

Міністерство освіти і науки України
Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна

**МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ
ДО САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ З НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ
«ДИСКРЕТНА МАТЕМАТИКА»**

для здобувачів вищої освіти спеціальностей 122 «Комп'ютерні науки»,
123 «Комп'ютерна інженерія», 125 «Кібербезпека та захист інформації»,
174 «Автоматизація, комп'ютерно-інтегровані технології та робототехніка»
першого (бакалаврського) рівня вищої освіти

Електронне видання

Харків – 2023

Рецензенти:

О. В. Старкова – доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри кібербезпеки та інформаційних технологій Харківського національного економічного університету імені Семена Кузнеця;

Є. В. Поклонський – кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри штучного інтелекту та програмного забезпечення факультету комп'ютерних наук Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна.

*Затверджено до розміщення в мережі Інтернет рішенням Науково-методичної ради
Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна
(протокол № 9 від 16 червня 2023 року)*

М 54

Методичні рекомендації до самостійної роботи з навчальної дисципліни «Дискретна математика» для здобувачів вищої освіти спеціальностей 122 «Комп'ютерні науки», 123 «Комп'ютерна інженерія», 125 «Кібербезпека та захист інформації», 174 «Автоматизація, комп'ютерно-інтегровані технології та робототехніка» першого (бакалаврського) рівня вищої освіти [Електронне видання] / уклад. О. О. Аршава. – Харків : ХНУ імені В. Н. Каразіна, 2023. – (PDF 44 с.)

Методичні рекомендації містять тематичний план навчальної дисципліни «Дискретна математика», завдання для самостійної роботи та питання для самоконтролю, варіанти білетів для підготовки до поточного й підсумкового контролів із прикладами їх розв'язання та рекомендовану літературу.

Навчальне видання призначається для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти, що навчаються за освітньо-професійними програмами «Комп'ютерні науки», «Комп'ютерна інженерія», «Кібербезпека» та «Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології».

УДК 510.6+511+519.1

© Харківський національний університет
імені В. Н. Каразіна, 2023
© Аршава О. О., уклад., 2023

Електронне навчальне видання комбінованого використання
Можна використовувати в локальному та мережному режимі

Аршава Олена Олександрівна

**МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ
ДО САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ З НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ
«ДИСКРЕТНА МАТЕМАТИКА»**

для здобувачів вищої освіти спеціальностей 122 «Комп'ютерні науки»,
123 «Комп'ютерна інженерія», 125 «Кібербезпека та захист інформації»,
174 «Автоматизація, комп'ютерно-інтегровані технології та робототехніка»
першого (бакалаврського) рівня вищої освіти

Коректор *О. В. Анцибора*
Комп'ютерне верстання *В. В. Савінкова*

Підписано до розміщення 17.06.2023. Гарнітура Times New Roman.
Ум. друк. арк. 2,71. Обсяг 1,576 Мб. Зам. № 97/23.

Видавець і виготовлювач
Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна,
61022, м. Харків, майдан Свободи, 4.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 3367 від 13.01.2009
Видавництво ХНУ імені В. Н. Каразіна

ЗМІСТ

Передмова	4
1. Тематичний план навчальної дисципліни	6
2. Завдання для самостійної роботи та питання для самоконтролю	7
3. Підготовка до поточного контролю	31
4. Підготовка до підсумкового контролю	42
5. Рекомендована література	44

ПЕРЕДМОВА

Навчальна дисципліна «Дискретна математика» є обов'язковим компонентом освітньо-професійних програм «Комп'ютерні науки», «Комп'ютерна інженерія», «Кібербезпека» та «Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології».

Метою викладання навчальної дисципліни «Дискретна математика» є:

1. ознайомити здобувачів вищої освіти з основами дискретної математики та її застосуваннями в комп'ютерних науках;
2. закласти теоретичний фундамент для вивчення дисциплін професійної спрямованості; навчити здобувачів глибоко аналізувати проблеми, що виникають під час автоматизації процесів обробки дискретної інформації;
3. прищепити навички природничого використання формальних методів дискретної математики, пов'язаних із розробкою та експлуатацією засобів обчислювальної техніки та програмного забезпечення;
4. ознайомити з широким спектром методів комп'ютерної дискретної математики;
5. навчити розуміти проблеми, що виникають під час синтезу пристроїв обробки дискретної інформації, при побудові алгоритмів та програм для таких пристроїв.

Предметом вивчення навчальної дисципліни є теоретичні засади математичного апарату, закони, що діють у сфері дискретних масових явищ, методи систематизації, опрацювання і аналізу дискретних даних: формування кількісних показників (теорія множин, комбінаторика), аналіз їх взаємозв'язку і розвитку (математична логіка, теорія графів).

Серед основних завдань вивчення дисципліни є вивчення основних принципів та інструментарію математичного апарату кількісного аналізу дискретних структур, який використовується під час розв'язання задач дискретного аналізу.

Навчальна дисципліна «Дискретна математика» забезпечує формування у здобувачів вищої освіти інтегральної, загальних та фахових компетентностей, таких, як:

здатність розв'язувати складні задачі та практичні проблеми у галузі комп'ютерних наук та інформаційних технологій у процесі навчання, що передбачає застосування теорій та методів і характеризується комплексністю та невизначеністю умов;

здатність до математичного формулювання та досліджування неперервних і дискретних математичних моделей, обґрунтування вибору методів і підходів для розв'язування теоретичних і прикладних задач у галузі комп'ютерних наук, аналізу та інтерпретування.

У результаті вивчення навчальної дисципліни «Дискретна математика» відповідно до освітньо-професійної програми здобувачі вищої освіти мають досягти наступних програмних результатів навчання:

застосовувати знання основних форм і законів абстрактно-логічного мислення, основ методології наукового пізнання, форм і методів вилучення, аналізу, обробки та синтезу інформації в предметній області комп'ютерних наук.

Однією з основних форм навчальних занять, що передбачено навчальним планом, є самостійна робота. Обсяг самостійної роботи дозволяє здобувачам організувати самоперевірку теоретичних знань і практичних навичок, здобутих на лекціях та практичних заняттях, підготуватися до поточного та підсумкового контролів та поглибити знання з певних розділів дискретної математики.

Методичні рекомендації призначаються для надання допомоги здобувачам вищої освіти під час організації самостійної роботи з навчальної дисципліни «Дискретна математика». Навчальне видання містить тематичний план навчальної дисципліни, завдання для самостійної роботи та питання для самоконтролю з кожної теми, варіанти білетів для підготовки до поточного й підсумкового контролів та приклади їх розв'язання. До навчального матеріалу додано список рекомендованої літератури, що значно полегшить опанування здобувачами основних розділів навчальної дисципліни.

1. ТЕМАТИЧНИЙ ПЛАН НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ

1 семестр

Розділ 1. Логіка. Булева алгебра. Теорія множин. Бінарні відношення та їх властивості

Тема 1. Математична логіка. Логіка висловлень (заперечення, кон'юнкція, диз'юнкція, імплікація, еквіваленція). Таблиця істинності. Предикати та квантори.

Тема 2. Істиннісна функція. Еквівалентні висловлення. Тавтології.

Тема 3. Алгебра логіки.

Тема 4. Булева алгебра. Досконалі нормальні форми.

Тема 5. Теорія множин. Операції над множинами. Діаграми Ейлера – Венна. Закони ідемпотентності та де Моргана. Властивості комутативності, асоціативності, дистрибутивності, тотожності та доповнення. Пріоритет операцій.

Тема 6. Відношення. Властивості відношень. Відношення еквівалентності. Відношення порядку.

Розділ 2. Арифметика. Теорія груп. Шифр RSA

Тема 7. Подільність НСД двох натуральних чисел. Алгоритм Евкліда. Китайська теорема про лишки.

Тема 8. Еквівалентність і кільце класів лишків. Дії в кільці класів лишків за модулем m . Функція Ейлера.

Тема 9. Представлення чисел у системі залишкових класів. Алгебраїчні порівняння з однією змінною.

Тема 10. Алгебраїчні операції. Властивості бінарних операцій. Нейтральний елемент. Симетричні елементи. Операція, обернена до заданої. Підстановки.

Тема 11. Група, підгрупа, класи суміжності, теорема Лагранжа. Групи симетрій. Дія групи на множині. Стабілізатори елемента множини, на якій діє група, і орбіта елемента. Зв'язок між кількістю елементів стабілізатора й кількістю елементів орбіти. Лема Бернсайда.

Тема 12. Група оборотних елементів кільця. Шифр RSA.

Тема 13. Поле. Системи лінійних алгебраїчних рівнянь над полем.

Тема 14. Лінійне кодування. Шифр одноразового блокнота. Регістр зсуву зі зворотним зв'язком.

2 семестр

Розділ 3. Комбінаторика. Формальний степеневий ряд. Рекурентні співвідношення

Тема 15. Комбінаторні обчислення для основних теоретико-множинних операцій. Формула включення-виключення. Розміщення, перестановки та комбінації.

Тема 16. Біном Ньютона та поліномна формула. Урнова модель. Комбінації з повтореннями.

Тема 17. Числа Стірлінга першого роду.

Тема 18. Числа Стірлінга другого роду.

Тема 19. Кільце формальних степеневих рядів – генератриса.

Тема 20. Рекурентні співвідношення. Числа Фібоначчі. Числа Люка.

Розділ 4. Теорія графів

Тема 21. Поняття графа. Способи задання графів. Підграфи. Ізоморфізм графів. Операції для графів.

Тема 22. Графи та бінарні відношення. Степені вершин графа. Шлях у графі.

Тема 23. Зв'язність графів. Перевірка зв'язності графів.

Тема 24. Дерева. Кістякове дерево. Побудова мінімального кістякового дерева. Код Прюфера.

Тема 25. Плоскі та планарні графи. Розфарбування графів.

Тема 26. Обходи графів. Ейлеровий цикл. Гамільтонів цикл.

Тема 27. Орієнтовані графи.

2. ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ ТА ПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

Теми 1–4. Логіка. Булева алгебра

Питання для самоконтролю

1. Яка наука називається логікою? Опишіть предмет математичної логіки.
2. Що називають висловленням? Навести приклади та надати характеристики наведеним прикладам.
3. Що називається універсальною множиною?
4. Яке висловлення називають тотожно істинним, а яке – тотожно хибним? Навести приклади.
5. Що називають логічною операцією?
6. Дайте означення складних висловлень (заперечення, кон'юнкції, диз'юнкції, імплікації та еквівалентності).
7. Запишіть таблицю істинності для заперечення, кон'юнкції, диз'юнкції, імплікації та еквівалентності.
8. Що називають предикатом? Навести приклад.
9. Дайте означення квантора існування та квантора загальності. Навести приклади побудови математичного твердження за допомогою кванторів.
10. Що називають істиннісною функцією?
11. Які висловлення називають логічно еквівалентними?
12. Дайте означення тавтології та суперечності. Навести приклади. Яка формула називається нейтральною формулою?
13. Запишіть основні тавтології імплікації, еквіваленції, для виключення зв'язувань.
14. Що називають алгеброю логіки?
15. Що називається булевою функцією? Дайте означення одиничного та нульового наборів функції.
16. Що таке область визначення логічної функції? Яка змінна логічної функції називається несуттєвою (фіктивною)?

17. У якому випадку дві логічні функції називають рівними?
18. Навести приклади логічних функцій двох змінних.
19. Сформулюйте закони логіки Буля.
20. Яка система функцій називається функціонально повною (базисом)?
21. Дайте означення булевої алгебри логічних функцій.
22. Надайте означення основних класів булевих функцій (функція, що зберігає нуль; функція, що зберігає одиницю; самодвоїста функція; монотонна функція; лінійна функція).
23. Що називають елементарною диз'юнкцією, а що – елементарною кон'юнкцією?
24. Дайте означення повної елементарної диз'юнкції (кон'юнкції).
25. Що називається диз'юнктивною нормальною формою (ДНФ) та кон'юнктивною нормальною формою (КНФ)?
26. Яка формула називається досконалою кон'юнктивною нормальною формулою (ДКНФ), а яка – досконалою диз'юнктивною нормальною формулою (ДДНФ)? Навести приклади.
27. Сформулюйте теорему про існування досконалої кон'юнктивної нормальної формули та досконалої диз'юнктивної нормальної формули для булевої функції.

Завдання для самостійної роботи

Математична логіка. Логіка висловлень (заперечення, кон'юнкція, диз'юнкція, імплікація, еквіваленція). Таблиця істинності. Предикати та квантори

1. Визначити істинність чи хибність складеного висловлення, використавши його логічну структуру й виходячи з відомих значень істинності елементарних висловлень, з яких воно складається:

- а) число 888 кратне 8, але не кратне 11;
- б) число 54 кратне 2 або 8;
- в) принаймні одне із чисел 11, 23 або 36 парне;
- г) $-3 > -4$ та $(-1/3) > (-1/4)$;
- д) $-3 > -4$, але $(-3) \cdot 2 < (-4) \cdot 2$;
- е) якщо $2 < 5$, то $32 < 62$;
- є) якщо число 36 кратне 6, то число 36 кратне 3;
- ж) якщо число 15 кратне 6, то число 15 кратне 3;
- з) якщо число 15 кратне 3, то число 15 кратне 6;
- и) якщо $3 < 5$ та $5 < 2$, то $3 < 2$;
- і) 72 кратне 48 тоді й лише тоді, коли 72 кратне 8 та 72 кратне 6;
- ї) неправильно, що виконується хоча б одна з нерівностей $2 < 4$ чи $4 < 2$;
- й) 144 кратне 24 тоді й лише тоді, коли 144 кратне 8 та 144 кратне 3.

2. Нехай задано елементарні висловлення:

- a – 7 – ціле число;
- b – 6 – парне число;
- c – 12 – просте число;
- d – число 18 кратне 3.

Для наведених нижче формул сформулювати словами складене висловлення, визначити його істинність чи хибність:

- а) $a \wedge b$;
- б) $a \vee b$;
- в) $a \rightarrow \neg b$;
- г) $(a \vee c) \rightarrow b$;
- д) $(a \vee (b \wedge d)) \rightarrow \neg c$;
- е) $(\neg a \wedge c) \rightarrow d$;
- є) $(\neg a \vee \neg d) \leftrightarrow b$;
- ж) $(\neg a \rightarrow \neg c) \wedge b$.

3. Скласти таблицю істинності для формул:

- а) $\bar{A} \wedge B \rightarrow A \vee B$;
- б) $A \rightarrow B \leftrightarrow \bar{A} \vee B$;
- в) $A \rightarrow (B \vee C)$;
- г) $A \rightarrow (A \rightarrow B)$;
- д) $(A \vee B \rightarrow \bar{C}) \rightarrow A$.

4. Скласти таблицю істинності для формули алгебри висловлень:

- а) $(a \rightarrow \neg (b \wedge c)) \rightarrow (c \rightarrow \neg a)$;
- б) $((\neg a \vee b) \leftrightarrow (a \wedge \neg c)) \vee (a \rightarrow b)$;
- в) $((a \rightarrow b) \leftrightarrow (b \rightarrow \neg c)) \rightarrow (c \wedge a)$;
- г) $(a \rightarrow b) \rightarrow ((b \rightarrow c) \rightarrow (a \rightarrow c))$.

5. Визначити, чи є еквівалентними наступні предикати:

- а) $x^2 = 4$ і $x = -2$;
- б) $x^3 = x^2$ і $x = 0$?

6. Записати за допомогою кванторів наведені нижче речення:

- а) яким би не було число x , $x \cdot 1 = x$;
- б) існує таке число z , що $z - 6 = 10$;
- в) існує таке число y , що яким би не було число z , виконується рівність $y + z = 15$;
- г) будь-яке дійсне число є або додатним, або від'ємним, або дорівнює нулю.

Істиннісна функція. Еквівалентні висловлення. Тавтології

1. Установити еквівалентність формул за допомогою таблиць істинності:

- а) $(A \vee B) \wedge (\bar{A} \vee B)$ та A ;
- б) $(\bar{A} \wedge B) \vee (A \vee \bar{B})$ та A ;
- в) $(A \vee B) \wedge (\bar{A} \vee B)$ та B ;
- г) $\bar{A} \wedge B \vee \bar{C} \wedge B$ та $B \wedge \overline{A \wedge C}$;
- д) $\bar{A} \wedge (A \vee B)$ та $\bar{A} \wedge B$;
- е) $\bar{A} \vee A \wedge B$ та $\bar{A} \vee B$.

2. Довести, що висловлення є тавтологією:

- а) $A \wedge (A \rightarrow B) \rightarrow B$;
- б) $\neg B \wedge (A \rightarrow B) \rightarrow \neg A$;
- в) $\neg A \wedge (A \vee B) \rightarrow B$;
- г) $A \rightarrow (B \rightarrow A \wedge B)$;
- д) $A \wedge B \rightarrow A$;
- е) $A \rightarrow A \vee B$;
- є) $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C)$;
- ж) $(A \wedge B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow (B \rightarrow C))$;
- з) $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow (A \wedge B \rightarrow C)$;
- и) $(A \rightarrow B \wedge \neg B) \rightarrow \neg A$;
- і) $(A \rightarrow B) \rightarrow (A \vee C \rightarrow B \vee C)$;
- ї) $(A \rightarrow B) \rightarrow (A \wedge C \rightarrow B \wedge C)$;
- й) $(A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C))$;
- к) $(A \leftrightarrow B) \wedge (B \leftrightarrow C) \rightarrow (A \leftrightarrow C)$.
- л) $\neg \neg A \leftrightarrow A$;
- м) $(A \rightarrow B) \wedge (C \rightarrow B) \leftrightarrow (A \vee C \rightarrow B)$;
- н) $(A \rightarrow B) \wedge (A \rightarrow C) \leftrightarrow (A \rightarrow B \wedge C)$;
- о) $(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow (B \leftrightarrow A)$;
- п) $(A \rightarrow B) \leftrightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$;
- р) $A \vee B \leftrightarrow B \vee A$; $A \wedge B \leftrightarrow B \wedge A$;
- с) $(A \vee B) \vee C \leftrightarrow A \vee (B \vee C)$; $(A \wedge B) \wedge C \leftrightarrow A \wedge (B \wedge C)$;
- т) $A \vee (B \wedge C) \leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$; $A \wedge (B \vee C) \leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$;
- у) $A \vee A \leftrightarrow A$; $A \wedge A \leftrightarrow A$;
- ф) $\neg (A \vee B) \leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$; $\neg (A \wedge B) \leftrightarrow \neg A \vee \neg B$.
- х) $A \rightarrow B \leftrightarrow \neg A \vee B$;
- ц) $A \rightarrow B \leftrightarrow \neg (A \wedge \neg B)$;
- ч) $A \vee B \leftrightarrow \neg A \rightarrow B$;
- ш) $(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$;
- щ) $A \wedge B \leftrightarrow \neg (A \rightarrow \neg B)$;
- ю) $A \wedge B \leftrightarrow \neg (\neg A \vee \neg B)$;
- я) $A \vee B \leftrightarrow \neg (\neg A \wedge \neg B)$.

3. [3, 27] Довести, що наведена формула алгебри висловлень є суперечністю:

$$\neg ((a \rightarrow b) \rightarrow ((a \wedge \neg b) \rightarrow b)).$$

4. [3, 27] Довести, що формула $(a \rightarrow b) \wedge (b \rightarrow c) \rightarrow (a \rightarrow (b \wedge c))$ є тавтологією. Перевірити, чи буде тавтологією обернена імплікація:

$$(a \rightarrow (b \wedge c)) \rightarrow ((a \rightarrow b) \wedge (b \rightarrow c))?$$

5. [3, 27] Показати, що формули алгебри висловлень, які наведено нижче, є виконуваними:

- а) $(a \rightarrow (b \rightarrow \neg c)) \wedge (a \rightarrow b) \vee (c \leftrightarrow \neg b)$;
 б) $(a \rightarrow b) \wedge (a \rightarrow \neg b) \wedge (b \rightarrow c) \wedge (b \rightarrow \neg c) \wedge (c \rightarrow a) \wedge (c \rightarrow \neg a)$;
 в) $(\neg a \vee b) \vee (\neg b \vee c) \vee (a \rightarrow \neg b)$.

6. [3, 28] Визначити, чи є формула алгебри висловлень

$$((a \vee b) \rightarrow c) \rightarrow ((a \rightarrow c) \vee (b \rightarrow c))$$

тавтологією, суперечністю або нейтральною?

Алгебра логіки

1. [3, 25] Занумерувати послідовність виконання операцій у формулі з урахуванням їхніх пріоритетів:

- а) $(a \rightarrow \neg b) \vee (\neg a \leftrightarrow c) \wedge b \vee (c \rightarrow \neg (a \leftrightarrow b))$;
 б) $(a \rightarrow \neg ((b \vee c) \wedge \neg a)) \rightarrow (\neg c \vee b) \wedge a \leftrightarrow \neg (a \rightarrow \neg b)$.

2. [3, 25] Знайти значення істинності формули:

а) $(a \leftrightarrow b) \wedge ((\neg c \rightarrow b) \vee (\neg a \wedge c) \vee (a \wedge \neg b))$ при $a = 0, b = 1, c = 0$;

б) $((b \rightarrow a) \wedge (\neg c \vee (a \leftrightarrow \neg b))) \rightarrow (a \wedge (d \vee \neg b))$ при $a = 1, b = 1, c = 0, d = 1$;

в) $\neg a \wedge (a \leftrightarrow c) \wedge (\neg b \vee (\neg c \rightarrow a))$ при $a = 1, b = 0, c = 1$.

3. [3, 29] Розставити дужки у формулах:

- а) $a \wedge b \rightarrow c \rightarrow (a \rightarrow c \wedge (b \rightarrow c))$;
 б) $a \wedge c \vee b \wedge d \rightarrow (a \vee b) \wedge c \vee d$;
 в) $a \wedge b \vee c \wedge d \rightarrow a \vee b \wedge c \vee d$;
 г) $(a \leftrightarrow b) \rightarrow (c \leftrightarrow d) \rightarrow a \vee c \leftrightarrow b \vee d$;
 д) $a \rightarrow b \wedge a \wedge b \leftrightarrow (a \rightarrow b) \wedge a$;
 е) $\neg a \vee b \wedge \neg b \vee c \wedge a \rightarrow \neg c$.

4. [3, 25] Побудувати дерева синтаксичного аналізу для формул із попереднього завдання 3.

Булева алгебра. Досконалі нормальні форми

1. Для заданих формул логіки висловлень зобразити дерево синтаксичного аналізу; побудувати таблицю істинності; записати ДКНФ та ДДНФ, що рівносильні формулам:

- а) $A = (x \vee y) \wedge (\neg z \rightarrow x)$;
 б) $A = ((x \wedge y) \rightarrow z) \leftrightarrow ((x \rightarrow y) \rightarrow z)$;
 в) $A = (x \rightarrow \neg(y \wedge z)) \rightarrow (z \rightarrow \neg x)$.

Тема 5. Теорія множин. Операції над множинами.

Діаграми Ейлера – Венна. Закони ідемпотентності та де Моргана.

Властивості комутативності, асоціативності, дистрибутивності, тотожності та доповнення.

Пріоритет операцій

Питання для самоконтролю

1. Що називають множиною? Які існують способи завдання множин? Як визначити потужність скінченної множини?
2. Що називають підмножиною заданої множини?

3. Дайте означення булеану множини. Як визначити потужність булеану?
4. Визначити операції над множинами (об'єднання, перетинання, різниця, симетрична різниця, доповнення).
5. Які існують графічні ілюстрації відносин між множинами? Що таке діаграми Ейлера – Венна?
6. Зобразити діаграми Ейлера – Венна для операцій над множинами.
7. Записати закони ідемпотентності та де Моргана для операцій над множинами.

Завдання для самостійної роботи

1. Із яких елементів складається множина B , якщо $A = \{1, 2, 3\}$?
 (а) $B = \{y \mid y = x + z, x, z \in A\}$; (б) $B = \{y \mid x = y + z, x, z \in A\}$;
 (в) $B = \{y \mid y = xz, x, z \in A\}$.
2. Які з наведених співвідношень є правильними?
 (а) $2 \subseteq \{1, 2, 3\}$; (б) $\{2\} \subseteq \{1, 2, 3\}$; (в) $\{1, 1, 2, 3\} \subseteq \{1, 2, 3\}$;
 (г) $\{1\} \subseteq \{\{1\}, \{1, 2, 3\}\}$; (д) $\{1, 2, 3\} \subseteq \{\{1\}, \{1, 2\}, \{3\}\}$; (е) $\emptyset \subseteq \{1, 2, 3\}$.
3. Для заданої множини $A = \{x \mid x \in \mathbb{N}, 3^x \leq 81\}$ виписати всі підмножини.
4. Знайти $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $A \Delta B$, $B \setminus A$, якщо $A = [2, 5]$, $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.
5. Знайти $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $A \Delta B$, $B \setminus A$, якщо
 $A = \{x \in \mathbb{N}, x \leq 30, x \div 4\}$, $B = \{x \in \mathbb{N}, x \leq 40, x \div 6\}$.
6. Використовуючи діаграму Ейлера – Венна, заштрихуйте ті її частини, що зображують множину
 а) $A \cup (B \setminus A) \cup \bar{B}$;
 б) $(A \cup \bar{B}) \cap (\bar{C} \setminus B)$.
7. Чи є правильною тотожність $(A \cap \bar{B} \cup C) \cap (A \cup B) \cap \bar{C} = (A \cap B) \setminus C$?

Тема 6. Відношення. Властивості відношень.

Відношення еквівалентності. Відношення порядку

Питання для самоконтролю

1. Що називають декартовим добутком двох множин? Як це поняття можна узагальнити для довільної скінченної сукупності множин?
2. Що таке кортеж? Як визначити його довжину?
3. Дайте означення бінарного відношення між множинами. Укажіть способи його завдання.
4. Сформулюйте основні властивості бінарного відношення.
5. Яке бінарне відношення називається оберненим до заданого?
6. Дайте означення функції, її області визначення та області значень.
7. Яка функція називається ін'єктивною, а яка – сюр'єктивною? Що таке бієкція? Навести приклади.
8. Яке відношення R на множині M називають відношенням еквівалентності? Дайте розширення означення. Наведіть приклад.
9. Яку сукупність множин називають розбиттям заданої множини? Що називають класами розбиття?
10. Опишіть процедуру факторизації множини за заданим відношенням еквівалентності. Дайте означення фактор-множини, класів еквівалентності за відношенням еквівалентності, індексу розбиття.

11. Яке відношення R на множині M називають відношенням часткового порядку? В якому випадку множину M називають частково впорядкованою?

12. Дайте означення відношення лінійного порядку, відношення строгого порядку на множині M .

13. Який елемент множини M називають верхньою гранню підмножини A ? Який елемент називають найбільшим елементом множини M ? Сформулюйте аналогічні означення для нижньої грані підмножини A заданої множини M та найменшого елемента множини M .

14. Який елемент називається максимальним (мінімальним) у множині M ?

Завдання для самостійної роботи

1. Для заданих множин $A = \{1, 2\}$ і $B = \{1, 3, 4\}$ визначити:

а) $A \times B$; б) $B \times A$; в) B^2 ; г) $(B \setminus A) \times A$; д) $A \times B \times A$; е) $A \times (A \cup B)$.

2. На множині $M = \{1, 2, 3, 4\}$ задано відношення:

$R_1 = \{(1, 1), (1, 3), (2, 2), (2, 4), (3, 1), (3, 3), (4, 2), (4, 4)\}$;

$R_2 = \{(1, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 1), (3, 3), (4, 1), (4, 4)\}$;

$R_3 = \{(1, 3), (1, 4), (2, 1), (1, 2), (3, 1), (3, 3), (4, 1)\}$;

$R_4 = \{(1, 1), (1, 2), (1, 4), (2, 2), (2, 4), (3, 3), (3, 4), (4, 2), (4, 3), (4, 4)\}$;

$R_5 = \{(1, 2), (1, 3), (2, 3), (2, 4), (4, 1), (4, 3)\}$.

Побудувати графіки, орграфи й матриці заданих відношень.

3. Нехай задано дві множини $A = \{1, 2, 3\}$ і $B = \{1, 2, 3, 4\}$ і відношення R_1, R_2 такі, що:

$R_1 = \{(1, 1), (1, 3), (2, 3), (3, 4)\}$;

$R_2 = \{(1, 2), (2, 4), (3, 1), (3, 3)\}$.

Потрібно визначити:

а) $R_1 \cup R_2$; б) $R_1 \cap R_2$; в) R_1^{-1} .

4. Які властивості мають відношення, що задано на декартовому добутку $A \times A$, якщо множина $A = \{1, 2, 3, 4\}$:

а) $\{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$;

б) $\{(1, 2), (2, 1), (3, 2), (2, 4), (4, 2)\}$;

в) $\{(3, 2), (2, 3)\}$;

г) $\{(1, 3), (3, 2), (2, 3), (3, 4)\}$?

5. Із наведених підмножин множини $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ вказати ті, які можуть бути розбиттями множини A на класи еквівалентності:

а) $\{1, 2, 3\}, \{1, 2, 6, 7\}, \{4, 5\}$;

б) $\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{4, 5\}, \{6, 7\}$;

в) $\{1, 4\}, \{3, 5\}, \{6, 7\}$;

г) $\{1, 2\}, \{4\}, \{3, 5\}, \{6, 7\}$.

6. Задана множина $M = \{3, 5, 6, 9, 15, 24, 30, 45\}$ і відношення $R = \{(a, b): a \text{ ділить } b\}$. Перевірити, чи є відношення R на множині M відношенням часткового порядку? Визначити верхню та нижню грані підмножини $A = \{3, 6, 15, 24, 30\}$, а також мінімальний та максимальний елементи.

Тема 7. Подільність. НСД двох натуральних чисел. Алгоритм Евкліда. Китайська теорема про лишки

Питання для самоконтролю

1. Що називають подільність натуральних чисел? Яке число називають простим, а яке – складеним?
2. Дайте означення арифметичної операції ділення з лишком. Наведіть приклади.
3. Сформулюйте основну теорему арифметики.
4. Яке подання числа n називають канонічним розкладом на прості співмножники?
5. Що називають найбільшим спільним дільником (НСД) двох натуральних чисел? Укажіть спосіб визначення НСД, якщо числа подані канонічним розкладом на прості співмножники.
6. Що називають найменшим спільним кратним (НСК) двох натуральних чисел? Запишіть формулу для визначення НСК методом розвинення чисел на прості множники.
7. Сформулюйте алгоритм Евкліда знаходження НСД.
8. Яке рівняння називають лінійним діофантовим рівнянням? Сформулюйте теорему про розв'язність у цілих числах діофантового рівняння.
9. Які два цілі числа називають порівнянними за модулем числа m ?
10. Сформулюйте основні властивості відношення порівняння за модулем m .
11. Сформулюйте Китайську теорему про лишки.

Завдання для самостійної роботи

1. Поділити з лишком число a на число b :
1) $a = 17, b = 5$; 2) $a = 6, b = 20$; 3) $a = 120, b = 25$; 4) $a = 127, b = 32$.
2. Розкласти число n в добуток простих:
1) $n = 69$; 2) $n = 103$; 3) $n = 75$; 4) $n = 824$; 5) $n = 2025$.
3. Знайти НСД(n, m) і НСК(n, m):
1) $n = 28, m = 64$; 2) $n = 2 \cdot 5^4, m = 3 \cdot 7^3$; 3) $n = 2^3 \cdot 13, m = 3^2 \cdot 11$.
4. Знайти числа a, b , якщо відомі НСК(a, b) і НСД(a, b):
1) НСК(a, b) = $7^3 \cdot 3^2$, НСД(a, b) = 7^3 ;
2) НСК(a, b) = $11^2 \cdot 5^3 \cdot 3$, НСД(a, b) = 11^2 .
5. Знайти НСД (104, 68), використовуючи алгоритм Евкліда.
6. Знайти всі розв'язки діофантового рівняння:
1) $3x + 4y = 13$, 2) $10x - 11y = 15$, 3) $5x - 13y = 12$.

Тема 8. Еквівалентність і кільце класів лишків.

Дії в кільці класів лишків за модулем m . Функція Ейлера

Питання для самоконтролю

1. Які два цілі числа називають порівнянними за модулем числа m ?
2. Дайте означення операцій додавання та множення на класах лишків за модулем m .
3. Що називають кільцем класів лишків за модулем m ?
4. Опишіть дії в кільці класів лишків за модулем m : додавання, віднімання, множення та ділення. Навести приклади.
5. Надайте опис розширеного алгоритму Евкліда для обчислення мультиплікативного оберненого до числа b за модулем m .
6. Дайте означення операції піднесення в степінь на класах лишків за модулем m . Навести приклад.

7. Дайте означення функції Ейлера. Запишіть формулу для її обчислення.
8. Сформулюйте властивості функції Ейлера.

Завдання для самостійної роботи

1. Додати:
 - а) за модулем $m=14$ числа $a=5$ і $b=8$;
 - б) за модулем $m=17$ числа $a=25$ і $b=11$.
2. Відняти:
 - а) за модулем $m=11$ числа $a=35$ і $b=18$;
 - б) за модулем $m=17$ числа $a=9$ і $b=11$.
3. Помножити за модулем $m=14$ числа $a=18$ і $b=7$.
4. Знайти 67^{-1} в кільці $\mathbb{Z}_{691}$.
5. Нехай $a=8$, $n=5$, $m=15$. Обчислити $c \equiv 8^5 \pmod{15}$.
6. Знайти елемент x кільця класів лишків за модулем 28, якщо $\log_7 x = 4$.
7. Обчислити функцію Ейлера $\varphi(n)$ – кількість натуральних чисел, що менше від n , і взаємно прості з n :
 - 1) $n=230$; 2) $n=720$; 3) $n=100$; 4) $n=9 \cdot 1024$; 5) $n=3^2 \cdot 2^7 \cdot 7^3$.

Тема 9. Представлення чисел у системі залишкових класів.

Алгебраїчні порівняння з однією змінною

Питання для самоконтролю

1. Опишіть процедуру представлення чисел у системі залишкових класів (СЗК). Наведіть приклад представлення числа в СЗК.
2. Яким чином визначаються операції додавання, віднімання та множення в системі залишкових класів? Навести приклади виконання вказаних операцій.
3. Що називають алгебраїчним порівнянням із однією змінною?
4. Яке алгебраїчне порівняння називають лінійним?
5. За яких умов лінійне порівняння із однією змінною має єдиний розв'язок, має скінченну кількість розв'язків та не має розв'язків?
6. Укажіть способи розв'язання лінійних порівнянь із однією змінною.

Завдання для самостійної роботи

1. Представити у СЗК число $n=83$.
2. Додати числа $A=37$ і $B=48$, використовуючи модулі $p_1=2$; $p_2=3$; $p_3=5$; $p_4=7$.
3. Відняти від числа $A=67$ число $B=13$, використовуючи модулі $p_1=2$; $p_2=3$; $p_3=5$; $p_4=7$.
4. Помножити число $A=12$ на число $B=31$, використовуючи модулі $p_1=2$; $p_2=3$; $p_3=5$; $p_4=7$; $p_5=11$.
5. Розв'язати конгруенції:
 - 1) $6x \equiv 26 \pmod{22}$; 3) $8x \equiv 15 \pmod{29}$;
 - 2) $7x \equiv 65 \pmod{11}$; 4) $37x \equiv 42 \pmod{79}$.

Тема 10. Алгебраїчні операції. Властивості бінарних операцій.

Нейтральний елемент. Симетричні елементи.

Операція, обернена до заданої. Підстановки

Питання для самоконтролю

1. Що називають бінарною алгебраїчною операцією, заданою на множині M ? Яку композицію елементів a і b називають сумою та добутком?
2. Що називають внутрішнім та зовнішнім законами композиції?
3. Сформулюйте властивості бінарних операцій.
4. Який елемент називають нейтральним елементом відносно заданої операції? Дайте означення лівостороннього та правостороннього нейтральних елементів відносно заданої операції.
5. Навести приклади нейтрального елемента відносно операції додавання та множення.
6. Який елемент a' множини A називають симетричним елементу $a \in A$ відносно заданої операції? Дайте означення протилежного та оберненого елементів.
7. Яка операція називається оберненою до заданої? Навести приклад оборотних операцій.
8. Що називають підстановкою n -ї степені? Яка підстановка називається одиничною (тотожною)?
9. Дайте означення добутку підстановок n -ї степені σ_1 і σ_2 .
10. Яка підстановка називається оберненою до підстановки σ ?
11. Що називають сигнатурою підстановки σ ? Сформулюйте основні властивості сигнатури підстановки.
12. Яка підстановка є парною (непарною)? Як визначити кількість парних та непарних підстановок?

Завдання для самостійної роботи

1. Навести приклади асоціативних бінарних операцій.
2. Навести приклади комутативних бінарних операцій.
3. У класі лишків за модулем 6 визначити нейтральні та симетричні елементи відносно операцій додавання та множення.
4. Знайти добуток підстановок
$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{і} \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$
5. Знайти підстановку, обернену до підстановки
$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 7 & 3 & 1 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$
6. Визначити парність підстановки $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}.$

Тема 11. Група, підгрупа, класи суміжності, теорема Лагранжа.

Групи симетрій. Дія групи на множині. Стабілізатори елемента множини, на якій діє група, і орбіта елемента. Зв'язок між кількістю елементів стабілізатора й кількістю елементів орбіти. Лема Бернсайда

Питання для самоконтролю

1. Дайте означення такої алгебраїчної структури, як група.
2. Яка група називається комутативною (абелевою)?
3. Яка група називається адитивною, а яка – мультиплікативною? Навести приклади адитивної та мультиплікативної груп.

4. Сформулюйте властивості груп.
5. Що називається підгрупою даної групи? Навести приклад підгрупи.
6. Сформулювати критерій підгрупи.
7. Що називають лівостороннім (правостороннім) класом суміжності групи G за підгрупою H для елемента $g \in G$?
8. Сформулюйте означення індекса підгрупи.
- 9 Записати розклад групи G за підгрупою H для лівосторонніх (правосторонніх) класів суміжності.
10. Що називається порядком групи? Сформулюйте теорему Лагранжа, яка встановлює зв'язок між порядком групи та її підгрупи.
11. Дайте означення ядра дії групи G на множині M .
12. Сформулюйте означення орбіти групи G .
13. Що називають стабілізатором точки?
14. Сформулюйте лему Бернсайда, яка встановлює зв'язок між кількістю елементів стабілізатора й кількістю елементів орбіти.

Завдання для самостійної роботи

1. [2, 24] Перевірте виконання аксіом групи в множині класів лишків за модулем m з операцією додавання та множині S_n всіх підстановок n -го степеня з операцією множення.
2. [2, 24] Покажіть, що в довільній групі $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$. Більш того, для довільних елементів $a_1, a_2, \dots, a_n$ групи має місце рівність

$$(a_1 a_2 \dots a_{n-1} a_n)^{-1} = a_n^{-1} a_{n-1}^{-1} \dots a_2^{-1} a_1^{-1}.$$
3. [2, 25] Доведіть, що в означенні групи досить вимагати існування лише правосторонніх (або лише лівосторонніх) нейтрального і оберненого елементів.
4. [2, 42] Доведіть, що для кожного дільника k числа 24 група S_4 містить підгрупу порядку k .
5. [2, 84] Довести наступне твердження: нехай група G діє на множині M . Тоді існує взаємно однозначна відповідність між елементами орбіти $\mathcal{O}(m)$ і класами суміжності групи G за підгрупою $St(m)$. Зокрема, $|\mathcal{O}(m)| = |G:St(m)|$, тобто довжина орбіти точки дорівнює індексу її стабілізатора.
6. [2, 84] Спираючись на попереднє твердження, довести, що:
 - а) потужність $|\mathcal{O}(m)|$ орбіти точки m ділить порядок $|G|$ групи G ;
 - б) стабілізатори точок, що належать одній орбіті, мають однаковий порядок.
7. [2, 86] Використовуючи лему Бернсайда, довести, що кожна підстановка з симетричної групи S_n має в середньому рівно $1/k$ циклів довжини k ($k = 1, 2, \dots, n$).

Тема 12. Група оборотних елементів кільця. Шифр RSA

Питання для самоконтролю

1. Яке число називається оберненим до числа a в кільці $\mathbb{Z}_n$ класів лишків за модулем n ? Що таке оборотні числа?

2. Сформулюйте умову існування оберненого числа в кільці $\mathbb{Z}_n$ класів лишків за модулем n .
3. Опишіть етапи роботи алгоритму *RSA*.
4. Які дії потрібно виконати для того, щоб згенерувати ключі шифрування?
5. Яким чином здійснюється шифрування та дешифрування за алгоритмом *RSA*?

Завдання для самостійної роботи

1. Зашифрувати повідомлення $m = 11$ шифром *RSA* з відкритим ключем $n = 91, e = 5$.
2. Згенерувати відкритий та секретний ключі в алгоритмі шифрування *RSA*, обравши числа p і q із першої сотні. Зашифрувати повідомлення, що складається з ініціалів ПІБ (взяти власні прізвище, ім'я та по батькові).
3. Використовуючи алгоритм *RSA*, передати повідомлення: «*Karazin university*». Для шифрування використовувати числа послідовності Фібоначчі [1, с. 353; 4].

Теми 13–14. Поле. Системи лінійних алгебраїчних рівнянь над полем. Лінійне кодування. Шифр одноразового блокнота.

Регістр зсуву зі зворотним зв'язком

Питання для самоконтролю

1. Яка алгебраїчна структура називається полем? Записати розширене означення поля.
2. Яка підмножина F називається підполем поля L ?
3. Дайте означення лінійного алгебраїчного рівняння над полем. Що називають системою лінійних алгебраїчних рівнянь над полем?
4. Записати систему лінійних алгебраїчних рівнянь над полем у матричному вигляді. Надати означення основної та розширеної матриць системи.
5. Яка система лінійних алгебраїчних рівнянь над полем називається однорідною, а яка – неоднорідною?
6. Записати множину векторів, що є розв'язками неоднорідної системи, через підпростір розв'язків відповідної однорідної системи та один із розв'язків неоднорідної системи.
7. Опишіть схему розв'язання системи алгебраїчних рівнянь за методом Гауса.
8. Сформулюйте задачу лінійного кодування. Яка матриця називається породжуючою матрицею коду, а яка – перевіркою матрицею коду?
9. У чому полягає метод шифрування Вернама (схема одноразових блокнотів)? Опишіть етапи роботи алгоритму. Які властивості повинен мати ключ шифрування?
10. Яку послідовність називають регістром зсуву зі зворотним зв'язком?

Завдання для самостійної роботи

1. Навести приклади полів та перевірити для них виконання аксіом полів.
2. Довести, що множина чисел вигляду $a + \sqrt{2} \cdot b$, де $a, b \in \mathbb{Q}$, є полем.
3. На множині трьох цілих чисел $A = \{0, 1, 2\}$ визначено дві операції: додавання за модулем 3 та множення за модулем 3. Довести, що множина A є полем відносно введених операцій.

4. Використовуючи шифр Вернама (схема одноразових блокнотів), передати інформаційні послідовності:

а) $m = 1001101101010$;

б) $m = 0011000111100$.

5. Задана функція $f = 2x_1 + 3x_3$ та випадкова послідовність:

$$b_0 = 1, b_1 = 1, b_2 = 1, b_3 = 1, b_4 = 0.$$

Використовуючи реєстр зсуву зі зворотним зв'язком, створити послідовність довжини 9.

Теми 15–16. Комбінаторика

Питання для самоконтролю

1. Що є предметом вивчення комбінаторики?
2. Записати формулу включення-виключення.
3. Сформулювати правила додавання та множення.
4. У чому полягає метод математичної індукції?
5. Що називають розміщеннями з r різних елементів по k ? Навести приклад.
6. Записати формули для обчислення числа розміщень із r різних елементів по k без повторень та з повтореннями.
7. Які сполуки називають перестановками? Навести приклад.
8. Записати формули для обчислення числа перестановок з r різних елементів без повторень та з повтореннями.
9. Які сполуки називають комбінаціями? Навести приклад.
10. Записати формулу для обчислення числа комбінацій без повторень з r різних елементів по k .
11. Записати формулу бінома Ньютона. Сформулювати та довести основні біноміальні тотожності.
12. Що називають трикутником Паскаля? Яким чином можна його побудувати?
13. Який вигляд має поліномна формула?
14. Описати урнову модель. Навести приклад задач, розв'язання яких здійснюється за допомогою урнкової моделі.
15. Записати формулу для обчислення числа комбінацій із r різних елементів по k з повтореннями.

Завдання для самостійної роботи

Комбінаторні обчислення для основних теоретико-множинних операцій. Формула включення-виключення. Розміщення, перестановки та комбінації

1. [3, 145] Нехай M – скінченна множина і $A, B \subseteq M$. Розташуйте у порядку неспадання такі величини:

а) $|B|, |A \cup B|, |\emptyset|, |A \cap B|, |M|$;

б) $|A \setminus B|, |A| + |B|, |A \Delta B|, |\emptyset|, |A \cup B|$.

2. [3, 145] Довести нерівності:

а) $|A \cup B| \leq |A| + |B|$;

д) $|A \Delta B| \leq |A \cup B|$;

б) $|A \setminus B| \leq |A|$;

е) $|A| < |\beta(A)|$;

в) $|A \Delta B| \leq |A| + |B|$;

є) $|A \cap B| \leq |A|$;

г) $|A \setminus B| \geq |A| - |B|$;

ж) $|A \cap B| \leq |A \cup B|$.

3. У групі 27 студентів. Із них 16 відвідують семінар із дискретної математики, 12 – семінар із вищої математики, а 7 студентів не відвідують жодного семінару. Визначити:

а) Скільки студентів відвідують семінари з дискретної та вищої математики?

б) Скільки студентів відвідують лише семінар із дискретної математики?

4. Якою може бути кількість способів розміщення п'яти осіб у черзі до каси?

5. На вершину гори веде сім доріг. Скількома способами турист може піднятися на гору та спуститися з неї? Дайте відповідь на те саме питання, якщо піднімання та спускання здійснюються різними шляхами.

6. Скількома способами із 30 студентів можна обрати делегацію, яка б складалася з трьох студентів?

7. Студенту необхідно скласти п'ять екзаменів протягом 12 днів. Скількома способами можна скласти розклад екзаменів?

8. Енциклопедія складається з восьми томів. Скількома способами її можна поставити на полиці навмання, тобто так, щоб томи не були розташовані один за одним за порядком їх номерів?

9. Скільки різних складів хокейної команди можна утворити з восьми нападаючих, п'яти захисників і 2 воротарів, якщо до складу команди має ввійти три нападаючі, два захисники і один воротар?

10. У просторі задано сім точок, жодні чотири з яких не лежать в одній площині. Скільки різних площин можна провести через сім заданих точок?

11. У касі театру залишилось два квитки в партер, три – в бельєтаж і один – на балкон. Скількома способами касир може видати по одному квитку шести різним особам?

12. Скільки словників потрібно мати, щоб можна було безпосередньо виконати переклад з будь-якої однієї з чотирьох мов: української, англійської, німецької, французької на будь-яку іншу з них?

13. Із наявних путівок для відпочинку на турбазах, у будинках відпочинку і спортивних таборах студентська рада має виділити по одній путівці чотирьом особам. Скількома способами це можна виконати?

14. Пасажирський поїзд складається з трьох вантажних вагонів і восьми купейних. Скількома способами можна сформувати поїзд, якщо вантажні вагони повинні знаходитися на його початку?

15. Із цифр 1, 2, 3, 4, 5 складаються різноманітні числа, кожне з яких містить три або чотири цифри. Скільки таких чисел можна скласти таким чином, щоб цифри в числах не повторювалися?

16. Група студентів із 30 осіб вирішила обмінятися своїми фотографіями. Яка кількість фотографій потрібна для цього?

17. Скільки перестановок можна виконати з цифр 1, 2, 3, 4, 5 таким чином, щоб вони не починалися з цифри 5 і числа 12?

18. Скількома різними способами збори, на яких є присутніми 30 осіб, можуть обрати із свого оточення голову, його заступника та секретаря?

19. У ящику знаходиться шість білих і вісім чорних кульок. Із даного ящика потрібно одночасно вийняти дві кульки одного кольору. Скількома способами можна це зробити?

20. Студенти першого курсу вивчають 10 різних навчальних дисциплін. За розкладом на понеділок вони мають відвідати три пари, причому всі різні. Скількома способами можна скласти розклад на понеділок?

Біном Ньютона та поліномна формула

1. Записати розклад степеня бінома:

$$(x+y)^4; \quad (z+a)^5; \quad (a-b)^6; \quad (\sqrt{x}+\sqrt{y})^4; \quad (\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y})^5; \\ (3x+1)^5; \quad (a-2b)^4; \quad (x^2+1)^5; \quad \left(2+\frac{1}{y}\right)^4; \quad \left(1-\frac{1}{y^2}\right)^4.$$

2. Розкладом степеня бінома $(x-3)^6$ є:

а) $x^6 - 18x^5 + 153x^4 - 540x^3 + 1215x^2 - 1548x + 730$;

б) $x^6 - 18x^5 + 135x^4 - 540x^3 + 1215x^2 - 1458x + 730$;

в) $x^6 - 18x^5 + 135x^4 - 540x^3 + 1215x^2 - 1458x + 729$;

г) $x^6 - 19x^5 + 153x^4 - 540x^3 + 1215x^2 - 1548x + 729$.

3. Запишіть четвертий доданок у розкладі степеня бінома $(3a-2)^5$:

а) $720a^2$; б) $-720a$; в) $720a$; г) $-720a^2$.

4. Визначити різницю третього доданка в розкладі степеня бінома $(4x-2)^4$ і другого доданка в розкладі $(x-3)^3$:

а) $375x$; б) $375x^2$; в) $393x$; г) $393x^2$.

5. У розкладі $\left(a^3 + \frac{1}{a^2}\right)^5$ множник a^5 містить:

а) третій член з коефіцієнтом 10;

б) другий член з коефіцієнтом 5;

в) третій член з коефіцієнтом 4;

г) четвертий член з коефіцієнтом 5.

6. Визначити A_n^3 , якщо шостий доданок розкладу $\left(\sqrt[3]{x} + \frac{1}{x}\right)^n$ не залежить від x .

7. Визначити коефіцієнт при x^k у розкладі полінома $(1+x^2+x^3)^7, k=11$.

Урнова модель. Комбінації з повтореннями

1. [3, 159] Скількома способами можна розкласти 17 однакових куль по 6 різних пакетах, якщо жоден пакет не має бути порожнім?

2. [3, 159] Скільки існує способів розміщення k пасажирів у n вагонах поїзда, за яких рівно m вагонів виявиться порожніми?

3. [3, 159] Скількома способами можна розкласти:

а) 19 однакових куль по 7 урнах так, щоб виявилось не більше двох порожніх урн;

б) 20 однакових куль по 5 урнах так, щоб у кожній урні виявилось не менше двох куль?

4. [3, 160] Довести, що кількість розв'язків рівняння $x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$ у невід'ємних цілих числах дорівнює кількості розв'язків рівняння $x_1 + x_2 + \dots + x_k = n + k$ у натуральних числах.

5. [3, 160] Скількома способами 5 червоних, 7 білих і 9 синіх куль можна розкласти в 6 різних пакетів (деякі пакети можуть бути порожніми)?

6. [3, 160] Скількома способами можна укласти букет з 11 квіток, якщо квітковий магазин пропонує 25 різних сортів квітів?

7. У кіоску продається морозиво шести сортів. Скількома способами можна купити 10 морозив?

8. [3, 160] Скількома способами можна вибрати 5 літер з набору?

а) $a, a, a, a, a, \bar{b}, \bar{b}, \bar{b}, \bar{b}, \bar{b}$;

б) $a, a, a, a, a, \bar{b}, \bar{b}, \bar{b}, \bar{b}, \bar{b}, v, v, v, v, v$;

в) $a, a, a, a, a, \bar{b}, \bar{b}, v, v, v$.

Теми 17–18. Числа Стірлінга першого та другого роду

Питання для самоконтролю

1. Сформулюйте означення чисел Стірлінга першого роду (алгебраїчне та комбінаторне).

2. Яку формулу називають рекурентним співвідношенням?

3. Запишіть рекурентні співвідношення для чисел Стірлінга першого роду.

4. Сформулюйте означення чисел Стірлінга другого роду (аналітичне та комбінаторне).

5. Запишіть рекурентні співвідношення для чисел Стірлінга другого роду.

6. Які властивості мають числа Стірлінга другого роду?

Завдання для самостійної роботи

1. Записати за означенням розклад $x^{\bar{5}}, x^{\bar{7}}$.

2. Обчислити за означенням $s(5,5), s(5,4), s(5,3), s(5,2), s(5,1)$.

3. Обчислити за означенням

$c(7,0), c(7,1), c(7,2), c(7,3), c(7,4), c(7,5), c(7,6), c(7,7)$.

4. Задана підстановка $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 3 & 5 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Які елементи утворюють:

орбіту елемента 1 відносно підстановки σ ?

Орбіту елемента 2 відносно підстановки σ ?

Скільки орбіт має підстановка σ ?

5. Заповнити сьомий рядок таблиці чисел Стірлінга другого роду.

6. Підрахувати $\begin{Bmatrix} 93 \\ 1 \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} 93 \\ 2 \end{Bmatrix}$.

7. Застосовуючи явну формулу для чисел Стірлінга другого роду, визначити $\begin{Bmatrix} 9 \\ 5 \end{Bmatrix}$.

Тема 19. Кільце формальних степеневих рядів – генератрис

Питання для самоконтролю

1. Що називають формальним степеневим рядом від змінної x над кільцем R ?
2. Дайте означення полінома та монома. Навести приклади.
3. Визначте операції додавання та множення для формальних степеневих рядів над кільцем R .
4. Перевірте, що формальні степеневі ряди над кільцем R з операціями додавання та множення утворюють комутативне кільце з одиницею.
5. Сформулюйте теорему про оборотність формального степеневих ряду над кільцем R .
6. Визначте операцію формального диференціювання. Навести приклади.
7. У чому полягає задача про кількість способів розставлення дужок під час обчислення добутку n множників? Навести її розв'язок.
8. Записати рекурентне співвідношення для чисел Каталана. Навести формулу для їх визначення.

Завдання для самостійної роботи

1. Знайти перші три доданки в добутку $f(x) \cdot g(x) = h(x)$, якщо

$$f(x) = 2 + 3x + 4x^2 + \dots,$$

$$g(x) = -1 + x - 3x^2 + \dots.$$

2. Визначити перші три доданки генератрис

$$f(x) = \frac{3}{1-5x} - \frac{7}{1+x}.$$

3. Знайти a_{35} ряду

$$\left(\frac{1}{1+2x}\right)' = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{35}x^{35} + \dots.$$

Тема 20. Рекурентні співвідношення.

Числа Фібоначчі. Числа Люка

Питання для самоконтролю

1. Що називають рекурентним співвідношенням?
2. Сформулюйте теорему про формулу n -го члена послідовності, яка задовольняє задане лінійне рекурентне співвідношення.
3. Надайте схему знаходження формули n -го члена послідовності, яка задовольняє задане лінійне рекурентне співвідношення, на основі методу твірних. Наведіть приклад.
4. Яка числова послідовність називається послідовністю Фібоначчі?
5. Запишіть формулу для n -го члена послідовності чисел Фібоначчі (формула Біне).
6. Сформулюйте основні властивості чисел Фібоначчі.
7. Елементи якої числової послідовності називають числами Люка?
8. Запишіть лінійне рекурентне співвідношення, яке задовольняють числа Люка.
9. Запишіть формули, що пов'язують між собою числа Фібоначчі й числа Люка.

Завдання для самостійної роботи

1. Розділити многочлен $f(x) = 5x^4 - 3x^3 + 2x^2 - x + 3$ на многочлен $g(x) = x^3 - 2x^2 + 1$ методом невизначених коефіцієнтів.

2. Визначити елементи a_3, a_4 рекурентної послідовності $a_0, a_1, a_2, \dots$, якщо $a_0 = 2, a_1 = -1, a_2 = 3, a_{n+3} = 2a_{n+2} - a_{n+1} + a_n$.

3. Знайти характеристичний многочлен послідовності $a_0, a_1, a_2, \dots$, яка задовольняє рекурентне співвідношення $a_{n+3} = 3a_{n+2} + 2a_{n+1} - a_n$.

4. Застосовуючи метод математичної індукції, довести, що для чисел Фібоначчі виконується рівність:

$$F_1 + F_3 + F_5 + \dots + F_{2n-1} = F_{2n}.$$

5. Застосовуючи метод матричної криптографії [1, с. 351, с. 352], за допомогою чисел Фібоначчі виконати кодування початкового повідомлення, яке задано у вигляді квадратної матриці $M_{4 \times 4}$ (елементи матриці-повідомлення M і кодувальної матриці Q_I задати самостійно).

Тема 21. Поняття графа. Способи задання графів.

Підграфи. Ізоморфізм графів. Операції для графів

Питання для самоконтролю

1. Що називають неорієнтованим графом?
2. Дайте означення вершин та ребер графа.
3. Який граф називають тривіальним, а який – порожнім?
4. Які дві вершини графа називають суміжними? В якому випадку вершина v і ребро e вважаються інцидентними? Які два ребра графа є суміжними?
5. Яке ребро графа називається петлею? Який граф називають мультиграфом, а який – псевдографом?
6. Які існують способи завдання графів? Що називається матрицею суміжності та матрицею інцидентності графа?
7. Який граф G_1 називають підграфом графа G ?
8. У чому полягають операції видалення вершини або ребра з графа G ?
9. Дайте означення двох ізоморфних графів. Наведіть приклад.
10. Який граф називають повним? Навести приклади повних графів.
11. Який граф називається двочастинним графом?
12. Дайте означення основних операцій над графами: об'єднання, перетин, різниця, доповнення, з'єднання.

Завдання для самостійної роботи

1. Нехай задано граф $G = (V, E)$:

а) $V = \{1, 2, 3, 4\}, E = \{(1, 2), (1, 3), (2, 4), (3, 1), (4, 2)\}$;

б) $V = \{a, b, c, d, e\}, E = \{(a, d), (a, c), (b, c), (b, e), (c, d), (c, e), (e, b), (e, e)\}$.

Побудувати діаграму, записати матриці суміжності та інцидентності, скласти списки суміжності для кожного із цих графів.

2. Нехай граф $G = (V, E)$ задано за допомогою матриці суміжності A :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Визначити множину ребер E графа G , побудувати його діаграму, записати матрицю інцидентності та скласти списки суміжності графа $G = (V, E)$.

3. З'ясувати, чи існує повний граф, у якого кількість ребер дорівнює:
а) 45; б) 58?

4. Довести, що ізоморфні графи мають однакову кількість вершин та однакову кількість ребер.

5. Графи $G_1 = (V, E_1)$ і $G_2 = (V, E_2)$ задано матрицями суміжності A_1 і A_2 . Потужність множини вершин графів $|V| = n$.

Визначити матрицю суміжності: $G_1 \cap G_2$.

Тема 22. Графи та бінарні відношення.

Степені вершин графа. Шлях у графі

Питання для самоконтролю

1. Укажіть зв'язок між графами та бінарними відношеннями. Наведіть приклади.
2. Що називають степенем вершини графа? Яку вершину графа називають ізольованою, а яку – кінцевою?
3. Який граф називають кубічним?
4. Сформулюйте лему про рукостискання.
5. Надайте означення маршруту (шляху) в графі. Яка вершина графа називається початком, а яка – кінцем шляху?
6. Що називається довжиною маршруту в графі?
7. Надайте означення ланцюга, замкненого маршруту та циклу.
8. Сформулюйте теорему, за допомогою якої можна визначити наявності маршруту між двома вершинами, використовуючи матрицю суміжності графа.

Завдання для самостійної роботи

1. Довести, що в будь-якому графі з n вершинами ($n \geq 2$) завжди знайдуться принаймні дві вершини з однаковими степенями.

2. З'ясувати, чи існує граф із шістьма вершинами, степені яких дорівнюють: 2, 3, 3, 3, 3, 4.

Якщо такий граф існує, то зобразити діаграму графа та виписати матрицю суміжності.

3. Для графа G , зображеного на рис. 1, визначити маршрути завдовжки 4 з вершини a до вершини c , з вершини b до вершини e та з вершини c до вершини e .

4. Для графа (див. рис. 2) визначити можливі маршрути та їх довжину з вершини v_0 до вершини v_8 .

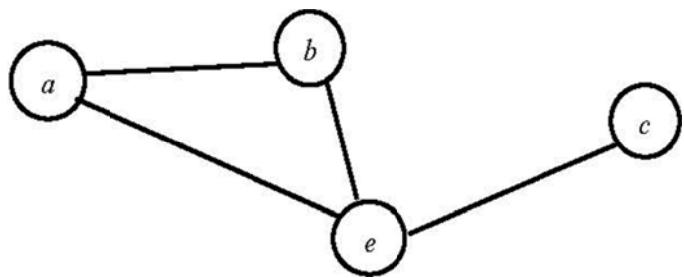


Рисунок 1 – Граф G

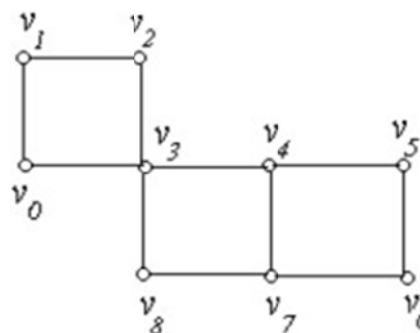


Рисунок 2 – Граф G

Тема 23. Зв'язність графів. Перевірка зв'язності графів

Питання для самоконтролю

1. Які дві вершини графа називаються зв'язаними?
2. Який граф називають зв'язним? Навести приклад.
3. Що називають відстанню між вершинами v і w зв'язного графа?
4. Дайте означення ексцентриситету довільної вершини зв'язного графа, діаметра, радіуса та центра зв'язного графа.
5. Довести, що відношення зв'язності на множині вершин графа G є відношенням еквівалентності.
6. Що називається компонентою зв'язності графа G ?
7. Який граф G^* називають транзитивним замиканням графа G ?
8. Яка матриця A^* називається матрицею досяжності графа G ?
9. Сформулюйте критерій зв'язності графа. Наведіть приклад його застосування під час перевірки графа на зв'язність.

Завдання для самостійної роботи

1. З'ясувати, чи є зв'язним граф, що заданий матрицею суміжності:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Перевірити на зв'язність граф, зображений на рис. 3

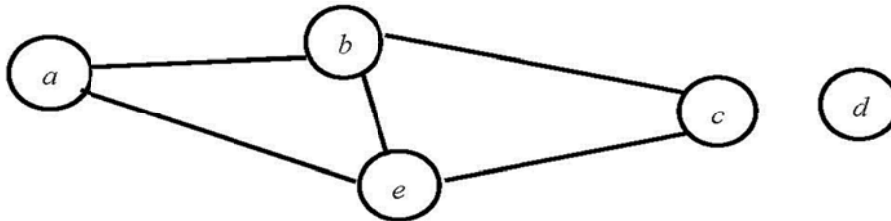


Рисунок 3 – Граф G

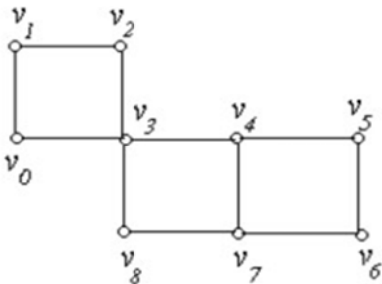


Рисунок 4 – Граф G

3. Визначити відстань між вершинами графа G (рис. 4). Знайти ексцентриситет кожної вершини, діаметр і радіус графа. Які вершини є центральними? Записати центр графа.

Тема 24. Дерева. Кістякове дерево.

Побудова мінімального кістякового дерева. Код Прюфера

Питання для самоконтролю

1. Який граф називають деревом? Що таке корінь дерева?
2. Сформулюйте теорему про кількість ребер дерева.
3. Дайте означення кістякового дерева зв'язного графа G .
4. Що називається цикломатичним числом графа G ?
5. Опишіть спосіб підрахунку числа кістякових дерев графа.
6. У чому полягає задача побудови мінімального кістякового дерева?
7. Сформулюйте алгоритм Прима-Краскала побудови мінімального кістякового дерева.

8. Що називають кодом Прюфера? В чому полягає задача кодування дерева кодом Прюфера? Опишіть один крок кодування.
 9. За яким алгоритмом здійснюється операція декодування?
 10. Сформулюйте основні властивості коду Прюфера.

Завдання для самостійної роботи

1. Задано граф G (рис. 5). Визначити кількість кістякових дерев графа. Зобразити кістякові дерева графа G .

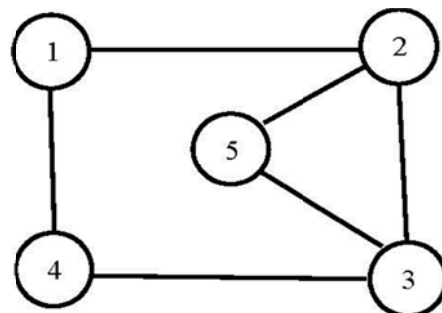


Рисунок 5 – Граф G

2. Задано неорієнтований навантажений граф G (рис. 6). Знайти його мінімальне кістякове дерево.

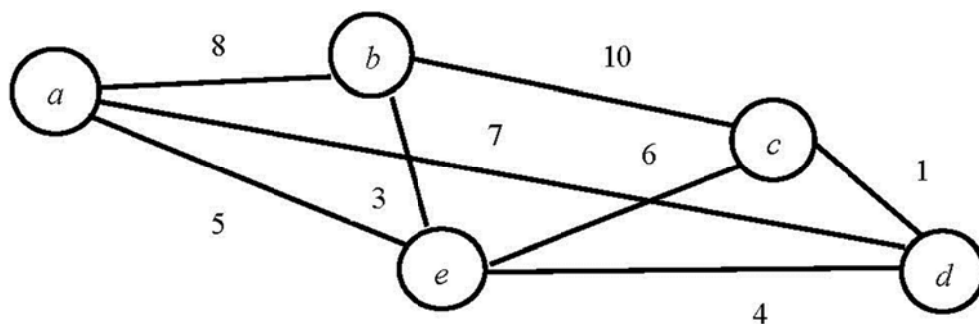


Рисунок – Граф G

3. Задано дерево T (рис. 7). Потрібно знайти код Прюфера.

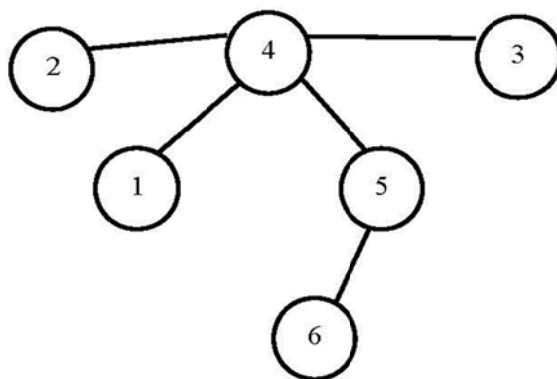


Рисунок 7 – Дерево T

4. Виконати декодування коду Прюфера:
 а) $cod = (5, 5, 5)$, б) $cod = (5, 1, 1)$, в) $cod = (2, 4)$,
 г) $cod = (3)$, д) $cod = (1, 5, 2, 6, 6, 2, 1, 3)$.

Тема 25. Плоскі та планарні графи. Розфарбування графів

Питання для самоконтролю

1. Який граф називають плоским? Що таке плоска карта графа?
2. Який граф називається планарним? Навести приклади.
3. Дайте означення Жорданової лінії.
4. Що називають гранню плоского графа? Що таке межа грані? Як визначити степінь грані плоского графа?
5. Дайте означення триангуляції. Наведіть приклад.
6. Сформулюйте теорему Ейлера про співвідношення між кількістю вершин, ребер та граней плоского графа. Які наслідки має теорема Ейлера?
7. Які графи називають гомеоморфними?
8. Сформулюйте теорему К. Куратовського (критерій планарності графа).
9. Що називають розфарбуванням графа G ? Дайте означення кольора (номера фарби) вершини v .
10. Яке розфарбування f графа G називається правильним? Що називають хроматичним числом графа G ?
11. Яке розфарбування графа G називають мінімальним правильним?
12. Сформулюйте основні твердження, що стосуються розфарбування графа.
13. У чому полягає проблема (гіпотеза) чотирьох фарб? Опишіть основні факти, які отримано щодо вирішення цієї проблеми.
14. Який граф називають критичним? Сформулюйте основні твердження про критичні графи.

Завдання для самостійної роботи

1. Задано плоский граф G (рис. 8). Визначити кількість граней графа та степені граней.

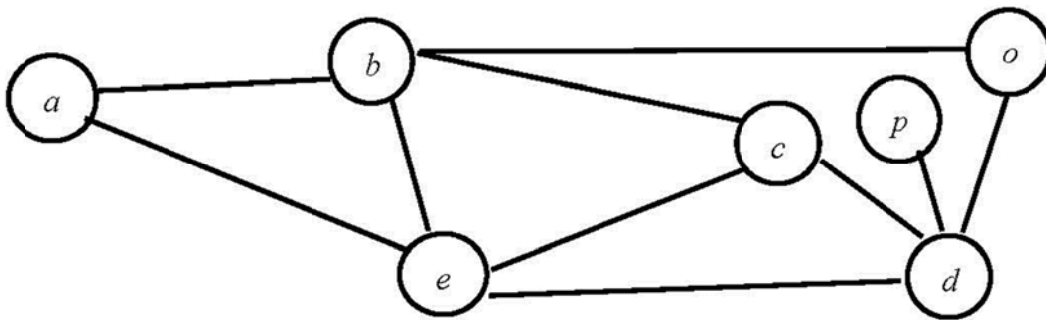


Рисунок 8 – Граф G

2. З'ясувати, чи існує планарний граф, який має:
а) сім вершин і п'ятнадцять ребер; б) вісім вершин і дев'ятнадцять ребер?
3. Довести узагальнення теорему Ейлера, а саме, що для довільного плоского графа $G = (V, E)$ з k компонентами зв'язності виконується рівність:
$$|V| - |E| + |P| = 1 + k.$$
4. Довести, що граф є максимальним плоским графом тоді й лише тоді, коли він є триангуляцією.

5. Визначити хроматичне число графа, зображеного на рисунку 9.

6. Визначити хроматичне число:

а) графа K_2 ;

б) графа W_4 ;

в) графа S_4 ;

г) графа Петерсена.

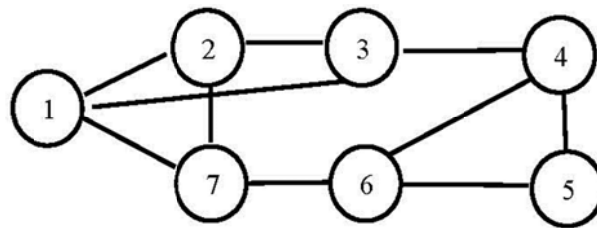


Рисунок 9 – Граф G

Тема 26. Обходи графів. Ейлеровий цикл.

Гамільтонів цикл

Питання для самоконтролю

1. Що називають ейлеровим циклом та ейлеровим графом?

2. Сформулюйте теорему Ейлера (критерій того, що граф є ейлеровим).

3. Опишіть алгоритм Флорі знаходження ейлерового циклу в ейлеровому графі.

4. Який цикл називають гамільтоновим? Що таке гамільтоновий граф?

5. Сформулюйте теорему Дірака про гамільтоновий граф.

Завдання для самостійної роботи

1. Побудувати ейлеровий цикл у графі, зображеному на рисунку 10.

2. Довести, що граф Петерсена не є гамільтоновим.

3. Побудувати гамільтонів цикл у графі, зображеному на рисунку 11.

4. Що можна сказати про граф, який містить гамільтонів цикл, що одночасно є ейлеровим циклом? У яких графах існує гамільтоновий ланцюг, який одночасно є ейлеровим ланцюгом?

5. Довести, що дерево не може містити гамільтонового ланцюга, якщо воно не є ланцюгом.

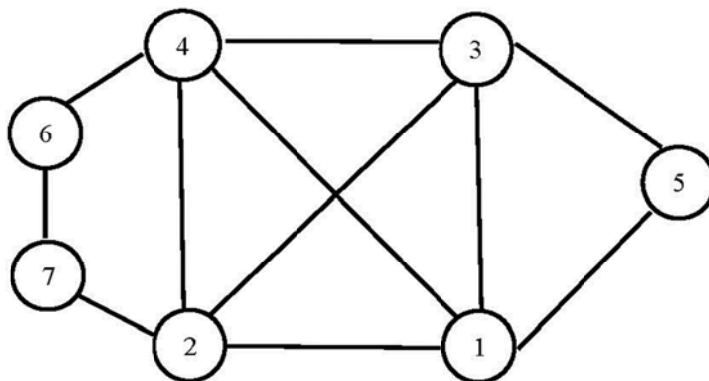


Рисунок 10 – Граф G

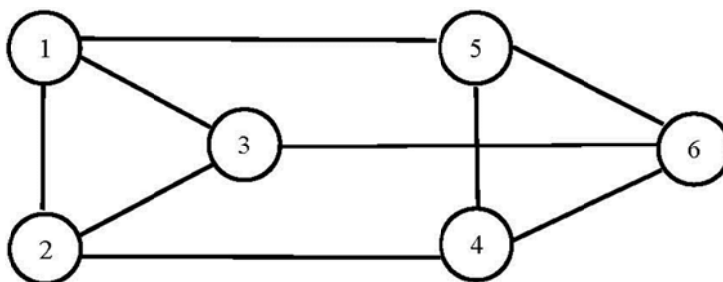


Рисунок 11 – Граф G

Примітка. Застосувати доведення від супротивного.

Тема 27. Орієнтовані графи

Питання для самоконтролю

1. Який граф називається орієнтованим графом? Що називають множинами вершин та дуг орієнтованого графа?

2. Дайте означення початку та кінця дуги орієнтованого графа.

3. У якому випадку дугу e та вершини v і w називають інцидентними між собою? Коли вершини v і w називають суміжними?
4. Дайте означення матриць суміжності та інцидентності орграфа.
5. Які два орієнтовані графи називають ізоморфними?
6. Що називають напівстепенем виходу та напівстепенем заходу вершини орієнтованого графа.
7. Що називається маршрутом (шляхом) у орграфі? Як визначається його довжина?
8. Який маршрут називається ланцюгом та простим ланцюгом?
9. Коли вершина w є досяжною з вершини v ?
10. Яка вершина орграфа називається джерелом, а яка – стоком?
11. Який граф називається повним орграфом? Навести приклади.
12. Сформулювати основні твердження щодо повного орієнтованого графа.
13. Що називають нумерацією орграфа? В якому випадку нумерація орієнтованого графа є правильною?
14. Дайте означення напівмаршруту орієнтованого графа. Наведіть приклад.
15. Сформулюйте основні поняття зв'язності в орієнтованому графі (сильно та слабо зв'язний орграф, однобічно зв'язний орграф). Навести приклади.
16. Який маршрут в орграфі називається кістяковим? Дайте означення кореневого дерева.
17. Який орграф називається функціональним, а який – ін'єктивним?
18. Сформулюйте основні означення та поняття, що стосуються обходів у орієнтованих графах (ейлеровий контур, ейлеровий орграф, ейлеровий ланцюг, гамільтонів контур, гамільтонів орграф, гамільтонів ланцюг).
19. Який орграф називають транзитивним?

Завдання для самостійної роботи

1. Орграф $G = (V, E)$ задано переліком елементів скінченних множин V і E . Побудувати діаграму орграфа. Записати матриці суміжності та інцидентності для кожного з цих орграфів.
 - а) $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $E = \{(1, 3), (1, 4), (2, 1), (2, 3), (2, 5), (3, 4), (4, 5), (5, 1), (5, 2), (5, 4)\}$;
 - б) $V = \{a, b, c, d\}$, $E = \{(a, c), (a, d), (b, a), (b, d), (c, b), (c, a), (d, c), (d, a)\}$.
2. Яким чином можна визначити напівстепені виходу та заходу певної вершини орграфа G за його матрицею суміжності?
3. Установити, чи існує орграф, що має чотири вершини, напівстепені виходу вершин якого дорівнюють 3, 1, 3, 0, а відповідні напівстепені заходу – 1, 2, 1, 3? У випадку існування такого графа зобразити його діаграму та записати матрицю суміжності.
4. За заданою матрицею інцидентності побудувати діаграму графа.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$
5. Нехай A – матриця суміжності орграфа G . Довести, що елемент $a_{ij}^{(k)}$ i -го рядка та j -го стовпця матриці A^k дорівнює кількості шляхів

завдовжки k , що ведуть із вершини з номером i у вершину з номером j в орграфі G .

6. Визначити матрицю досяжності орграфа, зображеного на рисунку 12.

7. Відображення $f: M \rightarrow M$, де $M = \{a, b, c, d, e, f\}$, задане двома рядками

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \\ c & a & d & f & c & b \end{pmatrix}.$$

Задати це відображення орієнтованим графом.

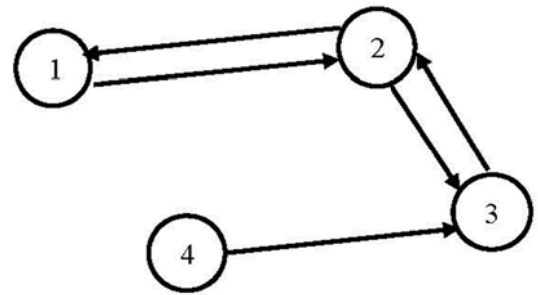


Рисунок 12 – Орграф G

3. ПІДГОТОВКА ДО ПОТОЧНОГО КОНТРОЛЮ

Протягом кожного семестру здобувач виконує дві контрольні роботи. Перша, друга та четверта контрольні складаються з п'яти завдань, третя – з шести завдань. Кількість балів за кожне завдання вказується заздалегідь і доводиться до відома здобувачів вищої освіти. Також надається зміст типового варіанта кожної контрольної роботи разом із прикладом його оформлення та виконання. Загальна кількість балів за кожну контрольну роботу складає 30 балів.

Типовий варіант контрольної роботи № 1

- Для заданої формули $A = x \vee ((y \wedge z) \rightarrow (\bar{x} \vee \bar{z}))$ логіки висловлень
 - зобразити дерево синтаксичного аналізу;
 - створити таблицю істинності;
 - виписати ДКНФ (досконала кон'юнктивна нормальна форма), що рівносильна A ;
 - знайти ДДНФ (досконала диз'юнктивна нормальна форма);
 - з'ясувати, чи є формула A тавтологією? Виконуваною формулою?
- Для заданої множини $A = \{x | x \in \mathbb{N}, (x + 1)^2 < 27\}$ виписати всі підмножини.
- Знайти $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $A \Delta B$, $B \setminus A$, якщо

$$A = \{x \in \mathbb{N}, x \leq 40, x \div 4\},$$

$$B = \{x \in \mathbb{N}, x \leq 40, x \div 5\}.$$
- Використовуючи діаграму Ейлера – Венна, заштрихуйте ті її частини, що зображають множину $(A \setminus B) \cup (A \cap C)$.
- Довести тотожність $A \cap (B \setminus A) \cup B = B$.

Розв'язання

$$1. A = x \vee ((y \wedge z) \rightarrow (\bar{x} \vee \bar{z}))$$

- Побудуємо дерево синтаксичного аналізу (рис. 13):

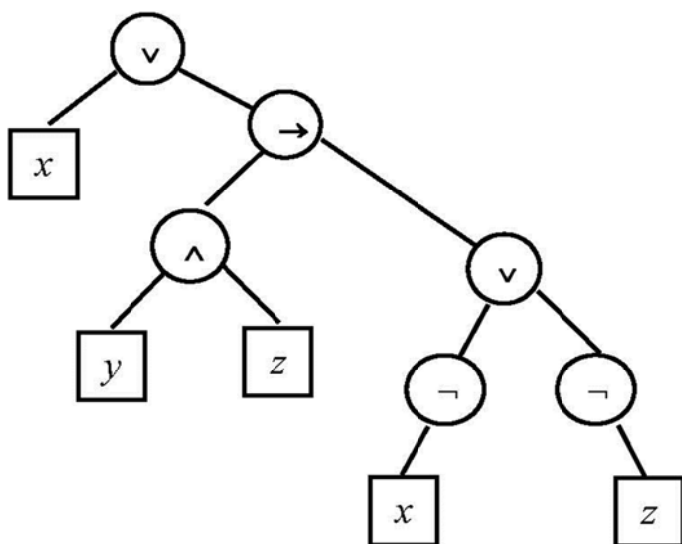


Рисунок 13 – Дерево синтаксичного аналізу формули A

б) Таблиця істинності має вигляд:

x	y	z	$y \wedge z$	$\bar{x}$	$\bar{z}$	$\bar{x} \vee \bar{z}$	$(y \wedge z) \rightarrow (\bar{x} \vee \bar{z})$	$x \vee ((y \wedge z) \rightarrow (\bar{x} \vee \bar{z}))$
1	1	1	1	0	0	0	0	1
1	1	0	0	0	1	1	1	1
1	0	1	0	0	0	0	1	1
1	0	0	0	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	0	1	1	1
0	1	0	0	1	1	1	1	1
0	0	1	0	1	0	1	1	1
0	0	0	0	1	1	1	1	1

с) ДКНФ, що рівносильна формулі A, не існує.

д) ДДНФ має вигляд:

$$(\bar{x} \wedge \bar{y} \wedge \bar{z}) \vee (\bar{x} \wedge \bar{y} \wedge z) \vee (\bar{x} \wedge y \wedge \bar{z}) \vee (x \wedge \bar{y} \wedge \bar{z}) \vee (x \wedge \bar{y} \wedge z) \vee (x \wedge y \wedge \bar{z}) \vee (\bar{x} \wedge y \wedge z) \vee (x \wedge y \wedge z)$$

е) Формула A набуває лише значення 1, тому вона є тавтологією та виконуваною формулою.

$$2. A = \{x | x \in \mathbb{N}, (x + 1)^2 < 27\} = \{1, 2, 3, 4\}.$$

Потужність множини $|A| = 4$. Тоді потужність булеану, тобто множини всіх підмножин множини A, дорівнює $2^{|A|} = 2^4 = 16$.

$$\beta(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 3, 4\}, \{1, 2, 4\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 4\}\}.$$

$$3. A = \{x \in \mathbb{N}, x \leq 40, x \div 4\} = \{4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40\};$$

$$B = \{x \in \mathbb{N}, x \leq 40, x \div 5\} = \{5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40\}.$$

$$A \cup B = \{4, 5, 8, 10, 12, 15, 16, 20, 24, 25, 28, 30, 32, 35, 36, 40\};$$

$$A \cap B = \{20, 40\};$$

$$A \setminus B = \{4, 8, 12, 16, 24, 28, 32, 36\};$$

$$B \setminus A = \{5, 10, 15, 25, 30, 35\};$$

$$A \Delta B = \{4, 5, 8, 10, 12, 15, 16, 24, 25, 28, 30, 32, 35, 36\}.$$

4. Виконаємо послідовно операції над множинами:

$$(A \setminus B), A \cap C \text{ і } (A \setminus B) \cup (A \cap C).$$

Результати виконання вказаних операцій зображено на рисунку 14.

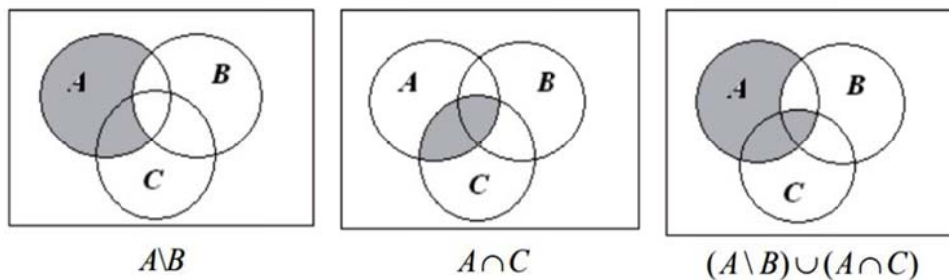


Рисунок 14 – Діаграми Ейлера – Венна

5. Довести тотожність $A \cap (B \setminus A) \cup B = B$.

$$B \setminus A = \{x \mid x \in B \text{ і } x \notin A\};$$

$$A \cap (B \setminus A) = \{x \mid x \in A \text{ і } x \in B \setminus A\} = \{x \mid x \in A \text{ і } x \in B \text{ і } x \notin A\} = \{x \mid x \in \emptyset\};$$

$A \cap (B \setminus A) \cup B = \{x \mid x \in \emptyset \text{ або } x \in B\} = \{x \mid x \in B\}$, що й потрібно було довести.

Типовий варіант контрольної роботи № 2

1. Для чисел 250 та 65 знайти НСД та НСК.
2. Обчислити функцію Ейлера $\varphi(240)$.
3. Знайти 67^{-1} в кільці $\mathbb{Z}_{691}$.
4. Знайти всі розв'язки діофантового рівняння $5x + 14y = 3$.
5. Знайти елемент x кільця класів лишків за модулем $i+5$, якщо $\log_7 x = 4$, де i – номер варіанта.

Розв'язання

$$1. 250 = 65 \cdot 3 + 55, q_0 = 3, r_0 = 55,$$

$$65 = 55 \cdot 1 + 10, q_1 = 1, r_1 = 10,$$

$$55 = 10 \cdot 5 + 5, q_2 = 5, r_2 = 5,$$

$$10 = 2 \cdot 5 + 0, q_3 = 2, r_3 = 0.$$

$$\text{НСД}(250, 65) = 5.$$

$$\text{НСК}(250, 65) = 5^3 \cdot 2 \cdot 13 = 3250.$$

Відповідь: НСД(250, 65) = 5, НСК(250, 65) = 3250.

$$2. n = 240 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5$$

$$\begin{aligned} \varphi(240) &= \varphi(2^4 \cdot 3 \cdot 5) = (2^4 - 2^3)(3^1 - 3^0)(5^1 - 5^0) = \\ &= 2^3(2 - 1)(3 - 1)(5 - 1) = 8 \cdot 2 \cdot 4 = 64. \end{aligned}$$

Відповідь: $\varphi(240) = 64$.

$$3. b=67, m=691.$$

Перша ітерація.

$$1. (x_1, x_2, x_3) := (1, 0, 691); (y_1, y_2, y_3) := (0, 1, 67).$$

$$2. y_3 = 67 \neq 0, \text{ отже, } 67^{-1} \text{ існує.}$$

3. Обчислюємо $g = \left[\frac{691}{67} \right] = 10$.

4. $(t_1, t_2, t_3) := (1 - 10 \cdot 0, 0 - 10 \cdot 1, 691 - 10 \cdot 67) = (1, -10, 21)$.

5. $(x_1, x_2, x_3) := (0, 1, 67)$.

6. $(y_1, y_2, y_3) := (1, -10, 21)$. $y_3 = 21 \neq 1$.

Друга ітерація.

Обчислюємо $g = \left[\frac{67}{21} \right] = 3$.

$(t_1, t_2, t_3) := (0 - 3 \cdot 1, 1 - 3 \cdot (-10), 67 - 3 \cdot 21) = (-3, 31, 4)$.

$(x_1, x_2, x_3) := (1, -10, 21)$.

$(y_1, y_2, y_3) := (-3, 31, 4)$. $y_3 = 4 \neq 1$.

Третя ітерація.

Обчислюємо $g = \left[\frac{21}{4} \right] = 5$.

$(t_1, t_2, t_3) := (1 - 5 \cdot (-3), -10 - 5 \cdot 31, 21 - 5 \cdot 4) = (16, -165, 1)$.

$(x_1, x_2, x_3) := (-3, 31, 4)$.

$(y_1, y_2, y_3) := (16, -165, 1)$. $y_3 = 1$. Отже, $y_2 = -165$.

Отже, $-165 \equiv \frac{1}{67} \pmod{691}$. За однією з властивостей конгруенції до будь-якої частини конгруенції можна додати одне й те ж число, кратне модулю. Тому $-165 + 691 \equiv \frac{1}{67} \pmod{691}$, $526 \equiv \frac{1}{67} \pmod{691}$

Відповідь: $526 \equiv \frac{1}{67} \pmod{691}$.

4. $5x + 14y = 3$, НСД(5,14) = 1.

$x = x_0 + k \cdot \frac{b}{g}$, $y = y_0 - k \cdot \frac{a}{g}$, де $g = \text{НСД}(5,14)$, $x_0 = 9$, $y_0 = -3$.

$x = 9 + k \cdot \frac{14}{1} = 9 + 14k$, $y = -3 - k \cdot \frac{5}{1} = -3 - 5k, k \in \mathbb{Z}$.

Відповідь: $x = 9 + 14k$, $y = -3 - 5k, k \in \mathbb{Z}$.

5. $\log_7 x = 4$, $x = 7^4, i = 28$. Обчислити $c \equiv 7^4 \pmod{33}$.

$a = 7, n = 4, m = 33, a < m \rightarrow$ існує єдине c , причому $0 \leq c < m$.

$7^4 = 2401 = 72 \cdot 33 + 25$. Тобто $c = 25$.

Відповідь: $25 \equiv 7^4 \pmod{33}$.

Типовий варіант контрольної роботи № 3

1. Знайти коефіцієнт A при x^8 у многочлена $f(x) = (1 + 2x^2 - 3x^4)^{10}$.

2. Знайти кількість слів, які можна утворити, переставляючи букви в слові «риторика».

3. Знайти кількість дільників $n = 14^8 \cdot 21^{17}$.

4. Журі з 5 жінок і 7 чоловіків повинно бути обрано зі списку в 8 жінок і 11 чоловіків. Скільки можна вибрати різних складів журі?

5. Знайти кількість розв'язків рівняння $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 19$, $x_i \geq 0, x_i \in \mathbb{Z}$.

6. Визначити перші три доданки генератрис

$$f(x) = \frac{3}{1-5x} - \frac{7}{1+x}.$$

Розв'язання

1. Застосовуємо поліномну формулу

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_m)^n = \sum_{\substack{k_1, k_2, \dots, k_m \geq 0 \\ k_1 + k_2 + \dots + k_m = n}} P_n(k_1, k_2, \dots, k_m) a_1^{k_1} a_2^{k_2} \dots a_m^{k_m}.$$

У нашому прикладі $n = 10, m = 3, a_1 = 1, a_2 = 2x^2, a_3 = -3x^4$.

Довільний член розкладання полінома має вигляд

$$\begin{aligned} P_n(k_1, k_2, \dots, k_m) a_1^{k_1} a_2^{k_2} \dots a_m^{k_m} &= P_{10}(k_1, k_2, k_3) 1^{k_1} (2x^2)^{k_2} (-3x^4)^{k_3} = \\ &= P_{10}(k_1, k_2, k_3) (-1)^{k_3} 2^{k_2} 3^{k_3} (x)^{2k_2 + 4k_3}, \end{aligned}$$

де $k_i \geq 0, i = 1, 2, 3, k_1 + k_2 + k_3 = 10$. Потрібно визначити ті з них, для яких виконується рівність $2k_2 + 4k_3 = 8$.

Розв'язки діофантового рівняння $k_2 = 4 + 2k, k_3 = -k, k \in \mathbb{Z}$. Оскільки $k_i \geq 0$, то $k = -2, -1, 0$. Цю умову задовольняють лише три трійки чисел:

$$k_1 = 8, k_2 = 0, k_3 = 2;$$

$$k_1 = 7, k_2 = 2, k_3 = 1;$$

$$k_1 = 6, k_2 = 4, k_3 = 0.$$

Тому шуканий коефіцієнт при x^8 дорівнює:

$$\begin{aligned} &P_{10}(8, 0, 2) (-1)^2 2^0 3^2 + P_{10}(7, 2, 1) (-1)^1 2^2 3^1 + P_{10}(6, 4, 0) (-1)^0 2^4 3^0 = \\ &= 9 \cdot P_{10}(8, 0, 2) - 12 \cdot P_{10}(7, 2, 1) + 16 \cdot P_{10}(6, 4, 0) = \\ &= 9 \cdot \frac{10!}{8! 0! 2!} - 12 \cdot \frac{10!}{7! 2! 1!} + 16 \cdot \frac{10!}{6! 4! 0!} = \\ &= 9 \cdot 9 \cdot 5 - 12 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 5 + 16 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 10 = 405 - 4320 + 3360 = -555. \end{aligned}$$

Відповідь: -555.

2. Маємо 8 елементів – p, u, t, o, p, u, k, a , серед яких є два елементи p (першого типу), два елементи u (другого типу) та по одному елементу інших типів – t, o, k та a . За формулою

$$P_n(k_1, k_2, \dots, k_m) = \frac{n!}{k_1! k_2! \dots k_m!}$$

$$\text{визначаємо: } P_8(2, 2, 1, 1, 1, 1) = \frac{8!}{2! 2! 1! 1! 1! 1!} = \frac{2! \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{2! \cdot 1 \cdot 2} = 10080.$$

Відповідь: 10080.

$$\begin{aligned} 3. n &= 14^8 \cdot 21^{17} = (2 \cdot 7)^8 \cdot (3 \cdot 7)^{17} = 2^8 \cdot 7^8 \cdot 3^{17} \cdot 7^{17} = 2^8 \cdot 7^{25} \cdot 3^{17} \\ d(2^8 \cdot 7^{25} \cdot 3^{17}) &= (8 + 1)(25 + 1)(17 + 1) = 9 \cdot 26 \cdot 18 = 4212. \end{aligned}$$

Відповідь: кількість дільників числа $n = 14^8 \cdot 21^{17}$ дорівнює 4212.

4. Порядок відбору членів журі значення не має, і члени журі не можуть повторюватись. Отже, задача на застосування формули комбінацій без повторень: $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Жіночу частину журі можна обрати $C_8^5 = \frac{8!}{5!(8-5)!} = \frac{6 \cdot 7 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 56$ способами, а чоловічу – $C_{11}^7 = \frac{11!}{7!(11-7)!} = \frac{8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 330$ способами.

Застосовуємо правило множення: існує $56 \cdot 330 = 18480$ різних складів журі.

Відповідь: 18480.

5. Шукана кількість розв'язків дорівнюватиме: C_{n+k-1}^n . В нашому випадку $n = 19, k = 4$. Тому

$$C_{n+k-1}^n = C_{19+4-1}^{19} = C_{22}^{19} = \frac{22!}{19!3!} = \frac{20 \cdot 21 \cdot 22}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 1540.$$

Відповідь: кількість невід'ємних цілих розв'язків рівняння дорівнює 1540.

6. Користуючись тим, що

$$\frac{1}{1-qx} = 1 + qx + q^2x^2 + \dots + q^n x^n + \dots,$$

знаходимо

$$\begin{aligned} \frac{3}{1-5x} &= 3(1 + 5x + 5^2x^2 + \dots + 5^n x^n + \dots) = \\ &= 3 + 15x + 75x^2 + \dots + 3 \cdot 5^n x^n + \dots, \\ \frac{7}{1+x} &= 7(1 - x + (-1)^2x^2 + \dots + (-1)^n x^n + \dots) = \\ &= 7 - 7x + 7x^2 + \dots + 7 \cdot (-1)^n x^n + \dots. \end{aligned}$$

Тоді

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{3}{1-5x} - \frac{7}{1+x} = (3 + 15x + 75x^2 + \dots + 3 \cdot 5^n x^n + \dots) - \\ &- (7 - 7x + 7x^2 + \dots + 7 \cdot (-1)^n x^n + \dots) = -4 + 22x + 68x^2 + \dots \end{aligned}$$

Відповідь: $f(x) = -4 + 22x + 68x^2 + \dots$

Типовий варіант контрольної роботи № 4

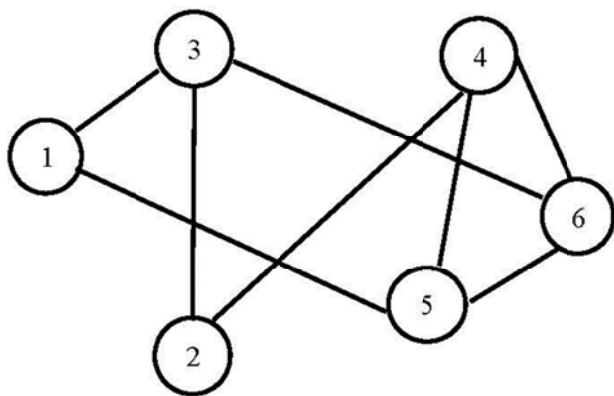


Рисунок 15 – Неорієнтований граф G

1. Для заданого графа (рис. 15) знайти:

- матрицю суміжності,
- матрицю інцидентності,
- визначити кількість кістякових дерев графа.

2. За заданою матрицею суміжності відновити граф. Побудувати для нього матрицю відстаней. Визначити центр, периферійні вершини, радіус та діаметр графа.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Задано дерево T (рис. 16). Потрібно знайти код Прюфера.

4. Відображення $f: M \rightarrow M$, де $M = \{a, b, c, d, e, f\}$ задане двома рядками

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \\ d & e & b & f & e & c \end{pmatrix}.$$

Задати це відображення орієнтованим графом.

5. Побудувати діаграму орграфа, якщо матриця інцидентності має вигляд:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

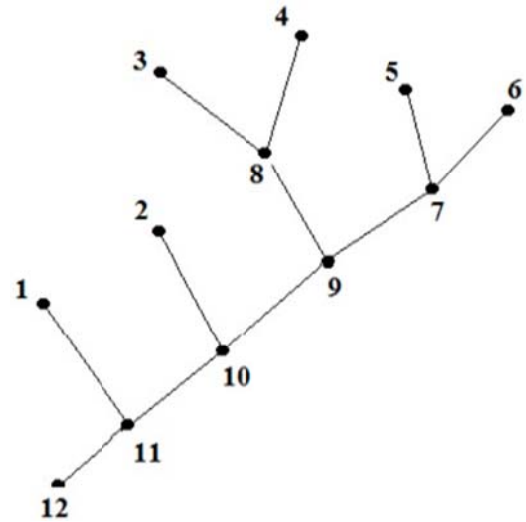


Рисунок 16 – Дерево T

Розв'язання

1. а) Запишемо матрицю суміжності для заданого графа:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

б) Матриця інцидентності має вигляд (послідовність ребер визначена наступним чином: $e_1 = (1,3)$, $e_2 = (1,5)$, $e_3 = (2,3)$, $e_4 = (2,4)$, $e_5 = (3,6)$, $e_6 = (4,5)$, $e_7 = (4,6)$, $e_8 = (5,6)$):

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

в) Утворюємо матрицю M :

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Обчислюємо алгебраїчне доповнення елемента m_{11} матриці M :

$$\begin{aligned}
 A_{11} &= \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 \end{vmatrix} + \\
 &+ (-1) \cdot (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 3 \end{vmatrix} + (-1) \cdot (-1)^{1+3} \cdot \\
 &\cdot \begin{vmatrix} -1 & 3 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = \\
 &= 2 \cdot \left(3 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{vmatrix} + (-1) \cdot (-1)^{1+4} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix} \right) + \\
 &+ (-1) \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{vmatrix} + (-1) \cdot (-1)^{1+4} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} - \\
 &- (-1) \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{vmatrix} - (-1) \cdot (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = \\
 &= 2 \cdot (3 \cdot (27 - 1 - 1 - 3 - 3 - 3) + (-1) \cdot (9 - 1)) - \\
 &- (27 - 1 - 1 - 3 - 3 - 3) + (-1) \cdot (1 + 3) + (-1) \cdot (1 + 3) - 3 \cdot (9 - 1) - \\
 &- (-1) \cdot (0 + 3) = 2 \cdot (48 - 8) - 16 - 4 - 4 - 24 + 3 = 35.
 \end{aligned}$$

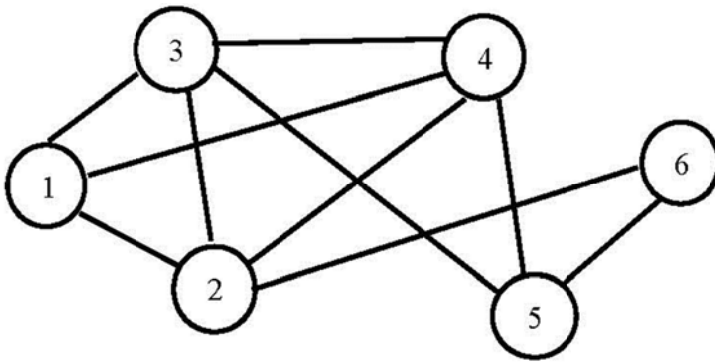


Рисунок 17 – Неорієнтований граф G

Відповідь: кількість кістякових дерев графа дорівнює 35.

2. Граф G має шість вершин: $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Множина ребер $E = \{(1,2), (1,3), (1,4), (2,3), (2,4), (2,5), (3,4), (3,5), (4,5), (5,6)\}$ (див. рис. 17).

Побудуємо для такого графа матрицю відстаней.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ексцентриситети вершин графа дорівнюють:

$$\varepsilon(1) = 2; \varepsilon(2) = 2; \varepsilon(3) = 2; \varepsilon(4) = 2; \varepsilon(5) = 2; \varepsilon(6) = 2.$$

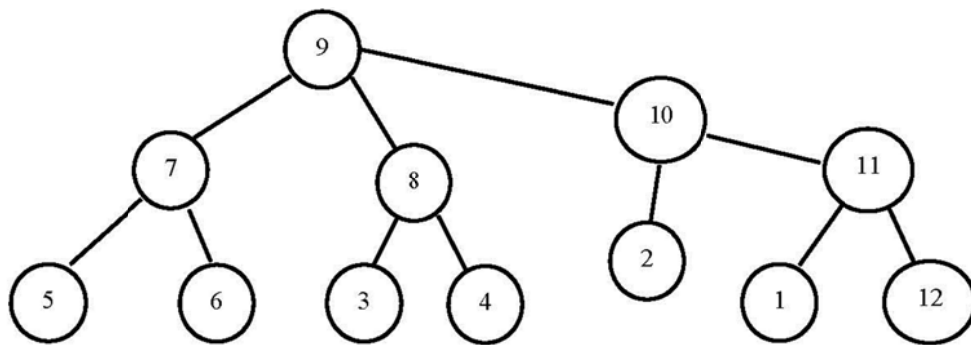
Діаметр зв'язного графа G дорівнює $D(G) = 2$ (максимальний із усіх його ексцентриситетів), радіус графа $R(G) = 2$ (мінімальний із усіх його ексцентриситетів).

Вершини 1, 2, 3, 4, 5 і 6 є центральними вершинами (їх ексцентриситети збігаються з $R(G)$), тому центром графа є множина $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

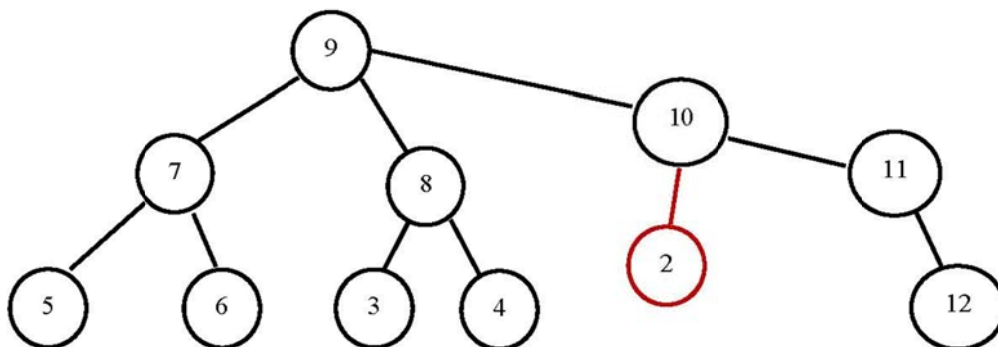
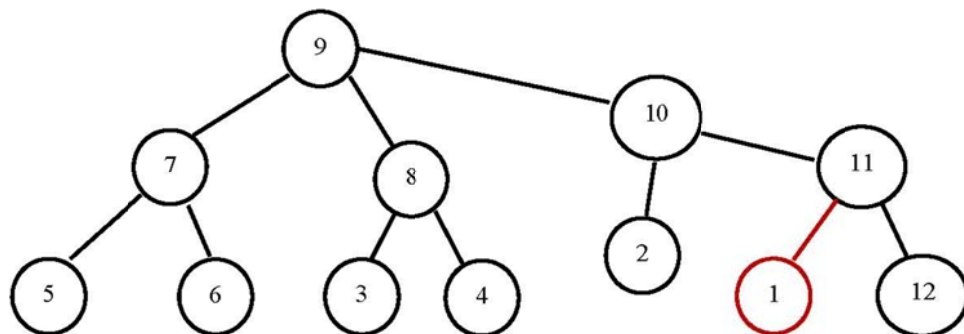
Усі вершини графа є периферійні, оскільки їх ексцентриситети збігаються також і з $D(G)$.

3. Задано дерево з вершинами ($n = 12$) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$. У цьому прикладі $n - 2 = 10$, $cod = (c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, c_7, c_8, c_9, c_{10})$.

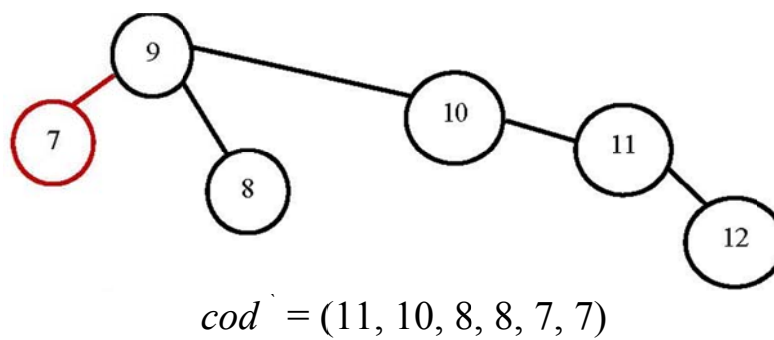
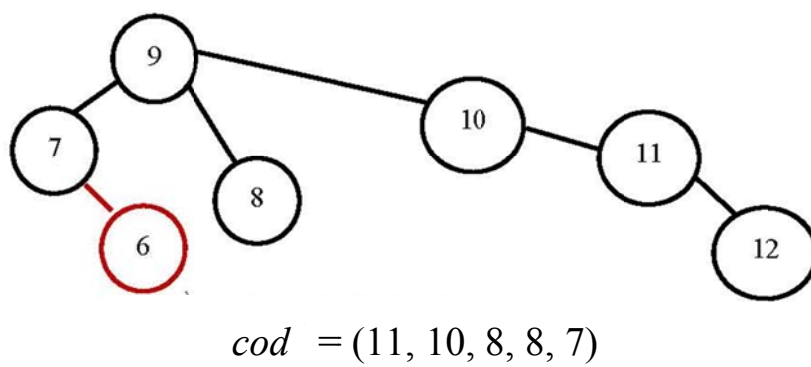
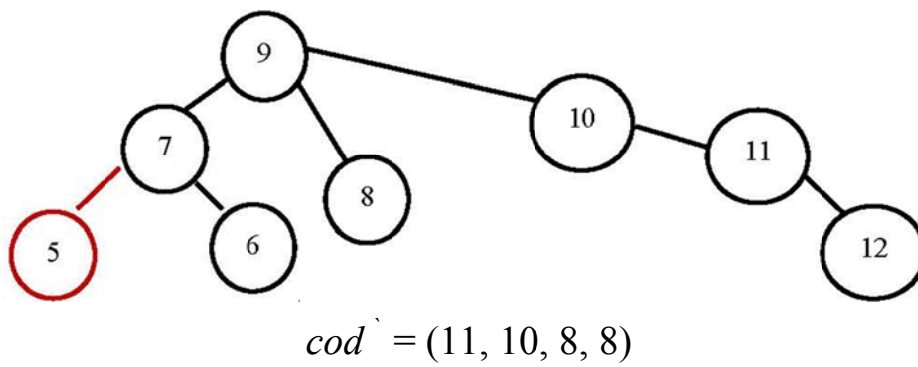
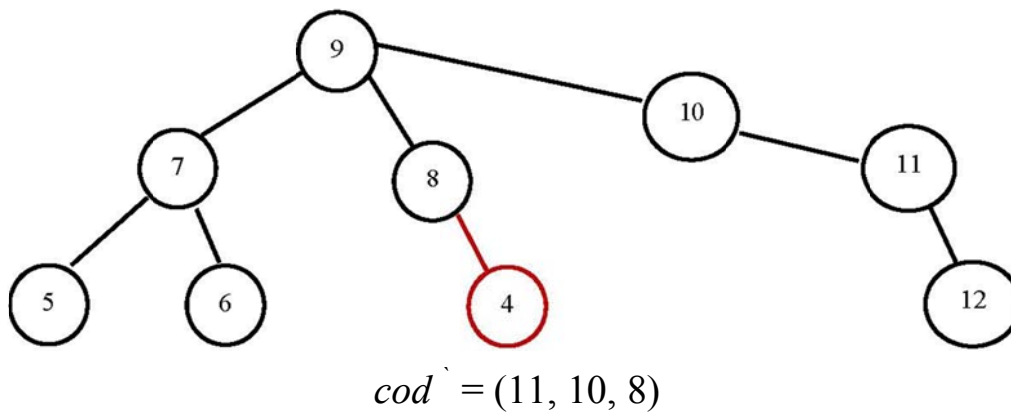
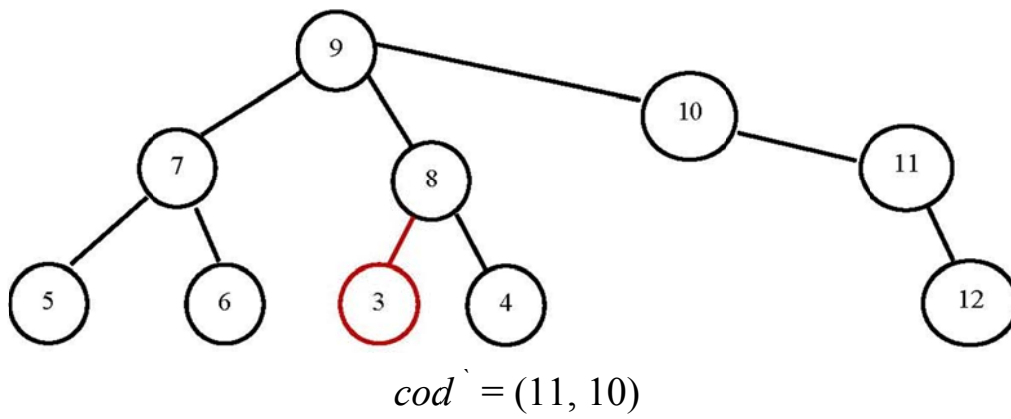
На рисунку 16 зображено дерево з коренем 9 і листками 1, 2, 3, 4, 5, 6, 12. Код Прюфера $cod = ()$ порожній.

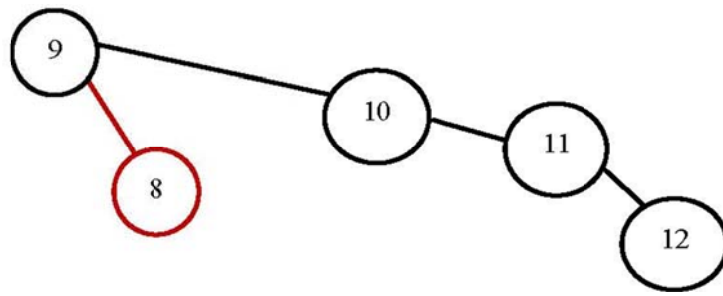


Виконаємо перший крок кодування: знаходимо листок із найменшим номером (у нас це 1). І в код Прюфера $cod = (11)$ додається номер вершини, яка зв'язана з вершиною 1 ребром, – це 11. Сама вершина 1 видаляється. Вершина 1 – це вершина з найменшим номером, якої немає в коді Прюфера. Далі всі кроки кодування зображено на рисунках.

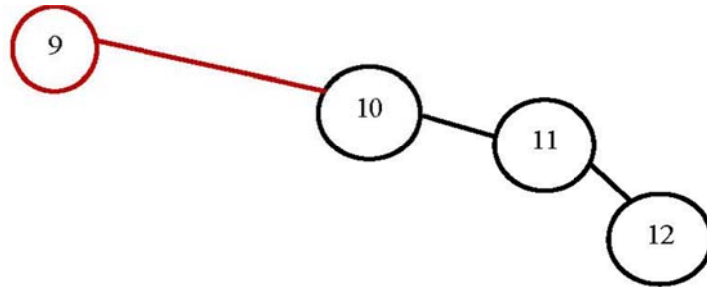


$cod = (11)$

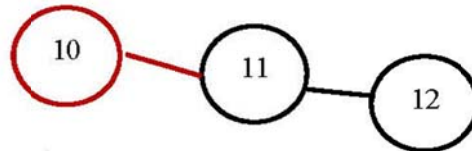




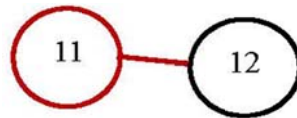
$$cod' = (11, 10, 8, 8, 7, 7, 9)$$



$$cod' = (11, 10, 8, 8, 7, 7, 9, 9)$$



$$cod' = (11, 10, 8, 8, 7, 7, 9, 9, 10)$$



$$cod' = (11, 10, 8, 8, 7, 7, 9, 9, 10, 11) = cod$$

Відповідь: $cod = (11, 10, 8, 8, 7, 7, 9, 9, 10, 11)$.

4. Множина M містить шість елементів, тому множину V вершин орграфа можна представити таким чином: $V = \{a, b, c, d, e, f\}$. Зважаючи на задане відображення, запишемо множину дуг $E = \{(a, d), (d, f), (f, c), (c, b), (b, e), (e, e)\}$.

Отже, відображення можна задати орієнтованим графом, що представлено на рисунку 18.

5. Орграф G має чотири вершини: $V = \{1, 2, 3, 4\}$ і чотири дуги: $e_1 = (1, 3)$, $e_2 = (1, 2)$, $e_3 = (4, 3)$, $e_4 = (3, 2)$ (див. рис. 19).

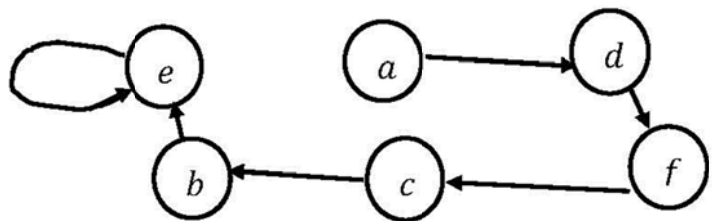


Рисунок 18 – Орієнтований граф G

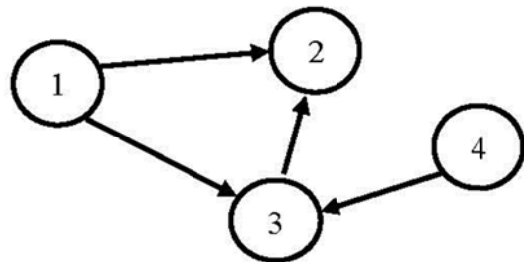


Рисунок 19 – Орієнтований граф G

4. ПІДГОТОВКА ДО ПІДСУМКОВОГО КОНТРОЛЮ

Письмовий залік проводиться за білетами, які складаються з чотирьох практичних завдань за темами, що вивчалися в першому семестрі. Відповідь на кожне завдання оцінюється максимально 10 балів. Максимальна кількість балів за кожне завдання вказується здобувачам заздалегідь та в білеті для проведення письмового заліку. Правильно виконаний письмовий залік оцінюється в 40 балів.

Екзаменаційна робота складається з чотирьох завдань – двох теоретичних питань, перелік яких відомий здобувачам заздалегідь, та двох практичних завдань. Відповідь на теоретичні питання оцінюється максимально 10 балами за кожне, які можна отримати у разі повної й обґрунтованої відповіді. Кожне практичне завдання оцінюється максимально 10 балів (максимальна кількість балів за кожне завдання вказується здобувачам заздалегідь та в екзаменаційному білеті). Правильно виконана екзаменаційна робота оцінюється в 40 балів.

Наведемо зразок залікового білета, перелік теоретичних екзаменаційних питань і зразок екзаменаційного білета.

Зразок залікового білета

1. Для заданої формули $(A \vee B \rightarrow \bar{C}) \rightarrow A$ логіки висловлень
 - a) зобразити дерево синтаксичного аналізу;
 - b) створити таблицю істинності;
 - c) виписати ДКНФ та ДДНФ, що рівносильні формулі.
2. Розв'язати конгруєнцію: $25x \equiv 81 \pmod{111}$.
3. Знайти $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $A \Delta B$, $B \setminus A$, якщо $A = \{c, f, h, m, p, v\}$; $B = \{a, c, e, g, k, m, r\}$.
4. Зашифрувати повідомлення $m = 17$ шифром RSA з відкритим ключем $n = 26$, $e = 11$.

Екзаменаційні питання

1. Логічні операції. Заперечення, кон'юнкція, диз'юнкція, імплікація, еквівалентність.
2. Закони логіки Буля.
3. Істиннісна функція. Еквівалентні висловлення. Тавтології.
4. Диз'юнктивна та кон'юнктивна нормальні форми формули.
5. Множини. Способи завдання множин.
6. Операції над множинами (об'єднання, перетинання, різниця, симетрична різниця, доповнення).
7. Діаграми Ейлера – Венна.
8. Закони ідемпотентності та де Моргана. Властивості комутативності, асоціативності, дистрибутивності, тотожності та доповнення. Пріоритет операцій.

9. Декартовий добуток множин.
10. Бінарне відношення між множинами (означення, способи завдання).
11. Функція з множини A в множину B (означення, зображення, область визначення, множина значень).
12. Ін'єкція, сюр'єкція, бієкція.
13. Відношення еквівалентності (означення, властивості).
14. Класи суміжності. Фактормножина. Класи еквівалентності.
15. Відношення порядку.
16. Кільце цілих чисел.
17. Найбільший спільний дільник та найменше спільне кратне двох натуральних чисел. Спосіб визначення НСД та НСК.
18. Алгоритм Евкліда. Навести приклад.
19. Відношення порівняння за модулем m (означення, властивості).
20. Кільце класів лишків за модулем m . Властивості конгруенцій.
21. Дії в кільці класів лишків за модулем m .
22. Розширений алгоритм Евкліда для обчислення мультиплікативного оберненого до числа b за модулем m . Навести приклад.
23. Функція Ейлера (означення, властивості, формула для обчислення значення в точці).
24. Алгебраїчні операції. Властивості бінарних операцій.
25. Нейтральний елемент відносно заданої операції. Симетричні елементи. Операція, обернена до заданої.
26. Підстановки.
27. Стабілізатори елемента множини, на якій діє група, і орбіта елемента. Лема Бернсайда.
28. Шифр RSA .
29. Лінійне кодування. Шифр одноразового блокнота.
30. Регістр зсуву зі зворотним зв'язком.
31. Формула включення-виключення. Навести приклад застосування.
32. Основні правила комбінаторики.
33. Розміщення, перестановки й комбінації (без повторень). Означення, формули для обчислення.
34. Розміщення, перестановки й комбінації (з повтореннями). Означення, формули для обчислення.
35. Біном Ньютона. Біноміальні тотожності.
36. Поліномна формула.
37. Урнова модель.
38. Числа Стірлінга першого роду.
39. Числа Стірлінга другого роду.
40. Формальний степеневий ряд.
41. Кільце формальних степеневих рядів – генератриса.
42. Рекурентне співвідношення (означення, характеристичний многочлен).
43. Числа Фібоначчі (означення, характеристичний многочлен). Формула Біне.
44. Властивості чисел Фібоначчі.
45. Числа Люка.
46. Неорієнтований граф. Основні означення та способи завдання.
47. Підграфи. Ізоморфізм графів.
48. Операції над графами.
49. Степені вершин графа. Лема про рукоисткання.
50. Маршрути в графі. Ланцюги, цикли.

51. Зв'язність графа.
52. Перевірка зв'язності графів.
53. Дерева. Теорема про кількість ребер графа.
54. Кістякове дерево. Побудова мінімального кістякового дерева.
55. Код Прюфера.
56. Плоскі та планарні графи. Теорема Ейлера.
57. Розфарбування графів. Означення та основні твердження. Гіпотеза про чотири фарби.
58. Ойлеровий цикл. Гамільтонів цикл. Означення, приклади.
59. Орієнтований граф. Основні означення та способи завдання.
60. Маршрути в орграфі.

Зразок екзаменаційного білета

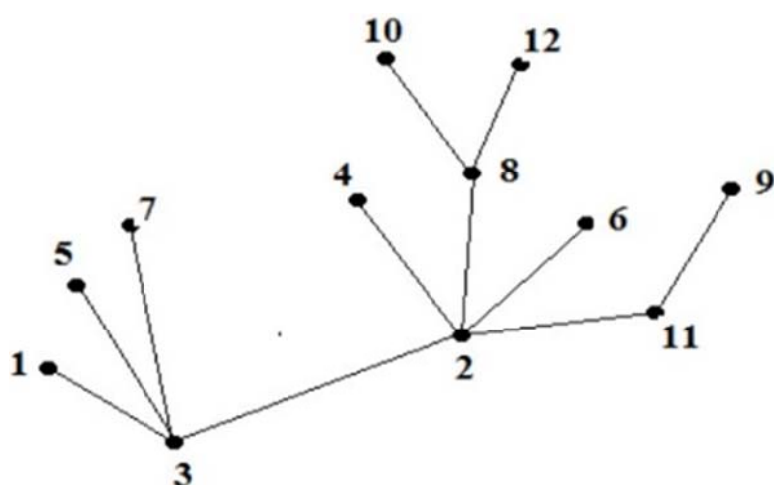


Рисунок 20 – Дерево T

1. Підстановки.
2. Числа Стірлінга другого роду.
3. Для заданої формули $A = \bar{x} \vee y \rightarrow z \wedge \bar{y}$ логіки висловлень зобразити дерево синтаксичного аналізу; скласти таблицю істинності; виписати ДКНФ та ДДНФ, що рівносильні A .
4. Задано дерево T (рис. 20). Потрібно знайти код Прюфера.

5. РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Аршава О. О.; Заєць І. М. Застосування чисел фібоначчі в криптографічних алгоритмах. *The 10th International scientific and practical conference "Modern methods of applying scientific theories" (March 14–17, 2023) Lisbon, Portugal. International Science Group. 2023. 481 p. 2023. p. 351.*
2. Ганюшкін О. Г., Безущак О. О. Теорія груп : навчальний посібник. К.: Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет", 2005. 123 с.
3. Трохимчук Р. М., Нікітченко М. С. Дискретна математика у прикладах і задачах : навчальний посібник. К.: Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет", 2017. 248 с.
4. Шаповалов С. П., Шаповалов І. М. Числа Фібоначчі в сучасній картині світу. *Сучасна картина світу: інтеграція наукового та позанаукового знання : зб. наук. пр. Державний вищий навчальний заклад «Українська академія банківської справи Національного банку України». Суми, 2004. Вип. 3. С. 60–63.*