int_0^x \hat{R}(s, x) e^{-i\lambda s} ds,$$

где $R(s, x)$ и $\hat{R}(s, x)$ являются соответственно левой и правой резольвентами интегральных уравнений

$$\bar{\chi}(x) = \bar{f}(x) + \int_0^x K(s, x) \bar{f}(s) ds \tag{4}$$

и

$$\bar{\psi}(x) = \bar{\varphi}(x) + \int_x^\infty K(x, s) \bar{\varphi}(s) ds. \tag{5}$$

Название «левая» и «правая» даются в зависимости от того, по какому переменному (левому или правому) ядра ведется интегрирование под знаком интеграла.

Покажем, что обе резольвенты являются матричными функциями с интегрируемым квадратом по двум переменным.

Для левой резольвенты ряд Неймана имеет вид

$$R(s, x) = -K(s, x) + K_2(s, x) - \ldots + (-1)^n K_n(s, x) + \ldots \tag{6}$$

$$K_n(s, x) = \int_s^x K_{n-1}(t, x) K(s, t) dt.$$

Для правой резольвенты —

$$\hat{R}(s, x) = -K(s, x) + \hat{K}_2(s, x) - \ldots + (-1)^n \hat{K}_n(s, x) + \ldots$$

$$\hat{K}_n(s, x) = \int_s^x \hat{K}_{n-1}(s, t) K(t, x) dt.$$

Интегрируемость по двум переменным достаточно показать для одной из резольвент, для второй резольвенты интегрируемость получается аналогично.

Из оценки (3) ядра $K(s, x)$ следует

$$|K_n(s, x)| < [2e^{\sigma_1(0)}\sigma_1(s)]^{n-1} e^{\sigma_1(s)} \sigma\left(\frac{s+x}{2}\right),$$

поэтому ряд для резольвенты (6) равномерно сходится, ибо мажорируется сходящимся рядом. Мы имеем

$$2e^{\sigma_1(0)}\sigma_1(s) < 1$$

при больших s, так как функция $\sigma_1(s)$ с ростом s монотонно убывает.

Для левой резольвенты $R(s, x)$ получаем оценку

$$|R(s, x)| < \frac{e^{\sigma_1(s)}\sigma\left(\frac{s+x}{2}\right)}{|1 - 2e^{\sigma_1(0)}\sigma_1(0)|},$$

из которой следует ее интегрируемость с квадратом.

Так как ряд (6) сходится равномерно в любом конечном интервале, то его можно умножить справа на матрицу $K(t, s)$ и проинтегрировать по s в пределах от t до x, после чего получаем соотношение для левой резольвенты

$$\int_t^x R(s, x) K(t, s)\, ds + R(t, x) + K(t, x) = 0$$

или, переобозначая, получим

$$\int_x^t R(s, t) K(x, s)\, ds + R(x, t) + K(x, t) = 0. \tag{8}$$

Для правой резольвенты соотношение имеет вид

$$\int_x^t K(x, s) \hat{R}(s, t)\, ds + \hat{R}(x, t) + K(x, t) = 0. \tag{9}$$

Выясним, как связаны между собой правая и левая резольвенты. Для этого вычтем из (8) равенство (9)

$$R(x, t) - \hat{R}(x, t) + \int_x^t [R(s, t) K(x, s) - K(x, s) R(s, t)]\, ds = 0$$

и окончательно

$$[R(x, t) - \hat{R}(x, t)] + \int_x^t [R(s, t) - \hat{R}(s, t)] K(x, s)\, ds =$$

$$= \int_x^t [K(x, s) \hat{R}(s, t) - \hat{R}(s, t) K(x, s)]\, ds. \tag{10}$$

Таким образом, если ядро перестановочно с одной из резольвент, то правая и левая резольвенты совпадают.

Мы приведем одно достаточное условие, при котором правая и левая резольвенты совпадают.

Лемма 1. *Если матрица* $P(x)$ *такова, что*

$$P(x) P(t) = P(t) P(x),$$

то правая и левая резольвенты совпадают.

Доказательство. Действительно, уравнение (1) для основного решения эквивалентно интегральному уравнению

$$Y(x, \lambda) = e^{i\lambda x} I + \int_x^\infty \frac{\sin \lambda (s - x)}{\lambda} Y(s, \lambda) P(s)\, ds,$$

Применяя метод итерраций, мы получаем

$$Y_0(x, \lambda) = e^{i\lambda x} I,$$

$$Y_1(x, \lambda) = e^{i\lambda x} I + \int_x^\infty \frac{\sin \lambda (s-x)}{\lambda} Y_0(s, \lambda) P(s)\, ds,$$

. . . .

$$Y_{n+1}(x, \lambda) = e^{i\lambda x} I + \int_x^\infty \frac{\sin \lambda (s-x)}{\lambda} Y_n(s, \lambda) P(s)\, ds.$$

. . . .

Для $Y(x, \lambda)$ имеем ряд

$$Y(x, \lambda) = Y_0(x, \lambda) + [Y_1(x, \lambda) - Y_0(x, \lambda)] + \ldots + \\ + [Y_{n+1}(x, \lambda) - Y_n(x, \lambda)] + \ldots,$$

который сходится в силу условия, налагаемого на $P(x)$:

$$\int_0^\infty x\,|P(x)|\,dx < \infty.$$

Из этого представления видно, что всякая матрица, перестановочная с $P(s)$, перестановочна с $Y(x, \lambda)$, т. е.

$$Y(x, \lambda) P(t) = P(t) Y(x, \lambda).$$

Но в таком случае матрица $P(t)$ перестановочна с ядром $K(x, s)$ и всеми итеррированными ядрами ряда (7), т. е. $P(t)$ перестановочна с резольвентой $\hat{R}(x, s)$. С другой стороны из перестановочности $\hat{R}(x, s)$ и $P(t)$ следует перестановочность $\hat{R}(x, s)$ с $Y(t, \lambda)$, т. е. перестановочность $R(x, s)$ с ядром $K(t, v)$, из чего следует совпадение резольвент, в силу соотношения (10).

Укажем еще на одну связь между правой и левой резольвентами; для этого применим операцию транспонирования к соотношению (8) и сравним результат с (9). Мы найдем, что транспонированная левая резольвента является правой резольвентой транспонированного ядра, поэтому, если вместо уравнений (4) и (5) мы рассмотрим интегральные уравнения для матричных функций

$$\nu(x) = f(x) + \int_x^\infty f(s) K(x, s)\, ds \tag{11}$$

и

$$\mu(x) = f(x) + \int_x^\infty f(s) K(s, x)\, ds$$

(ядро умножается на функцию слева), то правая резольвента уравнения (11) будет левой резольвентой уравнения (4), а левая резольвента уравнения (12) совпадает с правой резольвентой уравнения (5).

§ 4. Обозначим $L_2(0, \infty)$ пространство скалярных функций, принадлежащих L_2 на положительной полуоси и равных нулю на отрицательной полуоси, L_2^+ — пространство функций $\varphi(\lambda)$, голоморфных при $Im\lambda > 0$, для которых

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(\lambda + i\mu)|^2 d\lambda < M_\varphi \quad \mu \geqslant 0,$$

причем константа M_φ зависит только от функции. Аналогично определяется пространство L_2^-. По известной теореме Винера—Пейли обычное преобразование Фурье дает взаимнооднозначное отображение $L_2(0, \infty)$ в L_2^+ (или L_2^-), причем имеет место равенство Парсеваля.

Мы будем говорить, что две функции из L_2 квазиортогональны, если

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(x) f_2(x)\, dx = 0.$$

Воспользовавшись формулой свертки, можно показать, что любые две функции из класса L_2^+ (или L_2^-) — квазиортогональны.

Обозначим $L_m^2(0, \infty)$, $L_m^{2(+)}$, $L_m^{2(-)}$ пространства векторных (или матричных) функций, компоненты которых принадлежат соответственно $L_2(0, \infty)$, L_2^+, L_2^-.

Теперь мы можем сформулировать теоремы об обобщенном преобразовании Фурье с помощью основного решения $Y(x, \lambda)$ уравнения (1) в пространстве векторных и матричных функций. Напомним для этого обозначения

$$Z(x, \lambda) = e^{-i\lambda x} I + \int_0^x R(s, x)\, e^{-i\lambda s}\, ds,$$

где $R(s, x)$ — левая резольвента ядра $K(x, t)$, и

$$\hat{Z}(x, \lambda) = e^{-i\lambda x} I + \int_0^x \hat{R}(s, x)\, e^{-i\lambda s}\, ds,$$

где $R(s, x)$ — правая резольвента ядра $K(x, t)$.

Теорема 2. *Левое преобразование*

$$\bar{\varphi}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \operatorname{l.i.m.} \int_0^{\infty} Y(x, \lambda)\, \bar{f}(x)\, dx$$

отображает $L_m^2(0, \infty)$ *в* $L_m^{2(+)}$, *а преобразование*

$$\bar{f}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \operatorname{l.i.m.} \int_{-\infty}^{\infty} Z(x, \lambda)\, \bar{\varphi}(\lambda)\, d\lambda$$

дает формулу обращения. При этом

$$c_1 \|\bar{\varphi}\| \leqslant \|\bar{f}\| \leqslant c_2 \|\bar{\varphi}\|, \tag{13}$$

c_1 и c_2 — положительные константы.

Доказательство. Пусть вектор-функция $\bar{f}(x) \in L_m^2(0, \infty)$. Применяя к ней преобразование с помощью основного решения, получим

$$\text{l.i.m.} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty Y(x, \lambda) \bar{f}(x)\, dx =$$

$$= \text{l.i.m.} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\{ \int_0^\infty e^{i\lambda x} \bar{f}(x)\, dx + \int_0^\infty \int_x^\infty K(x, s) e^{i\lambda s} \bar{f}(s)\, ds\, dx \right\} =$$

$$= \text{l.i.m.} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty e^{i\lambda x} \left\{ \bar{f}(x) + \int_0^x K(s, x) \bar{f}(s)\, ds \right\} dx = \bar{\varphi}(\lambda). \tag{14}$$

Вектор-функция

$$\bar{\chi}(x) = \bar{f}(x) + \int_0^x K(s, x) \bar{f}(s)\, ds \tag{15}$$

принадлежит $L_m^2(0, \infty)$. По теореме Винера-Пейли ее преобразование

$$\bar{\varphi}(\lambda) = \text{l.i.m.} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty e^{i\lambda x} \bar{\chi}(x)\, dx \tag{16}$$

принадлежит $L_m^{2(+)}$. Из соотношения (15) находим

$$\bar{f}(x) = \bar{\chi}(x) + \int_0^x R(s, x) \bar{\chi}(s) ds.$$

Воспользуемся формулой обращения Фурье для преобразования (15) и окончательно получим

$$\bar{f}(x) = \text{l.i.m.} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left[e^{-i\lambda x} I + \int_0^x R(s, x) e^{-i\lambda s}\, ds \right] \bar{\varphi}(\lambda)\, d\lambda \tag{17}$$

или

$$\bar{f}(x) = \text{l.i.m.} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} Z(x, \lambda) \bar{\varphi}(\lambda)\, d\lambda. \tag{18}$$

Нам осталось показать непрерывность отображения. Из (14) имеем

$$\| \bar{\varphi} \| \leqslant \| \bar{f} \| + \left\| \int_0^t K(x, t) \bar{f}(x)\, dx \right\|,$$

$$\| \bar{\varphi} \| \leqslant \| \bar{f} \| + \| K \| \cdot \| \bar{f} \|.$$

Таким образом

$$\| \bar{\varphi} \| \leqslant \| \bar{f} \| (1 + \| K \|).$$

Аналогично доказывается, что

$$\| \bar{f} \| \leqslant \| \bar{\varphi} \| (1 + \| R \|),$$

при этом используется принадлежность L_m^2 матричной функции $R(x, s)$ по двум переменным.

Для матричных функций, принадлежащих $L_m^2(0, \infty)$, можно получить также правое обобщенное преобразование типа Фурье.

Теорема 3. *Преобразование*

$$\beta(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \operatorname{l.i.m.} \int_0^\infty \alpha(x) Y(x, \lambda)\, dx \quad \alpha(x) \in L_m^2(0, \infty) \tag{19}$$

отображает $L_m^2(0, \infty)$ *в* $L_m^{2(+)}$, *а преобразование*

$$\alpha(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \operatorname{l.i.m.} \int_{-\infty}^{\infty} \beta(\lambda) \hat{Z}(x, \lambda)\, d\lambda \tag{20}$$

даёт формулу обращения, при этом

$$a_1 \|\beta\| \leqslant \|\alpha\| \leqslant a_2 \|\beta\|,$$

a_1 *и* a_2 — *положительные константы.*

Формулы (17) и (19) являются не только формулами обращения для обобщенного левого и правого преобразования Фурье, они дают также разложение слева или справа векторных и матричных функций из $L_m^2(0, \infty)$ по матричным функциям $Z(x, \lambda)$ и $\hat{Z}(x, \lambda)$. Матрицы $Z(x, \lambda)$ и $\hat{Z}(x, \lambda)$, вообще говоря, не удовлетворяют дифференциальному уравнению (1). Чтобы получить разложение векторных и матричных функций из $L_m^2(0, \infty)$ по основным решениям, нужно использовать союзное интегральное уравнение

$$\bar{f}(x) + \int_x^\infty \hat{R}(x, s) \bar{f}(s)\, ds = \bar{\theta}(x)$$

или

$$\bar{\varphi}(x) + \int_x^\infty R(x, s) \bar{\varphi}(s)\, ds = \bar{Q}(x).$$

Осуществляя обобщенное преобразование Фурье вначале с помощью матрицы $\hat{Z}(x, \lambda)$, мы получаем формулу обращения, которая дает разложение по основным решениям. Итак, имеет место

Теорема 4. *Всякая вектор-функция* $\bar{f}(x) \in L_m^2(0, \infty)$ *допускает левое разложение по основным решениям уравнения* (1), *именно*

$$\bar{f}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \operatorname{l.i.m.} \int_{-\infty}^{\infty} Y(x, \lambda) \bar{\psi}(\lambda)\, d\lambda,$$

где

$$\bar{\psi}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \operatorname{l.i.m.} \int_0^\infty \hat{Z}(x, \lambda) \bar{f}(x)\, dx.$$

Используя связь между $\hat{R}(s, x)$ и $R(s, x)$ и операцию транспонирования для матриц, получаем правое разложение по основным решениям.

Теорема 5. *Всякая матрица* $\omega(x) \in L_m^2(0, \infty)$ *допускает правое разложение по основным решениям уравнения* (1), *т. е.*

$$\omega(x) = \text{l.i.m.}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\zeta(\lambda)Y(x, \lambda)\,d\lambda,$$

где

$$\zeta(\lambda) = \text{l.i.m.}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\infty}\omega(x)Z(x, \lambda)\,dx.$$

§ 5. Мы уже указывали на тот факт, что матрицы-функции $Z(x, \lambda)$ и $\hat{Z}(x, \lambda)$ не удовлетворяют, вообще говоря, дифференциальному уравнению (1). Однако справедливо утверждение, которое мы сформулируем как отдельную теорему.

Теорема 6. *Матрица-функция*

$$Z(x, \lambda) = e^{-i\lambda x}I + \int_0^x R(s, x)e^{-i\lambda s}\,ds$$

удовлетворяет неоднородному уравнению

$$Z'' - P(x)Z + \lambda^2 Z = -i\lambda R(0, x) - R_s'(0, x).$$

Эта теорема была установлена Б. Я. Левиным для скалярного случая*. С помощью метода, примененного Б. Я. Левиным, можно перенести теорему в матричное пространство. При изложении мы ограничимся идеей доказательства. Предварительно докажем две леммы. Введем в рассмотрение класс вектор-функций $\mathfrak{M}$, удовлетворяющих следующим условиям:

1. $\bar{f}(x) \in L_m^2(0, \infty)$;
2. $L\bar{f}(x) \in L_m^2(0, \infty)$, где $L\bar{f}(x) = \bar{f}''(x) - P(x)\bar{f}(x)$;
3. $\bar{f}(0) = \bar{f}'(0) = 0$.

Пусть W — класс вектор-функций $\bar{\psi}(\lambda) \in L_m^{2(+)}$ таких, что $\lambda^2\bar{\psi}(\lambda) \in L_m^{2(+)}$.

Лемма 2. *Обобщенное преобразование Фурье с помощью матрицы* $Y(x, \lambda)$ *отображает* $\mathfrak{M}$ *в* W. *Формула обращения с помощью матрицы* $Z(x, \lambda)$ *дает отображение* W *в* $\mathfrak{M}$.

Доказательство. Для доказательства этого факта вначале рассматривается преобразование на срезках $\bar{f}_N(x)$ функций из $\mathfrak{M}$, т. е. на таких функциях, которые на интервале $(0, N-\varepsilon)$ (ε — малое положительное число) совпадают с $\bar{f}(x)$, на (N, ∞) равны нулю, а на интервале $(N-\varepsilon, N)$ сглаживаются таким образом, чтобы к ним можно было применить оператор L и результат применения принадлежал бы $L_m^2(0, \infty)$. Имеем тогда

$$\bar{\psi}_{(N)}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\infty}Y(x, \lambda)\bar{f}_N(x)\,dx \tag{21}$$

и

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\infty}Y(x, \lambda)L\bar{f}_N(x)\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\infty}Y(x, \lambda)\left[\bar{f}_N''(x) - P(x)\bar{f}_N(x)\right]dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\infty}\left[Y''(x, \lambda) - Y(x, \lambda)P(x)\right]\bar{f}_N(x)\,dx = -\lambda^2\bar{\psi}_N(\lambda). \tag{22}$$

---

* В статье [1] эта теорема дана без доказательства.

Устремляя N к бесконечности, получим

$$\bar{\psi}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \text{l.i.m.} \int_0^\infty Y(x, \lambda) \bar{f}(x)\, dx \tag{23}$$

и

$$-\lambda^2 \bar{\psi}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \text{l.i.m.} \int_0^\infty Y(x, \lambda)\, L \bar{f}(x)\, dx. \tag{24}$$

Возможность предельного перехода вытекает из соотношения между нормами (13). Из равенств (22) и (23) заключаем, что $\bar{\psi}(\lambda) \in W$.

Обратное преобразование с помощью $Z(x, \lambda)$ переводит класс W в $\mathfrak{M}$. Действительно, если $\bar{\psi}(\lambda) \in W$, то

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \text{l.i.m.} \int_{-\infty}^{\infty} Z(x, \lambda)\, \psi(\lambda)\, d\lambda = \bar{f}(x) \in L_m^2(0, \infty). \tag{25}$$

Выполнение начальных условий для прообраза функции $\bar{\psi}(\lambda)$, именно $\bar{f}(0) = \bar{f}'(0)$ вытекает из равенства нулю двух интегралов

$$\int_{-\infty}^{\infty} \bar{\psi}(\lambda)\, d\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda \bar{\psi}(\lambda)\, d\lambda = 0,$$

что действительно справедливо для вектор-функций из класса W.

Нам осталось показать, что для функций, определенных равенством (25), результат применения оператора L дает вектор-функцию из $L_m^2(0, \infty)$.

Так как $\lambda^2 \bar{\psi}(\lambda) \in L_m^{2(+)}$, то мы имеем

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} Z(x, \lambda)\, (-\lambda^2)\, \bar{\psi}(\lambda)\, d\lambda = \bar{f}_2(x) \in L_m^2(0, \infty),$$

$\bar{f}(x)$ — прообраз вектор-функции $\bar{\psi}(\lambda)$,

$\bar{f}_2(x)$ — прообраз вектор-функции $-\lambda^2 \bar{\psi}(\lambda)$ при отображении с помощью $Y(x, \lambda)$, т. е.

$$\bar{\psi}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \text{l.i.m.} \int_0^\infty Y(x, \lambda) \bar{f}(x)\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \text{l.i.m.} \int_0^\infty l^{i\lambda x} [\bar{f}(x) + \int_0^x K(t, x) \bar{f}(t)\, dt]\, dx.$$

и

$$-\lambda^2 \bar{\psi}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \text{l. i. m.} \int_0^\infty Y(x, \lambda) \bar{f}_2(x)\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \text{l. i. m.} \int_0^\infty l^{i\lambda x} [\bar{f}_2(x) + \int_0^x K(t, x) \bar{f}_2(t)\, dt]\, dx.$$

Из теории интеграла Фурье следует, что принадлежность $\lambda^2\bar{\psi}(\lambda)$ пространству L_m^2 означает существование второй производной у функции $\bar{f}(x) + \int_0^x K(t, x)\bar{f}(t)\,dt$, принадлежащей L_m^2, причем

$$[\bar{f}(x) + \int_0^x K(t, x)\bar{f}(t)\,dt]'' = \bar{f}_2(x) + \int_0^x K(t, x)\bar{f}_2(t)\,dt. \tag{26}$$

Исходя из этого равенства, мы покажем, что

$$[\bar{f}(x) + \int_0^x K(t, x)\bar{f}(t)\,dt]'' = L\bar{f}(x) + \int_0^x K(t, x)\,L\bar{f}(t)\,dt. \tag{27}$$

Тогда, сравнивая (26) и (27), получим, что

$$L\bar{f}(x) = \bar{f}_2(x) \in L_m^2(0, \infty).$$

При доказательстве равенства (27) мы используем дифференциальное уравнение для ядра $K(x, t)$, которое приводим без доказательства

$$K'_{xx}(t, x) - K''_{tt}(t, x) + K(t, x)\;P(t) = 0. \tag{28}$$

Дифференцируя почленно слагаемые в левой части соотношения (27) и используя уравнение (28) получаем

$$\bar{f}''(x) + \left[\frac{d}{dx}K(x,x)\right]\bar{f}(x) + K(x, x)\bar{f}'(x) + \int_0^x K_{xx}(t, x)\bar{f}(t)\,dt +$$

$$+ K'_x(t, x)\bar{f}(t)\Big|_{t=x} = .$$

$$= \bar{f}''(x) + \int_0^x K(t, x)\bar{f}''(t)\,dt + 2\left[\frac{d}{dx}K(x, x)\right]\bar{f}(x) - \int_0^x K(t, x)P(t)\bar{f}(t)\,dt =$$

$$= L\bar{f}(x) + \int_0^x K(t, x)\,L\bar{f}(t)\,dt.$$

Лемма доказана.

Лемма 3 (относится к скалярным функциям).

Если функция $\alpha(\lambda)$ *голоморфна в* $\operatorname{Im}\lambda \leqslant 0$ *и*

$$\frac{\alpha(\lambda)}{(\lambda - i)^2} \in L^{2(-)},$$

то из квазиортогональности $\alpha(\lambda)$ *скалярному классу* W *следует, что* $\alpha(\lambda)$ — *линейная функция.*

Доказательство. Построим функцию

$$\alpha_1(\lambda) = \frac{\alpha(\lambda) - \alpha(0) - \alpha'(0)\cdot\lambda}{\lambda^2} \in L^{2(-)}.$$

В силу квазиортогональности $\alpha(\lambda)$ классу W имеем

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \alpha_1(\lambda)\, \lambda^2\, \psi(\lambda)\, d\lambda = 0$$

при любой $\psi(\lambda) \in W$. Так как множество функций $\lambda^2 \psi(\lambda)$ $(\psi(\lambda) \in W)$ плотно в $L^{2(+)}$, то

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \alpha_1(\lambda)\, \varphi_1(\lambda)\, d\lambda = 0$$

при любой $\varphi_1(\lambda) \in L^{2(+)}$. Но $\alpha_1(\lambda)$ — функция из $L^{2(-)}$, поэтому она квазиортогональна любой функции $\varphi_2(\lambda) \in L^{2(-)}$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \alpha_1(\lambda)\, \varphi_2(\lambda)\, d\lambda = 0.$$

Так как любая функция $\theta(\lambda)$ из L^2 представима в виде

$$\theta(\lambda) = \varphi_1(\lambda) + \varphi_2(\lambda)$$
$$\varphi_1(\lambda) \in L^{2(+)}, \quad \varphi_2(\lambda) \in L^{2(-)},$$

то $\alpha_1(\lambda)$ квазиортогональна L^2, т. е.

$$\alpha_1(\lambda) = 0$$

и, следовательно,

$$\alpha(\lambda) = \alpha(0) + \alpha'(0) \cdot \lambda.$$

Доказательство теоремы 6. В лемме 2 мы получили

$$L\bar{f}(x) = -\,\mathrm{l.i.m.}\, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} Z(x, \lambda)\, \lambda^2\, \bar{\psi}(\lambda)\, d\lambda.$$

Умножим это равенство слева на функцию Коши оператора L и проинтегрируем в пределах от 0 до x. После перемены порядка интегрирования получим

$$\bar{f}(x) = -\,\mathrm{l.i.m.}\, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{0}^{x} C(x, s)\, Z(s, \lambda)\, \lambda^2\, \bar{\psi}(\lambda)\, ds\, d\lambda.$$

Сравним полученное равенство с равенством

$$\bar{f}(x) = \mathrm{l.i.m.}\, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} Z(x, \lambda)\, \bar{\psi}(\lambda)\, d\lambda,$$

тогда

$$\mathrm{l.i.m.} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \Big[Z(x, \lambda) + \lambda^2 \int\limits_{0}^{x} C(x, s)\, Z(s, \lambda)\, ds\Big]\, \bar{\psi}(\lambda)\, d\lambda = 0.$$

Применив лемму 3, имеем

$$Z(x, \lambda) + \lambda^2 \int\limits_{0}^{x} C(x, s)\, Z(s, \lambda)\, ds = \lambda\, B_1(x) + B_2(x). \tag{29}$$

После применения оператора L к равенству (29) получим

$$Z'' - P(x)Z + \lambda^2 Z = \lambda A_1(x) + A_2(x).$$

Используя представление для матрицы $Z(x,\lambda)$

$$Z(x, \lambda) = e^{-i\lambda x} I + \int_0^x R(s, x) e^{-i\lambda s} ds,$$

находим, что

$$A_1(x) = -iR(0, x), \quad A_2(x) = -R'_s(0, x).$$

Замечание 1. Теорема 6 остается справедливой, если вместо основного решения $Y(x, \lambda)$ рассмотреть преобразование с помощью матрицы $U(\lambda) Y(x, \lambda)$, где относительно $U(\lambda)$ предполагается, что она голоморфна в $Im\lambda > 0$, непрерывна в $Im\lambda \geqslant 0$ и

$$U(\lambda) = I + \beta(\lambda), \quad \beta(\lambda) \in L_2$$

Тогда матрица

$$Z^*(x, \lambda) = e^{-i\lambda x} I + \int_0^x R^*(s, x) e^{-i\lambda s} ds,$$

дающая формулу обращения, удовлетворяет уравнению

$$Z^{*''} - P(x) Z^* + \lambda^2 Z^* = -i\lambda R^*(0, x) - R_s^{*'}(0, x).$$

Приведенное доказательство проходит в этом более общем случае без существенных изменений.

Замечание 2. При доказательстве теоремы 6 вместо всего класса $\mathfrak{M}$ можно было рассмотреть подмножество $\mathfrak{M}^1$, всюду плотное в $\mathfrak{M}$.

Для матрицы $\hat{Z}(x, \lambda)$, дающей формулу обращения для правого обобщенного преобразования типа Фурье, мы получаем следующий результат.

Теорема 7.

Если при любых x и t

$$P(x) P(t) = P(t) P(x), \tag{30}$$

то матричная функция удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\hat{Z}'' - \hat{Z} P(x) + \lambda^2 \hat{Z} = -i\lambda \hat{R}(0, x) - \hat{R}'_s(0, x), \tag{31}$$

Доказательство. Если условие (30) выполнено, матрицы $Z(x, \lambda)$ и $\hat{Z}(x, \lambda)$ совпадают, причем $P(x)$ будет перестановочна с $Z(x, \lambda)$ и $\hat{Z}(x, \lambda)$, поэтому для $Z(x, \lambda) = \hat{Z}(x, \lambda)$ получаем уравнение

$$Z'' - ZP(x) + \lambda^2 Z = Z'' - P(x) Z + \lambda^2 Z = -i\lambda R(0, x) - R'_s(0, x).$$

§ 6. Теоремы 2 и 6 позволяют получить разложение векторных функций по решениям несамосопряженной задачи, которую мы сформулируем.

Пусть $\Phi(x, \lambda)$ — решение дифференциального уравнения

$$\Phi'' - \Phi P(x) + \lambda^2 \Phi = 0, \tag{32}$$

удовлетворяющее начальному условию

$$\Phi(0, \lambda) H + \Phi'(0, \lambda) = 0, \tag{33}$$

H — постоянная матрица. Тогда, предполагая, что $P(x)$ удовлетворяет условию

$$\int_0^\infty (1 + x) \, | P(x) | \, dx < \infty, \tag{34}$$

мы можем $\Phi(x, \lambda)$ представить в следующем виде

$$\Phi(x, \lambda) = \varsigma(\lambda) \left[Y_H^{-1}(\lambda) \, Y(x, \lambda) + Y_H^{-1}(-\lambda) \, Y(x, -\lambda) \right], \tag{35}$$

где

$$Y_H(\lambda) = \frac{1}{i\lambda} \left[Y(0, \lambda) H + Y'(0, \lambda) \right],$$

$$\varsigma(\lambda) = \left[Y_H^{-1}(\lambda) \, Y(0, \lambda) + Y_H^{-1}(-\lambda) \, Y(0, -\lambda) \right]^{-1}.$$

Пусть $V(x, \lambda)$ — матрица, удовлетворяющая дифференциальному уравнению

$$V'' - P(x) V + \lambda^2 V = 0$$

и начальным условиям $V(0, \lambda) = I, \; V'_x(0, \lambda) = -H$.

Справедливо утверждение:

Теорема 8*. *Если* $\det Y_H(\lambda)$ *отличен от нуля в верхней замкнутой полуплоскости* $Im \lambda \geqslant 0$, *то преобразование*

$$\overline{F}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \, \text{l.i.m.} \int_0^\infty \Phi(x, \lambda) \, \overline{f}(x) \, dx$$

отображает непрерывно и однозначно $L_m^2(0, \infty)$ *в пространство* H_m^2 *четных функций, принадлежащих* $L_m^2(-\infty, \infty)$ *при вещественных* λ. *Преобразование*

$$\overline{f}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \, \text{l.i.m.} \int_0^\infty Y(x, \lambda) \, d\sigma(\lambda) \, \overline{F}(\lambda)$$

$$\sigma'(\lambda) = \varsigma^{-1}(\lambda)$$

дает формулу обращения.

---

* Теорема 8 справедлива для случая граничного условия $\Phi(0, \lambda) = 0$. Соответствующий результат для скалярного случая был получен ранее Б. Я. Левиным [1] и М. А. Наймарком [3], [4].

Доказательство. Мы будем опираться на полученные ранее формулы

$$\overline{\varphi}(\lambda) = \text{l.i.m.} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty Y(x, \lambda) \overline{f}(x)\, dx \qquad \overline{f}(x) \in L_m^2(0, \infty),$$

$$\overline{f}(x) = \text{l.i.m.} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} Z(x, \lambda) \overline{\varphi}(\lambda)\, d\lambda \qquad \overline{\varphi}(\lambda) \in L_m^{2(+)},$$

которые определяют отображение пространств $L_m^2(0, \infty)$ в $L_m^{2(+)}$ и обратно.

Вместо преобразования на вещественной оси λ мы сделаем преобразование на прямой, параллельной оси $\operatorname{Im}\lambda = 0$ и сдвинутой в верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im}\lambda > 0$. Итак, пусть ε — некоторое положительное число, тогда вектор — функция

$$\overline{\varphi}(\lambda + i\varepsilon) = \text{l.i.m.} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty Y(x, \lambda + i\varepsilon) \overline{f}(x)\, dx, \tag{36}$$

как функция λ принадлежит $L_m^{2(+)}$.

Формула обращения имеет вид

$$\overline{f}(x) = \text{l.i.m.} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} Z(x, \lambda + i\varepsilon) \overline{\varphi}(\lambda + i\varepsilon)\, d\lambda. \tag{37}$$

После умножения слева (36) на $Y_H^{-1}(\lambda + i\varepsilon)$ получим

$$\overline{\theta}(\lambda + i\varepsilon) = Y_H^{-1}(\lambda + i\varepsilon)\, \overline{\varphi}(\lambda + i\varepsilon) =$$

$$= \text{l.i.m.} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty Y_H^{-1}(\lambda + i\varepsilon)\, Y(x, \lambda + i\varepsilon) \overline{f}(x)\, dx. \tag{38}$$

Так как $Y_H^{-1}(\lambda + i\varepsilon) \to I$ при $|\lambda| \to \infty$ и по условию теоремы $\det Y_H(\lambda) \neq 0$ в $\operatorname{Im}\lambda \geqslant 0$, то вектор-функция $\overline{\theta}(\lambda + i\varepsilon) \in L_m^{2(+)}$ при фиксированном $\varepsilon \geqslant 0$. Воспользуемся (37) и получим формулу обращения для преобразования (38)

$$\overline{f}(x) = \text{l.i.m.} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} Z(x, \lambda + i\varepsilon)\, Y_H(\lambda + i\varepsilon)\, \overline{\theta}(\lambda + i\varepsilon)\, d\lambda. \tag{39}$$

Преобразуем несколько матрицу $Z(x, \lambda + i\varepsilon)\, Y_H(\lambda + i\varepsilon)$. Для этого воспользуемся представлением $Y(x, \lambda)$ через ядро $K(x, t)$ и получим для $Y_H(\lambda + i\varepsilon)$

$$Y_H(\lambda + i\varepsilon) = I + \frac{H - K(0, 0)}{i(\lambda + i\varepsilon)} + \frac{1}{i(\lambda + i\varepsilon)} \int_0^\infty K_H(0, t)$$

или

$$Y_H(\lambda + i\varepsilon) = I + \int_0^\infty K_H(t)\, e^{i(\lambda+i\varepsilon)t}\, dt,$$

где

$$K_H(t) = K(0, 0) - H - \int_0^t [K(0, t) H + K'(0, t)]\, dt.$$

Тогда $Z(x, \lambda + i\varepsilon) Y_H(\lambda + i\varepsilon)$ может быть представлена так

$$Z(x, \lambda + i\varepsilon) Y_H(\lambda + i\varepsilon) = [e^{-i(\lambda+i\varepsilon)x} I + \int_0^x R(s, x)\, e^{-i(\lambda+i\varepsilon)s}\, ds][I +$$

$$+ \int_0^\infty K_H(t)\, e^{i(\lambda+i\varepsilon)t}\, dt].$$

Отсюда получается представление

$$Z(x, \lambda + i\varepsilon) Y_H(\lambda + i\varepsilon) = e^{-i(\lambda+i\varepsilon)x} I + \int_0^x R^*(s, x)\, e^{-i(\lambda+i\varepsilon)s}\, ds + \gamma_\varepsilon(x, \lambda),$$

в котором

$$R^*(s, x) = R(s, x) + K(0, 0) - H - \int_0^{x-s} [K(0, t) H + K'(0, t)]\, dt +$$

$$+ \int_s^x R(v, x) K_H(v - s)\, dv,$$

и матрица $\gamma_\varepsilon(x, \lambda)$ имеет вид

$$\gamma_\varepsilon(x, \lambda) = \int_{-\infty}^0 K_H(x - s)\, e^{-i(\lambda+i\varepsilon)s}\, ds + \int_{-\infty}^0 \int_s^x R(v, x) K_H(v - s) e^{i(\lambda+i\varepsilon)s}\, dv\, ds.$$

Матричная функция $\gamma_\varepsilon(x,\lambda)$ при фиксированном x принадлежит $L_m^{2(+)}$ по переменной λ. Вектор $\bar{\theta}(\lambda + i\varepsilon)$ также принадлежит $L_m^{2(+)}$. В силу квазиортогональности друг другу функций из $L_m^{2(+)}$ преобразование (39) эквивалентно преобразованию с помощью матрицы

$$Z^*(x, \lambda + i\varepsilon) = e^{-i(\lambda+i\varepsilon)x} + \int_0^x R(s, x)\, e^{-i(\lambda+i\varepsilon)s} ds.$$

Таким образом

$$\bar{f}(x) = \text{l.i.m.} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty Z^*(x, \lambda + i\varepsilon)\, \bar{\theta}(\lambda + i\varepsilon)\, d\lambda =$$

$$= \text{l.i.m.} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty Z^*(x, \lambda)\, \bar{\theta}(\lambda)\, d\lambda\,. \qquad (40)$$

Если воспользоваться замечанием 1 к теореме 6, то получим, что матрица $Z^*(x,\lambda)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$Z^{*\prime\prime} - PZ^* + \lambda^2 Z^* = - i\lambda R^*(0,x) - R_s^{*\prime}(0, x). \qquad (41)$$

Преобразуем теперь $\bar{f}(x) \in L^2_m(0, \infty)$ с помощью матрицы $\Phi(x, \lambda)$

$$\text{l.i.m.} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \Phi(x, \lambda) \bar{f}(x)\, dx = \text{l.i.m.} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \zeta(\lambda) [Y_н^{-1}(\lambda) Y(x, \lambda) +$$

$$+ Y_н^{-1}(-\lambda) Y(x, -\lambda)] \bar{f}(x)\, dx = \zeta(\lambda) [\bar{\theta}(\lambda) + \bar{\theta}(-\lambda)] = \bar{F}(\lambda).$$

Вектор-функция $\bar{F}(\lambda)$ представляет собой четную функцию, принадлежащую $L^2_m(-\infty, \infty)$ на вещественной оси. Формулу обращения для (42) можно получить с помощью матрицы

$$V^*(x,\lambda) = \frac{1}{2} [Z^*(x, \lambda) + Z^*(x, -\lambda)]. \tag{43}$$

Будем иметь

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \text{l.i.m.} \int_{-\infty}^{\infty} V^*(x, \lambda) \zeta^{-1}(\lambda) \bar{F}(\lambda)\, d\lambda = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \text{l.i.m.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} [Z^*(x, \lambda) +$$

$$+ Z^*(x, -\lambda)] [\bar{\theta}(\lambda) + \bar{\theta}(-\lambda)]\, d\lambda = \bar{f}(x).$$

Последнее равенство получается в силу того, что $Z^*(x, \lambda) - e^{-i\lambda x} I$ и $\bar{\theta}(-\lambda) \in L^{2(-)}_m$ квазиортогональны. Аналогично $Z^*(x, -\lambda) - e^{i\lambda x} I$ и $\bar{\theta}(\lambda) \in L^{2(+)}_m$ также квазиортогональны. Из (41) и представления (43) для $V^*(x, \lambda)$ получаем, что

$$V^{*''} - P(x) V^* + \lambda^2 V^* = R^{*'}_s(0, x).$$

Покажем, что $R^{*'}_s(0, x) = 0$. Мы имели

$$R^*(s, x) = R(s, x) + K(0, 0) - H - \int_0^{x-s} [K(0, t) H + K'(0, t)\, dt +$$

$$+ \int_s^x R(v, x) [K(0, 0) - H - \int_0^{x-s} [K(0, t) H + K'(0, t)]\, dt\}\, dv.$$

Поэтому

$$R^{*'}_s(0, x) = R'_s(0, x) + K'_s(0, x) + \int_0^x R(v, x) K's(0, v)\, dv -$$

$$- R(0, x) K(0, 0) + K(0, x) H + R(0, x) H + \int_0^x R(v, x) K(0, v) H dv.$$

В силу соотношения для левой резольвенты

$$R^{*'}_s(0, x) = 0.$$

Нам осталось проверить выполнение начальных условий для матрицы $V^*(x, \lambda)$

$$V^*(x, \lambda) = \cos \lambda x I + \int_0^x R^*(s, x) \cos \lambda s\, ds;$$

$$V^*(0, \lambda) = I;$$

$$V^*_x(0, x) = R^*(0, 0) = H.$$

Таким образом

$$V^*(x, \lambda) = V(x, \lambda).$$

§ 7. Результаты теоремы 8 можно обобщить на случай, когда $\det Y_H(\lambda)$ может обращаться в нуль в верхней полуплоскости $Im\lambda > 0$. Для этого определим сначала понятие о дискретном спектре.

Пусть дано уравнение

$$\bar{y}'' - Q(x)\bar{y} + \lambda^2\bar{y} = 0,$$

где $Q(x)$ — матрица с комплексными компонентами, удовлетворяющая условию

$$\int_0^\infty x\,|Q(x)|\,dx < \infty$$

$\bar{y}(x) \in L_m^2(0, \infty)$, зададим краевое условие

$$A\bar{y}(0) + \bar{y}'(0) = 0,$$

где A — постоянная матрица.

Определение. Множество тех значений параметра λ, для которых эта задача имеет нетривиальное решение, называется дискретным спектром данной задачи, соответствующим граничному условию

$$A\bar{y}(0) + \bar{y}'(0) = 0.$$

Определим понятие о кратности точки спектра λ. Для этого составим систему векторных уравнений

$$\left.\begin{aligned} &L\bar{y}_1 + \lambda^2\bar{y}_1 = 0 \\ &L\bar{y}_2 + \lambda^2\bar{y}_2 = y_1 \\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ &L\bar{y}_{p_j} + \lambda^2\bar{y}_{p_j} = \bar{y}_{p_{j-1}}. \end{aligned}\right\} \tag{45}$$

Пусть существует наибольшее значение числа p_j, при котором система векторных уравнений имеет решение $\{\bar{y}_1(x), y_2(x), \ldots \bar{y}_{p_j}(x)\}$ в классе векторов из $L_m^2(0, \infty)$ и удовлетворяющих граничному условию в нуле

$$A\bar{y}(0) + \bar{y}'(0) = 0.$$

Мы берем наибольшее p_j в том смысле, что вектор-функция $\bar{y}_{p_j+1}$ не будет удовлетворять хотя бы одному из условий (45). При этом может случиться, что существует несколько, но не больше m, систем линейно независимых векторов, отвечающих данному значению λ, и по каждой из этих систем определяется свое наибольшее число p_j — длина цепочки. Кратностью p собственного числа λ назовем сумму всех чисел p_j

$$p = \sum_{j=1}^{\mu} p_j \quad \mu \leqslant m.$$

Вектор $\bar{y}_1(x)$ называется собственной вектор-функцией, а векторы $\bar{y}_2(x)$ $\bar{y}_3(x)$, $\ldots \bar{y}_{p_j}(x)$ — цепочкой главных вектор-функций, присоединенных к собственной вектор-функции. Совокупность всех векторных систем $\{\bar{y}_1^j(x)$, $\bar{y}_2^{(j)}(x)$, $\ldots$ $\bar{y}_{p_j}^{(j)}(x)\}$ $j = 1, 2 \ldots \mu$ образует корневое подпространство E_λ, соответствующее данному значению λ. Это инвариантное подпространство можно представить в виде прямой суммы неприводимых подпространств E_{λ_j}, натянутых на векторы $\{\bar{y}_1^{(j)}(x), \bar{y}_2^{(j)}(x), \ldots \bar{y}_{p_j}^{(j)}(x)\}$, размерности p_j

$$E_\lambda = \sum_{j=1}^{\mu} E_{\lambda_j}.$$

Рассматриваемая задача имеет собственные значения только конечной кратности. Этот факт следует из того, что весь дискретный спектр состоит из комплексных корней характеристического уравнения

$$\det\{AY_1(0,\lambda) + Y_1'(0,\lambda)\} = 0 \quad (Im\lambda > 0), \tag{46}$$

где $Y_1(x,\lambda)$ — основное решение уравнения

$$Y'' - Q(x)Y + \lambda^2 Y = 0.$$

Имеет место следующая теорема, которую мы приведем без доказательства.

Теорема 9. *Кратность точки спектра λ_0 совпадает с кратностью соответствующего корня характеристического уравнения* (46). *Количество цепочек μ, на которое распадается корневое подпространство, отвечающее λ_0, равно $\mu = m - r_0$, где r_0 — ранг матрицы* $[AY_1(0,\lambda_0) + Y_1'(0,\lambda_0)]$. Мы предположим, что на вещественной оси $\det Y_H(\lambda) \neq 0$ и выясним, каким условиям должна удовлетворять вектор-функция $\bar{\varphi}(\lambda) \in L_m^{2(+)}$, для того, чтобы $Y_H^{-1}(\lambda)\bar{\varphi}(\lambda)$ также принадлежала $L_m^{2(+)}$.

Лемма 4. *Если* $\det Y_H(\lambda) \neq 0$ *на вещественной оси, то уравнение* $\det Y_H(\lambda) = 0$ *имеет лишь конечное число нулей.*

Этот факт следует из того, что $\det Y_H(\lambda)$ представляет собой голоморфную функцию, которая на вещественной оси не имеет корней по условию, а при $|\lambda| \to \infty$ матрица $Y_H(\lambda) \to I$ в верхней полуплоскости.

Пусть λ_k является корнем кратности p уравнения $\det Y_H(\lambda) = 0$, тогда, не нарушая общности, можно представить матрицу $Y_H(\lambda)$ в следующем виде

$$Y_H(\lambda) = \begin{pmatrix} \bar{Y}_{H1}(\lambda) \\ \bar{Y}_{H2}(\lambda) \\ \bar{Y}_{Hr}(\lambda) \\ \bar{Y}_{Hr+1}(\lambda)\cdot(\lambda-\lambda_k)^{n_{r+1}} + \sum\limits_{s=1}^{r} a_s^{r+1}\bar{Y}_{Hs}(\lambda) \\ \bar{Y}_{Hr+2}(\lambda)\cdot(\lambda-\lambda_k)^{n_{r+2}} + \sum\limits_{s=1}^{r+1} a_s^{r+2}\bar{Y}_{Hs}(\lambda) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \bar{Y}_{Hm}(\lambda)(\lambda-\lambda_k)^{n_m} + \sum\limits_{s=1}^{m-1} a_s^m\bar{Y}_{Hs}(\lambda) \end{pmatrix} \tag{47}$$

где r — ранг матрицы $Y_H(\lambda_k)$

$$n_{r+1} + n_{r+2} \ldots + n_m = p,$$

a_s^j — многочлен относительно $(\lambda - \lambda_k)$ степени меньше n_j, причем

$$\det\begin{pmatrix} \bar{Y}_{H1}(\lambda_k) \\ \bar{Y}_{H2}(\lambda_k) \\ \cdots \\ \bar{Y}_{Hm}(\lambda_k) \end{pmatrix} \neq 0.$$

Базисом в пространстве $R_m(\lambda)$ можно выбрать систему векторов

$$\det\begin{cases}\overline{l}'_i=\overline{l}_i & i=1,\,2,\,\ldots\, r\\ \overline{l}'_i=\overline{l}_i-\sum\limits_{s=1}^{i-1}a^i_s\overline{l}_s & i=r+1,\,r+2,\,\ldots\, m,\end{cases}$$

где

$$\overline{l}_1=(1,\,0,\,0,\,\ldots\,0),$$
$$\overline{l}_2=(0,\,1,\,0,\,\ldots\,0)$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$\overline{l}_m=(0,\,0,\,0\,\ldots\,1).$$

Тогда имеем, что матрица $Y_H(\lambda)$ переводит векторы $\{\overline{l}'_i\}$ в векторы $\overline{Y}_{H1}(\lambda),\ \overline{Y}_{H2}(\lambda),\ \ldots\ \overline{Y}_{Hr}(\lambda),\ \overline{Y}_{Hr+1}(\lambda)\ (\lambda-\lambda_k)^{n_{r+1}},\ \ldots\ \overline{Y}_{Hm}(\lambda)(\lambda-\lambda_k)^{n_m}$. Каждая вектор-функция $\overline{x}(\lambda)\in R_m(\lambda)$ представляется с помощью базисных векторов

$$\overline{x}(\lambda)=x_1(\lambda)\,\overline{l}'_1+x_2(\lambda)\,\overline{l}'_2+\ldots+x_m(\lambda)\,\overline{l}'_m.$$

Применение матрицы $Y_H(\lambda)$ приводит к следующему результату

$$Y_H(\lambda)\overline{x}(\lambda)=x_1(\lambda)\overline{Y}_{H1}(\lambda)+x_2(\lambda)\overline{Y}_{H2}(\lambda)+\ \ldots\ +x_r(\lambda)\overline{Y}_{Hr}(\lambda)+$$
$$+x_{r+1}(\lambda)(\lambda-\lambda_k)^{n_{r+1}}\cdot\overline{Y}_{Hr+1}(\lambda)+\ \ldots\ +x_m(\lambda)(\lambda-\lambda_k)^{n_m}\overline{Y}_{Hm}(\lambda).$$

Переход от вектора $\overline{x}(\lambda)$ к вектору $Y_H(\lambda)\overline{x}(\lambda)$ осуществляется так: базисные векторы $\{l'_i\}$ заменяются линейно независимыми в точке λ_k векторами $\{\overline{Y}_{Hi}(\lambda)\}$, а координаты $x_j(\lambda)$ $j=r_{k+1},\ \ldots\ m$ умножаются соответственно на $(\lambda-\lambda_k)^{n_j}$. Все пространство $R_m(\lambda)$ переходит в подпространство векторов, имеющих корни у координат $x_j(\lambda)$ $j=r_{k+1},\ \ldots\ m$ в точке λ_k кратности n_j.

С другой стороны, всякий вектор из $R_m(\lambda)$ можно представить

$$\overline{y}(\lambda)=y_1(\lambda)\overline{Y}_{H1}(\lambda)+\ \ldots\ +y_m(\lambda)\overline{Y}_{Hm}(\lambda).$$

Применение матрицы $Y_H^{-1}(\lambda)$ к $R_m(\lambda)$, т. е. обратной по отношению к $Y_H(\lambda)$ матрицы означает замену векторов $\{Y_{Hi}\}$ векторами $\{\overline{l}'_i\}$ и деление j координаты $(j=r_{k+1},\ \ldots\ m)$ на $(\lambda-\lambda_k)^{n_j}$. Таким образом мы доказали лемму.

Лемма 5. *Выбором базиса в* $R_m(\lambda)$ *можно матрицу-функцию* $Y_H^{-1}(\lambda)$, *у которой* $\det Y_H(\lambda_k)=0$, ранг $Y_H(\lambda_k)=r$, *привести к такому виду, что применение ее к векторам из* $R_m(\lambda)$ *сводится к делению* j *компоненты* $(j=r_{k+1},\ \ldots\ m)$ *на множители* $(\lambda-\lambda_k)_j\ j$ *соответственно, причем*

$$n_{r+1}+n_{r+2}+\ \ldots\ +n_m=p,$$

p — *кратность корня.*

Следствие I. Чтобы применение матрицы $Y_H^{-1}(\lambda)$ при $\lambda=\lambda_k$, где $\det Y_H(\lambda_k)=0$, имело смысл, необходимо и достаточно, чтобы компонента $x_j(\lambda)$ $(j=r_{k+1},\ \ldots\ m)$ вектора $\overline{x}(\lambda)\in R_m(\lambda)$ имела в точке λ_k корень порядка не меньшего, чем n_j.

Следствие II. Для того, чтобы вектор

$$\overline{\theta}(\lambda)=Y_H^{-1}(\lambda)\,\overline{\psi}(\lambda),$$

где $\bar{\psi}(\lambda) \in L_m^{2(+)}$, принадлежал $L_m^{2(+)}$ необходимо и достаточно наличие корней у координат $\bar{\psi}_j(\lambda)$ вектора $\bar{\psi}(\lambda)$ в точках $\{\lambda_k\}$ кратности, не меньшей чем n_j^k.

Мы имеем

$$\bar{\varphi}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \text{l. i. m.} \int_0^\infty Y(x, \lambda) \bar{f}(x)\, dx. \tag{48}$$

Пусть $\bar{\varphi}(\lambda)$ такова, что $Y_H^{-1}(\lambda)\bar{\varphi}(\lambda) \in L_m^{2(+)}$.

Дифференцируя по λ j-компоненту вектора $\bar{\varphi}(\lambda)$ n_j раз и полагая $\lambda = \lambda_k$, мы получаем квазиортогональность вектора $\bar{f}(x)$ корневым подпространствам оператора L_2, определенного условиями

$$\begin{gathered} l\bar{y} = \bar{y}'' - \tilde{P}(x)y \\ \bar{y}(x) \in L_m^2(0, \infty) \\ \tilde{H}\bar{y}(0) + \bar{y}'(0) = 0, \end{gathered}$$

где знак $\sim$ означает переход к транспонированной матрице.

Обозначим G — подпространство из $L_m^2(0, \infty)$, квазиортогональное корневым подпространствам оператора L_2. Имеет место следующий результат.

Теорема 10. *Если* $\det Y_H(\lambda) \neq 0$ *при вещественных* λ, $\bar{f}(x)$ *принадлежит* G *и*

$$\bar{\varphi}(\lambda) = \text{l. i. m.} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty Y(x, \lambda) \bar{f}(x)\, dx,$$

то $Y_H^{-1}(\lambda)\bar{\varphi}(\lambda) \in L_m^{2(+)}$. *Наоборот, если* $Y_H^{-1}(\lambda)\bar{\varphi}(\lambda) \in L_m^{2(+)}$, *то функция*

$$\bar{f}(x) = \text{l. i. m.} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty Z(x, \lambda)\bar{\varphi}(\lambda)\, d\lambda$$

принадлежит G.

Используя теорему 10 и повторяя рассуждения § 6, мы получаем теорему о разложении по решениям несамосопряженной задачи в случае, если $\det Y_H(\lambda)$ обращается в нуль в верхней полуплоскости, но отличен от нуля на вещественной оси.

Теорема 11. *Если* $\det Y_H(\lambda) \neq 0$ *на вещественной оси, то преобразование*

$$\bar{F}(\lambda) = \text{l. i. m.} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \Phi(x, \lambda) \bar{f}(x)\, dx$$

отображает все G *на* H_m^2, *где* H_m^2 — *пространство четных функций, принадлежащих* L_m^2 *на вещественной оси.*

$$\bar{f}(x) = \text{l. i. m.} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty V(x, \lambda)\, d\sigma(\lambda) \cdot \bar{F}(\lambda)$$

дает формулу обращения H_m^2 на G.

§ 8. Теперь мы не будем налагать никаких условий на расположение корней уравнения $\det Y_H(\lambda)=0$. Итак, $\det Y_H(\lambda)=0$ может иметь корни на вещественной оси. Тогда уравнение $\det Y_H(\lambda)=0$ имеет, вообще говоря, бесчисленное множество корней, так как точки вещественной оси могут являться предельными для корней. Но корней будет не более, чем счетное множество. Действительно, выбирая δ_n так, что $\det Y_H(\lambda+i\delta_n)\neq 0$ при вещественных λ, мы имеем в полуплоскости $Im\lambda\geqslant\delta_n$ конечное число нулей. Устремляя δ_n к нулю, мы счетным числом шагов исчерпаем всю совокупность нулей $\det Y_H(0,\lambda)=0$, лежащих в верхней полуплоскости.

Обозначим как и ранее G — ортогональное дополнение всех корневых подпространств оператора L_2. Это подпространство не пустое. Возьмем $\bar f(x)\in G$. Имеем

$$\bar\varphi(\lambda)=\text{l. i. m.}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty Y(x,\lambda)\bar f(x)\,dx$$

$$\bar\theta(\lambda)=Y_H^{-1}(\lambda)\bar\varphi(\lambda)=\text{l. i. m.}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty Y_H^{-1}(\lambda)\,Y(x,\lambda)\bar f(x)\,dx,$$

$\bar\theta(\lambda)$ — голоморфна и ограничена в верхней полуплоскости в силу ортогональности G и E_λ. На всякой прямой, лежащей в верхней полуплоскости $Im\lambda>0$ и параллельной вещественной оси, функция $\bar\theta(\lambda)\in L_m^2(-\infty,\infty)$, следовательно $\bar\theta(\lambda+i\varepsilon)$ при $Im\lambda\geqslant 0$ принадлежит $L_m^{2(+)}$ как функция от λ. С другой стороны $\bar\theta(\lambda+i\varepsilon)$ — есть результат применения преобразования с помощью матрицы $Y_H^{-1}(\lambda+i\varepsilon)\,Y(x,\lambda+i\varepsilon)$ к функции $\bar f(x)$.

$$\bar\theta(\lambda+i\varepsilon)=Y_H^{-1}(\lambda+i\varepsilon)\bar\varphi(\lambda+i\varepsilon)=$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\text{l. i. m.}\int_0^\infty Y_H^{-1}(\lambda+$$
$$+i\varepsilon)\,Y(x,\lambda+i\varepsilon)\bar f(x)\,dx. \tag{49}$$

Выберем ε так, чтобы $\det Y_H(\lambda+i\varepsilon)\neq 0$ при $Im\lambda=0$, и зафиксируем это ε.

Формула обращения для преобразования (49) имеет вид

$$\bar f(x)=\text{l. i. m.}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^\infty Z(x,\lambda+i\varepsilon)\,Y_H(\lambda+i\varepsilon)\bar\theta(\lambda+i\varepsilon)\,d\lambda,$$

ей эквивалентна

$$\bar f(x)=\text{l. i. m.}\int_{-\infty}^\infty Z^*(x,\lambda+i\varepsilon)\bar\theta(\lambda+i\varepsilon)\,d\lambda,$$

причем

$$Z^*(x,\lambda+i\varepsilon)=e^{-i(\lambda+i\varepsilon)x}+\int_0^x R^*(s,x)\,e^{-i(\lambda+i\varepsilon)s}ds,$$

$$R^*(s,x)=R(s,x)+K(0,0)-H-\int_0^{x-s}[K(0,t)H+K'(0,t)\,dt+$$

$$+\int_s^x R(v,x)\{K(0,0)-H-\int_0^{x-s}[K(0,t)H+K'(0,t)]\,dt\}\,dv$$

Преобразуем $\bar{f}(x)$ с помощью матрицы .

$$\Phi_\varepsilon(x, \lambda) = \zeta(\lambda)\left[Y_{\overline{H}}^{-1}(\lambda + i\varepsilon) Y(x, \lambda + i\varepsilon) + Y_{\overline{H}}^{-1}(-\lambda - i\varepsilon) Y(x, -\lambda - i\varepsilon)\right]$$

$$\text{l. i. m.} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \Phi_\varepsilon(x, \lambda) \bar{f}(x)\, dx = \varsigma(\lambda)\left[\bar{\theta}(\lambda + i\varepsilon) + \bar{\theta}(-\lambda - i\varepsilon)\right] = \bar{F}_\varepsilon(\lambda).$$

Формула обращения дает разложение

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \text{l. i. m} \int_{-\infty}^{\infty} V(x, \lambda)\, d\sigma(\lambda) \cdot \bar{F}_\varepsilon(\lambda) = \bar{f}_\varepsilon(x).$$

Окончательно

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \text{l. i. m.} \int_{-\infty}^{\infty} V(x, \lambda)\, d\sigma(\lambda) \cdot \bar{F}_\varepsilon(\lambda)\right] = \bar{f}(x).$$

ЛИТЕРАТУРА

[1]. Б. Я. Левин. «ДАН СССР», 106, 187 (1956).
[2]. З. С. Агранович, В. А. Марченко. «Уч. записки матем. отд. физмата и Харьковск. матем. об-ва», 26 (1958).
[3]. М. А. Наймарк. «ДАН СССР», 89, 213 (1953).
[4]. М. А. Наймарк. Труды Московск. матем. об-ва, 3, 181 (1954).