

c/o

Ж-14038

ISSN 0453-8048

П 327551

ВІСНИК

Харківського національного
університету



№ 475

Вип. 49

Харків
2000

2484 (2) 24.05

Міністерство освіти та науки України

ISSN 0453-8048

Заснований у 1965 р.

ВІСНИК

Харківського національного
університету



№ 475

Серія

«Математика,

прикладна математика

і механіка»

Випуск 49

Харків
2000

Центральна наукова бібліотека
ХНУ імені В. Н. Каразіна
2013р.

УДК 517.9

До Віснику включено статті з математичного аналізу, диференціальних рівнянь, математичної теорії керування та механіки, які містять нові теоретичні результати у зазначених галузях і мають прикладне значення.

Для викладачів, наукових працівників, аспірантів, працюючих у відповідних або суміжних сферах.

Редакційна колегія:

Головний редактор – Коробов В.І. – д-р ф.-м. наук.

Члени редакційної колегії:

Борисенко О.А. – д-р ф.-м. наук., чл.-кор. НАН України.

Гандель Ю.В. – д-р ф.-м. наук.

Гришин А.П. – д-р ф.-м. наук.

Золотарьов В.О. – д-р ф.-м. наук.

Руткас А.Г. – д-р ф.-м. наук.

Скляр Г.М. – д-р ф.-м. наук.

Тарапов І.Є. – д-р ф.-м. наук.

Фаворов С.Ю. – д-р ф.-м. наук.

Чудинович І.Ю. – д-р ф.-м. наук.

Чуєшов І.Д. – д-р ф.-м. наук.

Щербина В.О. – д-р ф.-м. наук.

Янцевич А.А. – д-р ф.-м. наук.

Відповідальний секретар – канд. ф.-м. наук Резуненко О.В.

Адреса редакційної колегії: 61077, Харків, м. Свободи, 4,

ХНУ, механіко-математичний факультет, к.7-29.

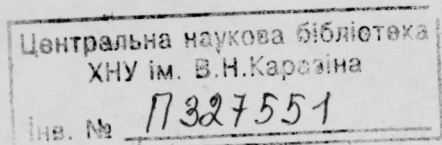
Тел. 45-75-18, Email: vestnik@univer.kharkov.ua

Интернет:

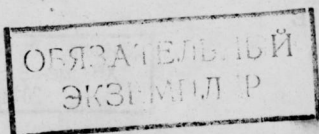
http://www.univer.kharkov.ua/main/dep/mechmat/vestnik/vest_m.htm

Друкується за рішенням Вченої Ради Харківського національного університету (протокол № 4 від 28 квітня 2000 р.).

Свідоцтво про державну реєстрацію КВ № 4063 від 02.03.2000 р.



©Харківський національний університет, 2000



(14)сф

О конференции в Сумах

В Сумах 19-22 ноября состоялась международная конференция “Математический анализ и экономика”, организованная Украинской академией банковского дела при содействии Харьковского национального университета и Физико-технического института низких температур НАН Украины. На конференции работали две секции — математическая и экономическая. В математической секции Украина была представлена математиками Дрогобыча, Донецка, Киева, Львова, Сум, Харькова. Среди иностранных участников конференции были представители России, Турции, Швеции. В докладах математической секции освещались следующие направления.

- Вопросы роста и граничного поведения аналитических и субгармонических функций (Винницкий, Вишнякова, Гирнык, Гришин, Дильный, Заболоцкий, Ильинский, Коломиец, Малютин, Малютина, Шепарович).
- Распределение значений аналитических и мероморфных функций (Марченко, Николенко).
- Вопросы аппроксимации аналитических функций и ортогональные многочлены (Голинский, Довгошей, Ленхорова, Тригуб, Швецова, Шевчук).
- Почти-периодические функции и ряды Дирихле (Бритик, Парфенова, Скаскив, Фаворов, Хеденмальм).
- Краевая задача Римана (Агранович).
- Плюрисубгармонические функции (Пассаре, Рашковский).
- Теория оптимального управления (Фардигола).
- Римановы поверхности (Таирова).
- Теория упругости (Острик, Танченко).
- Банаховы алгебры (Садык).
- Аналитические методы в теории вероятностей (Горяинов).

Конференция была прекрасно организована и ее участники выразили желание, чтобы она проводилась регулярно.

В настоящем сборнике (стр. 4-217) печатаются избранные работы участников конференции.

А.Ф. Гришин, К.Г. Малютин

Solution of the Homogeneous Riemann Boundary Problem with n -term Boundary Conditions

P. Z. Agranovich

Institute for Low Temperature Physics National Academy of Sciences, Ukraine

The class $H_{\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n}$ of holomorphic functions $f(z)$, $z \in \mathbb{C}$, is considered such that each function $f(z)$ can be represented by the following way

$$f(z) = \Delta_1(\arg z)|z|^{\rho_1} + \Delta_2(\arg z)|z|^{\rho_2} + \dots + \Delta_n(\arg z)|z|^{\rho_n} + \kappa(z),$$

$$z \rightarrow \infty,$$

where $0 < [\rho_1] < \rho_n < \dots < \rho_1$, and the function $\kappa(z)$ satisfies

$$\int_T^{2T} \sup_{\arg z \in [0, 2\pi]} |\kappa(z)|^q d|z| = o(T^{\rho_n q + 1}), \quad T \rightarrow \infty, \quad q > 1.$$

Extending the well-known results of N.Govorov we solve the boundary Riemann problem in the class $H_{\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n}$ in the case when all zeros of the holomorphic function f are concentrated on the finite system of rays.
1991 Mathematics Subject Classification 30E25.

1. Introduction

Let K be a simple smooth contour dividing the plane \mathbb{C} into two parts: Ω^+ and Ω^- ; $G(t)$ and $g(t)$ be functions on K . In 1857 Riemann [6] formulated the problem of the determination of two analytic functions $\Phi^+(z)$ and $\Phi^-(z)$ in the domains Ω^+ and Ω^- , correspondingly such that

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t) + g(t), \quad t \in K. \quad (1.1)$$

This question marked the beginning of active research on a mathematical problem. It is now known as "Riemann boundary problem" ¹.

The first result was found by Hilbert in [3]. Then numerous works appeared in this area ². Such great interest to this subject can be explained as its

¹There are the another names of this problem in the literature.

²An extensive bibliography is in [2, 4].

applications to the various classes of differential equations. Below we present only some of the known results.

In 1936 году F.D.Gakhov [2] obtained complete description of the solutions of the problem (1.1) in the case when K is closed contour, the functions $G(t)$ and $g(t)$ satisfy the Hölder condition and $G(t) \neq 0$, $t \in K$. This description was given of the so-called "index". Note that under these conditions on the contour and functions the value of index is finite.

In the sixties N.V.Govorov [4] developed the theory of the Riemann boundary problem with infinite index of polynomial growth. Later this theory was generalized by a number of authors in the various directions (see, for example, [5]).

In this article the another extension of the Govorov theory is given.

2. The main definitions and notations

Definition 2.1. Let $0 \leq [\rho_1] < \rho_n < \rho_{n-1} < \dots < \rho_1$ be given numbers. We will say that $f(t)$, $t > 0$, has polynomial asymptotics with parameters $(\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n)$ as $t \rightarrow \infty$ if it can be represented in the following way

$$f(t) = \Delta_1 t^{\rho_1} + \Delta_2 t^{\rho_2} + \dots + \Delta_n t^{\rho_n} + \phi(t) \quad (2.1)$$

where Δ_j , $j = 1, \dots, n$, are real constants, and the function $\phi(t)$ is small in certain sense compared to the previous term. Similarly we will understand the expression "polynomial asymptotics of the function $f(z)$ with the parameters (ρ_1, \dots, ρ_n) as $z \rightarrow \infty$, $z \in \mathbb{C}$ ". In this case in (2.1) the coefficients Δ_j are functions of $\theta = \arg z$ and $t = |z|$.

Further the smallness of the remainder term will be expressed in the uniform metric and in the sense of the following

Definition 2.2. We will say that a function f satisfies the condition (q, ρ) if

$$\int_T^{2T} |f(t)|^q dt = o(T^{\rho q + 1}), \quad T \rightarrow \infty,$$

where $\rho > 0$ and $q > 1$ are fixed numbers.

Let $K = \{z : \operatorname{Im} z = 0, \operatorname{Re} z \geq t_0 > 0\}$; $\tilde{K} = K \setminus \{t_0\}$.

Definition 2.3. Let D be the class of continuous functions $g(t)$, $t \in \mathbb{R}$, satisfying the Dini condition, i.e.

$$\int_0^\infty \frac{|g(x+t) - g(x)|}{t} dt < \infty.$$

We will assume for G from (1.1) that $|G(t)| > \tau > 0$ at all points of K , and G satisfies the following two conditions:

- i) $(2\pi)^{-1} \arg G(t)$ has the n -term asymptotics with the parameters $(\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n)$

$$\frac{\arg G(t)}{2\pi} = \sum_{j=1}^n \Delta_j t^{\rho_j} + \phi(t)$$

where $\rho_1 < 1/2$, $\Delta_1 > 0$; the function $\phi \in D$ satisfies the condition (q, ρ_n) , $q > 1$, and

$$-1 < \sum_{j=1}^n \Delta_j t_0^{\rho_j} + \phi(t_0) \leq 0;$$

- ii) $(2\pi)^{-1} \ln |G(t)|$ has n -term asymptotics with the same parameters $(\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n)$

$$\frac{\ln |G(t)|}{2\pi} = \sum_{j=1}^n \delta_j t^{\rho_j} + \kappa(t)$$

where the coefficient $\delta_1 \in (0, \Delta_1 \operatorname{ctg} \pi \rho_1)$, and the remainder term $\kappa \in D$ satisfies the condition (q, ρ_n) .

3. The homogeneous generalized Riemann problem

Consider the problem of the determination of a holomorphic function $\Phi(z)$ in $\Omega = \mathbb{C} \setminus K$ which limit values are connected on \tilde{K} by the relation

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t), \quad t \in \tilde{K},$$

and such that

$$\Phi(re^{i\theta}) = \sum_j^n \gamma_j(\theta) r^{\rho_j} + \alpha(re^{i\theta}).$$

Here the function $\gamma_1(\theta) < 0$ for all $\theta \in (0, 2\pi)$, and supremum of the remainder term $\sup_{\theta \in (0, 2\pi)} |\alpha(re^{i\theta})|$ satisfies the condition (q, ρ_n) .

This problem will be called *homogeneous generalized Riemann problem*.

3.1 Canonical function. Put

$$\chi(z) = \exp \left\{ \frac{z}{2\pi i} \int_K \frac{\ln G(\tau) d\tau}{\tau(\tau-z)} \right\}. \quad (3.1)$$

Here at the point $\tau = z$ we consider the integral in the sense of principal value. Rewrite this expression in the following way:

$$\chi(z) = \exp \left\{ \frac{z}{2\pi i} \left(\int_K \frac{\ln |G(\tau)| d\tau}{\tau(\tau-z)} + i \int_K \frac{\arg G(\tau) d\tau}{\tau(\tau-z)} \right) \right\}. \quad (3.2)$$

It is easy to see that by virtue of i) and ii) the integrals in (3.2) converge and hence the integral (3.1) converges too.

3.2 Properties of the function $\chi(z)$.

- 1) $\chi(z)$ is analytic in $\mathbb{C} \setminus K$ and continuous up to \tilde{K} .
- 2) $\chi(z) \neq 0$ everywhere in $\mathbb{C} \setminus (\{t_0\} \cup \{\infty\})$.
- 3) It follows from the Sokhotskii-Plemelj formula that

$$\chi^+(t) = G(t)\chi^-(t), t \in \tilde{K}.$$

- 4) $\chi(0) = 1$.
- 5) For the sufficiently small neighborhood of the point t_0 there exists $\alpha \in [0, 1)$ such that

$$C_1|z - t_0|^\alpha < |\chi(z)| < C_2. \tag{3.3}$$

Proof. Indeed let t_1 be an arbitrary point of the ray K . Then

$$\ln \chi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{t_0}^{t_1} \frac{\ln G(\tau) d\tau}{\tau - z} - \frac{1}{2\pi i} \int_{t_0}^{t_1} \frac{\ln G(\tau) d\tau}{\tau} + \frac{z}{2\pi i} \int_{t_1}^{\infty} \frac{\ln G(\tau) d\tau}{\tau(\tau - z)}.$$

As it was shown in [2], near the point $z = t_0$ the following representation takes place as $z \rightarrow t_0$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{t_0}^{t_1} \frac{\ln G(\tau) d\tau}{\tau - z} = \frac{1}{2\pi} \ln |z - t_0| \{i \ln |G(t_0)| - \arg G(t_0)\} + O(1).$$

Put $\alpha = -\frac{1}{2\pi} \arg G(t_0)$. From i) we have

$$\ln |\chi(z)| = \alpha \ln |z - t_0| + O(1), z \rightarrow t_0,$$

where $0 \leq \alpha < 1$. Hence the estimate (3.3) is valid.

- 6) The function $\chi(z)$ is bounded³ in the domain Ω .

To establish of this let us consider the following two theorems.

Theorem 3.1. *For the function χ from (3.1) the following asymptotic representation takes place*

$$\begin{aligned} \ln |\chi(re^{i\theta})| = & - \sum_{j=1}^n \frac{\pi r^{\rho_j}}{\sin \pi \rho_j} (\Delta_j \cos \rho_j(\theta - \pi) + \delta_j \sin \rho_j(\theta - \pi)) + \\ & + \psi(re^{i\theta}) \end{aligned}$$

where $\psi(re^{i\theta}) = o(r^{\rho_n})$, $r \rightarrow \infty$, uniformly for $\theta \in [0, 2\pi]$ outside some neighborhood of the point t_0 .

³In [4] this fact was established with the help of more cumbersome arguments.

Proof. As it follows from (3.2), i) and ii) the function χ can be represented in the following way

$$\chi(z) = \exp \left\{ \frac{z}{i} \int_K \frac{\delta_1 t^{\rho_1} + \delta_2 t^{\rho_2} + \dots + \delta_n t^{\rho_n} + \kappa(t)}{t(t-z)} dt \right\} \times \\ \times \exp \left\{ z \int_K \frac{\Delta_1 t^{\rho_1} + \Delta_2 t^{\rho_2} + \dots + \Delta_n t^{\rho_n} + \phi(t)}{t(t-z)} dt \right\}.$$

Now to complete the proof we need the following fact.

Theorem 3.2. *Let a function γ has n -term asymptotics*

$$(3.3) \quad \gamma(t) = \sum_j^n \gamma_j t^{\rho_j} + \phi(t), \quad t \in K,$$

where $0 \leq [\rho_1] = p < \rho_n < \rho_{n-1} < \dots < \rho_1 < p+1$, and the function ϕ satisfies the condition (q, ρ_n) for some $q \geq 1$. Then on the plane \mathbb{C} the functions

$$f_1(z) = \operatorname{Re} \left\{ z^{p+1} \int_K \frac{\gamma(t) dt}{t^{p+1}(t-z)} \right\}$$

and

$$f_2(z) = \operatorname{Im} \left\{ z^{p+1} \int_K \frac{\gamma(t) dt}{t^{p+1}(t-z)} \right\}.$$

have n -term asymptotics

$$f_1(z) = - \sum_{j=1}^n \frac{\pi \gamma_j r^{\rho_j}}{\sin \pi \rho_j} \cos \rho_j(\theta - \pi) + \psi_1(re^{i\theta}), \quad z = re^{i\theta},$$

and

$$f_2(z) = - \sum_{j=1}^n \frac{\pi \gamma_j r^{\rho_j}}{\sin \pi \rho_j} \sin \rho_j(\theta - \pi) + \psi_2(re^{i\theta}), \quad z = re^{i\theta},$$

correspondingly. Here the functions $\psi_j(re^{i\theta}) = o(r^{\rho_n})$, $r \rightarrow \infty$, $j = 1, 2$, uniformly for $\theta \in [0, 2\pi]$ if the point $z = re^{i\theta}$ does not belong to any $C_{0,1}$ -set⁴.

If $q > 1$ then the functions $\sup_{\theta \in [0, 2\pi]} |\psi_j(re^{i\theta})|$, $j = 1, 2$, satisfy the condition (q, ρ_n) .

⁴The set E is called a $C_{0,1}$ -set if it can be covered by a system of circles $K_j = \{|z - z_j| < r_j\}$ such that $\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{R} \sum_{j: |z_j| < R} r_j = 0$.

The proof of this theorem is similar to the proof of Theorem 1 from [1].

The analysis of the proof of Theorem 3.2 shows that the exceptional sets appear when the functions f_1 and f_2 become $-\infty$ at some points of the real axis. In virtue of the property 2) the function χ does not vanish everywhere outside some neighborhood $\omega = \{z : |z| < r_0\}$ of the point t_0 . Hence the required asymptotics of the function $\ln |\chi(z)|$ takes place in $\mathbb{C} \setminus \omega$.

Now we prove of the property 6). By virtue of Theorem 3.1

$$\ln |\chi(re^{i\theta})| = -\frac{\pi r^{\rho_1}}{\sin \pi \rho_1} (\Delta_1 \cos \rho_1(\theta - \pi) + \delta_1 \sin \rho_1(\theta - \pi)) + \tilde{\psi}(re^{i\theta})$$

where the function $\tilde{\psi}(re^{i\theta}) = o(r^{\rho_1})$, $r \rightarrow \infty$, uniformly for $\theta \in [0, 2\pi]$. Therefore for any positive ε and $r > r_\varepsilon$ the inequality

$$\ln |\chi(re^{i\theta})| < \left(-\frac{\pi}{\sin \pi \rho_1} (\Delta_1 \cos \rho_1(\theta - \pi) + \delta_1 \sin \rho_1(\theta - \pi)) + \varepsilon \right) r^{\rho_1}$$

is valid.

From this inequality we conclude that

$$\begin{aligned} \max_{\theta \in [0, 2\pi]} |\chi(re^{i\theta})| &< \max_{\theta} \exp \left(-\frac{\pi}{2} \frac{r^{\rho_1}}{\sin \pi \rho_1} \times \right. \\ &\times (\Delta_1 \cos \rho_1(\theta - \pi) + \delta_1 \sin \rho_1(\theta - \pi)) = \\ &\left. \exp \left(-\frac{\pi}{2} \frac{r^{\rho_1}}{\sin \pi \rho_1} (\Delta_1 \cos \rho_1(\theta_0 - \pi) + \delta_1 \sin \rho_1(\theta_0 - \pi)) \right), r > r_0, \end{aligned}$$

where $\tan \rho_1(\theta_0 - \pi) = \frac{\delta_1}{\Delta_1}$, $\theta_0 \in (\pi, 3/2\pi)$.

From this estimate we obtain that the function χ is bounded.

Definition 3.1. *The function χ satisfying the conditions 1) - 6) is called canonical function of the generalized Riemann boundary problem.*

3.3 Description of solutions of the generalized Riemann problem.

Let B_K be a class of holomorphic functions in Ω and bounded in any circle $\{|z| \leq R\}$.

As it was shown in [4] by the properties 1) - 6) of the canonical function the general solution of Riemann problem in the class B_K can be represent in the form of $\Phi(z) = F(z)\chi(z)$ where $\chi(z)$ is the canonical function and $F(z)$ is an arbitrary entire function⁵.

To simplify notations we will investigate only the case of two-term asymptotic representation.

Let ρ_1 be any positive noninteger number and $0 \leq \theta_1 < \theta_2 < \dots < \theta_m \leq 2\pi$. Put

$$\alpha_j = \left[\rho_1 \frac{\theta_{j+1} - \theta_j}{\pi} \right] \frac{\pi}{\theta_{j+1} - \theta_j}, j = 1, \dots, m - 1;$$

⁵Note that in [4] this fact has been obtained under the hypothesis that the function $G(t)$ satisfies the Hölder condition but all reasonings are applied in our case.

$$\alpha_{m+j} = \left(\left[\rho_1 \frac{\theta_{j+1} - \theta_j}{\pi} \right] - 1 \right) \frac{\pi}{\theta_{j+1} - \theta_j}, \quad j = 1, \dots, m-1.$$

Label the set $\{\alpha_j\}_1^{2m-2}$ in the decreasing order: $\alpha_{k_1} \geq \alpha_{k_2} \geq \dots \geq \alpha_{k_{2m-2}}$.

We will assume that

$$\alpha_{k_1} = \alpha_{k_2} = \dots = \alpha_{k_{p_1}} = \tilde{\alpha}_1, \dots, \alpha_{k_{p_{M-1}+1}} = \dots = \alpha_{k_{p_M}} = \tilde{\alpha}_M.$$

Denote by $U_j(\theta)$, $j = 1, \dots, M$, the matrix

$$U_j = \begin{pmatrix} \cos \tilde{\alpha}_j(\theta_1 - \theta_{p_{j-1}+1} - \pi) & \dots & \cos \tilde{\alpha}_j(\theta_1 - \theta_{p_j} - \pi) \\ \dots & \dots & \dots \\ \cos \tilde{\alpha}_j(\theta_m - \theta_{p_{j-1}+1} - \pi) & \dots & \cos \tilde{\alpha}_j(\theta_m - \theta_{p_j} - \pi) \end{pmatrix}.$$

Definition 3.2. Let $[\rho_1] < \rho_2 < \rho_1$. We will say that a system of rays $Y_{\rho_1, \rho_2} = (\theta_1, \dots, \theta_m)$ is correct if

1) the numbers

$$\rho_2 \frac{\theta_{j+1} - \theta_j}{\pi}$$

are noninteger for any $j = 1, \dots, m-1$;

2) either for some $j_0, 1 \leq j_0 \leq m-1$, the parameter $\rho_2 > \alpha_{j_0}$, or if $\rho_2 < \tilde{\alpha}_j, \forall j$, then matrix U_j has the maximal rang.

Let H_{ρ_1, ρ_2} be the class of all holomorphic functions f in $\mathbb{C} \setminus K$ with zeros on the correct system of rays Y_{ρ_1, ρ_2} and having in the domain Ω the two-term asymptotics with the parameters (ρ_1, ρ_2) and with the strictly negative coefficient of the higher term.

Let us study the generalized Riemann problem in the class H_{ρ_1, ρ_2} .

Theorem 3.3. [4]. Let $\Phi(z)$ be a solution of the generalized Riemann problem in the class H_{ρ_1, ρ_2} . Then the order ρ_F of the entire function $F(z) = \Phi(z)\chi^{-1}(z)$ does not exceed ρ_1 .

Proof. We will prove this theorem by contradiction. Assume the contrary. Then there exists such sequence of points $z_n \rightarrow \infty$ that $\ln |F(z_n)| > |z_n|^{(\rho_1 + \rho_F)/2}$. As it follows from Theorem 3.1

$$|\Phi(z_n)| = |\chi(z_n)F(z_n)| \rightarrow \infty,$$

that is impossible. Theorem is proved.

Theorem 3.4. If $\Phi \in B_K$ is the solution of Riemann problem in the class H_{ρ_1, ρ_2} then the zeros of the corresponding entire function $F(z)$ are concentrated on the correct system of rays, the order ρ_F does not exceed ρ_1 and $F(z)$ has the two-term asymptotics with the parameters (ρ_1, ρ_2) .

Proof. As it follows from the property 2) of the function χ the functions Φ and F have the same zeros except for possibly t_0 . Hence the zeros of the function F are concentrated on the correct system of rays. In view of Theorem 3.1 we conclude that the function F has the required two-term asymptotics with the parameters (ρ_1, ρ_2) . The inequality $\rho_F \leq \rho_1$ was proved in Theorem 3.3. The theorem is established.

Remark. Note that F is not at all an arbitrary entire function. Its coefficient of the higher term is such that the coefficient of the higher term of the asymptotic representation for the function Φ is negative.

The converse result to Theorem 3.4 is also true.

Indeed let Y_{ρ_1, ρ_2} be a correct system of rays $\{\arg z = \theta_j, j = 1, \dots, m\}$. We consider the functions $\cos \rho_1(\theta - \theta_j - \pi), j = 1, \dots, m$, on $[0, 2\pi]$. Let us choose positive values $\tilde{\Delta}_j^1, j = 1, \dots, m$, such that the following inequality

$$\Delta_1 \cos \rho_1(\theta - \pi) + \delta_1 \sin \rho_1(\theta - \pi) - \sum_{j=1}^m \tilde{\Delta}_j^1 \cos \rho_1(\theta - \theta_j - \pi) > 0, \theta \in [0, 2\pi],$$

is valid.

It is easy to see that due to the continuity of these functions and the selection of δ_1 such parameters $\tilde{\Delta}_j^1$ exist. Moreover they are not defined uniquely.

Let now the measure μ be concentrated on the rays of the system Y_{ρ_1, ρ_2} and it has the asymptotics

$$\tilde{\Delta}_j^1 t^{\rho_1} + o(t^{\rho_2}), j = 1, \dots, m,$$

on the ray $\arg z = \theta_j$.

Then a subharmonic function u with the Riesz measure μ has required two-term asymptotics in the plane (cf. [1]).

In view of the theorem of R. Ulmukhametov [7] there exists an entire function F such that its zeros are concentrated on the rays $\{\arg z = \theta_j\}$ and

$$\ln |F(re^{i\theta})| = \frac{\pi r^{\rho_1}}{\sin \pi \rho_1} \sum_{j=1}^m \tilde{\Delta}_j^1 \cos \rho_1(\theta - \theta_j - \pi) + \psi(re^{i\theta}), r \rightarrow \infty,$$

where the remainder term $\psi(z)$ satisfies the condition (q, ρ_2) .

Therefore the function $\Phi(z) = \chi(z)F(z)$ is the solution of Riemann problem in the class H_{ρ_1, ρ_2} .

This investigation is partially supported by INTAS-99-00089.

REFERENCES

1. Agranovich P., Logvinenko V. The Analogue of Valiron-Titchmarsh Theorem for Two-term Asymptotics of the Subharmonic Function with Masses on a Finite System of Rays // Siberian. math. journal. - 1985. - 5. - P. 3-19.

2. Gakhov F. Boundary Problems.- Moscow: Nauka, - 1977. - 640 p. (in Russian).
3. Hilbert D. Grundzüge der Integralgleichungen // Leipzig-Berlin: 2-te Aufl. Drittes Abschnitt, - 1924.
4. Govorov N. Riemann Boundary Value Problems with Infinite Index.-Moscow: Nauka, - 1986. - 239 p. (in Russian).
5. Ostrovskii I. Solvability Conditions for the Homogeneous Riemann Boundary Problem with an Infinite Index // Advances in Soviet mathematics, AMS, - 1992. - 11 - P. 107-135.
6. Riemann B. About Asymptotic Behaviour of Subharmonic and Entire Functions // Math. Proceeding. - 1979. - T. 108, 2. - P. 147-167.
7. Ulmukhametov R.S. Approximation of subharmonic functions // Analysis Math. - 1985. - 11. - P. 257-282.

Комплексный анализ и уравнения в свертках

В. В. Волчков

Донецкий государственный университет, Украина

Изучаются уравнения свертки на комплексном гиперболическом пространстве $H^n(\mathbb{C})$. Найдено общее решение одного класса таких уравнений и получена локальная теорема о двух радиусах для системы сверточных уравнений.

1991 Mathematics Subject Classification 53C65.

1. Введение

Пусть \mathbb{R}^n — вещественное евклидово пространство размерности n , Ω — открытое выпуклое подмножество \mathbb{R}^n , T — ненулевое распределение в \mathbb{R}^n с компактным носителем $\text{supp } T$. Обозначим

$$\Omega_T = \{x \in \mathbb{R}^n : x - y \in \Omega \text{ при всех } y \in \text{supp } T\}.$$

Функция $f \in C^\infty(\Omega)$ называется периодической в среднем относительно T , если

$$(T * f)(x) = T(f(x - y)) = 0, \quad x \in \Omega_T, \quad (1.1)$$

где распределение T действует по переменной y .

Одной из главных проблем теории периодических в среднем функций является проблема спектрального синтеза и существования интегральных представлений Фурье для решений (1.1) (см., например, [1]). Классические результаты в этом направлении принадлежат Дельсарту, Шварцу, Мальгранжу, Эренпрейсу, Паламодову, Хёрмандеру и др. (см. [1]). Среди более поздних достижений в этой области отметим работы Беренштейна, Зальцмана, Тейлора, Гэя, Струшпы, Напалкова, Кучмента и др. (см. [1]–[3] и библиографию к этим работам).

Теоремы о представлении решений уравнения (1.1) играют важную роль в задачах, связанных с геометрическими аспектами периодичности в среднем (см. обзоры [1], [4], а также [5]–[20]). Ключевым моментом в ряде таких задач является вид описания периодических в среднем функций. Известная теорема аппроксимации Мальгранжа-Хёрмандера (см. [2] гл. 16, теорема 16.4.1)

утверждает, что сужение на Ω всех линейных комбинаций экспоненциально-полиномиальных решений уравнения (1.1) плотно в пространстве всех его решений в топологии, индуцированной $C^\infty(\Omega)$. Значительное продвижение в этой тематике было достигнуто Эренпрайсом [21], [22] и независимо Паламо-довым [23]. Их результат, известный под названием "фундаментального принципа", дает экспоненциальное представление решений линейных уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами (см., например, [1], теорема 2.3). Позже были получены аналоги фундаментального принципа для уравнений в свертках и их систем ([1], теорема 2.13). Отметим также теорему Беренштейна-Гэя ([1], теорема 2.19), в которой для обратимых распределений T (см., например, [2] глава 16, определение 16.3.12) решение (1.1) представлено в виде ряда по экспоненциальным полиномам, периодическим в среднем относительно T . Эти результаты получены с помощью методов многомерного комплексного анализа.

В случае, когда Ω — шар, принципиально новый метод предложен в работах [6], [10], [19]. Он дает явное решение уравнения свертки в виде разложения в ряд Фурье специального вида по сферическим гармоникам (см. [19]). Это позволило, в частности, получить окончательные результаты в ряде задач, связанных с шаровыми и сферическими средними (см. [5]–[20]). В работах [7], [15] содержится обобщение этой методики для более широкого класса множеств Ω . В связи с многочисленными приложениями, большой интерес представляет развитие такой техники для некомпактных двухточечно-однородных пространств. В соответствии с их классификацией (см., например, [24] гл. 1 § 3, п. 3) — это в точности евклидовы пространства, гиперболические пространства $H^n(\mathbb{R})$, $H^n(\mathbb{C})$, $H^n(\mathbb{H})$ и гиперболическое пространство Кэли $H^{16}(\text{Cay})$. В данной работе изучаются уравнения свертки на комплексном гиперболическом пространстве $H^n(\mathbb{C})$. Найдено общее решение одного класса таких уравнений и получена локальная теорема о двух радиусах для системы сверточных уравнений. Аналогичные результаты для \mathbb{R}^n и $H^n(\mathbb{R})$ содержатся в работе [29].

2. Основные результаты

Пусть \mathbb{C}^n — комплексное евклидово пространство размерности $n \geq 2$ с эрмитовым скалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle$, $B = \{z \in \mathbb{C}^n : |z| < 1\}$, где $|z|^2 = \langle z, z \rangle$. Обозначим $d(z, w)$ — расстояние между точками $z, w \in B$ в метрике Бергмана, то есть

$$d(z, w) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{|1 - \langle w, z \rangle| + \sqrt{|w - z|^2 + |\langle w, z \rangle|^2 - |z|^2 |w|^2}}{|1 - \langle w, z \rangle| - \sqrt{|w - z|^2 + |\langle w, z \rangle|^2 - |z|^2 |w|^2}} \right). \quad (2.1)$$

Как известно (см., например, [25]), комплексное гиперболическое пространство $H^n(\mathbb{C})$ размерности n изометрично шару B с метрикой (2.1). Определим на B меру τ равенством

$$d\tau(z) = \frac{dm(z)}{(1 - |z|^2)^{n+1}},$$

где m — мера Лебега в \mathbb{C}^n , нормированная условием $m(B) = 1$. Мера τ инвариантна относительно группы G всех биголоморфных отображений шара B на себя (см. [26]). Группа G есть группа Ли преобразований (см. [27] гл. 3), действующая транзитивно на шаре B . Унитарная группа $\mathcal{U}(n)$ является подгруппой изотропии точки $z = 0$ в G , то есть однородное пространство $G/\mathcal{U}(n)$ совпадает с B .

Пусть $S = \{z \in \mathbb{C}^n : |z| = 1\}$, ρ, σ — полярные координаты в \mathbb{C}^n ($\forall z \in \mathbb{C}^n \rho = |z|$, а если $z \neq 0$, то $\sigma = z/\rho$), $\{S_{p,q}^{(k)}(\sigma)\}$ ($p, q = 0, 1, \dots; 1 \leq k \leq Q(n, p, q)$) — фиксированный ортонормированный базис в пространстве сферических гармоник бистепени (p, q) , рассматриваемом как подпространство $L_2(S)$ (см. [25]). Обозначим

$$\Phi_\lambda^{p,q}(\rho) = \frac{\Gamma(\nu + q)\Gamma(\nu + p)\Gamma(n)}{\Gamma(n + p + q)\Gamma^2(\nu)} \rho^{p+q} (1 - \rho^2)^\nu F(\nu + q, \nu + p; n + p + q; \rho^2),$$

$$\Phi_{\lambda,m}^{p,q}(\rho) = \frac{d^m}{d\mu^m} \left(\Phi_\mu^{p,q}(\rho) \right) \Big|_{\mu=\lambda}, \quad m = 0, 1, \dots,$$

где $\nu = \frac{n-i\lambda}{2}$, $\lambda \in \mathbb{C}$, F — гипергеометрическая функция, Γ — гамма-функция.

Далее, как обычно, $\mathcal{D}(\mathcal{M})$ — пространство финитных бесконечно дифференцируемых функций на гладком многообразии \mathcal{M} , и $\mathcal{D}'(\mathcal{M})$ — пространство распределений на \mathcal{M} . Следуя [24], обозначим через $T_1 \times T_2$ свертку двух распределений на $H^n(\mathbb{C})$, одно из которых имеет компактный носитель. Пусть $B_R = \{z \in B : d(0, z) < R\}$ — открытый геодезический шар радиуса R , T — данное радиальное распределение на B_R с носителем $\text{supp } T = \overline{B}_r$ ($0 < r < R$). Радиальность T означает, что для любого $U \in \mathcal{U}(n)$ $T(\varphi(z)) = T(\varphi(U^{-1}z))$, $\varphi \in \mathcal{D}(B_R)$. Рассмотрим уравнение свертки

$$(f \times T)(z) = 0, \quad z \in B_{R-r}, \tag{2.2}$$

где $f \in \mathcal{D}'(B_R)$. В случае, когда $f \in C^\infty(B_R)$, имеем

$$(f \times T)(g_0) = T(f(gz)) = 0 \quad \forall g \in G : g_0 \in B_{R-r}.$$

Теорема 2.1. Пусть распределение $f \in \mathcal{D}'(B_R)$ является решением уравнения (2.2) и при некотором $\varepsilon > 0$ $f = 0$ в $B_{r+\varepsilon}$. Тогда $f = 0$ в B_R . Если $f \in C^\infty(B_R)$, данное утверждение верно и при $\varepsilon = 0$.

Отметим, что условия на f в теореме 2.1 в общем случае ослабить нельзя.

Пусть $M(T)$ — множество корней λ сферического преобразования $\hat{T}(\lambda) = T(\Phi_\lambda^{0,0}(|z|))$ таких, что $-\frac{\pi}{2} < \text{arg } \lambda \leq \frac{\pi}{2}$. Обозначим n_λ — кратность корня $\lambda \in M(T)$. Далее предполагаем, что множество $M(T)$ при $|\lambda| \rightarrow +\infty$ удовлетворяет условиям:

$$|\text{Im } \lambda| = O(\ln |\lambda|), \quad n_\lambda = O(1), \quad |\hat{T}^{(n_\lambda)}(\lambda)| > \frac{1}{|\lambda|^\omega}, \tag{2.3}$$

где $\omega > 0$ не зависит от λ .

Теорема 2.2. *Общее решение (2.2) в $C^\infty(B_R)$ имеет вид*

$$f(z) = \sum_{p,q=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{Q(n,p,q)} \left(\sum_{\lambda \in M(T)} \sum_{m=0}^{n_\lambda-1} c_{\lambda,m,p,q,k} \Phi_{\lambda,m}^{p,q}(\rho) \right) S_{p,q}^{(k)}(\sigma),$$

где $\max_{0 \leq m \leq n_\lambda-1} |c_{\lambda,m,p,q,k}| = O(|\lambda|^a)$ при $|\lambda| \rightarrow +\infty$ и любом $a < 0$.

Аналоги теорем 2.1, 2.2 для K -инвариантных распределений на симметрических пространствах $X = G/K$ ранга 1 некомпактного типа получены в работе [19].

Пусть $N \geq 2$. Рассмотрим систему

$$(f \times T_j)(z) = 0, \quad z \in B_{R-r_j}, \quad j = 1, \dots, N, \quad (2.4)$$

где $f \in D'(B_R)$, T_j — радиальное распределение с носителем $\overline{B_{r_j}} \subset B_R$.

Теорема 2.3. *Пусть распределение T_1 удовлетворяет условиям (2.3), $f \in D'(B_R)$ — решение (2.4). Тогда если $\max_{2 \leq j \leq N} (r_1 + r_j) < R$ и $\bigcap_{j=1}^N M(T_j) = \emptyset$, то $f = 0$.*

В случае, когда T_j — индикатор шара B_{r_j} , подобный результат содержится в работе [25]. Другим следствием теоремы 2.3 является аналог известной теоремы Винера о замыкании сдвигов [28].

Пусть Ψ_j — заданные радиальные функции из $L_p(B)$ с носителями $\overline{B_{r_j}}$.

Теорема 2.4. *Пусть Ψ_1 удовлетворяет (2.3), Ω — открытое подмножество B со следующими условиями:*

a) $\overline{\Omega} \subset B$;

b) *всякую точку из Ω можно покрыть геодезическим шаром радиуса $R > \max_{2 \leq j \leq N} (r_1 + r_j)$, принадлежащим Ω .*

Тогда для замкнутости системы

$$\{\Psi_j(g^{-1}z), \quad g \in G, \quad g\overline{B_{r_j}} \subset \Omega, \quad j = 1, \dots, N\} \quad (2.5)$$

в пространстве $L_p(\Omega)$ при $1 \leq p < \infty$ необходимо и достаточно, чтобы $\bigcap_{j=1}^N M(\Psi_j) = \emptyset$. Кроме того, система (2.5) не является замкнутой в пространстве $L_\infty(\Omega)$.

Отметим, что в случае, когда $\overline{\Omega} \not\subset B$ условие $\bigcap_{j=1}^N M(\Psi_j) = \emptyset$ не является, вообще говоря, необходимым для замкнутости системы (2.5).

Далее, следуя [15], введем следующее определение.

Определение 2.1. *Непустое открытое множество $\Omega \subset B$ будем называть δ -областью ($\delta \geq 0$), если выполнены следующие условия:*

- а) всякую точку из Ω можно покрыть замкнутым геодезическим шаром радиуса δ , принадлежащим Ω ;
- б) центры двух любых геодезических шаров радиуса δ , принадлежащих Ω , можно соединить ломаной так, что всякий замкнутый геодезический шар радиуса δ с центром на этой ломаной принадлежит Ω .

Теорема 2.5. Пусть Ψ_1 удовлетворяет (2.3), Ω — область в B со следующими условиями:

- а) $\bar{\Omega} \subset B$;
- б) Ω содержит некоторый геодезический шар радиуса $R > \max_{2 \leq j \leq N} (r_1 + r_j)$;
- в) Ω является δ -областью при $\delta = \min_{1 \leq j \leq N} r_j$.

Тогда выполнены все утверждения теоремы 2.4.

Другие результаты об аппроксимации функций линейными комбинациями сдвигов имеются в работах [8], [29].

ЛИТЕРАТУРА

1. Беренштейн К. А., Струппа Д. Комплексный анализ и уравнения в свертках. // Итоги науки и техн. Современ. пробл. матем. Фундам. направления, — 1984.—54: ВИНТИ.—С. 5—111.
2. Хермандер Л. Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. Дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами.—М.: Мир,—1986.—2.
3. Напалков В. В. Уравнения свертки в многомерных пространствах.—М.: Наука,—1982.
4. Zalzman L. A bibliographic survey of Pompeiu problem. // Approximation dy solutions of partial differential equations / ed. V. Fuglede et al.,—1992.—Р. 185—194.
5. Волчков В. В. Новые теоремы о среднем для решения уравнения Гельмгольца. // Матем. сб.,—1993.—184.—№ 7.—С. 71—78.
6. Волчков В. В. Окончательный вариант локальной теоремы о двух радиусах. // Матем. сб.,—1995.—186.—№ 6.—С. 15—34.
7. Волчков В. В. Решение проблемы носителя для некоторых классов функций. // Матем. сб.,—1997.—188.—№ 9.—С. 13—30.

Центральна наукова бібліотека
ХНУ ім. В.Н.Каразіна

інв. № _____

17 327551

8. Волчков В. В. Экстремальные задачи о множествах Помпейю.// Матем. сборник,-1998.-189.-№ 7.-С. 3-22.
9. Волчков В. В. О множествах инъективности преобразования Помпейю.// Матем. сборник,-1999.-190.-№ 11.-С. 51-66.
10. Волчков В. В. Новые теоремы о двух радиусах в теории гармонических функций.// Известия РАН, Серия матем.,-1994.-58.-№ 1.-С. 182-194.
11. Волчков В. В. О множествах инъективности преобразования Радона на сферах.// Известия РАН, Серия матем.,-1999.-63.-№ 3.-С. 63-76.
12. Волчков В. В. Об одной проблеме Зальцмана и ее обобщениях.// Матем. заметки,-1993.-53.-№ 2.-С. 30-36.
13. Волчков В. В. Окончательный вариант теоремы о среднем в теории гармонических функций.// Матем. заметки,-1996.-59.-№ 3.-С. 351-358.
14. Волчков В. В. Теоремы единственности для некоторых классов функций с нулевыми сферическими средними.// Матем. заметки,-1997.-62.-№ 1.-С. 59-65.
15. Волчков В. В. Теоремы единственности для кратных лакунарных тригонометрических рядов.// Матем. заметки,-1992.-51.-№ 6.-С. 27-31.
16. Волчков В. В. Новые теоремы о среднем для полианалитических функций.// Матем. заметки,-1994.-56.-№ 3.-С. 20-28.
17. Волчков В. В. Теоремы о среднем для одного класса полиномов.// Сиб. матем. жур.,-1994.-35.-№ 4.-С. 737-745.
18. Volchkov V. V. Morera type theorems on the unit disk.// Anal. Math.,-1994.-20.-P. 49-63.
19. Волчков В. В. Проблемы типа Помпейю на многообразиях.// Доклады АН Украины,-1993.-№ 11.-С. 9-12.
20. Волчков В. В. Теоремы о двух радиусах на пространствах постоянной кривизны.// Доклады РАН,-1996.-347.-№ 3.-С. 300-302.
21. Ehrenpreis L. The Fundamental Principle for Linear Constant Coefficients Partial Differential Equations.-In: "Proc. Intern. Symp. Linear Spaces", Pergamon, Oxford,-1961.-P. 161-174.
22. Ehrenpreis L. Fourier Analysis in Several Complex Variables.-New York: Wiley Interscience,-1970.
23. Паламодов В. П. Линейные дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами.-М.: Наука,-1967.

24. Хелгасон С. Группы и геометрический анализ.—М.: Мир,—1987.
25. Narchaouri M. Inversion de la transformation de Pompeiu locale dans les espaces hyperboliques reel et complete (Cas de deux boules).// J. Analyse Math.—1995.—67.—Р. 1–37.
26. Рудин У. Теория функций в единичном шаре из \mathbb{C}^n .—М.: Мир,—1984.
27. Кобаяси Ш. Группы преобразований в дифференциальной геометрии.—М.: Наука,—1986.
28. Винер Н. Интеграл Фурье и некоторые его применения.—М.: Физматгиз,—1963.
29. Волчков В. В. Аппроксимация функций на ограниченных областях в \mathbb{R}^n линейными комбинациями сдвигов.// Доклады АН России,—1994.—334.—№ 5.—С. 560–561.

$$K(z, \zeta) = K_0(z, \zeta) = \frac{1}{2\pi} \ln \left| \frac{z - \zeta}{z + \zeta} \right| = \frac{-1}{2\pi} \ln \left(1 + \frac{4yz}{|z - \zeta|^2} \right)$$

I. Introduction

General theory of entire functions is presented in the book of B.Ja. Levin [1]. Now it is evident that many sections of the theory of growth of entire functions in the ordinary way can be extended to the theory of growth of functions subharmonic in the whole complex plane. In B.Ja. Levin's book some questions of theory of holomorphic functions in an angle are considered as well. Our note deals with functions subharmonic in a complex half-plane. We believe that growth of such functions can be described in the best way by a special measure which is called here the complete measure. All authors investigating meromorphic holomorphic subharmonic functions in a complex half-plane or in a half-disc made use of concepts congenial to the complete measure. We invite the reader's attention to the following sources [2], W.K. Hayman [3], works of N.V. Govorov presented in [4], Ho Jun-ki [5], one of the authors [6]. The definition of the complete measure was introduced in [5].

2. Green function of half-disc

Here we give necessary for us formulas related with the Green function of the half-disc. Beforehand we give denotation (see also in the next [7], [8]).

$$G_+(z, a) = \{w : |w - z| < a, \operatorname{Im} w > 0\}, \quad G_-(z, a) = \{w : |w - z| < a, \operatorname{Im} w < 0\}.$$

$$G_+(z, a) = \{w : |w - z| < a, \operatorname{Im} w > 0\}, \quad G_-(z, a) = \{w : |w - z| < a, \operatorname{Im} w < 0\}.$$

General properties of subharmonic functions of finite order in a complex half-plane

A. F. Grishin^{1,2}, T.I. Malyutina²

¹*Kharkov National University, Ukraine*

²*Ukrainian Academy of Banking, Sumy, Ukraine*

One of the most important problems in the theory of subharmonic functions in angular domains is the problem of connection between the growth of the subharmonic functions and the distribution of associated measures. We give a compact presentation of general properties of subharmonic functions in a complex half-plane, based on the concept of complete measure. This is a new version of some previous results of one of the authors.

1991 Mathematics Subject Classification 31A05, 31A10.

1. Introduction

General theory of entire functions is presented in the book of B.Ja. Levin [1]. Now it is evident that many sections of the theory of growth of entire functions in the ordinary way can be extended to the theory of growth of functions subharmonic in the whole complex plane. In B.Ja. Levin's book, some questions of theory of holomorphic functions in an angle are considered as well. Our note deals with functions subharmonic in a complex half-plane. We believe that growth of such functions can be described in the best way by a special measure which is called here the complete measure. All authors investigating meromorphic, holomorphic, subharmonic functions in a complex half-plane or in a half-disc, made use of concepts congenial to the complete measure. We invite the reader's attention to the following sources: R. Nevanlinna [2], W.K. Hayman [3], works of N.V. Govorov presented in [4], Itô Jun-Iti [5], one of the authors [6]. The definition of the complete measure was introduced in [7].

2. Green function of half-disc

Here we give necessary for us formulas related with the Green function of the half-disc. Beforehand we give denotations of sets used in the note:

$$C_+ = \{z : \Im z > 0\}, \quad C(z, a) = \{w : |w - z| < a\},$$

$$C_+(z, a) = \{w : |w - z| < a, \Im w > 0\}, \quad B(z, a) = \{w : |w - z| \leq a\},$$

$$B_+(z, a) = \{w : |w - z| \leq a, \Im w \geq 0\}, \quad CE = \mathbb{C} \setminus E.$$

Let $G(z, \zeta)$ be the Green function of $C_+(0, R)$. The following formulas are true:

$$G(z, \zeta) = \ln \left| \frac{(z - \bar{\zeta})(R^2 - z\bar{\zeta})}{(z - \zeta)(R^2 - z\zeta)} \right|, \quad \frac{\partial G(z, t)}{\partial n} =$$

$$2\Im \left(\frac{1}{t - z} - \frac{R^2}{t(R^2 - tz)} \right) = \frac{2r(R^2 - r^2)(R^2 - t^2) \sin \theta}{|z - t|^2 |R^2 - tz|^2}, \quad z = re^{i\theta},$$

$$\frac{\partial G(z, Re^{i\varphi})}{\partial n} = \frac{1}{R} \Re \left(\frac{Re^{i\varphi} + z}{Re^{i\varphi} - z} - \frac{Re^{-i\varphi} + z}{Re^{-i\varphi} - z} \right) = \frac{4r(R^2 - r^2) \sin \theta \sin \varphi}{|Re^{i\varphi} - z|^2 |Re^{-i\varphi} - z|^2}$$

where n is the inner normal for $C_+(0, r)$. In what follows we use these formulas without additional recalling.

3. Kernels K_p and their properties

In theory of subharmonic functions in the complex half-plane C_+ , the kernels $K_p(z, \zeta)$ play an important role. They are defined as follows.

$$K(z, \zeta) = K_0(z, \zeta) = \frac{1}{\Im \zeta} \ln \left| \frac{z - \zeta}{z - \bar{\zeta}} \right| = \frac{-1}{2\eta} \ln \left(1 + \frac{4y\eta}{|z - \zeta|^2} \right),$$

$$z = x + iy = re^{i\theta}, \quad \zeta = \xi + i\eta = \tau e^{i\varphi},$$

$$K_p(z, \zeta) = \Re \frac{1}{\Im \zeta} \left[\ln \frac{z - \zeta}{z - \bar{\zeta}} + \frac{z}{1} \left(\frac{1}{\zeta} - \frac{1}{\bar{\zeta}} \right) + \dots + \frac{z^p}{p} \left(\frac{1}{\zeta^p} - \frac{1}{\bar{\zeta}^p} \right) \right], \quad p \geq 1.$$

We shall consider the kernels K_p for $\Im z \geq 0, \Im \zeta \geq 0$. The kernels K_p are extended to the real axis $\Im \zeta = 0$ by continuity. If $\Im z > 0$, then $K_p(z, z) = -\infty$, and $K_p(z, z)$ is meaningless for $\Im z = 0$. It is convenient for us to put $K_p(z, \zeta) = 0$ if $\Im z < 0$ or $\Im \zeta < 0$.

It is easy to prove the following relations:

$$1) \quad K(z, t) = 2\Im \frac{1}{z - t} = \frac{-2y}{(t - x)^2 + y^2}, \quad z = x + iy, \quad t \text{ is real};$$

$$2) \quad K_p(z, t) = 2\Im \left(\frac{1}{z - t} + \frac{1}{t} + \dots + \frac{z^p}{t^{p+1}} \right) = 2\Im \frac{z^{p+1}}{t^{p+1}(z - t)} = 2 \frac{r^{p+1}(r \sin p\theta - t \sin(p + 1)\theta)}{t^{p+1}|z - t|^2}, \quad t \text{ is real};$$

$$3) \quad K(z, \zeta) \text{ is negative for } \Im z > 0, \Im \zeta \geq 0;$$

$$4) \quad K_p(z, \zeta) = -\frac{2}{\tau \sin \varphi} \sum_{k=p+1}^{\infty} \frac{1}{k} \frac{r^k}{\tau^k} \sin k\theta \sin k\varphi, \quad r < \tau;$$

$$5) K_p(z, \zeta) = -\frac{2}{\tau \sin \varphi} \left(-\sum_{k=1}^p \frac{r^{2k} - \tau^k}{k r^k \tau^k} \sin k\theta \sin k\varphi + \sum_{k=p+1}^{\infty} \frac{1}{k} \frac{\tau^k}{r^k} \sin k\theta \sin k\varphi \right), \tau < r;$$

$$6) |K(z, \zeta)| \leq \frac{2y}{|z - \zeta|^2};$$

$$7) |K_p(z, \zeta)| \leq 4 \frac{r^{p+1}}{\tau^{p+2}}, \tau \geq 2r;$$

$$8) |K_p(z, \zeta)| \leq 4 \frac{r^p}{\tau^{p+1}}, \tau \leq \frac{1}{2}r, p \geq 1;$$

$$9) |K(z, \zeta)| \leq \frac{4}{r}, \tau \leq \frac{1}{2}r;$$

$$10) \int_0^{\infty} \frac{1}{t} K(te^{i\theta}, \tau e^{i\varphi}) dt = \frac{-1}{\tau \sin \varphi} \begin{cases} \varphi(\pi - \theta), & 0 \leq \varphi \leq \theta \\ (\pi - \varphi)\theta, & \theta \leq \varphi \leq \pi \end{cases}.$$

The following property [6] requires more attention.

11) If $|z - \zeta| = \alpha r$, $z = re^{i\theta}$, then

$$\frac{1}{r \ln 3 \sin \theta + \alpha} \ln \frac{1}{2 \sin \theta + \alpha} \leq K(z, \zeta) \leq \frac{1}{r \sin \theta + \alpha} \ln \frac{\alpha}{2 \sin \theta + \alpha}.$$

The arguments giving a proof of the next property are presented in [8, section 4].

12) Let $a(z)$ be a bounded finite measurable function. Then

$$b(\zeta) = \iint K(z, \zeta) a(z) dx dy, \quad z = x + iy, \text{ is a continuous in } \bar{C}_+ \text{ function.}$$

4. Classes of functions and measures

An absolutely continuous function $\rho(r)$, $r \in (0, \infty)$, is called a *proximate order* in the sense of Valiron if the following two conditions are valid:

$$1) \lim_{r \rightarrow \infty} \rho(r) = \rho \in (-\infty, \infty),$$

$$2) \lim_{r \rightarrow \infty} r \ln r \rho'(r) = 0 \text{ (we take } \rho'(r) = 0 \text{ if } \rho'(r) \text{ is meaningless).}$$

Some results on proximate orders are presented in [1], some new results are presented in [9]. We denote the function $r^{\rho(r)}$ by $V(r)$. When $\rho > 0$, the function $V(r)$ is increasing in some neighbourhood of infinity. We can assume without loss of generality that $V(0) = 1$ and $V(r)$ is an increasing function on the ray $[0, \infty)$ if $\rho > 0$.

A proximate order $\rho(r)$ is said to be a *formal order* of a function v subharmonic in the whole plane \mathbb{C} (upper half-plane \mathbb{C}_+), if there exists a constant M_1 such that $v(re^{i\theta}) \leq M_1 V(r)$, $\theta \in [0, 2\pi]$ ($\theta \in (0, \pi)$). The notion of formal order was introduced in [5]. By $SF(\rho(r))$ we denote the class of subharmonic functions having $\rho(r)$ as a formal order. A proximate order $\rho(r)$ is a formal order of the measure μ if $|\mu|(B(0, r)) \leq M_2 V(r)$ where $|\mu| = \mu_+ + \mu_-$, $\mu = \mu_+ - \mu_-$ is the Jordan decomposition of the measure μ .

A proximate order $\rho(r)$ is said to be a *semiformal order* of a function v subharmonic in \mathbb{C}_+ if it is its formal order and there exist values $q \in (0, 1)$, $\delta \in (0, \frac{\pi}{2})$, $M_3 \in (-\infty, \infty)$ such that every collar domain $D(R, q, \delta) = \{z : qR < |z| < \frac{1}{q}R, \delta < \arg z < \pi - \delta\}$ has a point z_0 with $v(z_0) \geq M_3 V(|z_0|)$. The latter condition appeared in a theorem of Levin [1, part II, theorem 7], so we call it Levin's condition. We prove later that any formal order is a semiformal order if $\rho > 1$. Thus the difference between formal and semiformal orders happens only for $\rho \leq 1$. By $SHF(\rho(r))$ we denote the class of subharmonic functions having $\rho(r)$ as a semiformal order. The concept of semiformal order is useful for the theory of subharmonic functions in \mathbb{C}_+ . For example, if $\rho(r)$ is a semiformal order of v , then the half-trajectory $T_t v = \frac{v(tz)}{V(t)}$, $t \geq 1$, of the dynamical system of V.S. Azarin [10] is a compact set in the topology of Schwarz distributions. The definition of semiformal order was introduced in [11].

In our note, the main characteristic function of subharmonic function v in \mathbb{C}_+ is $M(r, v) = \sup_{\zeta \in C_+(0, r)} v(\zeta)$. B.Ja. Levin and N.V. Govorov considered $M(r, v)$ as characteristic function of v as well. They studied the case $v(z) = \ln |f(z)|$, where f is a holomorphic function. The class $SF(\rho(r))$ is, by the definition, related with the characteristic function $M(r, v)$. A subharmonic in \mathbb{C}_+ function can have different order of growth and diminution as, for example, the function $v(z) = -r \sin \theta$. To remove this obstacle, we introduce the semiformal order. For the above function v we have $v \in SF(0)$, $v \in SHF(1)$.

A subharmonic in \mathbb{C}_+ function v is said to be a function of *finite order* if there exists a proximate order $\rho(r)$ such that $v \in SF(\rho(r))$.

Let v be a subharmonic function in \mathbb{C}_+ . Denote by E_v the set of numbers ρ_1 of the form $\rho_1 = \lim_{r \rightarrow \infty} \rho_1(r)$ where $\rho_1(r)$ is a semiformal order of v . The number $\rho = \inf E_v$ is called *the order* of the function v .

The feature of the given definition is that this order does not coincide, in general, with the order of the characteristic function $M(r, v)$. This definition differs from the equivalent definitions of Titchmarsh and Govorov [4, §1].

A deficiency of $M(r, v)$ as characteristic function is that it does not control the diminution of v . It is easy to see other deficiencies of $M(r, v)$. Even the condition $M(r, v) < \infty$ is a hard restriction for functions subharmonic in \mathbb{C}_+ . Many simple functions do not meet this condition. We have no characteristic function convenient for measuring of growth in the class of all subharmonic functions in \mathbb{C}_+ . Because they study individual classes of functions. Only in the Džrbašian theory [12] the whole class of subharmonic functions in the disc is investigated.

One of the interesting classes of subharmonic functions in \mathbb{C}_+ is the class SK . A function $v \in SK$ if it has a positive harmonic majorant in any bounded domain. The class SK is sufficiently extensive. It includes subharmonic functions v with $M(r, v) < \infty$, all positive harmonic functions. The class JM of the meromorphic in \mathbb{C}_+ functions f which is defined by the condition $\ln |f| \in SK - SK$ is the widest class of functions having the meaningful Nevanlinna characteristic

function $T(r, f)$ [8]. Functions $v \in SK$ have the following properties. There exists a measure ν on the real line \mathbb{R} such that

$$\lim_{y \rightarrow +0} \int_a^b v(x + iy) dx = \nu([a, b]) - \frac{1}{2}\nu(\{a\}) - \frac{1}{2}\nu(\{b\}). \quad (4.1)$$

The measure ν is called the boundary measure of the function v . There exists $v(t) = \lim_{y \rightarrow +0} v(t + iy)$ almost everywhere on \mathbb{R} , $v(t) \in L_{loc}(-\infty, \infty)$ and the identity $d\nu(t) = v(t) dt + d\sigma(t)$ holds where σ is a singular measure with respect to the Lebesgue measure. The measure σ is called the singular boundary measure of v . If the function v is bounded above in the half-disc $C_+(t_0, \varepsilon)$, then the restriction of σ to the interval $(t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$ is a negative measure. The only situation permitting to insert the limit into the integral in (4.1) is when σ is the zero measure. For functions $v \in SK$ the complete measure λ is introduced as follows. The restriction of λ to \mathbb{C}_+ is the measure $2\pi \Im \zeta d\mu(\zeta)$ where μ is the Riesz measure of v . The restriction of λ to the real line is the measure $-\nu$. The restriction of λ to $\mathbb{C}_- = \{z : \Im z < 0\}$ is the zero measure. The complete measure λ has the following properties:

- 1) $|\lambda(K)| < \infty$ for any compact set K ,
- 2) the restriction of λ to \mathbb{C}_+ is a positive measure,
- 3) the restriction of λ to \mathbb{C}_- is the zero measure.

If a measure λ has properties 1–3, then there exists a subharmonic in \mathbb{C}_+ function $v \in SK$ with the complete measure λ . The complete measure λ determines the function v uniquely up to a summand $\Im g(z)$ where g is a real entire function. More precisely, if functions v_1 and v_2 have the same complete measure λ , then there exists a real entire function $g(z)$ such that $v_2(z) - v_1(z) = \Im g(z)$, $\Im z > 0$. If $v \in SK$, λ is the complete measure of v , D is a bounded domain, $D \subset \mathbb{C}_+$, $C_+(x_0, \varepsilon) \subset D$, then

$$v(z) = \frac{1}{2\pi} \iint_{D \cup \partial D \cap \mathbb{R}} K(z, \zeta) d\lambda(\zeta) + v_1(z)$$

where v_1 is a harmonic function in D having continuous extension by zero to the interval $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$.

We define the order of the measure λ as

$$\rho_\lambda = \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln |\lambda|(B(0, r))}{\ln r}.$$

In what follows, we show that if v is a subharmonic function of order ρ and λ is the complete measure of v , then $\rho_\lambda \leq 1 + \rho$. This inequality is no longer true if ρ changes to ρ_1 , where ρ_1 is the order of v in the sense of Titchmarsh and Govorov. Thus, our definition of order of subharmonic function in \mathbb{C}_+ preserves

the statement that the order of the measure is estimated by the order of the function, as is for functions subharmonic in the whole plane. Inverse estimations for subharmonic functions in C_+ are more complicated. In general, statements on connection between growth of a subharmonic function and the growth of its Riesz measure for subharmonic functions in the whole plane have no analogs for the case of the half-plane if we use the given definition of order of subharmonic in C_+ function. The analogy takes place only for functions with positive complete measure. Such functions are named just subharmonic [8]. Thus the theory of just subharmonic functions in C_+ is similar to the one of subharmonic functions in the whole plane. The theory of subharmonic in C_+ functions of the class SK is similar to the one of δ -subharmonic functions (δ -subharmonic function is a difference of subharmonic functions) in the whole plane. For the functions of the class SK and moreover for the functions of the class $SK - SK$ we can introduce the Nevanlinna characteristic function

$$T(r, v) = \frac{1}{r} \int_0^\pi v_+(re^{i\theta}) \sin \theta d\theta + \int_{r_0}^r \frac{\lambda_-(t)}{t^3} dt + \frac{1}{r_0} \int_0^\pi v_-(r_0 e^{i\theta}) \sin \theta d\theta.$$

The same function v can have a finite order with respect to the characteristic function $T(r, v)$ and have infinite order with the characteristic function $M(r, v)$.

Considering $M(r, v)$ as the main characteristic function, we call $\rho(r)$ the proximate order of the function v provided

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{V(r)} \left(M(r, v) + \frac{|\lambda|(r)}{r} \right) \in (0, \infty).$$

5. Representation formulas and Carleman formula

Later we will need the following formulas and denotations. Let v be a subharmonic function in $C_+(0, R_1)$ having a positive harmonic majorant. Let $R \in (0, R_1)$, $G(z, \zeta)$ be the Green function of the domain $C_+(0, R)$, n be the inner normal for $C_+(0, R)$, ν be the measure defined as in (4.1), μ be the Riesz measure of v . Then the Riesz-Martin theory gives the representation formula

$$v(z) = - \iint_{C_+(0, R)} G(z, \zeta) d\mu(\zeta) + \frac{1}{2\pi} \int_{-R}^R \frac{\partial G(z, t)}{\partial n} d\nu(t) + \frac{R}{2\pi} \int_0^\pi \frac{\partial G(z, Re^{i\varphi})}{\partial n} v(Re^{i\varphi}) d\varphi, \quad z \in C_+(0, R). \tag{5.1}$$

Let H be the least positive harmonic majorant of the function v in the domain $C_+(0, R)$. Then we have for $z \in C_+(0, R)$

$$H(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-R}^R \frac{\partial G(z, t)}{\partial n} d\nu_+(t) + \frac{R}{2\pi} \int_0^\pi \frac{\partial G(z, Re^{i\varphi})}{\partial n} v_+(Re^{i\varphi}) d\varphi. \tag{5.2}$$

Formulas (5.1) and (5.2) together give

$$\iint_{C_+(0,R)} G(z, \zeta) d\mu(\zeta) + \frac{1}{2\pi} \int_{-R}^R \frac{\partial G(z, t)}{\partial n} d|\nu|(t) + \frac{R}{2\pi} \int_0^\pi \frac{\partial G(z, Re^{i\varphi})}{\partial n} |v(Re^{i\varphi})| d\varphi = 2H(z) - v(z), \quad z \in C_+(0, R). \quad (5.3)$$

Let us denote

$$d\gamma_m(\zeta) = \frac{\sin m\varphi}{\sin \varphi} \tau^{m-1} d\lambda(\zeta), \quad \gamma_m(\tau) = \gamma_m(B(0, \tau))$$

where $\frac{\sin m\varphi}{\sin \varphi}$ is defined in ordinary way for $\varphi = 0, \pi$. Making use of formula (5.1) we evaluate the integral

$$\int_0^\pi v(re^{i\theta}) \sin k\theta d\theta, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Namely, we obtain

$$\int_0^\pi v(re^{i\theta}) \sin k\theta d\theta = -\frac{R^{2k} - r^{2k}}{2kr^k R^{2k}} \gamma_k(r) - \frac{r^k}{2k} \int_r^R \left(\frac{1}{t^{2k}} - \frac{1}{R^{2k}} \right) d\gamma_k(t) + \frac{r^k}{R^k} \int_0^\pi v(Re^{i\varphi}) \sin k\varphi d\varphi.$$

Integrating by parts, we get

$$\frac{1}{R^k} \int_0^\pi v(Re^{i\theta}) \sin k\theta d\theta = \int_r^R \frac{\gamma_k(t)}{t^{2k+1}} dt + \frac{1}{r^k} \int_0^\pi v(re^{i\theta}) \sin k\theta d\theta.$$

In particular,

$$\frac{1}{R} \int_0^\pi v(Re^{i\theta}) \sin \theta d\theta = \int_r^R \frac{\lambda(t)}{t^3} dt + \frac{1}{r} \int_0^\pi v(re^{i\theta}) \sin \theta d\theta.$$

Such type formulas are known as the Carleman formulas. The last formula stresses once more that the complete measure is convenient for investigation of subharmonic functions in the complex half-plane.

6. Estimations of potentials of kernels K_p

Estimations of the canonic Weierstrass product is the first step in the studying of growth of entire functions. We give similar estimates for the potentials of the kernels K_p . The main distinctions with the plane case are as follows. The complete measure λ of a subharmonic function in \mathbb{C}_+ is a signed measure in contrast to the Reisz measure. The negative part λ_- is supported by the real line. In addition, the singularity of the kernel $K_p(z, \zeta)$ is stronger on the real line. It changes essentially the character of estimations near the real line. There is one simplified property for the half-plane case, namely the kernel $K(z, \zeta)$ is negative unlike the kernel $\ln \left| 1 - \frac{z}{\zeta} \right|$ corresponding to the case of the whole plane.

Theorem 6.1. *Let λ be a measure with positive restriction to \mathbb{C}_+ and zero restriction to \mathbb{C}_- . Let a proximate order $1 + \rho(r)$, $\rho = \lim_{r \rightarrow \infty} \rho(r) \geq 0$, be a formal order of the measure λ . Let in addition, if the number ρ is natural, there exist numbers c_ρ and M such that $r^\rho |\delta_\rho(r)| \leq MV(r)$ where*

$$\delta_\rho(r) = c_\rho + \frac{1}{\pi} \iint_{B(0,r)} \frac{\sin p\varphi}{p \sin \varphi} \frac{d\lambda_{r_0}(\zeta)}{\tau^{\rho+1}}, \quad \zeta = \tau e^{i\varphi},$$

λ_{r_0} is the restriction of λ to the set $CB(0, r_0)$. Let $p = [\rho]$ and let

$$v(z) = \frac{1}{2\pi} \iint_{B(0,r_0)} K(z, \zeta) d\lambda(\zeta) + \frac{1}{2\pi} \iint_{CB(0,r_0)} K_p(z, \zeta) d\lambda(\zeta) + \sum_{k=1}^p d_k \Im z^k$$

where d_k is arbitrary if $\rho \neq p$ and $d_p = c_\rho$, and d_k is arbitrary for $k \leq p - 1$ if $\rho = p$.

Then the following properties are valid.

1) v is a subharmonic function in \mathbb{C}_+ with the complete measure λ .

2) $v(re^{i\theta}) \leq M \frac{1}{\sin \theta} V(r)$, $r \geq r_0$.

3) $\int_0^\pi |v(re^{i\theta})| \sin \theta d\theta \leq MV(r)$, $r \geq r_0$.

4) $\int_{r_0}^r \frac{|v(te^{i\theta})|}{t} dt \leq M \begin{cases} \int_{r_0}^r \frac{V(t)}{t} dt, & \rho = 0, \\ V(r), & \rho > 0, r \geq 2r_0 \end{cases}$

and the low limit of the integration in the left hand side can be changed to 0 if the measure λ does not charge some neighbourhood of zero.

5) If measure λ_- is absolute continuous and $\frac{d\lambda_-(t)}{dt} \leq MV(|t|)$, in particularly, if $\lambda_- = 0$, then $v \in SHF(\rho(r))$.

Remark. *That the theorem remains to be true for the case $\rho = 0$, is a further usefull property of the complete measure. For other measures, the case $\rho = 0$ needs special arguments [13]. We omit the standard proof of this theorem.*

7. Functions of class $SHF(\rho(r))$

The class $SHF(\rho(r))$ is the simplest class of subharmonic functions in \mathbb{C}_+ . In this section we investigate functions of this class.

Theorem 7.1. *Let $v \in SHF(\rho(r))$ and let λ be the complete measure of v . Let $\rho = \lim_{r \rightarrow \infty} \rho(r)$, $p = [\rho]$ and let $r_0 > 0$ be a fixed though arbitrary number. Then*

$$1) |\lambda|(B(0, r)) \leq MrV(r), \quad r \geq r_0,$$

$$2) \int_0^\pi |v(re^{i\theta})| \sin \theta \, d\theta \leq MV(r), \quad r \geq r_0,$$

3) let $\rho = p > 0$. Then there exist constants $c_p = c_p(r_0)$, M_1, M_2 such that

$$r^p |\delta_p(r)| \leq M_1 V(r), \quad r^p |\tilde{\delta}_p(r)| \leq M_2 V(r)$$

where

$$\delta_p(r) = c_p + \frac{1}{\pi} \iint_{B(0, r)} \frac{\sin p\varphi \, d\lambda(\zeta)}{p \sin \varphi \, \tau^{p+1}}, \quad \zeta = \tau e^{i\varphi},$$

$$c_p = c_p(r_0) = \frac{\gamma_p(r_0)}{\pi p r_0^{2p}} + \frac{2}{\pi} \frac{1}{r_0^p} \int_0^\pi v(r_0 e^{i\varphi}) \sin \varphi \, d\varphi,$$

$$\tilde{\delta}_p(r) = c_p + \frac{1}{\pi} \iint_{B(0, r)} \left(\frac{1}{\tau^{2p}} - \frac{1}{r^{2p}} \right) \frac{\sin p\varphi}{p \sin \varphi} \tau^{p-1} \, d\lambda_{r_0}(\zeta)$$

and λ_{r_0} is the restriction λ to the set $CB(0, r_0)$.

Proof. Let $R \geq 1$ be arbitrary and let $z_0 \in D(R, q, \delta)$ be a point for the inequality $v(z_0) \geq M_3 V(|z_0|) \geq M_4 V(R)$.

Writing formula (5.3) for the corresponding values of the parameters, we get

$$\iint_{C_+(0, \frac{2}{q}R)} G(z_0, \zeta) \, d\mu(\zeta) + \int_{-\frac{2}{q}R}^{\frac{2}{q}R} \frac{\partial G(z_0, t)}{\partial n} \, d|\nu|(t) +$$

$$\frac{R}{q\pi} \int_0^\pi \frac{\partial G(z_0, \frac{2}{q}Re^{i\varphi})}{\partial n} \left| v\left(\frac{2}{q}Re^{i\varphi}\right) \right| \, d\varphi = 2H(z_0) - v(z_0) \leq M_5 V(R).$$

The relation $z_0 \in D(R, q, \delta)$ implies the following inequalities

$$M_6 G(z_0, \zeta) \geq \frac{1}{R} 2\pi \Im \zeta, \quad |\zeta| \leq R, \quad \Im \zeta > 0,$$

$$M_7 \frac{\partial G(z_0, t)}{\partial n} \geq \frac{1}{R}, \quad |t| \leq R, \quad M_8 \frac{\partial G(z_0, \frac{2}{q}Re^{i\varphi})}{\partial n} \geq \frac{\sin \varphi}{R}.$$

Therefore

$$\begin{aligned} \frac{1}{R} \iint_{C_+(0,R)} 2\pi \Im \zeta \, d\mu(\zeta) &\leq M_6 \iint_{C_+(0,R)} G(z_0, \zeta) \, d\mu(\zeta) \leq M_6 M_5 V(R), \\ \frac{1}{R} \int_{-R}^R d|\nu|(t) &\leq M_7 \int_{-R}^R \frac{\partial G(z_0, t)}{\partial n} \, d|\nu|(t) \leq M_7 M_5 V(R), \\ |\lambda|(B(0, R)) &\leq M_9 V(R), \\ \int_0^\pi \left| v\left(\frac{2}{q} Re^{i\varphi}\right) \right| \sin \varphi \, d\varphi &\leq M_8 q \pi \frac{R}{q\pi} \int_0^\pi \frac{\partial G\left(z_0, \frac{2}{q} Re^{i\varphi}\right)}{\partial n} \left| v\left(\frac{2}{q} Re^{i\varphi}\right) \right| \, d\varphi \leq \\ &\leq q\pi M_8 M_5 V(R) = M_{10} V(R). \end{aligned}$$

By the Carleman formula,

$$\frac{q}{2R} \int_0^\pi v\left(\frac{2}{q} Re^{i\varphi}\right) \sin \varphi \, d\varphi = \int_R^{\frac{2}{q}R} \frac{\lambda(t)}{t^3} \, dt + \frac{1}{R} \int_0^\pi v(Re^{i\varphi}) \sin \varphi \, d\varphi.$$

Consequently, we obtain $\left| \int_0^\pi v(Re^{i\varphi}) \sin \varphi \, d\varphi \right| \leq M_{11} V(R)$. Together with the inequality $v_+(Re^{i\varphi}) \leq M_{12} V(R)$ it gives

$$\int_0^\pi |v(Re^{i\varphi})| \sin \varphi \, d\varphi \leq M_{13} V(R).$$

Thus assertions 1 and 2 are proved. Next, we write the Carleman formula in the form

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^p} \int_0^\pi v(re^{i\varphi}) \sin \varphi \, d\varphi &= \frac{1}{2p} \left(\frac{1}{r_0^{2p}} - \frac{1}{r^{2p}} \right) \gamma_p(r_0) + \\ \frac{1}{2} \iint_{B(0,r) \setminus B(0,r_0)} \left(\frac{1}{\tau^{2p}} - \frac{1}{r^{2p}} \right) \frac{\sin p\varphi}{p \sin \varphi} \tau^{p-1} \, d\lambda(\zeta) &+ \frac{1}{r_0^p} \int_0^\pi v(r_0 e^{i\varphi}) \sin \varphi \, d\varphi. \end{aligned}$$

Furthermore,

$$\begin{aligned} \frac{1}{V(r)} \frac{2}{\pi} \int_0^\pi v(re^{i\varphi}) \sin \varphi \, d\varphi &= \frac{r^p}{V(r)} \left(\frac{\gamma_p(r_0)}{\pi p r_0^{2p}} + \frac{1}{r_0^p} \frac{2}{\pi} \int_0^\pi v(r_0 e^{i\varphi}) \sin \varphi \, d\varphi + \right. \\ &\left. + \frac{1}{\pi} \int_{r_0}^r \left(\frac{1}{\tau^{2p}} - \frac{1}{r^{2p}} \right) \frac{\sin p\varphi}{p \sin \varphi} \tau^{p-1} \, d\lambda(\zeta) \right) - \frac{1}{\pi p r^p V(r)} \gamma_p(r_0). \end{aligned}$$

It gives $r^p |\bar{\delta}_p(r)| \leq M_{14} V(r)$. Now the formula

$$\delta_p(r) = \bar{\delta}_p(r) + \frac{1}{\pi r^{2p}} \iint_{B(0,r)} \frac{\sin p\varphi}{p \sin \varphi} \tau^{p-1} d\lambda_{r_0}(\zeta),$$

and assertion 1 yield $r^p |\delta_p(r)| \leq M_{15} V(r)$.

Assertion 3 and the theorem are proved.

Remark. Assertion 3 is called the Lindelöf balance relation for v . The distinguishing feature of this relation is to be true for the complete measures of the functions $v \in SHF(\rho(r))$ but not for arbitrary measures of the formal order $\rho(r)$. If the complete measure λ does not charge some disc neighborhood of zero, then the function $v(z)$ in this neighborhood has the expansion

$$v(z) = \sum_{k=1}^{\infty} d_k \Im z^k.$$

Choosing r_0 sufficiently small, we obtain $c_p = d_p$.

8. Representation formula for class $SHF(\rho(r))$

We recall the definition of the measure γ_k ,

$$d\gamma_k(\zeta) = \frac{\sin k\varphi}{\sin \varphi} \tau^{k-1} d\lambda(\zeta), \quad \zeta = \tau e^{i\varphi}.$$

The restriction of γ_k to the real line is the measure $-kt^{k-1} d\nu(t)$ where ν is the boundary measure of v .

Theorem 8.1. Let $v \in SHF(\rho(r))$, $\rho = \lim_{r \rightarrow \infty} \rho(r)$, $p = [\rho]$, $r_0 > 0$ and let λ be the complete measure of v . Then

$$v(z) = \frac{1}{2\pi} \iint_{B(0,r_0)} K(z, \zeta) d\lambda(\zeta) + \frac{1}{2\pi} \iint_{CB(0,r_0)} K_p(z, \zeta) d\lambda(\zeta) + \sum_{k=1}^p c_k \Im z^k$$

where

$$c_k = \frac{1}{\pi k} \frac{\gamma_k(r_0)}{r_0^{2k}} + \frac{2}{\pi r_0^k} \int_0^\pi v(r_0 e^{i\varphi}) \sin \varphi d\varphi.$$

Proof. We have

$$v(z) = - \iint_{C_+(0,R)} G(z, \zeta) d\mu(\zeta) + \frac{1}{2\pi} \int_{-R}^R \frac{\partial G(z, t)}{\partial n} d\nu(t) +$$

$$\frac{R}{2\pi} \int_0^\pi \frac{\partial G(z, R e^{i\varphi})}{\partial n} v(R e^{i\varphi}) d\varphi = I_1 + I_2 + I_3, \quad z \in C_+(0, R)$$

where G is the Green function of the domain $C_+(0, R)$, μ is the Riesz measure of v , ν is the boundary measure of v . By using theorem 7.1, these values can be transformed to the form:

$$I_1 = \frac{1}{2\pi} \iint_{C_+(0, r_0)} K(z, \zeta) d\lambda(\zeta) + \frac{1}{2\pi} \iint_{C_+(0, R) \setminus C_+(0, r_0)} K_p(z, \zeta) d\lambda(\zeta) +$$

$$\frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^p r^k \sin k\theta \iint_{C_+(0, R) \setminus C_+(0, r_0)} \left(\frac{\tau^{k-1}}{R^{2k}} - \frac{1}{\tau^{k+1}} \right) \frac{\sin k\varphi}{k \sin \varphi} d\lambda(\zeta) + o(1), \quad R \rightarrow \infty,$$

z is a fixed complex number,

$$I_2 = \frac{1}{2\pi} \int_{(-r_0, r_0)} K(z, \zeta) d\lambda(\zeta) + \frac{1}{2\pi} \iint_{[-R, R] \setminus (-r_0, r_0)} K_p(z, \zeta) d\lambda(\zeta) +$$

$$\frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^p r^k \sin k\theta \int_{[-R, R] \setminus [-r_0, r_0]} \left(\frac{1}{t^{k+1}} - \frac{t^{k-1}}{R^{2k}} \right) d\nu(t) + o(1), \quad R \rightarrow \infty,$$

$$I_3 = \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^p \frac{r^k \sin k\theta}{R^k} \int_0^\pi v(Re^{i\varphi}) \sin k\varphi d\varphi + o(1), \quad R \rightarrow \infty.$$

Resulting, we obtain

$$v(z) = \frac{1}{2\pi} \iint_{C(0, r_0)} K(z, \zeta) d\lambda(\zeta) + \frac{1}{2\pi} \iint_{B(0, R) \setminus C(0, r_0)} K_p(z, \zeta) d\lambda(\zeta) +$$

$$\frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^p r^k \sin k\theta \left(\iint_{B(0, R) \setminus C(0, r_0)} \left(\frac{\tau^{k-1}}{R^{2k}} - \frac{1}{\tau^{k+1}} \right) \frac{\sin k\varphi}{k \sin \varphi} d\lambda(\zeta) + \frac{2}{R^k} \int_0^\pi v(Re^{i\varphi}) \sin k\varphi d\varphi \right) + o(1), \quad R \rightarrow \infty$$

Evidently, the formula remains true if $C(0, r_0)$ changes to $B(0, r_0)$.

Now using the Carleman formula we obtain

$$v(z) = \frac{1}{2\pi} \iint_{B(0, r_0)} K(z, \zeta) d\lambda(\zeta) + \frac{1}{2\pi} \iint_{B(0, R) \setminus B(0, r_0)} K_p(z, \zeta) d\lambda(\zeta) +$$

$$\sum_{k=1}^p r^k \sin k\theta \left(\frac{1}{\pi k} \frac{\gamma_k(r_0)}{r_0^{2k}} + \frac{2}{\pi r_0^k} \int_0^\pi v(r_0 e^{i\varphi}) \sin \varphi d\varphi \right) + o(1), \quad R \rightarrow \infty.$$

Taking $R \rightarrow \infty$, we get the theorem.

Remark. The expansion formula for v remains true if the condition $v \in SHF(\rho(r))$ changes for $v \in SK - SK$, $T(r, v) \leq M \frac{1}{r} V(r)$ where

$$T(r, v) = \frac{1}{r} \int_0^\pi v_+(re^{i\varphi}) \sin \varphi d\varphi + \int_{r_0}^r \frac{\lambda_-(t)}{t^3} dt + \frac{1}{r_0} \int_0^\pi v_-(r_0 e^{i\varphi}) \sin \varphi d\varphi.$$

In fact, due to the Carleman formula, $T(r, v) = T(r, -v)$. It gives

$$\int_0^\pi |v(re^{i\varphi})| \sin \varphi d\varphi \leq MV(r).$$

$$\int_{r_0}^r \frac{|\lambda|(t)}{t^3} dt \leq M \frac{V(r)}{r}, \quad \frac{3}{2} \frac{|\lambda|(\frac{r}{2})}{r^2} \leq \int_{\frac{r}{2}}^r \frac{|\lambda|(t)}{t^3} dt \leq M \frac{V(r)}{r}, \quad |\lambda|(r) \leq M_1 r V(r).$$

Therefore the arguments applied for the proof of the theorem are true for the considered case as well.

9. Functions of class $SF(\rho(r))$

Here we shall see that $SF(\rho(r)) = SHF(\rho(r))$ if $\rho > 1$. If $\rho \leq 1$, $v \in SF(\rho(r))$, then the value $|\lambda|(B(0, r))$ need not be estimated by $MV(r)$ contrary to the case $v \in SHF(\rho(r))$.

Theorem 9.1. Let $v \in SF(\rho(r))$, $\rho = \lim_{r \rightarrow \infty} \rho(r)$ and let λ be the complete measure of v . Then the following properties are valid:

1) If $\rho > 1$, then $v \in SHF(\rho(r))$.

2) If $\rho < 1$, then $\int_0^\infty \frac{d|\lambda|(\tau)}{1+\tau^2} < \infty$,

$$v(z) = \frac{1}{2\pi} \iint K(z, \zeta) d\lambda(\zeta) + c_1 y, \quad c_1 \leq 0.$$

3) If $\rho = 1$, then

$$v(z) = \frac{1}{2\pi} \iint_{B(0, r_0)} K(z, \zeta) d\lambda(\zeta) + \frac{1}{2\pi} \iint_{CB(0, r_0)} K_1(z, \zeta) d\lambda(\zeta) + c_1 y, \quad (9.1)$$

$$r \bar{\delta}_1(r) \leq MV(r)$$

where

$$\bar{\delta}_1(r) = c_1 + \frac{1}{\pi} \int_0^r \left(\frac{1}{\tau^2} - \frac{1}{r^2} \right) d\lambda_{r_0}(\tau)$$

and λ_{r_0} is the restriction of λ to $CB(0, r_0)$.

Proof. Let $R \geq 1$, $q \in (0, 1)$, $z_0 \in C_+(0, q)$, $v(z_0) > -\infty$, H be the least positive harmonic majorant of v in the half-disc $C_+(0, R)$, G be the Green function of $C_+(0, R)$. We have

$$\iint_{C_+(0,R)} G(z_0, \zeta) d\mu(\zeta) + \frac{1}{2\pi} \int_{-R}^R \frac{\partial G(z_0, t)}{\partial n} d|\nu|(t) + \frac{R}{2\pi} \int_0^\pi \frac{\partial G(z_0, Re^{i\varphi})}{\partial n} |v(Re^{i\varphi})| d\varphi = 2H(z_0) - v(z_0),$$

$$H(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-R}^R \frac{\partial G(z_0, t)}{\partial n} d\nu_+(t) + \frac{R}{2\pi} \int_0^\pi \frac{\partial G(z_0, Re^{i\varphi})}{\partial n} v_+(Re^{i\varphi}) d\varphi.$$

The condition $v \in SF(\rho(r))$ yields $\sigma_+ = 0$ where σ is the singular boundary measure of v . Thus $d\nu_+(t) = v_+(t) dt \leq M_1 V(|t|) dt$. The inequality $\frac{\partial G(z_0, t)}{\partial n} \leq M_2 \frac{1}{1+t^2}$ implies

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-R}^R \frac{\partial G(z_0, t)}{\partial n} d\nu_+(t) \leq M_3 \int_0^R \frac{V(t)}{1+t^2} dt =: M_3 W(R).$$

The inequality $\frac{\partial G(z_0, Re^{i\varphi})}{\partial n} \leq M_4 \frac{\sin \varphi}{R^2}$ implies

$$\frac{R}{2\pi} \int_0^\pi \frac{\partial G(z_0, Re^{i\varphi})}{\partial n} v_+(Re^{i\varphi}) d\varphi \leq M_5 \frac{1}{R} V(R).$$

Thus, we have

$$H(z_0) \leq M_6(W(R) + \frac{1}{R}V(R)), \quad 2H(z_0) - v(z_0) \leq M_7(W(R) + \frac{1}{R}V(R)).$$

Now the inequalities

$$M_8 G(z_0, \zeta) \geq \frac{2\pi \Im \zeta}{1 + |\zeta|^2}, \quad M_9 \frac{\partial G(z_0, t)}{\partial n} \geq \frac{1}{1 + t^2},$$

$$M_{10} \frac{\partial G(z_0, Re^{i\varphi})}{\partial n} \geq \frac{\sin \varphi}{R^2}$$

give

$$\iint_{B(0,R)} \frac{d|\lambda|(\zeta)}{1 + |\zeta|^2} \leq M_{11}(W(R) + \frac{1}{R}V(R)), \tag{9.2}$$

$$\int_0^\pi |v(Re^{i\varphi})| \sin \varphi d\varphi \leq M_{12}(RW(R) + V(R)). \tag{9.3}$$

If $\rho > 1$, then the L'Hospital rule yields

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{RW(R)}{V(R)} = \frac{1}{\rho - 1},$$

so inequality (9.3) proves assertion 1 of the theorem.

Let $\rho < 1$. Then inequality (9.2) gives the first part of assertion 2. Furthermore, the convergence of the integral $\int_R^\infty \frac{d|\lambda|(\tau)}{\tau^2}$ implies the relation

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{|\lambda|(B(0, R))}{R^2} = 0.$$

Let us consider the function

$$v_1(z) = \frac{1}{2\pi} \iint K(z, \zeta) d\lambda(\zeta), \quad \Im z > 0.$$

We have

$$\int_0^\pi |v_1(re^{i\theta})| \sin \theta d\theta \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \iint |K(re^{i\theta}, \zeta)| \sin \theta d|\lambda|(\zeta) d\theta =$$

$$\frac{1}{2\pi} \iint \int_0^\pi |K(re^{i\theta}, \zeta)| \sin \theta d\theta d|\lambda|(\zeta) = \frac{1}{2r} \int_{B(0, r)} d|\lambda|(\zeta) +$$

$$\frac{r}{2} \int_{CB(0, r)} \frac{d|\lambda|(\zeta)}{\tau^2} = \frac{|\lambda|(B(0, r))}{2r} + \frac{r}{2} \int_r^\infty \frac{d|\lambda|(\tau)}{\tau^2}.$$

Therefore, v_1 is a well defined function. It is a function of the class SK and λ is the complete measure of v_1 . Besides we have

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{r} \int_0^\pi |v_1(re^{i\theta})| \sin \theta d\theta = 0.$$

The complete measure of the function $v(z) - v_1(z)$ is the zero measure, so

$$v(z) - v_1(z) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \Im z^k, \quad \Im z > 0,$$

$$\frac{\pi}{2} c_k r^k = \int_0^\pi (v(re^{i\theta}) - v_1(re^{i\theta})) \sin p\theta d\theta.$$

We investigate the case $\rho < 1$, $v \in SF(\rho(r))$. It gives $v \in SF\left(\frac{3}{2}\right)$, $v \in SHF\left(\frac{3}{2}\right)$. According to theorem 7.1,

$$\int_0^\pi |v(re^{i\theta})| \sin \theta d\theta \leq M_{13} r^{3/2}, \quad r \geq 1,$$

$$\frac{\pi}{2} |c_k| r^k \leq \int_0^\pi (|v(re^{i\theta})| + |v_1(ze^{i\theta})|) |\sin p\theta| d\theta \leq M_{14} r^{3/2}, \quad r \geq 1.$$

This gives $c_k = 0, k \geq 2, v(z) = v_1(z) + c_1 y$. Further we have

$$\frac{\pi}{2} c_1 = \frac{1}{r} \int_0^\pi v(re^{i\theta}) \sin \theta d\theta - \frac{1}{r} \int_0^\pi v_1(re^{i\theta}) \sin \theta d\theta \leq$$

$$M_{15} \frac{V(r)}{r} + \frac{1}{r} \int_0^\pi |v_1(re^{i\theta})| \sin \theta d\theta.$$

Taking $r \rightarrow \infty$ we obtain $c_1 \leq 0$. Assertion 2 is proved.

Now let $\rho = 1$. Then $v \in SHF(\frac{3}{2})$ and theorem 8.1 gives identity (9.1). Further the Carleman formula can be written as follows

$$r\tilde{\delta}_1(r) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi v(re^{i\theta}) \sin \theta d\theta + \frac{\lambda(r_0)}{\pi r}, \quad r > r_0.$$

It gives assertion 3. The theorem is proved.

Remark 1. For a function $v \in SHF(\rho(r)), \rho = 1$, we proved $r|\delta_1(r)| \leq MV(r)$. We have

$$r\delta_1(r) = r\tilde{\delta}_1(r) + \frac{\lambda(r) - \lambda(r_0)}{\pi r}, \quad r \geq r_0.$$

For $v \in SHF(\rho)$ the inequality $\frac{|\lambda(r) - \lambda(r_0)|}{\pi r} \leq MV(r)$ is true and the boundness of the values $\frac{r}{V(r)} \delta_1(r)$ and $\frac{r}{V(r)} \tilde{\delta}_1(r)$ happens simultaneously.

It is no longer true for $v \in SF(\rho(r))$. We have the above estimate only for $r\tilde{\delta}_1(r)$.

Remark 2. The condition $v \in SF(\rho(r))$ does not determine the growth of the value $|\lambda|(B(0, r))$. We have only the inequality

$$\iint_{B(0,r)} \frac{d|\lambda|(\zeta)}{1 + |\zeta|^2} \leq M(W(r) + \frac{1}{r}V(r)),$$

whereas the condition $v \in SHF(\rho(r))$ gives $|\lambda|(B(0, r)) \leq MrV(r), r \geq r_0$. For $\rho = 1$ the condition $v \in SF(\rho(r))$ gives $r\tilde{\delta}_1(r) \leq MV(r)$ whereas the condition $v \in SHF(\rho(r))$ gives $r|\tilde{\delta}_1(r)| \leq MV(r)$. The inverse estimates are stated in theorem 6.1.

10. Functions of order 1

In \mathbb{C}_+ , subharmonic functions v of order 1 are more complicated for study than the ones of another order. There are two reasons for it. First, for functions v of integer order, the same growth of v and the value $\frac{1}{r}|\lambda|(B(0, r))$ takes place only under the Lindelöf balance condition. Second, for $\rho \leq 1$ the implication $v \in SF(\rho(r)) \Rightarrow v \in SHF(\rho(r))$ fails. In other words, the order of growth and the order of deminuation of the function v can be different. The condition $v \in SHF(\rho(r))$, roughly speaking, means that the orders of growth and deminuation of the function v are $V(r)$ or smaller. Let λ be the complete measure of v and λ_{r_0} be the restriction of λ to the set $CB(0, r_0)$. For the functions v of order 1, the values

$$\delta_1(r) = c_1 + \frac{1}{\pi} \int_0^r \frac{d\lambda_{r_0}(\tau)}{\tau^2}, \quad \lambda_{r_0}(\tau) = \lambda_{r_0}(B(0, \tau))$$

and

$$\tilde{\delta}_1(r) = c_1 + \frac{1}{\pi} \int_0^r \left(\frac{1}{\tau^2} - \frac{1}{r^2} \right) d\lambda_{r_0}(\tau),$$

where

$$c_1 = \frac{\lambda(r_0)}{\pi r_0^2} + \frac{2}{\pi r_0} \int_0^\pi v(r_0 e^{i\theta}) \sin \theta d\theta,$$

can be considered for the role of the Lindelöf balance function. The first is raised in theorem 6.1 in the natural way, the second is raised in theorem 9.1. We have

$$\delta_1(r) = \tilde{\delta}_1(r) + \frac{\lambda_{r_0}(r)}{\pi r^2}.$$

For functions $v \in SHF(\rho(r))$, due the theorem 7.1, the inequality $|\lambda_{r_0}(r)| \leq MrV(r)$ is true and the Lindelöf balance relations $r|\delta_1(r)| < MV(r)$, $r|\tilde{\delta}_1(r)| < MV(r)$ are equivalent. In what follows the value

$$\theta(r) = \int_0^r t\delta_1(t) dt$$

will be involved. Changing the order of integration we get

$$\theta(r) = \frac{1}{2}r^2\delta_1(r) - \frac{1}{2\pi}\lambda_{r_0}(r) = \frac{1}{2}r^2\tilde{\delta}_1(r).$$

For the second value $\tilde{\theta}(r) = \int_0^r t\tilde{\delta}_1(t) dt$, we have the formula

$$\tilde{\theta}(r) = \theta(r) - \frac{1}{\pi} \int_0^r \frac{\lambda_{r_0}(t)}{t} dt := \theta(r) - \gamma(r).$$

For $v \in SF(\rho(r))$, due the arguments in theorem 9.1, we have the inequality

$$\int_0^r \frac{|\lambda_{r_0}|(t)}{t^2} dt \leq MW(r).$$

It yields

$$|\gamma(r)| \leq \frac{1}{\pi} \int_0^r t \frac{|\lambda_{r_0}|(t)}{t^2} dt \leq MrW(r).$$

We shall see later that the value $\gamma(r)$ is inessential. The results of this section are a revision of [11]. At first, we give a sufficient conditions for v to be of the class $SF(\rho(r))$, $\rho = 1$.

Theorem 10.1. *Let $v \in SK$, λ be the complete measure of v , $v(t)$, $t \in (-\infty, \infty)$, be the boundary values of v , $M(r) = \sup_{|z| \leq r} v(z)$, $\rho(r)$ be a proximate order, $\rho = \lim_{r \rightarrow \infty} \rho(r) = 1$. Let the following conditions be realized:*

1) $v(t) \leq MV(|t|)$,

2) $\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{M(r)}{r^2} = 0$,

3) $\int_0^\infty \frac{d|\lambda|(\tau)}{1+\tau^3} < \infty$,

4) $\theta(r) \leq MrV(r)$.

Then $v \in SF(\rho(r))$.

Proof. Condition 2 gives that the proximate order $\rho(r) = 2$ is a formal and, consequently, semiformal order of v . Then due to theorem 8.1 we have

$$v(z) = \frac{1}{2\pi} \iint_{B(0,r_0)} K(z, \zeta) d\lambda(\zeta) + \frac{1}{2\pi} \iint_{CB(0,r_0)} K_2(z, \zeta) d\lambda(\zeta) + \Im Q_1(z)$$

where Q_1 , $\deg Q_1 \leq 2$, is a polynomial with real coefficients. Since the integral

$$\iint_{CB(0,r_0)} \frac{\sin 2\varphi}{2 \sin \varphi} \frac{d\lambda(\zeta)}{\tau^3}, \quad \zeta = \tau e^{i\varphi},$$

is convergent, we have

$$v(z) = \frac{1}{2\pi} \iint_{B(0,r_0)} K(z, \zeta) d\lambda(\zeta) + \frac{1}{2\pi} \iint_{CB(0,r_0)} K_1(z, \zeta) d\lambda(\zeta) + \Im Q(z),$$

$\deg Q \leq 2$. Since the integral $\iint_{CB(0,r_0)} \int_0^\pi |K_1(re^{i\theta}, \zeta)| \sin \theta d\theta d|\lambda|(\zeta)$ is finite, we have due to the Fubini theorem

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \iint_{CB(0,r_0)} K_1(re^{i\theta}, \zeta) \sin 2\theta d\lambda(\zeta) d\theta =$$

$$\frac{1}{2\pi} \iint_{CB(0, r_0)} \int_0^\pi K_1(re^{i\theta}, \zeta) \sin 2\theta d\theta d\lambda(\zeta) = -\frac{1}{4r^2} \iint_{B(0, r) \setminus B(0, r_0)} \frac{\sin 2\varphi}{\sin \varphi} \tau d\lambda(\zeta) + \frac{r^2}{4} \iint_{CB(0, r)} \frac{\sin 2\varphi}{\sin \varphi} \frac{d\lambda(\zeta)}{\tau^3}.$$

Therefore,

$$\frac{1}{2\pi} \left| \int_0^\pi \iint_{CB(0, r_0)} K_1(re^{i\theta}, \zeta) \sin 2\theta d\lambda(\zeta) d\theta \right| \leq \frac{|\lambda|(B(0, r))}{2r} + \frac{r^2}{2} \int_r^\infty \frac{d|\lambda|(\tau)}{\tau^3}.$$

It follows from condition 2 of the theorem (see, for example, [9]) that there exists a proximate order $\rho_1(r)$ such that

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{M(r)}{V_1(r)} = 0, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{V_1(r)}{r^2} = 0, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \rho_1(r) = 2$$

where $V_1(r) = r^{\rho_1(r)}$. It gives $v \in SF(\rho_1(r))$, $v \in SHF(\rho_1(r))$,

$$\left| \int_0^\pi v(re^{i\theta}) \sin 2\theta d\theta \right| \leq MV_1(r).$$

Let $Q(z) = c_1 \Im z + c_2 \Im z^2$. Now, the identity

$$\frac{\pi}{2} c_2 r^2 = \int_0^\pi \left(v(re^{i\theta}) - \frac{1}{2\pi} \iint_{B(0, r_0)} K(re^{i\theta}, \zeta) d\lambda(\zeta) - \frac{1}{2\pi} \iint_{CB(0, r_0)} K_1(re^{i\theta}, \zeta) d\lambda(\zeta) \right) \sin 2\theta d\theta$$

yields $c_2 = 0$, so

$$v(z) = \frac{1}{2\pi} \iint_{B(0, r_0)} K(z, \zeta) d\lambda(\zeta) + \frac{1}{2\pi} \iint_{CB(0, r_0)} K_1(z, \zeta) d\lambda(\zeta) + c_1 y.$$

Let λ_1 be the restriction of λ to \mathbb{C}_+ . We write

$$v(ir) = \frac{1}{2\pi} \iint_{B(0, r_0)} K(ir, \zeta) d\lambda(\zeta) + \frac{1}{2\pi} \iint_{CB(0, r_0)} \frac{1}{\tau} \left(\frac{1}{2 \sin \varphi} \ln \frac{r^2 - 2r\tau \sin \varphi + \tau^2}{r^2 + 2r\tau \sin \varphi + \tau^2} + 2 \frac{r}{\tau} \right) d\lambda_1(\zeta) - \frac{1}{2\pi} \int_{|t| > r_0} K_1(ir, t) d\nu(t) + c_1 r.$$

Straightforward calculations show that

$$\max_{\varphi \in [0, \pi]} \frac{1}{\sin \varphi} \ln \frac{r^2 - 2r\tau \sin \varphi + \tau^2}{r^2 + 2r\tau \sin \varphi + \tau^2} = -\frac{4r\tau}{r^2 + \tau^2}.$$

It gives

$$v(ir) \leq \frac{1}{2\pi} \iint_{B(0, r_0)} K(ir, \zeta) d\lambda(\zeta) + \frac{1}{2\pi} \int_{r_0}^{\infty} \left(-\frac{2}{r^2 + \tau^2} + 2\frac{r}{\tau^2} \right) d\lambda(\tau) + c_1 r =$$

$$\frac{1}{2\pi} \iint_{B(0, r_0)} K(ir, \zeta) d\lambda(\zeta) + \frac{r^3}{\pi} \int_{r_0}^{\infty} \frac{1}{\tau^2(\tau^2 + r^2)} d\lambda(\tau) + c_1 r.$$

Recalling the value $\theta(t)$, we get

$$8r^3 \int_0^{\infty} \frac{t\theta(t)}{(t^2 + r^2)^3} dt = -2r^3 \int_0^{\infty} \theta(t) d\frac{1}{(t^2 + r^2)^2} = 2r^3 \int_0^{\infty} \frac{t\delta_1(t)}{(t^2 + r^2)^2} dt =$$

$$2r^3 \int_0^{\infty} \frac{c_1 t}{(t^2 + r^2)^2} dt - \frac{1}{\pi} r^3 \int_0^t \int_0^t \frac{\lambda_{r_0}(u)}{u^2} dud\frac{1}{t^2 + r^2} =$$

$$c_1 r + \frac{1}{\pi} r^3 \int_0^{\infty} \frac{\lambda_{r_0}(t)}{t^2(t^2 + r^2)} dt.$$

Consequently,

$$v(ir) \leq \frac{1}{2\pi} \iint_{B(0, r_0)} K(ir, \zeta) d\lambda(\zeta) + 8r^3 \int_0^{\infty} \frac{t\theta(t)}{(t^2 + r^2)^3} dt.$$

It is an interesting inequality because the right-hand side depends in essential way on the Lindelöf balance function only. Now, condition 4 yields

$$v(ir) \leq Mr^3 \int_0^{\infty} \frac{t^2 V(t)}{(t^2 + r^2)^3} dt = M \int_0^{\infty} \frac{u^2 V(ur)}{(u + 1)^3} du =$$

$$M(1 + o(1))V(r) \int_0^{\infty} \frac{u^3}{(u^2 + 1)^3} du \leq M_1 V(r), \quad r \rightarrow \infty. \tag{10.1}$$

Condition 2 shows $\sigma_+ = 0$ where σ is the singular boundary measure of v . Adjoining condition 1 we get

$$\overline{\lim} v(z) \leq MV(|t|), \quad z \rightarrow t, \Im z > 0. \tag{10.2}$$

Now the Phragmen-Lindelöf theorem, inequalities (10.1) and (10.2) provide $v(re^{i\theta}) \leq M_2 V(r)$, $\theta \in (0, \pi)$. The proof is finished.

Remark. Since $|\theta(r) - \tilde{\theta}(r)| \leq MrW(r)$ and $\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{W(r)}{V(r)} = 0$, we can change condition 4 for 4') $\tilde{\theta}(r) \leq MrV(r)$.

Now we prove a similar theorem for the class $SHF(\rho(r))$.

Theorem 10.2. Let $v \in SK$, λ be the complete measure of v , $M(r) = \sup_{\zeta \in C_+(0,r)} v(z)$. Let $\rho(r)$ be a proximate order, $\lim_{r \rightarrow \infty} \rho(r) = 1$. For the relation $v \in SHF(\rho(r))$ it is necessary

$$1) |\lambda|(B(0, r)) \leq MrV(r), \quad r \geq r_0,$$

$$2) r|\delta_1(r)| \leq MV(r)$$

and sufficient that

$$3) v(t) \leq MV(|t|), \quad t \in (-\infty, \infty),$$

$$4) \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{M(r)}{r^2} = 0,$$

$$5) \int_0^\infty \frac{d|\lambda|(\tau)}{1+\tau^3} < \infty,$$

$$6) |\theta(r)| \leq MrV(r).$$

Proof. "Necessary" part of the theorem follows from theorem 7.1. The conditions of the second part give, due to theorem 10.1, $v \in SF(\rho(r))$ as well as the representation

$$v(z) = \frac{1}{2\pi} \iint_{B(0, r_0)} K(z, \zeta) d\lambda(\zeta) + \frac{1}{2\pi} \iint_{CB(0, r_0)} K_1(z, \zeta) d\lambda(\zeta) + c_1 y.$$

In its turn, it brings

$$\int_0^\pi v(re^{i\theta}) \sin \theta d\theta = -\frac{1}{2} \frac{\lambda(r_0)}{r} + \frac{1}{2} \int_{r_0}^r \frac{r^2 - t^2}{rt^2} d\lambda(t) + \frac{\pi}{2} c_1 r.$$

Recalling the formulas for θ , we obtain

$$\int_0^\pi v(re^{i\theta}) \sin \theta d\theta = \frac{\pi\theta(r)}{r} - \frac{\lambda(r_0)}{2r}. \quad (10.3)$$

Now condition 6 of the second part of the theorem shows $\left| \int_0^\pi v(re^{i\theta}) \sin \theta d\theta \right| \leq MV(r)$. Together with the relation $v \in SF(\rho(r))$ it implies $\int_0^\pi |v(re^{i\theta})| \sin \theta d\theta \leq MV(r)$, $v \in SHF(\rho(r))$. The proof is finished.

Remark. Consider the system A of conditions:

$$1) v(t) \leq M_1 V(|t|),$$

$$2) \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{M(r)}{r^2} = 0,$$

$$3) \int_0^{\infty} \frac{d\lambda(\tau)}{1+\tau^3} < \infty,$$

$$4) r|\delta_1(r)| \leq M_2V(r)$$

and the system B coming out from A by changing 4 for

$$4') |\theta(r)| \leq M_3rV(r).$$

We assume that the inequalities are true for some constants M . It is evident that inequality 4 brings 4', so the implication $A \implies B$ is evident. Theorem 7.1 gives that A is necessary for $v \in SK$ to be in the class $SHF(\rho(r))$, and theorem 10.2 gives that B is sufficient for $v \in SK$ to be in the class $SHF(\rho(r))$. We deduce the interesting fact. The necessary conditions are formally stronger (if neglecting the sense of δ_1) than the sufficient conditions. The implication $B \implies A$ can be obtained as the consequence of theorem 10.2. We have no straightforward proof of the implication $B \implies A$. We transform this observation into a theorem of Tauber type.

Theorem 10.3. *Let ω be an absolutely continuous function on the ray $[0, \infty)$ and let ω be zero in some vicinity of the origin. Let the following conditions be fulfilled:*

$$1) s\omega'(s) \leq M_1,$$

$$2) \int_0^{\infty} \frac{|\omega'(t)|}{t} dt < \infty,$$

$$3) \left| \int_0^s t\omega(t) dt \right| \leq M_2s^2.$$

Then

$$4) |\omega(s)| \leq M_3, \quad 5) \int_0^s t|\omega'(t)| dt \leq M_4s.$$

Proof. Let us consider the function

$$u(z) = \frac{y}{\pi} \int_0^{\infty} \left(\frac{1}{|t-z|^2} - \frac{1}{t^2} \right) t^2 \omega'(t) dt, \quad z \in \mathbb{C}_+, \quad z = x + iy. \quad (10.4)$$

The function u is a subharmonic function of the class SK . The complete measure λ of u is defined as follows. The restriction of λ to the set $\mathbb{C} \setminus [0, \infty)$ is the zero measure. The restriction of λ to the ray $[0, \infty)$ has the form $d\lambda(t) = -t^2\omega'(t) dt$. Identity (10.4) can be rewritten as follows

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \iint K_1(z, \zeta) d\lambda(\zeta), \quad z \in \mathbb{C}_+.$$

We consider the proximate order $\rho(r) \equiv 1$, consequently $V(r) = r$. We have $u(s) = 0$, $s \in (-\infty, 0)$, $u(s) = s^2\omega'(s)$, $s \in [0, \infty)$. Thus $u(s) \leq M_1V(|s|)$ due

to condition 4 of the theorem, and the first condition of the system B is true. The second condition of the theorem implies the third condition of the system B . Furthermore we have

$$\delta_1(r) = \frac{1}{\pi} \int_0^r \frac{d\lambda(t)}{t^2} = -\frac{1}{\pi} \omega(r).$$

Consequently, the third condition of the theorem gives the fourth condition of the system B .

Finally, we estimate the function $u(z)$. Let $I_1 = [\frac{3}{4}r, \frac{5}{4}r]$, $I_2 = [0, \varepsilon r]$ where ε is a small strongly positive number, $I_3 = [0, \infty] \setminus I_1 \setminus I_2$. Let

$$u_k(z) = \frac{y}{\pi} \int_{I_k} \left(\frac{1}{|t-z|^2} - \frac{1}{t^2} \right) t^2 \omega'(t) dt, \quad k = 1, 2, 3.$$

Let $t \in I_1$, $\theta = \arg z \in [\frac{\pi}{6}, \pi]$. Then

$$t^3 \left| \frac{1}{|t-z|^2} - \frac{1}{t^2} \right| \leq M_5 r, \quad |u_1(z)| \leq M_6 r^2 \int_{I_1} \frac{|\omega'(t)|}{t} dt.$$

If $t \in I_1$, $\theta \in (0, \frac{\pi}{6})$, then $\frac{1}{|t-z|^2} - \frac{1}{t^2} > 0$, so

$$u_1(z) = \frac{y}{\pi} \int_{I_1} \left(\frac{1}{|t-z|^2} - \frac{1}{t^2} \right) t^2 \omega'(t) dt$$

$$M_1 \frac{y}{\pi} \int_{I_1} \left(\frac{1}{|t-z|^2} - \frac{1}{t^2} \right) t dt \leq M_7 r, \quad \theta \in \left(0, \frac{\pi}{6}\right).$$

Furthermore,

$$|u_2(z)| \leq \frac{y}{\pi} \int_{I_2} |\omega'(t)| dt \leq \varepsilon r^2 \frac{1}{\pi} \int_{I_2} \frac{|\omega'(t)|}{t} dt \leq \varepsilon \frac{1}{\pi} r^2 \int_0^\infty \frac{|\omega'(t)|}{t} dt.$$

Finally, we consider the function u_3 . For $t \in I_3$ the inequality

$$t^3 \left| \frac{1}{|t-z|^2} - \frac{1}{t^2} \right| \leq M_8 r$$

is valid. It gives

$$|u_3(z)| \leq M_9 r^2 \int_{I_3} \frac{|\omega'(t)|}{t} dt.$$

Let $M(r) = \sup_{\zeta \in C_+(0,r)} u(\zeta)$. Our arguments show $\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{M(r)}{r^2} = 0$. Thus, we obtain the second condition of the system B . Theorem 10.2 gives $u \in SHF(1)$. Besides, by the same theorem

$$|\lambda|(B(0, s)) = \int_0^s t^2 |\omega'(t)| dt \leq M_{10} s^2, \quad s|\delta_1(s)| = \frac{s}{\pi} |\omega(s)| \leq M_{11} s.$$

The integration by parts gives $\int_0^s t |\omega'(t)| dt \leq M_{12} s$. The proof is finished.

Remark. We know no straightforward proof of theorem 10.3 which is a simply formulated proposition in the differential and integral calculus. The proof is based on properties of the class $SHF(\rho(r))$. The similar construction for the class $SF(\rho(r))$ leads to a trivial proposition.

Aknowledgments

We would like to express our gratitude to A. Fryntov and M. Sodin who read the manuscript and made helpful suggestions. The investigation of the first author is partially supported by INTAS-99-00089.

REFERENCES

1. Levin B.Ja. Distribution of Zeros of Entire Functions.—Moscow: GITL,—1956 (in Russian). Rev. Engl. tr. Am. Math. Soc., Providence, Rh. I.,—1980.
2. Nevanlinna R. Über die Eigenschaften meromorpher Funktionen in einem Winkelraum.// Acta Soc. Sci. Fenn.,—1925.—50.—No 12.—P. 1–45.
3. Hayman W.K. Questions of Regularity Connected with Phragmen-Lindelöf Principle.// J. Math. pure et appl.,—1956.—No 35.—P. 115–126.
4. Govorov N.V. Riemann's Boundary Problem with Infinite Index.—Moscow: Nauka,—1986 (in Russian). Engl. tr. Birkhäuser, Basel, Boston, Berlin, 1994.
5. Itô Jun-Iti. Subharmonic Functions in Half-Plane.// Trans. Am. Math. Soc.,—1967.—129.—No 3.—P. 479–499.
6. Grishin A.F. On Regularity of Growth of Subharmonic Functions.// Teoria funkcii, funkcionalny analiz i prilozenia. Kharkov,—1968.—7.—P. 59–84 (in Russian).
7. Grishin A.F. Continuity and Asymptotic Continuity of Subharmonic Functions.// Matematicheskaja fizika, Analiz, Geometrija. Kharkov,—1994.—1–2.—P. 193–215 (in Russian).
8. Fedorov M.A., Grishin A.F. Some Questions of the Nevanlinna Theory for the Complex Half-Plane.// Mathematical Physics, Analysis and Geometry,—1998.—1.—No 3.—P. 223–271.

9. Grishin A.F., Malyutina T.I. On Proximate Order// Complex Analysis and Mathematical Physics. Krasnoyarsk,-1998.-P. 10-24 (in Russian).
10. Azarin V.S. On Asymptotic Behavior of Subharmonic Functions.// Mat. Sb.,-1979.-108.-No 2.-P. 147-167 (in Russian).
11. Grishin A.F. Subharmonic in Half-Plane Functions of Order One and a Tauber Type Theorem.// Teoria funkcii, funkcionalny analiz i prilozhenia. Kharkov,-1990.-53.-P. 87-94 (in Russian).
12. Džrbašian M.M. Theory of Factorization of Meromorphic in Disc Functions.// Mat. Sb.,-1969.-79.-No 4.-P. 517-615 (in Russian).
13. Grishin A.F. On Regularity Growth of Subharmonic Functions.// Teoria funkcii, funkcionalny analiz i prilozhenia. Kharkov,-1969.-8.-P. 126-135 (in Russian).
14. Grishin A.F. Continuity and Asymptotic Continuity of Subharmonic Functions.// Matematicheskaja fizika, Analiz, Geometrija. Kharkov,-1995.-2.-No 2.- P. 177-193 (in Russian).

REFERENCES

1. Levin B.Ja. Distribution of Zeros of Meromorphic Functions. Moscow, GNTI, 1959 (in Russian). Rev. Engl. tr. Am. Math. Soc., Providence, R.I., 1980.
2. Nevanlinna R. Über die Eigenschaften meromorpher Funktionen in einem Winkelraum // Acta Soc. Sci. Fenn., 1925, 50, No 12, P. 1-45.
3. Hayman W.K. Questions of Regularity Connected with Pólya-Lindelöf Principle // J. Math. pure et appl., 1956, No 35, P. 1/52-168.
4. Govorov N.V. Riemann's Boundary Problem with Infinite Index. Moscow: Nauka, 1986 (in Russian). Engl. tr. Birkhäuser, Basel, Boston, Berlin, 1994.
5. Itô Jun-iti. Subharmonic Functions in Half-Plane // Trans. Am. Math. Soc., 1967, 128, No 3, P. 479-492.
6. Grishin A.F. On Regularity of Growth of Subharmonic Functions // Teoria funkcii, funkcionalny analiz i prilozhenia. Kharkov,-1988.-7.-P. 59-84 (in Russian).
7. Grishin A.F. Continuity and Asymptotic Continuity of Subharmonic Functions // Matematicheskaja fizika, Analiz, Geometrija. Kharkov,-1994.-1-2.-P. 193-215 (in Russian).
8. Fedorov M.A., Grishin A.F. Some Questions of the Nevanlinna Theory for the Complex Half-Plane // Matematicheskaja fizika, Analiz i Geometrija, 1998.-1.-No 3.-P. 223-271.

Про один варіант теореми Пелі–Вінера

В. М. Дільний

Дрогобицький державний педагогічний університет, Україна

Знайдено опис кутових граничних значень класу функцій, аналітичних у півплощині $\operatorname{Re} z > 0$, для яких

$$\sup_{|\varphi| < \frac{\pi}{2}} \left\{ \int_0^{+\infty} |f(re^{i\varphi})| e^{-\sigma r |\sin \varphi|} dr \right\} < +\infty, \quad 0 \leq \sigma < +\infty.$$

1991 Mathematics Subject Classification 30E05.

Позначимо через $E^p[\mathcal{C}(\alpha, \beta)]$, $0 < \beta - \alpha < 2\pi$, $1 \leq p < \infty$, простір функцій, аналітичних в куті $\mathcal{C}(\alpha, \beta) = \{z : \alpha < \arg z < \beta\}$, для яких

$$\|f\| := \sup_{\alpha < \theta < \beta} \left\{ \int_0^{+\infty} |f(re^{i\theta})|^p dr \right\} < +\infty.$$

Функції з цих просторів мають майже скрізь на $\partial\mathcal{C}(\alpha, \beta)$ кутові граничні значення $F(z)$ і $F \in L^p[\partial\mathcal{C}(\alpha, \beta)]$.Позначимо через $H_p^p(\mathbb{C}_+)$, $0 \leq \sigma < +\infty$, простір функцій, аналітичних у півплощині $\mathbb{C}_+ = \{z : \operatorname{Re} z > 0\}$, для яких

$$\sup_{|\varphi| < \frac{\pi}{2}} \left\{ \int_0^{+\infty} |f(re^{i\varphi})|^p e^{-p\sigma r |\sin \varphi|} dr \right\} < +\infty,$$

а через $L_p^p(\mathbb{R})$ — простір таких вимірних функцій $f(iy)$, що $f(iy) \exp(-\sigma|y|) \in L^p(\mathbb{R})$. Функції з простору $H_p^p(\mathbb{C}_+)$, $0 < p < \infty$ мають [1] майже скрізь (м. с.) на $\partial\mathbb{C}_+$ кутові граничні значення $f(iy)$ і $f(iy) \in L_p^p(\mathbb{R})$. У випадку $\sigma = 0$ простори $H_p^p(\mathbb{C}_+)$ збігаються [2] з просторами Харді $H^p(\mathbb{C}_+)$. Добре відомо [3]–[5], що функція $f_0 \in L^p(\partial\mathbb{C}_+)$, $1 \leq p \leq 2$, буде кутовою граничною функцією для деякої функції $f \in H^p(\mathbb{C}_+)$ (тобто, що кутові граничні значення f на уявній осі м. с. співпадають з $f_0(iy)$) тоді і тільки тоді, коли її обернене перетворення Фур'є рівне нулеві м. с. на від'ємній дійсній півосі. Для $p=2$ це твердження належить Р. Пелі та Н. Вінеру [3]. В [6]–[8] встановлено, що

для того, щоб функція $f_0(iy) \in L^p_\sigma(\mathbb{R})$, $1 < p \leq 2$, була кутовою граничною функцією деякої функції $f \in H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$, необхідно і досить, щоб знайшлась така функція f_2 , що:

а) $f_2 \in H^p_{2\sigma}(\mathbb{C}_+)$;

б) $f_3(iy) = f_1(iy) + f_2(iy) \in L^p(-\infty; 0)$, $f_1(iy) := f_0(iy)e^{-p\sigma y}$;

в) для майже всіх $\tau < 0$

$$\int_0^{+\infty} f_1(iv)e^{i\tau v} dv + \frac{1}{i} \int_0^{+\infty} f_2(u)e^{\tau u} du + \int_{-\infty}^0 f_3(iv)e^{i\tau v} dv = 0. \quad (1)$$

Питання про справедливість достатньої частини цього твердження для $p = 1$ залишається відкритим. У зв'язку з цим доведемо наступне твердження.

Теорема. Якщо для функції $f_0(iy) \in L^1_\sigma(\mathbb{R})$ знайдеться така функція f_2 , що виконуються умови а)-в) і

г) для f_2 існує скінченна лінійна комбінація $\gamma(z)$ функцій системи

$$\left\{ \frac{e^{-\lambda z}}{(1+z)^2} : \lambda > 0 \right\},$$

що $\mu(z) := f_2(z) - \gamma(z)e^{2i\sigma z} \in L^1[\partial\mathbb{C}(-\frac{\pi}{2}; 0)]$, то існує функція $f \in H^1_\sigma(\mathbb{C}_+)$, що має f_0 своєю кутовою граничною функцією.

Для доведення теореми скористаємося допоміжними твердженнями.

Лема 1. Якщо для аналітичної в \mathbb{C}_+ функції g її кутова гранична функція $g(iy) \in L^1(\partial\mathbb{C}_+)$ і

$$(\forall \epsilon > 0) (\exists c_1) : \sup_{\varphi \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})} \int_0^{+\infty} |g(re^{i\varphi})| e^{-\epsilon r} dr \leq c_1,$$

то $g \in H^1(\mathbb{C}_+)$.

Лема 2. Якщо $\kappa \in E^1[\mathbb{C}(\alpha; \beta)]$, то

$$\int_{\partial\mathbb{C}(\alpha; \beta)} \kappa(z) dz = 0.$$

Лема 1 випливає з результатів Седлецького [2], частково доводиться в [9] і її формулювання наводиться в [10], а лема 2 міститься в [6].

Перейдемо до доведення твердження теореми. З умови г) випливає, що

$$(\forall \epsilon > 0) (\exists c_2) : \sup_{\varphi \in (-\frac{\pi}{2}; 0)} \int_0^{+\infty} |\mu(re^{i\varphi})| e^{-\epsilon r^2} dr \leq c_2. \quad (2)$$

Покажемо, що $\mu \in E^1[\mathbb{C}(-\frac{\pi}{2}; 0)]$. Нехай $Q(z) := \mu(\sqrt{z}e^{-i\frac{\pi}{4}})/\sqrt{z}$, де вітка кореня в \mathbb{C}_+ вибрана стандартним чином. Тоді

$$\int_0^{+\infty} |Q(re^{i\varphi})|e^{-\epsilon r} dr = \int_0^{+\infty} \left| \frac{\mu(r^{\frac{1}{2}}e^{i(\frac{\varphi}{2}-\frac{\pi}{4})})}{r^{\frac{1}{2}}e^{i\frac{\varphi}{2}}} \right| e^{-\epsilon r} dr =$$

$$2 \int_0^{+\infty} \left| \mu\left(t e^{i(\frac{\varphi}{2}-\frac{\pi}{4})}\right) \right| e^{-\epsilon t^2} dt.$$

Врахувавши (2), з леми 1 бачимо, що $Q \in H^1(\mathbb{C}_+)$, а тому, очевидно, і $\mu \in E^1[\mathbb{C}(-\frac{\pi}{2}; 0)]$. З леми 2 маємо

$$(\forall \tau \leq 0) \quad \frac{1}{i} \int_0^{+\infty} \mu(u)e^{\tau u} du + \int_{-\infty}^0 \mu(iv)e^{i\tau v} dv = 0.$$

Віднявши останню рівність від (1), одержимо

$$\int_0^{+\infty} f_1(iv)e^{i\tau v} dv + \frac{1}{i} \int_0^{+\infty} \gamma(u)e^{2i\sigma u}e^{\tau u} du + \int_{-\infty}^0 (f_1(iv) + \gamma(iv)e^{-2\sigma v})e^{i\tau v} dv = 0. \quad (3)$$

З леми 2 маємо, що

$$(\forall \tau \leq 0) \quad \frac{1}{i} \int_0^{+\infty} \gamma(u)e^{2i\sigma u}e^{\tau u} du = \int_0^{+\infty} \gamma(iv)e^{-2\sigma v}e^{i\tau v} dv.$$

Віднявши останню рівність від (3), одержуємо

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \nu_1(iv)e^{i\tau v} dv = 0, \quad \tau \leq 0,$$

де $\nu_1(iv) = f_1(iv) + \gamma(iv)e^{-2\sigma v} \in L^1(\mathbb{R})$. Тому за вже згадуваним результатом для простору Харді існує $\nu \in H^1(\mathbb{C}_+)$, для якої ν_1 є кутовою граничною функцією. З цього маємо, що f_0 є кутовою граничною функцією функції $f(w) := \nu(w)e^{-i\sigma w} + \gamma(w)e^{i\sigma w} \in H^1_\sigma(\mathbb{C}_+)$. Теорему доведено.

Видається правдоподібним, що умова г) виконується для кожної функції $f \in H^1_{2\sigma}(\mathbb{C})$, але ми не можемо це довести.

ЛІТЕРАТУРА

1. Винищкий Б. В. О нулях функцій, аналітичних в напівплощині, і повне систем експонент. // Укр. мат. журн., -1994.-46.-№ 5.- С. 484-500.

2. Седлецкий А. М. Эквивалентное определение пространств H^p в полуплоскости и некоторые приложения. // Матем. сб.,-1975.-96. -№ 1.-С. 75-82.
3. Винер Н., Пели Р. Преобразование Фурье в комплексной области.-М.: Наука,- 1964.-268 с.
4. Кусис П. Введение в теорию пространств H^p .-М.: Мир,-1984.-365 с.
5. Гарнетт Дж. Ограниченные аналитические функции.-М.: Мир,-1984.-452 с.
6. Винницький Б.В. Про узагальнення теореми Пелі-Вінера.// Матем. студії,-1995.-Виш. 4.-С. 37-44.
7. Винницький Б.В. Рівняння згортки і кутові граничні значення аналітичних функцій.// Доп. АН України,-1995.-Сер. А.-№ 10.-С. 13-17.
8. Винницький Б.В. Про розв'язки однорідного рівняння згортки в одному класі функцій, аналітичних в півсмузі.// Матем. студії,- 1997.-7.-№ 1.-С. 41-52.
9. Martirosian V. On a theorem of Djrbashian of the Phragmen-Lindelöf type.// Math. Nachr.,-1989.-144.-P. 21-27.
10. Мартиросян В. М. Теоремы представления функций в весовых пространствах и их приложения.-Ереван, 1989.-46 с. (Препр./АН Армянской ССР. Институт математики; 03-89).

Логарифмическая асимптотика полиномов,
ортогональных на компакте комплексной плоскости

А. А. Довгошей

Институт прикладной математики и механики НАН Украины, Украина

Пусть $\{\hat{P}_n\}$ – система полиномов ортонормированных на компакте K комплексной плоскости относительно меры $d\mu$. Логарифмическая асимптотика для этих полиномов охарактеризована в терминах неравенств между супремумом и $L^2(d\mu)$ нормами.

1991 *Mathematics Subject Classification* 42C05.

1. Общие определения и обозначения

Для любого подмножества B комплексной плоскости \mathbb{C} его внутренность, граница, замыкание и множество предельных точек есть соответственно $\text{Int } B$, ∂B , \bar{B} и B' . Если f – непрерывная на B функция, то

$$\|f\|_B := \sup\{|f(z)| : z \in B\}.$$

Пусть K – компакт в \mathbb{C} , а $\bar{\mathbb{C}}$ – расширенная плоскость $\bar{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, тогда

$$\Omega := \mathbb{C} \setminus K, \quad \tilde{\Omega} := \bar{\mathbb{C}} \setminus K.$$

Если Ω – связно и логарифмическая емкость $\text{cap } K > 0$, то компакт K называется допустимым. В этом случае определена функция Грина области Ω с полюсом в бесконечности $G(z) = G_K(z)$. Множества регулярных и иррегулярных [6, с. 75, 261], (для задачи Дирихле) граничных точек области Ω будем обозначать через E_R и E_i соответственно. Всюду в дальнейшем μ – положительная, конечная, борелевская мера, носитель которой $\text{supp } \mu \subseteq K$ и содержит бесконечное число точек, $\# \text{supp } \mu = \infty$.

Как обычно, $L^2 = L^2(d\mu) = L^2(d\mu, K)$ – пространство функций, интегрируемых с квадратом по Лебегу относительно меры μ . Для f и q из $L^2(d\mu)$

$$\langle f, q \rangle = \int_K f(z) \overline{q(z)} d\mu(z), \quad \|f\|_{L^2} = \|f\|_{L^2(d\mu)} = \langle f, f \rangle^{\frac{1}{2}}.$$

Ортонормируя в $L^2(d\mu)$ последовательность степеней $\{z^n\}_{n=0}^\infty$, получим систему полиномов $Z = \{\hat{P}_n\}_{n=0}^\infty$

$$\langle \hat{P}_i, \hat{P}_j \rangle = \delta_{ij}, \quad \hat{P}_n(z) = \mu_n z^n + \sum_{k=1}^n a_{n-k}^{(n)} z^{n-k},$$

где δ_{ij} — символ Кронекера, а μ_n можно выбрать положительным.

Заметим, что условие $\# \text{supp } \mu = \infty$ приводит к тому, что различные полиномы не могут совпадать п.в. относительно меры μ , а это, вместе с неравенством $\mu_n > 0$, гарантирует существование и единственность последовательности Z .

Линейное пространство всех многочленов степени не выше n далее обозначается через Π_n , система $\{\hat{P}_j\}_{j=0}^n$ — базис в Π_n .

2. Основные результаты

Предмет настоящей работы можно определить как изучение "логарифмической", или "n-th root" асимптотики полиномов \hat{P}_n . Классификацию асимптотических соотношений для ортогональных полиномов можно найти в [7].

Основными результатами являются сформулированные ниже теоремы 1, 2, 3.

Теорема 1. Пусть K — допустимый компакт и множество E_R — замкнуто, тогда утверждения s_1 и s_2 эквивалентны.

s_1) Для любого $\varepsilon \in (0, \text{cap } K)$ найдется компакт $E = E(\varepsilon) \subseteq K$ такой, что $\varepsilon + \text{cap } E \geq \text{cap } K$ и

$$\forall n \in \mathbb{N} \exists c_1 = c_1(E(\varepsilon), n) \forall P \in \Pi_n : \|P\|_E \leq c_1 \|P\|_{L^2(d\mu)}. \quad (1)$$

Причем для любого $\varepsilon \in (0, \text{cap } K)$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} (c_1(E(\varepsilon), n))^{1/n} \leq 1. \quad (2)$$

s_2) Равномерно по $z \in \Omega$ выполняется неравенство

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln |\hat{P}_n(z)| \leq G(z). \quad (3)$$

Теорема 2. Пусть K — произвольный допустимый компакт, тогда s_2 эквивалентно тому, что справедливо s_1 , и неравенство (2) выполняется равномерно по $\varepsilon \in (0, \text{cap } K)$.

Теорема 3. Пусть K — произвольный допустимый компакт, тогда s_2 влечет следующее утверждение.

s_3) Для любой подпоследовательности $Z_1 \subseteq Z$ существует подпоследовательность $Z_2 \subseteq Z_1$, $Z_2 = \{\hat{P}_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ и существует ограниченное не более чем счетное множество $A = A(Z_1)$, $A' \subseteq K$ такое, что

$$\forall z \in \Omega \setminus A : \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{n_k} \ln |\hat{P}_{n_k}(z)| = G(z), \quad (4)$$

причем сходимость в (4) равномерна по z вне любой окрестности V множества $A \cup K$.

Замечание 1. Пусть $\varphi(n, m)$ — действительная функция, заданная на произведении $N \times M$, где N — множество натуральных чисел, а M — произвольно и $\Phi : M \rightarrow \mathbb{R}$. Соотношение

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \varphi(n, m) \leq \Phi(m)$$

выполняется равномерно по $m \in M$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \forall m \in M \forall n \geq n_0 : \varphi(n, m) \leq \Phi(m) + \varepsilon.$$

Замечание 2. Без потери общности компакты $E(\varepsilon)$ в s_1 можно считать допустимыми. Если $E(\varepsilon)$ не является допустимым, то достаточно взять полиномиально выпуклую оболочку $E(\varepsilon)$. При этом ни норма $\|P\|_{E(\varepsilon)}$, ни емкость $\text{cap } E(\varepsilon)$ не изменятся.

Теорема 3 описывает строение возможных предельных функций последовательности $\{\frac{1}{n} \ln |\hat{P}_n(z)|\}$. При некоторых предположениях о распределении нулей $\hat{P}_n(z)$ такая предельная функция единственна.

Пусть $\hat{P}_n(z) = \mu_n \prod_{i=1}^n (z - z_{ni})$,

$$\{z_j^*\}_{j=1}^\infty = \{z_{11}, z_{21}, z_{22}, z_{31}, z_{32}, z_{33}, \dots, z_{n1}, \dots, z_{nn}, \dots\} -$$

упорядоченная последовательность нулей полиномов системы Z .

Теорема 4. Пусть K — произвольный допустимый компакт и $\{z_j^*\}_{j=1}^\infty$ не имеет предельных точек в Ω , тогда s_2 влечет следующее утверждение.

s_4) Для всех $z \in \Omega$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln |\hat{P}_n(z)| = G(z), \tag{5}$$

причем сходимость в (5) равномерна по z вне любой окрестности K . А если Ω — регулярная область, то и $s_4 \Rightarrow s_2$.

Следствие. Если компакт K является выпуклым, то s_1, s_2 и s_4 эквивалентны.

Из теорем 1–4 легко выводится следующее.

Теорема 5. Пусть Q — ограниченная область, K — полиномиально выпуклая оболочка Q . Тогда каждое из s_1, s_2, s_3 эквивалентно следующему.

s_5) Для любого компакта $E \subset\subset Q$ и любого $n \in \mathbb{N}$

$$\exists c_2 = c_2(E, n) \forall P \in \Pi_n : \|P\|_E \leq c_2 \|P\|_{L^2(d\mu)},$$

причем

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} (c_2(E, n))^{\frac{1}{n}} \leq 1.$$

А если и все предельные точки $\{z_j^*\}_{j=1}^\infty$ принадлежат K , то и $s_4 \equiv s_5$.

Из последней теоремы следует, например, что ортонормированные полиномы в пространствах Харди $H^2(Q)$ и Бергмана $L^2(Q)$ удовлетворяют асимптотическим соотношениям (3)–(5) [3].

Результаты настоящей работы целесообразно сравнить с известными результатами Шталя и Тотика. (Приведенная ниже формулировка является лишь комбинацией частей соответствующих теорем. Полные формулировки можно найти в [10], Теоремы 3.2, 3.3).

Пусть $K = \text{supp } \mu$.

Теорема. (H. Stahl and V. Totik) Для произвольного допустимого компакта K следующие утверждения эквивалентны.

I. Локально равномерно в \mathbb{C}

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |\hat{P}_n(z)|^{\frac{1}{n}} \leq \exp G(z).$$

II. Для любой последовательности $\{P_n\}_{n=0}^\infty$ $P_n \in \Pi_n$, квази-всюду на $\partial\Omega$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{|P_n(z)|}{\|P_n\|_{L^2(d\mu)}} \right)^{\frac{1}{n}} \leq 1.$$

Если область Ω — регулярна, то эквивалентны следующие утверждения

III. Равномерно в \mathbb{C}

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |\hat{P}_n(z)|^{\frac{1}{n}} \exp(-G(z)) \leq 1.$$

IV. Имеет место равенство

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \left(\sup_{P \in \Pi_n} \frac{\|P\|}{\|P\|_{L^2(d\mu)}} \right)^{\frac{1}{n}} = 1.$$

Отметим различия между этой теоремой и теоремой 2. В теореме Шталя-Тотика верхняя граница в асимптотике выполняется равномерно на компактах в \mathbb{C} — без условия регулярности и равномерно в \mathbb{C} — при наличии регулярности, а в теореме 2 гарантируется равномерность в Ω без каких-либо условий регулярности. Кроме того, в утверждении 1 (см. раздел 4 настоящей работы) доказано неравенство с суп-нормой по E_n , очевидно переходящее в равенство из п. IV в случае регулярной Ω и более сильное, чем неравенство из п. II, выполняющееся квази-всюду на $\partial\Omega$. Остановимся также на особенности теоремы 3. В ней рассматривается сходимость по подпоследовательности всюду в Ω за исключением, быть может, не более чем счетного множества. Для сравнения заметим, что в теореме 3.1 [10] на множестве $\Omega \cap \text{conv } K$ ($\text{conv } K$ — выпуклая оболочка K) рассмотрена сходимость по емкости.

В настоящей статье использованы некоторые схемы доказательств из [3]. Кроме того следует отметить влияние работы [12].

3. Предварительные сведения

3.1 Функция Грина. Как известно [6, с. 267], обобщенная, с полюсом в бесконечности функция Грина G области Ω характеризуется следующими свойствами.

- i) Функция G гармонична в Ω .
- ii) Существует полярное множество $E_0 \subseteq \partial\Omega \forall \xi \in \partial\Omega \setminus E_0$:

$$\lim_{\substack{z \rightarrow \xi \\ z \in \Omega}} G(z) = 0, \tag{6}$$

а $\forall \xi \in E_0$ функция $G(z)$ остается ограниченной при $z \rightarrow \xi$ изнутри области Ω .

- iii) Функция $\Phi(z) := (G(z) - \ln |z|)$ ограничена при $z \rightarrow \infty$.

Из теоремы об устранимых особенностях гармонических функций (см., например, [9, с. 54]) следует, что $\Phi(z) = G(z) - \ln |z|$ продолжается до гармонической в $\bar{\Omega} = \bar{C}/K$. Причем

$$\Phi(\infty) = \lim_{z \rightarrow \infty} (G(z) - \ln |z|) = -\ln \text{cap } K. \tag{7}$$

Множество A будем называть полярным, если оно является объединением счетного числа компактов нулевой емкости [6, с. 230]. Множество точек $\partial\Omega$, в которых не выполняется (6) совпадает с E_i (это результат Булигана [1]). Если $E_i = \emptyset$, то область Ω называется регулярной (для задачи Дирихле). Можно показать, что $E_R = \bar{E}_R$ тогда и только тогда, когда $\Omega = Q/A$, где Q —регулярная область, а A —полярное множество.

Сформулируем в виде лемм несколько полезных для дальнейшего результатов.

Лемма 1. Пусть K — произвольный допустимый компакт, E_R — множество регулярных граничных точек Ω , тогда

$$\text{cap } \bar{E}_R = \text{cap } K. \tag{8}$$

Доказательство. Пусть G_R — функция Грина области Ω_R — неограниченной компоненты C/\bar{E}_R . (Функция G_R существует, так как $\text{cap } \bar{E}_R > 0$; иначе $\partial\Omega$ — полярное множество). Пусть E_0 — полярное множество из ii для $G(z)$, (тогда $E_0 \supseteq E_i$) и E_2 — такое же множество для $G_R(z)$. Положим $\hat{G}_R := G_R|_{\Omega}$. Тогда для \hat{G}_R выполняется i, iii и для всех $\xi \in \partial\Omega \setminus (E_0 \cup E_2)$ имеет место (6). Так как $E_0 \cup E_2$ полярное множество, то

$$\forall z \in \Omega : G_K(z) = \hat{G}_R(z), \tag{9}$$

и из (7) следует (8).

Замечание. Можно показать, что $\text{cap } E_R = \text{cap } K$.

Полезной является характеристика $G(z)$ как наименьшей положительной в Ω функции со свойствами i и iii (см., например, [9, с. 105], [6, с. 270]).

Лемма 2. Пусть неотрицательная функция $\Psi(z)$ — гармонична в Ω и функция $U(z) = \Psi(z) - \ln |z|$ ограничена в некоторой окрестности бесконечно удаленной точки. Тогда

$$\forall z \in \Omega : \Psi(z) \geq G(z),$$

причем, если хотя бы в одной точке $z_0 \in \Omega$, $\Psi(z_0) = G(z_0)$, то и для всех $z \in \Omega : \Psi(z) = G(z)$.

Следующее утверждение немного усиливает известную лемму Бернштейна-Уолша [11, с. 77].

Лемма 3. Пусть E компактное подмножество допустимого компакта K и $\text{cap } E = \text{cap } K$. Тогда для любого $P \in \Pi_n$ и любой $z \in \Omega$

$$|P(z)| \leq \|P\|_E \exp(nG_K(z)). \quad (10)$$

Доказательство. Так как $E \subseteq K$, то по лемме 2

$$\forall z \in \Omega : G_K(z) \leq G_E(z).$$

Рассмотрим функцию $\Psi(z) := G_E(z) - G_K(z)$. В области Ω функция $\Psi(z) \geq 0$ и гармонична. В силу (7) $\lim_{z \rightarrow \infty} \Psi(z) = 0$. Следовательно, $\Psi(z)$ продолжается до гармонической в $\tilde{\Omega} = \mathbb{C}/K$, и $\Psi(\infty) = 0$. Точка ∞ — внутренняя для $\tilde{\Omega}$. Гармоническая функция $\Psi(z)$ достигает максимума во внутренней точке области $\tilde{\Omega}$, следовательно, $\forall z \in \Omega : G_E(z) = G_K(z)$.

По лемме Бернштейна-Уолша

$$\forall P \in \Pi_n \forall z \in \Omega : |P(z)| \leq \|P\|_E \exp(nG_E(z)).$$

Заменив в этом неравенстве G_E на G_K получим (10).

Следствие. $\forall P \in \Pi_n \forall z \in \Omega : |P(z)| \leq \|P\|_{E_R} \exp(nG_K(z))$.

Доказательство. Это следует из (10) и (8).

3.2 Ортогональные полиномы. Рассмотрим систему ортогональных в $L^2(d\mu)$ монических полиномов

$$\tilde{P}_n(z) := \frac{1}{\mu_n} \hat{P}_n(z).$$

Стандартным образом доказываются следующие результаты (см., например, [4, с. 19]).

Лемма 4. Пусть B — произвольный монический полином из Π_n , тогда

$$\|\tilde{P}_n\|_{L^2(d\mu)} \leq \|B\|_{L^2(d\mu)},$$

причем, равенство возможно лишь при $B = \tilde{P}_n$.

Лемма 5. При любом $n \in \mathbb{N}$ все нули \hat{P}_n лежат в $\text{conv } K$ — выпуклой оболочке K .

Следующее утверждение есть частный случай леммы Видома [12, Лемма 4].

Лемма 6. Для любого компакта $X \subset \Omega$ число нулей \hat{P}_n , принадлежащих X , не превосходит (с учетом кратности) некоторого t , причем величина t зависит только от X и не зависит от номера n .

4. Доказательство теорем

Сначала удобнее рассмотреть произвольный допустимый компакт и доказать теорему 2.

Доказательство теоремы 2. Оценим нормы полиномов \hat{P}_n на E_R .

Лемма 7. Пусть K — произвольный допустимый компакт и выполнено s_2 , тогда

$$\forall q > 1 \exists c_3 = c_3(q) \forall n \in \mathbb{N} : \|\hat{P}_n\|_{E_R} \leq c_3 q^n. \tag{11}$$

Доказательство. Зафиксируем $q > 1$. Выберем $\varepsilon > 0$ таким образом, чтобы $\exp \varepsilon < q$. Тогда из s_2 следует, что $\exists n_0 = n_0(\varepsilon) \forall n \geq n_0 \forall z \in \Omega :$

$$|\hat{P}_n(z)| \leq (\exp n\varepsilon) \exp(nG(z)).$$

Пусть $\tau > 1$ и $Y_\tau := \{z \in \Omega : 1 < \exp(G(z)) < \tau\}$. Выберем τ из условия $\tau \exp \varepsilon < q$, тогда при $n \geq n_0$

$$\forall z \in Y_\tau : |\hat{P}_n(z)| \leq q^n.$$

Так как при любом $\xi \in E_R$ выполняется (6), то

$$\forall \tau > 1 : E_R \subseteq \bar{Y}_\tau.$$

Следовательно, при $n \geq n_0, \|\hat{P}_n\|_{E_R} \leq q^n$. Из последнего неравенства очевидно следует (11).

Рассмотрим в Π_n две нормы $\|\cdot\|_{E_R}$ и $\|\cdot\|_{L^2(d\mu)}$. Пусть $F_n : (\Pi_n, \|\cdot\|_{L^2(d\mu)}) \rightarrow (\Pi_n, \|\cdot\|_{E_R})$,

$$\forall P \in \Pi_n : F_n(P) = P.$$

Если D_n — единичный шар в $(\Pi_n, \|\cdot\|_{L^2(d\mu)})$, то норма оператора F_n

$$\|F_n\| := \max\{\|P\|_{E_R} : P \in D_n\}.$$

Пусть максимум в этом выражении достигается на $P_n \in D_n$. Тогда

$$|P_n(z)| = \left| \sum_{i=0}^n L_i \hat{P}_i(z) \right| \leq \left(\sum_{i=0}^n |L_i|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{i=0}^n |\hat{P}_i(z)|^2 \right)^{1/2} =$$

$$\left(\sum_{i=0}^n |\hat{P}_i(z)|^2 \right)^{1/2}.$$

Отсюда и из леммы 7

$$\|F_n\| \leq \left(\sum_{i=1}^n \|\hat{P}_i\|_{E_R}^2 \right)^{1/2} \leq c_3(q)(n+1)^{1/2} q^n.$$

В силу произвольности $q > 1$,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} (\|F_n\|)^{1/n} \leq 1.$$

Таким образом, доказано следующее.

Утверждение 1. Пусть K — произвольный допустимый компакт и выполняется s_2 , тогда

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \left(\max_{P \in \Pi_n} \left(\frac{\|P\|_{\bar{E}_R}}{\|P\|_{L^2(d\mu)}} \right)^{1/n} \right) \leq 1.$$

Так как по лемме 1 $\text{cap } \bar{E}_R = \text{cap } K$, то из утверждения 1 следует, что в s_1 можно считать $E(\varepsilon) = \bar{E}_R$ при любом ε из $(0, \text{cap } K)$ и (2) очевидно "выполняется равномерно" по ε .

Для завершения доказательства теоремы 2 достаточно проверить справедливость следующего.

Утверждение 2. Пусть K — произвольный допустимый компакт, тогда из s_1 и того, что (2) выполняется равномерно по $\varepsilon \in (0, \text{cap } K)$ следует s_2 .

Доказательство. Пусть $E(\varepsilon)$ — компакты из s_1 . Положим

$$U := \bigcup_{\varepsilon \in (0, \text{cap } K)} E(\varepsilon),$$

тогда $\text{cap } \bar{U} = \text{cap } K$. Легко видеть, что

$$\forall \hat{P}_n : \|\hat{P}_n\|_{\bar{U}} = \|\hat{P}_n\|_U = \sup \{ \|\hat{P}_n\|_{E(\varepsilon)} : \varepsilon \in (0, \text{cap } K) \} \leq \sup \{ c_1(E(\varepsilon), n) : \varepsilon \in (0, \text{cap } K) \}.$$

Следовательно, в силу равномерности в (2)

$$\forall q > 1 \exists c_4 = c_4(q) \forall \hat{P}_n : \|\hat{P}_n\|_{\bar{U}} \leq c_4 q^n.$$

Отсюда по лемме 3

$$\forall z \in \Omega : |\hat{P}_n(z)| \leq c_4 q^n \exp(nG_K(z)).$$

Таким образом

$$\forall z \in \Omega : \frac{1}{n} \ln |\hat{P}_n(z)| \leq \frac{1}{n} \ln c_4 + \ln q + G_K(z).$$

Следовательно, (3) выполняется равномерно по $z \in \Omega$.

Теорема 2 доказана.

Доказательство теоремы 1. Учитывая теорему 2, очевидно, достаточно проверить справедливость следующего.

Утверждение 3. Пусть множество регулярных граничных точек Ω замкнуто и справедливо s_1 . Тогда неравенство (2) выполняется равномерно по $\varepsilon \in (0, \text{cap } K)$.

Доказательство. Пусть G_R — функция Грина области Ω_R — неограниченной компоненты дополнения E_R . Элементарные топологические соображения показывают, что $E_i = \Omega_R \setminus \Omega$. Так как E_i — нигде не плотно, то Ω — всюду плотно в Ω_R , а так как имеет место (9), то

$$\forall \xi \in E_R : \lim_{\substack{z \rightarrow \xi \\ z \in \Omega_R}} G_R(z) = \lim_{\substack{z \rightarrow \xi \\ z \in \Omega}} G(z) = 0.$$

Следовательно Ω_R — регулярная область.

Пусть $E(\varepsilon)$ компакты из высказывания s_1 , $G_{E(\varepsilon)}$ — соответствующие функции Грина, определенные в областях $\Omega_\varepsilon = \mathbb{C} \setminus E(\varepsilon) \supseteq \Omega$ (см. Замечание 2 после теоремы 2). В силу полярности $E_i = \Omega_R / \Omega$ функции $\tilde{G}_\varepsilon := G_{E(\varepsilon)}|_\Omega$ продолжаются до гармонических функций G_ε на Ω_R . (см. [6, с. 255]). Покажем, что при $\varepsilon \rightarrow 0$ функции $G_\varepsilon \rightarrow G_R$ равномерно на компактах из Ω_R .

Положим $F_\varepsilon := G_\varepsilon - G_R$. По лемме 2 эта функция, либо положительна и гармонична в Ω_R , либо $\forall z \in \Omega_R : F_\varepsilon(z) = 0$. Будем считать, что F_ε — положительна в Ω_R при любом ε . (Противоположный случай много проще и требует лишь очевидных изменений в доказательстве). В силу (7) любая функция F_ε ограничена в окрестности ∞ и по теореме об устранимой особенности продолжается до \tilde{F}_ε — функции гармонической в $\tilde{\Omega}_R = \Omega_R \cup \{\infty\}$. Опять, используя (7) и лемму 1 получаем

$$\tilde{F}_\varepsilon(\infty) = -\ln \text{cap } E_\varepsilon + \ln \text{cap } K \leq \ln \frac{\text{cap } K}{\text{cap } K - \varepsilon}.$$

Следовательно

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \tilde{F}_\varepsilon(\infty) = 0.$$

Пусть \tilde{E} — компактное подмножество области $\tilde{\Omega}_R$, $\infty \in \tilde{E}$. Как известно [2, с. 194], для положительных гармонических функций

$$\exists c_5 = c_5(\tilde{E}, \tilde{\Omega}_R) \forall z \in \tilde{E} \forall \varepsilon \in (0, \text{cap } K) : \tilde{F}_\varepsilon(z) \leq c_5 \tilde{F}_\varepsilon(\infty). \quad (12)$$

Отсюда очевидно, что при $\varepsilon \rightarrow 0$ функции $G_\varepsilon \rightarrow G_R$ равномерно на компактах из Ω_R .

Теперь, как и при доказательстве утверждения 1, достаточно проверить (11).

Выберем в (11) произвольное $q > 1$ и фиксируем $q_1 \in (1, q)$. На $\Gamma_{q_1} := \{z : G_R(z) = q_1\}$ при любом $\varepsilon \in (0, \text{cap } K)$ выполняется неравенство $G_\varepsilon(z) > q_1$. Выберем произвольно $q_2 \in (q_1, q)$. В силу равномерной сходимости $G_\varepsilon \rightarrow G_R$ на компакте Γ_{q_1}

$$\exists \varepsilon_0 \forall z \in \Gamma_{q_1} : G_{\varepsilon_0}(z) < q_2.$$

Таким образом

$$\Gamma_{q_1} \subset M_{\varepsilon_0, q_2} := \{z \in \Omega_R : 0 < G_{\varepsilon_0}(z) < q_2\}.$$

Пусть

$$N_{\varepsilon_0, q_2} := \{z \in \Omega : 0 < G_{E(\varepsilon_0)}(z) < q_2\}.$$

Так как $(M_{\varepsilon_0, q_2} \setminus N_{\varepsilon_0, q_2}) \subset E_i$, то

$$\overline{N_{\varepsilon_0, q_2}} \supset M_{\varepsilon_0, q_2} \supset \Gamma_{q_1}.$$

Используя лемму Бернштейна-Уолша и (1), видим, что во всех точках $z \in \overline{N_{\varepsilon_0, q_2}}$ и в частности на Γ_{q_1}

$$\forall n \in \mathbb{N} : |\hat{P}_n(z)| \leq c_1(E(\varepsilon_0), n)q_2^n.$$

В силу неравенства (2) можно выбрать постоянную c_5 так, что

$$\forall n \in \mathbb{N} : c_1(E(\varepsilon_0), n) \leq c_5q_3^n,$$

где $q_3 > 1$, $q_3 \cdot q_2 = q$. Следовательно

$$\forall n \in \mathbb{N} : \|\hat{P}_n\|_{\Gamma_{q_1}} \leq c_5q^n.$$

Осталось заметить, что в силу регулярности Ω_R , E_R — подмножество полиномиально выпуклой оболочки множества Γ_{q_1} и следовательно

$$\|\hat{P}_n\|_{E_R} \leq c_5q^n.$$

Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 3. Займемся логарифмической асимптотикой старших коэффициентов μ_n .

Утверждение 4. Пусть K — произвольный допустимый компакт. Если выполняется s_1 , то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\mu_n} = \frac{1}{\text{cap } K}.$$

Доказательство. Пусть $t_n(z) = z^n - \sum_{k=1}^n c_{n-k}^{(n)} z^{n-k}$ — n -ый полином Чебышева компакта K , т.е. монический полином степени n , имеющий наименьшую норму $\|\cdot\|_K$. Используя лемму 4, видим

$$\frac{1}{\mu_n} = \|\tilde{P}_n\|_{L^2(d\mu)} \leq \|t_n\|_{L^2(d\mu)} \leq \mu(K)\|t_n\|_K. \quad (13)$$

Как известно [5, с. 287, 302] нормы $\|t_n\|_K$ (называемые еще постоянными Чебышева) и $\text{cap } K$ связаны соотношением

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\|t_n\|_K)^{1/n} = \text{cap } K.$$

Отсюда и из (13)

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} (\mu_n)^{-1/n} \leq \text{cap } K.$$

Покажем, что

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} (\mu_n)^{-1/n} \geq \text{cap } K. \tag{14}$$

Этого, очевидно, достаточно для завершения доказательства.

Пусть $\varepsilon > 0$ произвольно. Выберем $K(\varepsilon) \subseteq K$, $\text{cap } K_\varepsilon \geq \text{cap } K - \varepsilon$, так чтобы выполнялось (1). Тогда

$$c_1(K(\varepsilon), n) \|\hat{P}_n\|_{L^2(d\mu)} \geq \|\hat{P}_n\|_{K(\varepsilon)} \geq \|t_n^\varepsilon\|_{K(\varepsilon)},$$

где t_n^ε — n -тый многочлен Чебышева компакты $K(\varepsilon)$. Следовательно

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} (c_1(K(\varepsilon), n))^{1/n} \liminf_{n \rightarrow \infty} (\mu_n)^{-1/n} &\geq \\ \liminf_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{c_1(K(\varepsilon), n)}{\mu_n} \right)^{1/n} &\geq \text{cap } K - \varepsilon. \end{aligned}$$

Отсюда, используя (2), получаем (14).

Следующее утверждение выводится из леммы 6 (леммы Видома).

Лемма 8. Пусть K — произвольный допустимый компакт, Z_1 — произвольная подпоследовательность Z . Тогда существует подпоследовательность $Z_2 \subseteq Z_1$, $Z_2 = \{\hat{P}_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ и существует ограниченное, не более чем счетное множество $A, A' \subseteq K$ такое, что для любой окрестности V множества $A \cup K$ найдется k_0 такое при $k \geq k_0$ корни всех $\hat{P}_{n_k} \in Z_2$ лежат в $V(A \cup K)$.

Доказательство. Пусть Z_1 — произвольная подпоследовательность Z , ω — произвольная точка Ω . Поставим в соответствие паре (ω, Z_1) семейство последовательностей $B(\omega) = B(\omega, Z_1)$ по следующему правилу:

$$(l = \{\hat{P}_{n_k}\}_{k=1}^\infty \in B(\omega)) \Leftrightarrow (\{n_k\}_{k=1}^\infty \text{ — строго возрастает,}$$

$$l \subseteq Z_1, \text{ и существует последовательность } \{\chi_k\}_{k=1}^\infty$$

$$\text{такая, что } \hat{P}_{n_k}(\chi_k) = 0, \lim_{k \rightarrow \infty} \chi_k = \omega).$$

Для произвольного компакта $W \subset \subset \Omega$ положим

$$B(W) = B(W, Z_1) := \bigcup_{\omega \in W} B(\omega).$$

Пусть $l \in B(W)$, назовем натуральное число m рангом подпоследовательности l , $m := r(l) := r(l, W)$, если существует m -элементное множество $\{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m\} \subseteq W$ такое, что

$$l \in \bigcap_{i=1}^m B(\omega_i),$$

но для любого $m + 1$ -элементного подмножества $\{\tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_2, \dots, \tilde{\omega}_m, \tilde{\omega}_{m+1}\}$ множества W

$$l \notin \bigcap_{i=1}^{m+1} B(\tilde{\omega}_i).$$

По лемме 6 для любого компакта $W \subset \subset \Omega \exists m = m(W) \forall l \in B(W) : r(l) \leq m$.

Прежде чем двигаться дальше, проанализируем возможные альтернативы.

Предположим, что

$$\exists l \subseteq Z_1 \forall W \subset \subset \Omega : B(W, l) = \phi, \quad (15)$$

тогда достаточно положить $Z_2 = l$, $A = \phi$ и лемма доказана. Поэтому будем считать, что

$$\forall l \subseteq Z_1 \exists W \subset \subset \Omega : B(W, l) \neq \phi. \quad (16)$$

Выберем открытый круг $D \supset K$. По лемме 5 корни всех \hat{P}_n лежат в D . Построим $\{W_i\}_{i=1}^{\infty}$ — компактное исчерпание области $D \cap \Omega$:

$$\forall i \in \mathbb{N} : W_i = \overline{W}_i, \text{Int } W_{i+1} \supset W_i, D \cap \Omega = \bigcup_{i=1}^{\infty} W_i.$$

В силу (16) можно считать, что $B(W_1, Z_1) \neq \phi$. Выберем из $B(W_1, Z_1)$ последовательность l_1 — максимального ранга m

$$l_1 \in \bigcap_{i=1}^m B(\omega_i), \quad (17)$$

$\omega_i \in W_1$, $1 \leq i \leq m$. Пусть τ_1 — последовательность, элементами которой являются все корни полиномов последовательности l_1 , лежащие в W_1 . Обозначим через π_1 множество предельных точек последовательности τ_1 , тогда

$$\pi_1 = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m\} \subseteq W_1,$$

где ω_i — точки из (17). В самом деле, легко видеть, что

$$\{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m\} \subseteq \pi_1.$$

Предположим, что $\tilde{\omega} \in \pi_1 \setminus \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m\}$. Тогда найдется последовательность $\tilde{l} \subset l_1$, $\tilde{l} \in (B(\tilde{\omega})) \cap (\bigcap_{i=1}^m B(\omega_i))$. Таким образом

$$r(\tilde{l}, W) \geq m + 1 > m = r(l_1, W_1),$$

а это противоречит максимальной $r(l_1, W_1)$.

Теперь повторим процедуру, взяв l_1 вместо Z_1 и исчерпание $\{W_i\}_{i=2}^{\infty}$ вместо $\{W_i\}_{i=1}^{\infty}$. Найдем $l_2 \subseteq l_1$, имеющую максимальный ранг $r(l_2, W_2)$, и по l_2 построим соответствующее $\pi_2 \subseteq W_2$. Аналогично находим $l_3 \subseteq l_2$ и

$\pi_3 \subseteq W_3$ и т.д. Обозначим через Z_2 последовательность, полученную канторовским диагональным процессом из семейства $\{l_1, l_2, l_3, \dots, l_n, l_{n+1}, \dots\}$ и положим $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} \pi_i$. Построенные Z_2 и A удовлетворяют всем условиям доказываемой леммы.

Окончание доказательства теоремы 3. Пусть K — произвольный допустимый компакт. Проверим, что $s_2 \Rightarrow s_3$.

Предположим, что Z_1 — какая-то последовательность Z . Выберем $Z_2 \subseteq Z_1$, $Z_2 = \{\hat{P}_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ и множество A , $A' \subseteq K$, существование которых гарантирует лемма 8. Пусть $k \in \mathbb{N}$, положим

$$\varepsilon_k := \inf\{\varepsilon > 0 : \forall z \in \Omega \quad G(z) + \varepsilon > \frac{1}{n_k} \ln |\hat{P}_{n_k}(z)|\},$$

в силу равномерности в (3) $\lim_{k \rightarrow \infty} \varepsilon_k = 0$. Докажем, что вне любой окрестности $V(A \cup K)$ справедливо (4) и сходимость в (4) равномерна по $z \in \mathbb{C}/V$. Простое рассуждение показывает, что найдется ограниченное открытое множество U для которого

$$A \cup K \subset U \subset \bar{U} \subset V$$

и множество Ω/\bar{U} — связано. По лемме 8 существует k_0 такое, что при $k \geq k_0$ функции

$$\varphi_k(z) := G(z) + \varepsilon_k - \frac{1}{n_k} \ln |\hat{P}_{n_k}(z)|$$

гармоничны в области $\Omega/\bar{U} = \mathbb{C}/\bar{U}$. Раскладывая \hat{P}_{n_k} на множители, получим

$$\frac{1}{n_k} \ln |\hat{P}_{n_k}(z)| = \ln(\mu_{n_k})^{\frac{1}{n_k}} + \ln|z| +$$

$$\frac{1}{n_k} \sum_{i=1}^{n_k} \ln \left| 1 - \frac{z_{n_k i}}{z} \right|.$$

По лемме 5 в окрестности бесконечно удаленной точки последнее слагаемое в правой части есть $O(|z|^{-1})$. Отсюда, используя (7), получим

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \varphi_k(z) = \ln \left(\frac{1}{\text{cap } K} \right) + \varepsilon_k - \ln(\mu_{n_k})^{\frac{1}{n_k}}.$$

Продолжим φ_k в область $\bar{\mathbb{C}}/\bar{U}$. Используя утверждение 4 и условия $\lim_{k \rightarrow \infty} \varepsilon_k = 0$, получим

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_k(\infty) = 0.$$

Из соотношения, аналогичного (12) и неотрицательности φ_k , следует, что равномерно на компактах из $\bar{\mathbb{C}}/\bar{U}$ функции φ_k стремятся к нулю. Так как $\bar{\mathbb{C}}/V$ — компактное подмножество $\bar{\mathbb{C}}/\bar{U}$ и

$$\bar{\mathbb{C}}/V \supset \mathbb{C}/V$$

то теорема 3 доказана.

Доказательство теоремы 4. Пусть выполняются условия теоремы 4. Выберем в лемме 8 $Z_1 = Z$. Тогда справедливо (15), $Z_2 = Z$, $A = \phi$ и (5) следует из (4). Предположим, что Ω — регулярная область. Покажем, что $s_4 \Rightarrow s_2$. Пусть выполнено s_4 . Выберем $q > 1$ произвольно. Так как сходимость в (5) равномерна на компактах из Ω , то последовательность $\frac{1}{n} \ln |\hat{P}_n(z)|$ сходится к $G(z)$ равномерно на

$$L_{q_1} = \{z : \exp G(z) = q_1\},$$

где $1 < q_1 < q$. Компакт K принадлежит полиномиально выпуклой оболочке L_{q_1} , следовательно имеет место (11), и, как показано в утверждении 2 этого достаточно для справедливости s_2 .

Доказательство теоремы 5. Достаточно установить эквивалентность $s_5 \equiv s_1$. Заметим прежде всего, что в условиях теоремы 5 область $\tilde{\Omega} := \bar{\mathbb{C}}/K$ односвязна и, следовательно, регулярна (это старый результат Петровского [8]). Покажем, что $s_5 \Rightarrow s_1$. Построим последовательность $\{K_m\}_{m=1}^{\infty}$ связанных компактов исчерпывающих область Q

$$K_m \subset K_{m+1}, \quad \bigcup_{m=1}^{\infty} K_m = Q.$$

Пусть $\tilde{\Omega}_m$ — неограниченная компонента связности $\bar{\mathbb{C}}/K_m$. Легко видеть, что $\tilde{\Omega}$ — ядро последовательности областей $\{\tilde{\Omega}_m\}_{m=1}^{\infty}$. Пусть $\Phi_m(z)$ ($\Phi(z)$) конформно и однолистно отображает $\tilde{\Omega}_m$ ($\tilde{\Omega}$) на внешность единичного круга $\Phi_m(\infty) = \infty$, $\Phi'_m(\infty) > 0$ ($\Phi(\infty) = \infty$, $\Phi'(\infty) > 0$). Используя теорему Каратеодори о сходимости к ядру [5, с. 55], видим, что

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \Phi'_m(\infty) = \Phi'(\infty).$$

Так как логарифмическая емкость K_m равна конформному радиусу $\tilde{\Omega}_m$, [5, с. 302] видим, то и

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \text{cap } K_m = \text{cap } K.$$

Следовательно $s_5 \Rightarrow s_1$. Обратная импликация следует из утверждения 1.

ЛИТЕРАТУРА

1. Bouligand G. Domains infinis et cas d'exception du probleme de Dirichlet.— С.Р. Acad. Sci. Paris 178,—1924.—Р. 1054—1057.
2. Брело М. Основы классической теории потенциала.—М.: Мир,—1964.
3. Dovgoshey O. On orthogonal polynomials in the Hardy space, Dziadyk Conference Proceedings Kyiv.—1999 (в печати).

4. Га́йер Д. Лекции по теории аппроксимации в комплексной области.—М.: Мир,—1986.
5. Голузин Г.М. Геометрическая теория функций комплексного переменного.—М.: Наука,—1966.
6. Хейман У.К., Кеннеди П. Субгармонические функции.—М.: Мир,—1980.—Т. 1, 2.
7. Lubinsky D.S. An Update on Orthogonal Polynomials and Weighted Approximation on the Real Line.—Acta Applicandae Mat. 33,—1993.—P. 121—164.
8. Петровский И.Г. Метод Перрона решения задачи Дирихле.// У.М.Н.—1941.—№ 8.—С. 107—114.
9. Стоплов С. Теория функций комплексного переменного.—М.: Иностранлит, —1962.—Т. 2.
10. Stahl H., Totik V. N-th Root Asymptotic Behavior of Orthonormal Polynomials, in "Orthogonal Polynomials: Theory and Practice" NATO ASI Series, —1990.—С. 395—417.
11. Walsh J.L. Interpolation and Approximation by Rational Functions in the Complex Plane, 5-th edition. Providence: Amer. Math. Soc,—1969.
12. Widom H. Polynomials Associated with Measures in the Complex Plane, J.Math and Mech. 16,—1967.—P. 997—1013.

Асимптотика ньютонівського потенціалу нульового роду

М. В. Заболоцький

Львівський національний університет, Україна

При доволі загальній умові на поведінку борелівської міри знайдено непокривані асимптотичні формули її ньютонівського потенціалу.

1991 Mathematics Subject Classification 30B50.

Нехай μ -борелівська міра в просторі \mathbb{R}^m , $m \geq 3$, $n(t) = n(t, \mu) = \mu(\{x : |x| < t\})$, $n(1) = 0$ і

$$\int_1^{+\infty} \frac{dn(t)}{t^{m-1}} < +\infty.$$

Тоді для всіх $x \in \mathbb{R}^m$ є визначеною функція

$$P(x) = P(x; \mu) = \int_{|a| < +\infty} (|a|^{2-m} - |x-a|^{2-m}) d\mu(a),$$

яку називають ньютонівським потенціалом нульового роду. Позначимо ($d_m = m - 2$)

$$I(x) = I(x; \mu) = \int_{|a-x| \leq |x|} (|x-a|^{2-m} - |x|^{2-m}) d\mu(a),$$

$$N(r) = N(r, \mu) = \int_{|a| \leq r} (|a|^{2-m} - r^{2-m}) d\mu(a) = d_m \int_0^r \frac{n(t)}{t^{m-1}} dt.$$

Теорема 1. *Нехай неспадна додатна на $[0, +\infty)$ функція w така, що для деякого $A \in (1, 2)$ і всіх досить великих r*

$$w(2r) \leq Aw(r). \quad (1)$$

Тоді, якщо

$$n(r) = O(w(r)r^{m-2}), \quad r \rightarrow +\infty, \quad (2)$$

то

$$P(x) = -I(x) + N(r) + O(w(r)), \quad r = |x| \rightarrow +\infty.$$

Доведення. Запишемо

$$P(x) = \left\{ \int_{|a| \leq 2r} + \int_{|a| > 2r} \right\} (|a|^{2-m} - |x-a|^{2-m}) d\mu(a) = I_1 + I_2.$$

Для I_1 маємо

$$I_1 = -I(x) + N(2r) - \int_{D(x,a)} |x-a|^{2-m} d\mu(a) - r^{2-m} n(r,x) + (2r)^{2-m} n(2r),$$

де $D(x,a) = \{a \in \mathbb{R}^m : |x-a| > r, |a| \leq 2r\}$, $n(r,x) = \mu\{t : |t-x| \leq |x|\}$.
Оскільки

$$0 \leq \int_{D(x,a)} |x-a|^{2-m} d\mu(a) \leq n(2r)r^{2-m}, \quad n(r,x) \leq n(2r),$$

$$N(2r) = N(r) + d_m \int_r^{2r} \frac{n(t)}{t^{m-1}} dt \leq N(r) + n(2r)r^{2-m}, \quad n(r) = O(r^{m-2}w(r)),$$

то

$$I_1 = -I(x) + N(r) + O(w(r)), \quad r \rightarrow +\infty.$$

Враховуючи, що для $t \geq 2r$ виконується

$$\begin{aligned} t^{m-2} - (t-r)^{m-2} &\leq (m-2)t^{m-3}r, \\ (t+r)^{m-2} - t^{m-2} &\leq (m-2)(3/2)^{m-3}t^{m-3}r, \end{aligned}$$

одержуємо

$$I_2 \leq \int_{2r}^{+\infty} \frac{(t+r)^{m-2} - t^{m-2}}{(t+r)^{m-2}t^{m-2}} dn(t) = O(r) \int_{2r}^{+\infty} \frac{dn(t)}{t^{m-1}},$$

$$I_2 \geq \int_{2r}^{+\infty} \frac{(t-r)^{m-2} - t^{m-2}}{(t-r)^{m-2}t^{m-2}} dn(t) = O(r) \int_{2r}^{+\infty} \frac{dn(t)}{t^{m-1}}.$$

Далі, враховуючи (1) та (2), маємо

$$r \int_{2r}^{+\infty} \frac{dn(t)}{t^{m-1}} \leq r(m-1) \int_{2r}^{+\infty} \frac{n(t)}{t^m} dt = O(r) \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{2^n r}^{2^{n+1} r} \frac{n(t)}{t^m} dt =$$

$$O(r) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n(2^{n+1}r)}{(2^n r)^{m-1}} = O(r) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2^{n+1}r)^{m-2} w(2^{n+1}r)}{(2^n r)^{m-1}} =$$

$$O(1) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{A^{n+1} w(r)}{2^{n-m+2}} = O(w(r)), \quad r \rightarrow +\infty,$$

що доводить теорему 1.

Зауваження 1. Приклад міри μ , для якої $n(t) = \frac{t^{m-1}}{\ln^2 t}$, $t \geq t_0$, показує, що в умові (1) теореми 1 обмеження на сталу A істотне.

Дійсно, тоді

$$r \int_{2r}^{+\infty} \frac{dn(t)}{t^{m-1}} \leq (m-1)r \int_{2r}^{+\infty} \frac{n(t) dt}{t^m} = (m-1) \frac{r}{\ln(2r)}$$

а отже, $I_2 \neq O(w(r))$, $r \rightarrow \infty$, де $w(r) = r/\ln^2 r$.

Позначимо через $\text{cap } E$ вінерову ємність борелівської множини $E \subset \mathbb{R}^m$, $m \geq 3$. Відносною ємністю E називатимемо наступну величину [1]

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\text{cap}(E \cap U(r))}{\text{cap } U(r)}, \quad U(r) = \{x \in \mathbb{R}^m : |x| \leq r\}.$$

Теорема 2. Нехай виконуються умови теореми 1 з довільною сталою $A > 1$. Тоді для довільної функції ψ , $\psi(r) \rightarrow +\infty$ ($r \rightarrow +\infty$),

$$I(x) = o(\psi(r)w(r)), \quad r = |x| \rightarrow \infty, \quad x \notin E,$$

де E — множина нульової відносної ємності.

Доведення. Не зменшуючи загальності, вважаємо, що функція $\psi(r)$, $r \in [0, +\infty)$, є зростаючою. Покладемо для $\alpha > 0$

$$E_\alpha = \{x \in \mathbb{R}^m : I(x; \mu) \geq \alpha \psi(r)w(r)\}.$$

Покажемо, що при $n \rightarrow +\infty$

$$\text{cap}[E_\alpha \cap U(2^n) \setminus U(2^{n-1})] / \text{cap } U(2^n) \rightarrow 0. \quad (3)$$

Дійсно, якщо це не так, то для деякого $\gamma > 0$ і послідовності (n_k) , $n_k \rightarrow +\infty$, $r \rightarrow +\infty$,

$$\text{cap}[E_\alpha \cap U(2^{n_k}) \setminus U(2^{n_k-1})] \geq \gamma \text{cap } U(2^{n_k}).$$

Виберемо компакт $L_{n_k} \subset E_\alpha \cap U(2^{n_k}) \setminus U(2^{n_k-1})$ так, щоб

$$\text{cap } L_{n_k} \geq \gamma \text{cap } U(2^{n_k}).$$

Нехай ν_{n_k} — рівноваговий розподіл одиничної міри на L_{n_k} . Тоді

$$\int_{L_{n_k}} I(x) d\nu_{n_k}(x) \geq \alpha \psi(2^{n_k-1})w(2^{n_k-1}). \quad (4)$$

З іншого боку, маємо

$$\int_{L_{n_k}} I(x) d\nu_{n_k}(x) \leq \int_{L_{n_k}} d\nu_{n_k}(x) \int_{|x-a| \leq |x|} |x-a|^{2-m} d\mu(a) \leq \int_{|a| \leq 2^{n_k+1}} d\mu(a) \int_{L_{n_k}} |x-a|^{2-m} d\nu_{n_k}(x) = (\text{cap } L_{n_k})^{-1} n(2^{n_k+1}) \leq \gamma^{-1} 2^{-n_k(m-2)} O(w(2^{n_k+1})(2^{n_k+1})^{m-2}) = O(w(2^{n_k+1})), \quad k \rightarrow +\infty.$$

що суперечить (4). Отже, (3) доведено.

Виберемо тепер монотонно спадну до нуля послідовність чисел α_j . З (3) випливає, що існує зростаюча послідовність натуральних чисел k_j така, що для $k \geq k_j$

$$\text{cap } [E_{\alpha_j} \cap U(2^k) \setminus U(2^{k-1})] \leq \alpha_j \text{cap } U(2^k). \quad (5)$$

Покладемо

$$E = \bigcup_{j=1}^{+\infty} \{E_{\alpha_j} \setminus U(2^{k_j})\}.$$

Зауважимо, що при $x \rightarrow \infty$, $x \notin E$, виконується

$$I(x) = o(\psi(r)w(r)).$$

Далі для k , $k_j < k \leq k_{j+1}$, маємо

$$E \cap U(2^k) \setminus U(2^{k-1}) = E_{\alpha_j} \cap U(2^k) \setminus U(2^{k-1}).$$

З (5) випливає, що множина E задовольняє умову

$$\text{cap } [E \cap U(2^n) \setminus U(2^{n-1})] / \text{cap } U(2^n) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow +\infty,$$

і тому [1, с. 1295] E має нульову відносну ємність. Теорема 2 доведена.

Теорема 3. Нехай $h(r)$ — додатна повільно зростаюча до $+\infty$ на $[1, +\infty)$ функція така, що

$$n(r) = o(h(r)r^{m-2}), \quad r \rightarrow +\infty. \quad (6)$$

Тоді

$$P(x) = -I(x) + N(r) + o(h(r)), \quad x \rightarrow \infty,$$

$$I(x) = o(h(r)), \quad x \rightarrow +\infty, \quad x \notin E,$$

де E — множина нульової відносної ємності.

Доведення. Покладемо

$$\delta(r) = \sup\{n(t)/(t^{m-2}h(t)) : t \geq r\}, \quad w(r) = h(r)\delta(r).$$

Тоді

$$n(r) \leq w(r), \quad w(2r) \leq (1 + o(1))w(r), \quad r \rightarrow +\infty.$$

Оскільки, завдяки (6), $\delta(r) \downarrow 0$, $r \rightarrow +\infty$, то з теореми 1 отримуємо

$$P(x) = -I(x) + N(r) + O(\delta(r)h(r)) = -I(x) + N(r) + o(h(r)), \quad x \rightarrow \infty.$$

Далі, візьмемо в теоремі 2 $\psi(r) = 1/\delta(r)$. Тоді

$$I(x) = o\left(\frac{1}{\delta(r)}w(r)\right) = o(h(r)), \quad r \rightarrow +\infty, \quad x \notin E.$$

Теорема 3 доведена.

Нехай $u = u_1 - u_2$ — δ -субгармонійна в \mathbb{R}^m , $m \geq 3$, функція. Не зменшуючи загальності, припускаємо, що $u_1(0) = u_2(0) = 0$, u_1, u_2 — гармонійні в околі точки нуль, порядки функцій u_1 та u_2 не перевищують порядку функції u . За цих умов кожна δ -субгармонійна в \mathbb{R}^m функція нульового роду зображується у вигляді [2, с. 174]

$$u(x) = P(x, \mu_1) - P(x, \mu_2),$$

де μ_1, μ_2 — міри Рісса функція u_1 та u_2 . З теорем 1 та 2 отримуємо наступне твердження.

Наслідок. *Нехай $u = u_1 - u_2$ — δ -субгармонійна в \mathbb{R}^m функція нульового роду, міри Рісса μ_1 та μ_2 задовольняють умови (1) та (2). Тоді для довільної функції $\psi(r)$, $\psi(r) \rightarrow +\infty$, $r \rightarrow +\infty$*

$$u(x) = N(r, u_1) - N(r, u_2) + o(\psi(r)w(r)), \quad x \rightarrow \infty, x \notin E, \quad (7)$$

де E — множина нульової відносної ємності, $N(r, u_i) = N(r, \mu_i)$, $i = 1, 2$.

Зауваження 2. В [3] побудовано приклад субгармонійної функції v , для якої $n(r, v) \leq (1 + o(1))r^{m-2} \ln^2 r$, $r \rightarrow +\infty$,

$$1/4 \leq \overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} N(r, v) / \ln^2 r \leq 1,$$

і множина $\{x \in \mathbb{R}^m : v(x) \leq -A \ln^2 r\}$, де A — довільна додатна стала, не є C^0 -множиною (а значить, не є множиною нульової відносної ємності). Зокрема, цим показано, що в (7) (а, отже і в теоремі 2) залишковий член $o(\psi(r)w(r))$ не можна замінити на $O(w(r))$.

Зауваження 3. З теореми 3 зразу випливають асимптотичні формули для деяких підкласів субгармонійних в \mathbb{R}^m , $m \geq 3$, функцій нульового порядку (див. теореми 3 та 4 з [4]; теореми 2-4 з [3]).

ЛІТЕРАТУРА

1. Фаворов С.Ю. О множествах понижения для субгармонических функций регулярного роста. // Сиб. матем. журн., -1979.-20.-№ 6.-С. 1294-1302.

2. Хейман У., Кеннеди П. Субгармонические функции.—М.: Мир,—1980.—304 с.
3. Гольдберг А.А., Заболоцкий Н.В. Индекс концентрации субгармонической функции нулевого порядка.// Матем. заметки,—1983.— 34.—№ 2.—С. 227-236.
4. Заболоцкий Н.В., Фаворов С.Ю. Асимптотические формулы субгармонических в \mathbb{R}^m функций нулевого порядка.// Теория функций, функц. анализ и их прилож. Харьков,—1987.—Вып. 47.— С. 125-128.

(6) A new necessary condition for a set to be the zero set of an absolutely monotonic function is given. If $H \subset \mathbb{R}^m$, $x > 0$ is the zero set of an absolutely monotonic function then for any $\delta \in (0, \pi/2)$ there exists a nonnegative continuous function $f_\delta(x)$ such that $f_\delta(x) = 0$ if and only if $x \in H$.

$$(7) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f(x)}{(x+\delta)^k} < +\infty, \quad x > 0$$

It is shown that this condition is not a consequence of condition (6) before.

$$(8) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f(x)}{(x+\delta)^k} < +\infty, \quad x > 0$$

A function $f \in C^\infty(-\infty, 0]$ is said to be absolutely monotonic if

$$(9) f^{(k)}(x) \geq 0, \quad x \in (-\infty, 0], \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

over the domain of absolute monotonicity. The function f is said to be absolutely monotonic if $f^{(k)}(x) \geq 0$ for all $x \in (-\infty, 0]$ and $k = 0, 1, 2, \dots$. The class of absolutely monotonic functions coincides with the class of functions representable as the Laplace transform of a nonnegative measure.

(10) $f(x) = \int_0^{\infty} e^{-xt} d\mu(t), \quad x \geq 0$

where μ is a nonnegative finite Borel measure. It is shown that any absolutely monotonic function f is analytic in \mathbb{C} and $f(z) \geq 0$ for $\text{Re } z \geq 0$. Let $A(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} z^k$ be the Blaschke product.

$$(11) |f(z)| \leq |A(z)|, \quad \text{Re } z \geq 0$$

where the integral converges absolutely for each z . Absolutely monotonic functions are bounded in the half-plane.

$$(12) |f(z)| \leq |A(z)|, \quad \text{Re } z \leq 0$$