

О РАЗЛОЖЕНИИ ПОЛУГРУППОВЫХ КОЛЕЦ В ПРЯМЫЕ  
СУММЫ ИДЕАЛОВ

Л. В. Потемкин

1. Изучение строения колец (в частности, алгебр и полугрупповых колец) упрощается, если их удастся разложить в прямые суммы идеалов. Если кольцо  $R$  имеет единицу, то его разложимость в прямую сумму, например, двусторонних идеалов зависит, как известно, от существования в центре кольца  $R$  ортогональной системы идемпотентов. В общем случае о такой разложимости судить значительно труднее. В настоящей статье изучается связь между такими разложениями и сдвигами полугрупп и полугрупповых колец.

## § 1. СДВИГИ КОЛЕЦ

2. отображение  $\varphi$  произвольной подгруппы  $S$  в себя называется левым (соответственно правым) сдвигом, если для любых  $x, y \in S$   $\varphi(x, y) = \varphi(x)y$  ( $\varphi(xy) = x\varphi(y)$ ).

Отображение  $\varphi$  произвольного кольца  $R$  в себя называется левым (правым) сдвигом, если оно является левым (правым) сдвигом его мультипликативной полугруппы, и для любых  $x, y \in R$

$$\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y).$$

Отображение  $\varphi$  кольца  $R$  в себя называется двусторонним сдвигом, если оно является одновременно и левым и правым сдвигом. Для коммутативного кольца понятия левого, правого и двустороннего сдвигов, очевидно, совпадают. Отображения  $\lambda_a(x) = ax$  и  $\rho_a(x) = xa$  ( $x \in R$ ) при фиксированном  $a \in R$  являются соответственно левым и правым сдвигами кольца  $R$ . Такие сдвиги называются внутренними. Если кольцо  $R$  обладает левой (правой, двусторонней) единицей, то всякий левый (правый, двусторонний) сдвиг кольца  $R$  — внутренний. Наоборот, если всякий левый (правый, двусторонний) сдвиг кольца  $R$  — внутренний, то кольцо  $R$  обладает левой (правой, двусторонней) единицей.

Введем сложение и умножение сдвигов с помощью формул:

$$(\varphi + \psi)(x) = \varphi(x) + \psi(x),$$

$$(\varphi\psi)(x) = \varphi(\psi(x))$$

для всех  $x \in R$  (т. е. в произведении  $\varphi\psi$  надо выполнить сначала  $\varphi$ , а затем  $\psi$ ). Относительно этих двух действий множество всех левых (правых, двусторонних) сдвигов кольца  $R$  образует кольцо.

**Лемма 1** (Джекобсон [7]). Кольцо двусторонних сдвигов кольца  $R$  с двусторонней единицей изоморфно центру кольца  $R$ .

3. Сдвиг  $\sigma$  (левый, правый или двусторонний) кольца  $R$  называется идемпотентным, если

$$\sigma^2(x) = \sigma(x) \quad (x \in R).$$



Тождественное отображение  $\varepsilon(x) = x$  и нулевое отображение  $\omega(x) = 0$  ( $x \in R$ ) являются идемпотентными двусторонними сдвигами кольца  $R$ . Эти сдвиги называются несобственными. Всякий сдвиг, отличный от тождественного и нулевого, если он существует, называется собственным сдвигом.

**Лемма 2.** *Каждый идемпотентный двусторонний сдвиг кольца  $R$  является эндоморфизмом этого кольца.*

Доказательство. Если  $\varphi$  — идемпотентный двусторонний сдвиг, то

$$\begin{aligned}\varphi(x + y) &= \varphi(x) + \varphi(y), \\ \varphi(xy) &= \varphi^2(xy) = \varphi[\varphi(xy)] = \varphi[x\varphi(y)] = \varphi(x)\varphi(y).\end{aligned}$$

С помощью понятия сдвига можно сформулировать следующий критерий разложимости кольца  $R$  в прямую сумму идеалов.

**Лемма 3.** *Кольцо  $R$  тогда и только тогда разложимо в прямую сумму собственных левых (правых, двусторонних) идеалов, если существует собственный левый (правый, двусторонний) идемпотентный сдвиг кольца  $R$ .*

Доказательство. Докажем лемму, например, для двусторонних идеалов.

1) Пусть кольцо  $R$  разлагается в прямую сумму двух собственных двусторонних идеалов  $R = R_1 \oplus R_2$ , так что  $R_1 R_2 = R_2 R_1 = 0$ . Разлагая каждый элемент  $x \in R$  в сумму  $x = x_1 + x_2$  ( $x_1 \in R_1$ ,  $x_2 \in R_2$ ), рассмотрим отображение  $\varphi(x) = x_1$  кольца  $R$  в себя. Это отображение идемпотентно, так как

$$\varphi^2(x) = \varphi[\varphi(x)] = \varphi(x_1) = x_1 = \varphi(x).$$

Кроме того,

$$\begin{aligned}\varphi(x + y) &= \varphi(x_1 + x_2 + y_1 + y_2) = x_1 + y_1 = \varphi(x) + \varphi(y), \\ \varphi(xy) &= \varphi[x_1 + x_2)(y_1 + y_2)] = \varphi(x_1 y_1 + x_2 y_2) = \\ &= x_1 y_1 = \varphi(x) y = x \varphi(y),\end{aligned}$$

так как  $x_1 y_1 = x_1 (y_1 + y_2) = (x_1 + x_2) y_1$ . Следовательно,  $\varphi$  — собственный двусторонний идемпотентный сдвиг.

2) Пусть  $\varphi$  — собственный двусторонний идемпотентный сдвиг кольца  $R$ ,  $\varepsilon$  — тождественный сдвиг. Тогда  $\varepsilon - \varphi$  — также собственный двусторонний идемпотентный сдвиг. Обозначим через  $R_1$  и  $R_2$  соответственно множества элементов  $\varphi(x)$  и  $(\varepsilon - \varphi)(x)$  ( $x \in R$ ). Единственным общим элементом этих множеств является нуль, и каждый элемент  $x \in R$  однозначно разлагается в сумму двух элементов из  $R_1$  и  $R_2$ :  $x = \varphi(x) + (\varepsilon - \varphi)(x)$ . По лемме 2 множества  $R_1$  и  $R_2$  являются гомоморфными образами кольца  $R$ , т. е. сами являются кольцами. Следовательно,  $R = R_1 \oplus R_2$ . Для произвольных  $x, y \in R$ .

$$\begin{aligned}\varphi(x)(\varepsilon - \varphi)(y) &= \varphi(x)[\varepsilon(y) - \varphi(y)] = \varphi(x)y - \varphi(x)\varphi(y) = \\ &= \varphi(xy) - \varphi(xy) = 0, \\ (\varepsilon - \varphi)(y)\varphi(x) &= [\varepsilon(y) - \varphi(y)]\varphi(x) = y\varphi(x) - \varphi(y)\varphi(x) = \\ &= \varphi(yx) - \varphi(yx) = 0.\end{aligned}$$

Следовательно,  $R_1 R_2 = R_2 R_1 = 0$ .

Если кольцо  $R$  имеет единицу, то, используя леммы 1 и 3, получаем такой хорошо известный результат.

**Следствие.** *Кольцо  $R$  с единицей тогда и только тогда разложимо в прямую сумму собственных двусторонних идеалов, если в центре этого кольца существуют идемпотенты, отличные от нуля и единицы.*



4. Рассмотрим алгебру  $A$  степени  $n$  над коммутативным кольцом  $R$  с единицей. Элементами алгебры  $A$  являются суммы вида  $\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i$  ( $\alpha_i \in R$ ), причем

$$x_i x_j = \sum_{k=1}^n \gamma_{ij}^k x_k \quad (i, j = 1, 2, \dots, n). \quad (1)$$

По лемме 3 мы сможем судить о разложимости алгебры  $A$  в прямую сумму идеалов, если будут известны все идемпотентные сдвиги этой алгебры. Ясно, что каждый сдвиг  $\xi$  (левый, правый или двусторонний) алгебры  $A$  является линейным преобразованием этой алгебры, рассматриваемой как  $n$ -мерное векторное пространство, но не всякое линейное преобразование может быть сдвигом. Легко показать, что линейное преобразование  $\xi$  тогда и только тогда является левым или правым сдвигом, когда выполняются соответственно условия

$$\xi(x_i x_j) = \xi(x_i) x_j \quad (i, j = 1, 2, \dots, n), \quad (2)$$

$$\xi(x_i x_j) = x_i \xi(x_j) \quad (i, j = 1, 2, \dots, n) \quad (3)$$

для базисных элементов  $x_i, x_j$ .

Пусть  $\xi$  — левый сдвиг алгебры  $A$ , и

$$\xi(x_i) = \sum_{r=1}^n \xi_{ir} x_r \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (4)$$

Подставив в (2) выражения для  $x_i x_j$  и  $\xi(x_i)$  из (1) и (4), получим

$$\xi\left(\sum_{k=1}^n \gamma_{ij}^k x_k\right) = \sum_{r=1}^n \xi_{ir} x_r x_j,$$

или, учитывая, что  $\xi(x_k) = \sum_{s=1}^n \xi_{ks} x_s$  и  $x_r x_j = \sum_{s=1}^n \gamma_{rj}^s x_s$ ,

$$\sum_{k=1}^n \sum_{s=1}^n \gamma_{ij}^k \xi_{ks} x_s = \sum_{r=1}^n \sum_{s=1}^n \xi_{ir} \gamma_{rj}^s x_s,$$

и, следовательно,

$$\sum_{k=1}^n \gamma_{ij}^k \xi_{ks} = \sum_{r=1}^n \xi_{ir} \gamma_{rj}^s \quad (i, j, s = 1, 2, \dots, n). \quad (5)$$

Аналогично, если  $\xi$  — правый сдвиг, то

$$\sum_{k=1}^n \gamma_{ij}^k \xi_{ks} = \sum_{r=1}^n \xi_{jr} \gamma_{ir}^s \quad (i, j, s = 1, 2, \dots, n). \quad (6)$$

При каждом фиксированном  $j$  (соответственно  $i$ ) структурные константы  $\gamma_{ij}^k$  образуют матрицы  $A_{(j)} = (\alpha_{ik}^{(j)})$  и  $B_{(i)} = (\beta_{jk}^{(i)})$ , где  $\alpha_{ik}^{(j)} = \beta_{jk}^{(i)} = \gamma_{ij}^k$ . Условия (5) и (6) можно сформулировать теперь следующим образом.

**Лемма 4.** Для того, чтобы линейное преобразование  $\xi$  было левым (правым) сдвигом алгебры  $A$ , необходимо и достаточно, чтобы матрица этого преобразования была перестановочна с каждой из матриц  $A_{(j)}$  (с каждой из матриц  $B_{(i)}$ ).

5. Всюду далее  $R$  — коммутативное кольцо с единицей. Под полугрупповым кольцом  $R(S)$  полугруппы  $S$  над кольцом  $R$  мы понимаем



алгебру над  $R$ , базисными элементами которой являются элементы полугруппы  $S$ . Если, кроме того, полугруппа  $S$  имеет нуль  $0$ , то, как обычно, будем отождествлять все элементы вида  $a0$  с нулем  $0$  кольца  $R(S)$ . Все, что до сих пор говорилось о разложимости произвольных колец и алгебр в прямые суммы идеалов, справедливо, конечно, и для полугрупповых колец.

Всякий сдвиг  $\varphi$  полугруппы  $S$  порождает сдвиг всего полугруппового кольца  $R(S)$ :

$$\varphi(\sum \alpha x) = \sum \alpha \varphi(x) \quad (\alpha \in R, x \in S).$$

Обозначим сдвиг кольца  $R(S)$ , порождённый сдвигом  $\varphi$  полугруппы  $S$ , также буквой  $\varphi$ . Сдвиг полугруппы  $S$ , отображающий все ее элементы в один и тот же элемент, называется нулевым сдвигом. Заметим, что левый (правый, двусторонний) нулевой сдвиг полугруппы  $S$  может существовать лишь тогда, когда полугруппа  $S$  обладает левым (правым, двусторонним) нулем. Действительно, если, например,  $\varphi$  — двусторонний сдвиг полугруппы  $S$ , отображающий все ее элементы в элемент  $a$ , то  $\varphi(x, y) = a$  и  $\varphi(xy) = x\varphi(y) = \varphi(x)y = xa = ay$ , откуда  $xa = ay = a$ , т. е.  $a$  — нуль полугруппы  $S$ . Всякий сдвиг полугруппы  $S$ , отличный от тождественного и нулевого (если он существует) сдвигов, называется собственным сдвигом.

Пусть  $\varphi$  — собственный двусторонний идемпотентный сдвиг полугруппы  $S$ . Если  $\varepsilon$  — тождественный сдвиг кольца  $R(S)$ , то отображения  $\varphi$  и  $\varepsilon - \varphi$ , рассматриваемые во всем кольце  $R(S)$ , являются собственными двусторонними идемпотентными сдвигами кольца  $R(S)$ . При этом кольцо  $R(S)$  распадается в прямую сумму двух собственных двусторонних идеалов:  $R(S) = \varphi[R(S)] \oplus (\varepsilon - \varphi)[R(S)]$ . Так как по лемме 2 сдвиги  $\varphi$  и  $\varepsilon - \varphi$  являются эндоморфизмами кольца  $R(S)$ ,  $\varphi(S)$  и  $(\varepsilon - \varphi)(S)$  являются гомоморфными образами полугруппы  $S$ , т. е. сами являются полугруппами. Любой элемент кольца  $R(S)$  линейно выражается через элементы полугрупп  $\varphi(S)$  и  $(\varepsilon - \varphi)(S)$ . Кроме того, общее количество различных элементов в  $\varphi(S)$  и  $(\varepsilon - \varphi)(S)$  не превосходит порядка полугруппы  $S$ . Действительно, если  $\varphi(x) = x \neq 0$  ( $x \in S$ ) то  $(\varepsilon - \varphi)(x) = 0$ . Если  $\varphi(x) = y \neq 0$ , то  $\varphi(y) = y$ . Отсюда видно, что в  $\varphi(S)$  войдут те и только те элементы  $x$ , для которых  $\varphi(x) = x$ , а в полугруппе  $(\varepsilon - \varphi)(S)$  отличны от нуля те и только те элементы  $(\varepsilon - \varphi)(x)$ , для которых  $\varphi(x) \neq x$ . Таким образом, совокупность всех различных ненулевых элементов из  $\varphi(S)$  и  $(\varepsilon - \varphi)(S)$  образует базис кольца  $R(S)$ . Отсюда вытекает

**Теорема 1.** Если существует собственный двусторонний идемпотентный сдвиг  $\varphi$  полугруппы  $S$ , то полугрупповое кольцо  $R(S)$  этой полугруппы распадается в прямую сумму двух собственных двусторонних идеалов  $R(\varphi(S))$  и  $R((\varepsilon - \varphi)(S))$ . Эти идеалы сами являются полугрупповыми кольцами полугрупп  $\varphi(S)$  и  $(\varepsilon - \varphi)(S)$ .

6. Множество всех двусторонних сдвигов полугруппы  $S$  образует некоторую полугруппу  $V$ , и полугрупповое кольцо  $R(V)$  является подкольцом множества  $W$  всех двусторонних сдвигов кольца  $R(S)$ . Может оказаться, что не существует собственных двусторонних идемпотентных сдвигов полугруппы  $S$ , в то время, как существуют собственные двусторонние идемпотентные сдвиги кольца  $R(S)$ . Рассмотрим, например, коммутативную нильпотентную полугруппу  $S$ , состоящую из элементов  $x, y, z, v, 0$ , где

$$x^2 = y^2 = z^2 = u,$$

$$xy = xz = yz = v$$



и все остальные произведения равны 0. Рассматривая полугрупповое кольцо  $R(S)$  как алгебру, можно установить с помощью леммы 4, что всякий сдвиг (двусторонний в силу коммутативности) кольца  $R(S)$  определяется формулами:

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \alpha x + \beta y + \beta z + \gamma_1 u + \delta_1 v, \\ \varphi(y) &= \beta x + \alpha y + \beta z + \gamma_2 u + \delta_2 v, \\ \varphi(z) &= \beta x + \beta y + \alpha z + \gamma_3 u + \delta_3 v, \\ \varphi(u) &= \alpha u + 2\beta v, \\ \varphi(v) &= \beta u + (\alpha + \beta)v.\end{aligned}$$

Если сдвиг  $\varphi$  идемпотентен, то  $\gamma_1 = \delta_1 = \gamma_2 = \delta_2 = \gamma_3 = \delta_3 = 0$ ,  $\alpha^2 + 2\beta^2 = \alpha$ ,  $2\alpha\beta + \beta^2 = \beta$ . Могут существовать два собственных идемпотентных сдвига кольца  $R(S)$ . Они получаются при следующих значениях коэффициентов  $\alpha$  и  $\beta$ :

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= \frac{2}{3}, \quad \beta_1 = -\frac{1}{3}, \\ \alpha_2 &= \frac{1}{3}, \quad \beta_2 = \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

В то же время единственными идемпотентными сдвигами полугруппы  $S$  являются нулевой и тождественный сдвиги. В этом случае нельзя утверждать, что идеалы, на которые распадается кольцо  $R(S)$ , являются полугрупповыми кольцами, так как различные элементы полугруппы  $\varphi(S)$  (т. е. гомоморфного образа полугруппы  $S$ ), отличные от нуля, могут оказаться линейно зависимыми.

## § 2. ПОЛУГРУППОВЫЕ КОЛЬЦА ПОЛУГРУПП МАТРИЧНОГО ТИПА

7. Пусть  $G$  — конечная группа,  $R(G)$  — ее групповое кольцо,  $P = (p_{ij})$  — ненулевая  $nm$ -матрица с элементами из  $G^* = G \cup 0 (\subseteq R(G))$ . Рассмотрим множество  $S$  элементов вида  $(x, ij)$ , где  $x \in G^*$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ , причем все элементы  $(0, ij)$  отождествим в один элемент. Относительно действия

$$(x, ij)(y, rs) = (xp_{ir}y, is) \quad (7)$$

множество  $S$  образует полугруппу, называемую полугруппой матричного типа над  $G$  с матрицей  $P$ . В частности, всякая конечная вполне простая [2, 3] полугруппа изоморфна некоторой полугруппе матричного типа. Каждый элемент  $(x, ij) \in S$  запишем в виде  $mn$ -матрицы

$$x = (x_{rs}), \quad (8)$$

где

$$x_{rs} = \begin{cases} x & \text{при } r = i, s = j \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Тогда вместо формулы (7) получим

$$X \circ Y = XPY. \quad (9)$$

Пусть  $A$  — алгебра над  $R$ ,  $P$  — ненулевая  $nm$ -матрица с элементами из  $A$ . Множество  $M(A, m, n, P)$  всех  $mn$ -матриц  $X$  с элементами из  $A$  относительно обычного сложения, умножения на элементы из  $R$  и «умножения» матриц (9) образует алгебру Манна\* над  $R$ . Чтобы подчерк-

\* Мани [6] изучал такие алгебры в случае, когда  $R$  — поле.



нута, что элементами алгебры Манна являются матрицы над  $A$ , назовем ее  $A$ -алгеброй Манна. В частности, при  $A=R$  получается  $R$ -алгебра Манна. Обычное полное кольцо  $R_m$ -квадратных матриц порядка  $m$  с элементами из  $R$  является  $R$ -алгеброй Манна с единичной матрицей  $P$  порядка  $m$ . Если  $A=R(G)$ , то всякую  $mn$ -матрицу с элементами из  $A$  можно представить в виде линейной комбинации матриц (8) с коэффициентами из  $R$ . Следовательно, полугрупповое кольцо  $R(S)$  полугруппы  $S$  матричного типа является  $R(G)$ -алгеброй Манна над  $R$ . Полугрупповые кольца вполне простых полугрупп над полем  $R$  изучались в работах [4—6]. В теоремах 2—5 мы найдем все сдвиги полугрупповых колец полугрупп матричного типа, что даст возможность судить о разложимости этих колец в прямые суммы идеалов.

8. Заметим, что всякую ненулевую матрицу  $P$  с элементами из  $G^*$  можно «нормализовать» так, что  $p_{11} = I$ , где  $I$  — единица группы  $G$ . При этом, как и в случае вполне простых полугрупп [9], полугруппа  $S$  с матрицей  $P$  и полугруппа  $S'$  с «нормализованной» матрицей  $P'$  будут изоморфны. В дальнейшем будем считать  $p_{11} = I$ , при этом множество элементов  $(x, I)$ , где  $x \in G$ , образует группу  $G_I$ , изоморфную группе  $G$ . Напомним, что произведением\*\* алгебр  $A$  и  $B$  с базисами  $\{e_i\}_{i=1}^p$  и  $\{f_j\}_{j=1}^q$  называется алгебра  $A \times B$  с базисом  $\{e_i f_j\}$ , где  $e_i f_j = f_j e_i$ . Через  $\bar{G}$  обозначим группу, антиизоморфную группе  $G$ .

**Теорема 2.** Кольцо всех левых сдвигов полугруппового кольца  $R(S)$  полугруппы  $S$  матричного типа изоморфно произведению группового кольца  $R(\bar{G})$  и полного матричного кольца  $R_m$ , где  $m$  — число столбцов в матрице  $P$ .

**Доказательство.** Отображения  $\lambda_{ik}^x(y, r, s) = \delta_{ir}(xy, ks)^{**}$  ( $x \in G$ ;  $i, k = 1, 2, \dots, m$ ) являются левыми сдвигами полугруппы  $S$ :

$$[\lambda_{ik}^x(y, rs)] \cdot (z, uv) = \delta_{ir} \cdot (xy, ks) \cdot (z, uv) = \delta_{ir} \cdot (xyp_{su}z, kv) = \\ = \lambda_{ik}^x(y p_{su}z, rv) = \lambda_{ik}^x[(y, rs)(z, uv)].$$

Следовательно, отображение  $\lambda(y, rs) = \sum_{i, k, x} \alpha_{ik}^x \lambda_{ik}^x(y, rs) = \sum_{i, k, x} \alpha_{ik}^x \delta_{ir} \cdot (xy, ks)$  или

$$\lambda(y, is) = \sum_{k, x} \alpha_{ik}^x (xy, ks), \quad \alpha_{ik}^x \in R \quad (10)$$

является левым сдвигом кольца  $R(S)$ . Докажем, с другой стороны, что всякий левый сдвиг  $\lambda$  кольца  $R(S)$  имеет вид (10). Всякий левый сдвиг  $\lambda$  отображает левый идеал  $L_j = \{\sum \alpha_{ij}^x(x, ij)\}$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ) кольца  $R(S)$  в себя, так как

$$\lambda(y, ij) = \lambda[(e, i1)(y, 1j)] = [\lambda(e, i1)] \cdot (y, 1j), \quad (11)$$

и произведение любого элемента  $(x, rs)$ , входящего в выражение  $\lambda(e, i1)$ , на  $(y, 1j)$  принадлежит  $L_j$ . Пусть

$$\lambda(e, i1) = \sum_{k, x} \alpha_{ik}^x (x, k1),$$

тогда в силу (11)

$$\lambda(y, is) = [\lambda(e, i1)] \cdot (y, 1s) = \sum_{k, x} \alpha_{ik}^x (x, k1)(y, 1s) = \sum_{k, x} \alpha_{ik}^x (xy, ks),$$

\* Употребляются также термины «прямое произведение», «тензорное произведение», «кронекееровское произведение».

\*\*  $\delta_{ir}$  — символ Кронекера, т. е.  $\delta_{ir} = 1$ , если  $i = r$ ,  $\delta_{ir} = 0$ , если  $i \neq r$ .



и, следовательно, всякий левый сдвиг  $\lambda$  имеет вид (10). Всякий сдвиг  $\lambda_{ik}^x$  можно представить как произведение (т. е. суперпозицию, см. п. 2) сдвигов  $\lambda_{ik}$  и  $\lambda^x$ :  $\lambda_{ik}^x = \lambda_{ik} \cdot \lambda^x = \lambda^x \cdot \lambda_{ik}$ , где

$$\begin{aligned}\lambda_{ik}(y, rs) &= \delta_{ir}(y, ks), \\ \lambda^x(y, r, z) &= (xy, rs).\end{aligned}$$

Сдвиги  $\lambda^x$  образуют группу  $\bar{G}$ , антиизоморфную группе  $G$ , так как

$$(\lambda^x \lambda^y)(z, u, v) = \lambda^y[\lambda^x(z, uv)] = \lambda^y(xz, uv) = (yxz, uv) = \lambda^{yx}(z, uv).$$

Это и непосредственно видно, потому что всякий левый сдвиг  $\lambda^x$  является левым сдвигом группы  $G_{11}$ . Сдвиги  $\lambda_{ik}$  образуют базис полного матричного кольца  $R_m$ , так как

$$\begin{aligned}(\lambda_{ik} \lambda_{jl})(y, rs) &= \lambda_{jl}[\lambda_{ik}(y, rs)] = \lambda_{jl}[\delta_{ir}(y, ks)] = \delta_{jk} \delta_{il} \cdot (y, ls), \\ \delta_{kj} \lambda_{il}(y, rs) &= \delta_{kj} \delta_{il} \cdot (y, ls),\end{aligned}$$

и, следовательно,

$$\lambda_{ik} \lambda_{jl} = \delta_{kj} \lambda_{il}.$$

Аналогично, для правых сдвигов имеет место

**Теорема 3.** Кольцо всех правых сдвигов полугруппового кольца  $R(S)$  полугруппы  $S$  матричного типа изоморфно произведению группового кольца  $R(G)$  и полного матричного кольца  $R_n$ , где  $n$  — число строк в матрице  $P$ .

*Замечание.* Так же, как и в случае вполне простых полугрупп [8], все левые (правые) сдвиги полугруппы  $S$  матричного типа образуют полугруппу, изоморфную полугруппе  $T = \bar{G} \times S_m$  ( $T = G \times S_n$ )\*, где  $S_m$  ( $S_n$ ) — вполне простая полугруппа. При этом все ненулевые сдвиги из  $T$  образуют базис алгебры всех левых (соответственно правых) сдвигов полугруппового кольца  $R(S)$ . Отсюда вытекает

**Теорема 4.** Если  $T$  — полугруппа всех левых (правых) сдвигов полугруппы  $S$  матричного типа, то кольцо всех левых (правых) сдвигов полугруппового кольца  $R(S)$  совпадает с полугрупповым кольцом  $R(T)$ .

Из теорем 2 и 3 имеем

*Следствие.* Для того, чтобы полугрупповые кольца  $R(S)$  и  $R(S')$  полугрупп  $S$  и  $S'$  матричного типа были изоморфны, необходимо, чтобы матрицы  $P$  и  $P'$  имели одинаковые размеры.

**9. Теорема 5.** Кольцо всех двусторонних сдвигов полугруппового кольца  $R(S)$  полугруппы  $S$  матричного типа изоморфно центру кольца  $R(G)$ .

*Доказательство.* Всякий двусторонний сдвиг  $\varphi$  кольца  $R(S)$ , будучи одновременно и левым и правым сдвигом, отображает в себя левый идеал  $L_1 = \{\sum \alpha_{i1}^x(x, i1)\}$  и правый идеал  $R_1 = \{\sum \alpha_{1j}^x(x, 1j)\}$  кольца  $R(S)$ . Следовательно,  $\varphi$  отображает в себя групповое кольцо  $R(G_{11})$ . По лемме 1 множество всех двусторонних сдвигов кольца  $R(G_{11})$  изоморфно центру этого кольца. Так как

$$(x, ij) = (x, i1)(e, 11)(e, 1j) = (e, i1)(e, 11)(x, 1j)$$

и

$$\varphi(e, 11) = \sum_z \alpha^z(z, 11),$$

\*  $A \times B$  — прямое произведение полугрупп  $A$  и  $B$ .



то

$$\begin{aligned}\varphi(x, ij) &= (x, i1) \sum \alpha^z(z, 11)(e, 1j) = \sum \alpha^z(xz, ij) = \\ &= (e, i1) \sum \alpha^z(z, 11)'(x, 1j) = \sum \alpha^z(zx, ij)\end{aligned}\quad (12)$$

Отображение, определенное формулой (12), является двусторонним сдвигом, так как

$$\begin{aligned}\varphi[(x, ij)(y, rs)] &= \varphi(xp_{ir}y, is) = \sum \alpha^z(xp_{ir}yz, is) = \sum \alpha^z(zxp_{ir}y, is), \\ [\varphi(x, ij)] \cdot (y, rs) &= \sum \alpha^z(zx, ij)(y, rs) = \sum \alpha^z(zxp_{ir}y, is), \\ (x, ij) \cdot [\varphi(y, rs)] &= (x, ij) \sum \alpha^z(yz, rs) = \sum \alpha^z(xp_{ir}yz, is),\end{aligned}$$

и, следовательно,

$$\varphi[(x, ij)(y, rs)] = [\varphi(x, ij)] \cdot (y, rs) = (x, ij) \cdot [\varphi(y, rs)]$$

Формула (12) показывает, как построить продолжение сдвига  $\varphi$  кольца  $R(G_{11})$  на все кольцо  $R(S)$ . Такое продолжение однозначно, следовательно, кольцо сдвигов кольца  $R(S)$  изоморфно кольцу сдвигов кольца  $R(G_{11})$ , т. е. центру кольца  $R(G)$ .

10. Полугрупповое кольцо  $R(S)$  полугруппы  $S$  матричного типа тогда и только тогда распадается в прямую сумму двусторонних идеалов, когда существуют собственные двусторонние идемпотентные сдвиги кольца  $R(S)$ , т. е. когда (теорема 5) в центре кольца  $R(G)$  существуют идемпотенты, отличные от нуля и единицы. Поэтому справедлива

**Теорема 6.** Полугрупповое кольцо  $R(S)$  полугруппы  $S$  матричного типа и групповое кольцо  $R(G)$  распадается в прямую сумму одинакового числа собственных двусторонних идеалов.

**Доказательство.** Пусть  $e = e_1 + e_2 + \dots + e_k$ , где  $e$  — единица,  $e_1, e_2, \dots, e_k$  — минимальные идемпотенты центра кольца  $R(G)$ . Им соответствуют тождественный сдвиг  $\varepsilon$  и «минимальные» двусторонние идемпотентные сдвиги  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_k$  кольца  $R(S)$ , причем  $\varepsilon = \varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_k$ . Разложению  $R(G) = \sum_{i=1}^k \oplus e_i R(G)$  группового кольца

$R(G)$  соответствует разложение  $R(S) = \sum_{i=1}^k \varepsilon_i(R(S))$  полугруппового кольца  $R(S)$ , причем идеалы  $e_i R(G)$  кольца  $R(G)$  и идеалы  $\varepsilon_i(R(S))$  кольца  $R(S)$  неразложимы.

Клиффорд [1] нашел все представления вполне простой полугруппы  $S$  над полем  $R$ . Из его результатов следует, что вполне простая полугруппа  $S$  имеет столько неприводимых неэквивалентных представлений, сколько их имеет группа  $G$ . Из теоремы 6 и результатов Клиффорда следует, что число идеалов, на которые распадается полугрупповое кольцо  $R(S)$  вполне простой полугруппы  $S$ , и число неприводимых неэквивалентных представлений полугруппы  $S$  совпадают (в случае, когда  $R$  — поле).

11. Рассмотрим  $R$ -алгебру Манна над эвклидовым [11] кольцом  $R$ . С помощью обычных элементарных преобразований матрицу  $P$  можно привести [11] к каноническому виду

$$P' = \left( \begin{array}{ccc|c} \varepsilon_1 & & & 0 \\ \varepsilon_2 & & & 0 \\ 0 & \ddots & & 0 \\ & & \varepsilon_r & 0 \\ \hline & & & 0 \end{array} \right),$$

где  $\varepsilon_k$  делится на  $\varepsilon_i$  при  $k \geq i$ . Элементы  $\varepsilon_i \in R$  ( $i = 1, 2, \dots, r$ ) называются элементарными делителями матрицы  $P$ . Элементарные делители определяются матрицей  $P$  с точностью до множителей, являющихся об-



ратимыми элементами в  $R$ . С другой стороны, нетрудно видеть, что  $R$ -алгебры Манна с матрицами  $P$  и  $P'$  изоморфны. Отсюда получаем следующий результат.

**Теорема 7.** *Две  $R$ -алгебры Манна над эвклидовым кольцом  $R$  с матрицами  $P_1$  и  $P_2$  изоморфны тогда и только тогда, когда матрицы  $P_1$  и  $P_2$  имеют одинаковые размеры и одинаковые (с точностью до обратимых множителей) наборы элементарных делителей.*

Если  $R$  — поле, то в матрице  $P$  можно считать  $m = n$ . В этом случае из теоремы 7 получаем

**Следствие.** *Две  $R$ -алгебры Манна над полем  $R$  с матрицами  $P_1$  и  $P_2$  изоморфны тогда и только тогда, когда матрицы  $P_1$  и  $P_2$  имеют одинаковые размеры и ранги.*

12. Пусть  $S$  — полугруппа матричного типа,  $R$  — поле характеристики, не делящей порядка группы  $G$ , и групповое кольцо  $R(G)$  распадается в прямую сумму абсолютно неразложимых (т. е. остающихся неразложимыми при любом расширении поля  $R$ ) двусторонних идеалов. Элементы полугруппового кольца  $R(S)$ , являющегося алгеброй Манна, запишем в виде  $tn$ -матриц

$$X = (x_{ij}), \quad x_{ij} \in R(G). \quad (13)$$

Как известно [10], идеалы, на которые распадается групповое кольцо  $R(G)$ , являются полными кольцами квадратных матриц над  $R$ . Для каждо-

го элемента  $x_{ij} \in R(G)$  существует однозначное разложение  $x_{ij} = \sum_{r=1}^k x'_{ij}$ , где

слагаемые  $x'_{ij}$  принадлежат соответствующим двусторонним идеалам. Каждый элемент  $x'_{ij}$ , как элемент полного матричного кольца, запишем в виде матрицы  $X'_{ij}$  порядка  $t_r$ , а элемент  $x_{ij} \in R(G)$  — в виде матрицы

$$X_{ij} = \begin{pmatrix} X_{ij}^1 & 0 \\ & X_{ij}^2 \\ & & \ddots \\ 0 & & & x_{ij}^k \end{pmatrix}$$

порядка  $t = \sum_{r=1}^k t_r$ . Подставив в (13) вместо  $x_{ij}$  матрицы (14), получим

выражение любого элемента  $X \in R(S)$  в виде  $tm \times tn$  — матрицы над  $R$ . Каждая такая матрица  $X$  однозначно представляется в виде суммы  $X = \sum (X'_{ij})$ , где матрицы  $(X'_{ij})$  ( $r = 1, 2, \dots, k$ ) получаются из  $X$ , если вместо блоков  $X_{ij}^s$  ( $s \neq r$ ) подставить нулевые матрицы. При этом матрицы  $(X'_{ij})$  с ненулевыми  $t_r m \times t_r n$  блоками  $X'_{ij}$  принадлежат соответствующим двусторонним идеалам в разложении кольца  $R(S)$ . Аналогично, матрицу  $P$  можно записать в виде  $tn \times tm$ -матрицы над  $R$ , распадающейся в сумму  $k$  матриц  $(P'_{ju})$  с ненулевыми  $t_r n \times t_r m$  — блоками  $P'_{ju}$ . Таким образом, кольцо  $R(S)$  распадается в прямую сумму  $k$  идеалов, элементы  $(X'_{ij})$  которых умножаются по формуле  $(X'_{ij}) \circ (Y'_{uv}) = \sum_{j,u} (X'_{ij}) (P'_{ju}) (Y'_{uv})$ , т. е. каждый такой идеал является  $R$ -алгеброй Манна. Сформулируем этот результат в виде теоремы.

**Теорема 8.** *Пусть  $S$  — полугруппа матричного типа над группой  $G$ , и групповое кольцо  $R(G)$  над полем  $R$ -характеристики, не делящей порядка группы  $G$ , распадается в прямую сумму абсолютно неразложимых двусторонних идеалов. Тогда кольцо  $R(S)$  является  $R$ -алгеброй Манна над  $R$  и распадается в прямую сумму двусторонних идеалов, каждый из которых, в свою очередь, является  $R$ -алгеброй Манна над  $R$ .*



Теоремы 7 и 8 дают возможность выяснять существование изоморфизма между полугрупповыми кольцами  $R(S_1)$  и  $R(S_2)$  полугрупп  $S_1$  и  $S_2$  матричного типа над полем  $R$ .

### § 3. ПОЛУГРУППОВЫЕ КОЛЬЦА ОДНОГО КЛАССА КОММУТАТИВНЫХ ПОЛУГРУПП

13. Рассмотрим коммутативную полугруппу  $S$ , разложимую в объединение группы  $G$  и полугруппы  $T$ , причем  $G \cap T = \emptyset$ ,  $T$  — идеал в  $S$  (т.е. связку группы  $G$  и полугруппы  $T$ ). Отображение  $\varphi(x) = ex$ , где  $e$  — единица группы  $G$ ,  $x \in S$ , является двусторонним идемпотентным сдвигом полугруппы  $S$ . Если  $\varphi$  — собственный сдвиг, то по теореме 1, полугрупповое кольцо  $R(S)$  полугруппы  $S$  над коммутативным кольцом  $R$  с единицей распадается в прямую сумму двух собственных идеалов, каждый из которых сам является полугрупповым кольцом:  $R(S) = R(S_1) + R(S_2)$ . Полугруппа  $S_1 = eS$ , так же как и полугруппа  $S$ , разлагается в объединение группы  $G$  и некоторой полугруппы  $T_1$ , причем единица группы  $G$  является единицей всей полугруппы  $S_1$ . Полугруппа  $S_2$  состоит из всех элементов  $x$  —  $ex \in R(S)$ , где  $x \in S$ . Предположим теперь, что полугруппа  $S = G \cup T$  не обладает собственными идемпотентными сдвигами. Тогда единица группы  $G$  является единицей полугруппы  $S$ . В этом случае кольцо  $R(S)$  имеет единицу, и каждый его сдвиг — внутренний. По следствию из теоремы 1 кольцо  $R(S)$  тогда и только тогда разложимо в прямую сумму собственных идеалов, когда в нем существуют идемпотенты, отличные от нуля и единицы. Всюду в дальнейшем полугруппа  $S$  считается конечной.

14. Известно [10], что групповое кольцо  $R(G)$  конечной абелевой группы  $G$  над некоторым полем  $R$  характеристики, не делящей порядка группы  $G$ , распадается в прямую сумму идеалов, каждый из которых изоморфен полю  $R$ . Единицы этих идеалов являются минимальными идемпотентами кольца  $R(G)$ . Каждый минимальный идемпотент выражается через элементы группы  $G$  по формуле

$$e_i = \frac{1}{m} \sum_{g \in G} \chi_i(g) g, \quad (i = 1, 2, \dots, m),$$

где  $m$  — порядок группы  $G$ ,  $\chi_i$  — неприводимые характеры группы  $G$ .

Пусть  $D$  — подгруппа группы  $G$ ,  $\omega$  — естественный гомоморфизм группы  $G$  на факторгруппу  $G/D$ . Разумеется,  $\omega(g) = \omega(h)$  тогда и только тогда, когда  $g$  и  $h$  принадлежат одному и тому же смежному классу группы  $G$  по подгруппе  $D$ . Обозначим

$$\omega(e_i) = \sum_{g \in G} \chi_i(g) \omega(g),$$

так что  $\omega(e_i)$  — элемент кольца  $R(G/D)$ . Скажем, что подгруппа  $D$  группы  $G$  принадлежит идемпотенту  $e_i$ , если  $\omega(e_i) \neq 0$ . Ясно, что если группа  $D$  принадлежит идемпотенту  $e_i$ , то и любая ее подгруппа принадлежит идемпотенту  $e_i$ .

**Лемма 5.** Если подгруппы  $D_1$  и  $D_2$  группы  $G$  принадлежат минимальному идемпотенту  $e_i$ , то и подгруппа  $D$ , порожденная их объединением, принадлежит идемпотенту  $e_i$ .

Доказательство. Так как  $D_1$  и  $D_2$  принадлежат  $e_i$ , то  $\sum_{g \in D_1} \chi_i(g) \neq 0$  и  $\sum_{h \in D_2} \chi_i(h) \neq 0$ . Любой элемент группы  $D$  выражается в виде произведе-



ния  $gh$  ( $g \in D_1$ ,  $h \in D_2$ )  $n$ -способами, где  $n$  — порядок пересечения  $D_1$  и  $D_2$ . Так как  $\chi(gh) = \chi(g)\chi(h)$ , то

$$\sum_{g \in D} \chi(g) = \frac{1}{n} \sum_{g \in D_1} \chi(g) \sum_{h \in D_2} \chi(h) \neq 0.$$

Следовательно, группа  $D$  принадлежит идемпотенту  $e_i$ .

15. По лемме 5 для каждого идемпотента  $e_i$  существует максимальная подгруппа  $H(e_i)$  группы  $G$ , принадлежащая этому идемпотенту. Заметим, что для некоторых  $e_i$ ,  $e_j$  подгруппы  $H(e_i)$  и  $H(e_j)$  могут совпадать. Следовательно, множество всех минимальных идемпотентов кольца  $R(G)$  разбивается на классы  $E_r$  ( $r = 1, 2, \dots, k$ ), так что в один и тот же класс входят такие идемпотенты  $e_i$  и  $e_j$ , для которых  $H(e_i) = H(e_j)$ . Обозначим через  $H(E_r)$  ( $r = 1, 2, \dots, k$ ) подгруппу  $H(e_i)$ , если идемпотент  $e_i$  принадлежит классу  $E_r$ . Число различных идемпотентов в классе  $E_r$  ( $r = 1, 2, \dots, k$ ) называется кратностью подгруппы  $H(E_r)$ . Подгруппы  $H(E_r)$  и их кратности могут быть вычислены для любой группы  $G$ .

16. Полугрупповое кольцо  $R(T)$  полугруппы  $T$  распадается в прямую сумму идеалов  $e_i R(T)$ , где  $e_i$  — минимальные идемпотенты кольца  $R(G)$ . Введем на множестве элементов полугруппы  $T$  отношение  $\sim$ , полагая  $x \sim y$  ( $x, y \in T$ ) тогда и только тогда, когда найдется такой элемент  $g$  группы  $G$ , что  $y = gx$ . Нетрудно проверить рефлексивность, симметричность и транзитивность этого отношения, а также то, что  $x \sim y$  вытекает  $zx \sim zy$  и  $xz \sim yz$  ( $z \in T$ ). Следовательно, отношение  $\sim$  есть конгруэнция, и множество всех элементов полугруппы  $T$  разбивается на классы эквивалентных элементов.

**Лемма 6.** Число элементов каждого класса эквивалентности  $\sim$  является делителем порядка группы  $G$ .

Доказательство. Пусть  $C$  — некоторый класс эквивалентных элементов и  $x \in C$ . Тогда множество элементов  $gx$  ( $gx \in G$ ), исчерпывает весь класс  $C$ . Множество элементов  $g \in G$  таких, что  $gx = x$ , образует подгруппу  $D$  группы  $G$  так как из  $gx = x$ ,  $hx = x$  следует  $(gh)x = x$ . Элементы  $a, b \in G$  тогда и только тогда входят в один и тот же смежный класс по подгруппе  $D$ , когда  $ax = bx$  ( $x \in C$ ). Следовательно, число различных элементов в классе  $C$  равно числу смежных классов группы  $G$  по подгруппе  $D$ , т. е. является делителем порядка группы  $G$ .

17. Каждое произведение  $e_i x$  ( $x \in T$ ), где  $e_i$  — минимальный идемпотент кольца  $R(G)$ , выражается в виде  $e_i x = \frac{1}{m} \sum_{g \in G} \chi(g) gx$ . Для всех эле-

ментов  $x$ , входящих в один и тот же класс  $C$  эквивалентности  $\sim$ , произведения  $gx$  одинаковы, а все элементы  $g \in G$  такие, что  $gx = x$  ( $x \in C$ ) образуют подгруппу  $D$  группы  $G$ . Если  $D$  является подгруппой группы  $H(e_i)$ , то  $e_i x \neq 0$ , в противном случае  $e_i x = 0$ .

**Лемма 7.** Если элементы  $x$  и  $y$  полугруппы  $T$  принадлежат одному и тому же классу  $C$  эквивалентности  $\sim$ , то  $e_i y = \lambda e_i x$ , где  $\lambda \in R$ .

Доказательство. Если  $x$  и  $y$  входят в один и тот же класс  $C$ , то для некоторого элемента  $a \in G$   $y = ax$ . Отсюда получаем

$$\begin{aligned} e_i y &= e_i ax = \frac{1}{m} \sum_{g \in G} \chi(g) agx = \frac{1}{m} \sum_{g \in G} \chi(a^{-1}h) hx = \\ &= \frac{1}{m} \sum_{h \in G} \chi(a^{-1}) \chi(h) hx = \frac{\chi(a^{-1})}{m} \sum_{h \in G} \chi(h) hx = \chi(a^{-1}) e_i x. \end{aligned}$$



18. С помощью каждого класса  $C$  эквивалентных элементов полугруппы  $T$  в базисе кольца  $e_i R(T)$  образуется не более одного элемента (лемма 7). Для каждого  $e_i$  построим следующий гомоморфизм  $\varphi_i$  полугруппы  $T$ . отождествим все элементы каждого класса  $C$  в один элемент и отождествим с нулем те классы, для которых группа  $D$  (лемма 6) не является подгруппой группы  $H(e_i)$ . Тогда кольцо  $e_i R(T)$  изоморфно кольцу  $R(\varphi_i(T))$ . Следовательно, имеет место.

**Теорема 9.** Пусть групповое кольцо  $R(G)$  группы  $G$  над полем  $R$  распадается в прямую сумму идеалов, каждый из которых изоморфен полю  $R$ . Тогда полугрупповое кольцо  $R(S)$  полугруппы  $S = G \cup T$  ( $GT = T$ ) распадается в прямую сумму идеалов  $R(T_i)$ , каждый из которых является полугрупповым кольцом некоторой полугруппы  $T_i = \varphi_i(T)^{1*}$ .

19. Таким образом, чтобы разложить полугрупповое кольцо в прямую сумму идеалов, нужно

1) найти все подгруппы  $H(E_r)$  ( $r = 1, 2, \dots, k$ ) группы  $G$  и их кратности;

2) разбить полугруппу  $T$  на классы эквивалентных элементов, и для каждого класса  $C$  эквивалентных элементов найти подгруппу  $D$  группы  $G$  (лемма 6);

3) построить гомоморфизмы  $\varphi_r$  полугруппы  $T$  и образовать кольца  $R(T_r)$  (см. п. 18); при этом каждому  $r = 1, 2, \dots, k$  соответствует столько изоморфных колец, какова кратность подгруппы  $H(E_r)$ . Назовем эту кратность кратностью кольца  $R(T_r)$ .

**Теорема 10.** Пусть  $S = G \cup T$ ,  $S' = G' \cup T'$  — две полугруппы, разложимые в объединение группы и полугруппы, так что  $GT = T$  и  $G'T' = T'$ . Если над полем  $R$  групповые кольца  $R(G)$  и  $R(G')$  разлагаются в прямые суммы идеалов, изоморфных  $R$ , то кольца  $R(S)$  и  $R(S')$  изоморфны тогда и только тогда, когда им отвечают одинаковые наборы (с одинаковыми кратностями) соответственных изоморфных колец  $R(T_r)$  и  $R(T'_r)$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. A. H. Clifford. Matrix representations of completely simple semigroups, Amer. J. Math., 64 (1942), 327—342.
2. Е. С. Ляпин. Полугруппы, Физматгиз, М., 1960.
3. A. H. Clifford, G. B. Preston. The algebraic theory of semigroups, Amer. Math. Soc. Publ., Providence, 1961.
4. M. Teissier. Sur l'algebre d'un demi-groupe fini simple, C. R. Acad. Sci., Paris, 234 (1952), 2413—2414.
5. M. Teissier. Sur l'algebre d'un demi-groupe fini simple, II, C. R. Acad. Sci., Paris, 234 (1952), 2511—2513.
6. W. D. Munn. On semigroup algebras, Proc. Cambridge Phil. Soc., 51 (1955), 1—15.
7. Н. Джекобсон. Теория колец. Физматгиз, М., 1947.
8. Л. М. Глускин. Идеалы полугрупп преобразований, «Матем. сб.», т. 47 (89) 1 (1959), 111—130.
9. D. Rees. On semigroups, Proc. Cambridge Phil. Soc., 36 (1940), 387—400.
10. М. Холл. Теория групп. ИЛ, М., 1962.
11. Б. Л. Ван-дер-Варден. Современная алгебра, I, II, Гостехиздат, М.—Л., 1947.

\* Через  $S^1$  мы обозначаем полугруппу, полученную из полугруппы  $S$  внешним присоединением единицы.



## ПОЛУГРУППА ВЗАИМНО-ОДНОЗНАЧНЫХ ЧАСТИЧНЫХ ЭНДОМОРФИЗМОВ ГРАФА

А. М. Калманович

Л. М. Глускин в работах [1], [2] показал, что отношение квазипорядка  $\Gamma$  в некотором множестве  $X$  с точностью до изоморфизма характеризуется полугруппой полных изотонных преобразований. Л. М. Попова [3] с помощью полугруппы всех частичных эндоморфизмов множества  $X$  получила аналогичную характеристику произвольного рефлексивного или антирефлексивного отношения.

В настоящей работе решается задача нахождения всех графов, допускающих изоморфные полугруппы взаимно-однозначных частичных эндоморфизмов. Аналогичная характеристика графа получена с помощью полугруппы однозначных частичных эндоморфизмов, а также полугруппы многозначных частичных эндоморфизмов [8].

В работе предполагаются известными основные понятия теории полугрупп [4].

### § 1. ОПРЕДЕЛЕНИЯ

1. Бинарным отношением  $\Gamma$  [5] в множестве  $X$  называется произвольное подмножество декартова квадрата  $X \times X = X^2$ , т. е. всякая совокупность упорядоченных пар  $(\alpha, \beta)$ , где  $\alpha, \beta \in X$ . Множество  $X$  с определенным на нем бинарным отношением  $\Gamma$  называется графом  $(X, \Gamma)$  [6]. Бинарное отношение  $\Delta$  такое, что\*

$$\forall \alpha, \beta \in X \{ \alpha, \beta \} \in \Delta \leftrightarrow \alpha = \beta \quad (1)$$

называется диагональю. Граф  $(X, \Gamma)$  называется рефлексивным, если  $\Delta \subset \Gamma$ , антирефлексивным, — если  $\Gamma \cap \Delta = \emptyset$ , симметричным, — если  $\Gamma = \Gamma^{-1}$ \*\*.

Будем обозначать через  $a \langle \xi \rangle$  срез [5] бинарного отношения  $a$  через элемент  $\xi \in X$ , т. е. множество всех  $\eta$  таких, что  $(\eta, \xi) \in a$ . Если  $X' \subset X$ , то  $a \langle X' \rangle = \bigcup_{\xi \in X'} a \langle \xi \rangle$ ,  $(a \langle \{ \xi \} \rangle) = a \langle \xi \rangle$ ,  $a \langle \emptyset \rangle = \emptyset$ .

Если  $a$  — однозначное бинарное отношение, то ему соответствует преобразование  $a: (\eta, \xi) \in a \leftrightarrow \eta = a\xi$  ( $a \langle \xi \rangle = a\xi$ ). По определению [5]

$$\text{rg}_1 a = a^{-1} \langle X \rangle, \text{rg}_2 a = a \langle X \rangle.$$

Пусть  $a \subset X \times X$ . Прямоугольным замыканием [5] отношения  $a$  называется отношение  $\text{rg}_1 a \times \text{rg}_2 a$ . Говорят, что  $a$  есть прямоугольное отношение, если оно равно своему прямоугольному замыканию.

\* В статье используются следующие символы:  $\rightarrow$ ,  $\leftrightarrow$ ,  $\wedge$ ,  $\vee$ ,  $\forall \alpha$ ,  $\exists \alpha$ , которые истолковываются соответственно «следует», «эквивалентно» «и», «или», «для всякого  $\alpha$  такого, что...», «существует  $\alpha$  такое, что...»

\*\*  $(\alpha, \beta) \in \Gamma^{-1} \leftrightarrow (\beta, \alpha) \in \Gamma$ .



2. Пусть  $P(X)$  — множество всех бинарных отношений на множестве  $X$ . Это множество является полугруппой относительно умножения (суперпозиции) бинарных отношений:

$$\forall a, b \in X; a, b \in P(X) \quad (a, \beta) \in ab \leftrightarrow \exists \gamma \in X \{ (a, \gamma) \in a, (\gamma, \beta) \in b \} \quad (2)$$

Всякое бинарное отношение в множестве  $X$  можно трактовать как многозначное частичное преобразование множества  $X$ . В этом случае  $P(X)$  можно считать полугруппой многозначных частичных преобразований множества  $X$ . Через  $P(X, \Gamma)$  [8] обозначим подмножество  $P(X)$ , которое содержит бинарные отношения, удовлетворяющие следующему условию:

$$\forall a, \beta \in \text{rg}_1 a \quad \{ (a, \beta) \in \Gamma \rightarrow (a \langle a \rangle, a \langle \beta \rangle) \subset \Gamma \}. \quad (3)$$

Такие отношения  $a$  называют частичными эндоморфизмами графа  $(X, \Gamma)$ . В дальнейшем мы будем говорить просто «эндоморфизм», опуская слово «частичный» (как вместо «частичное преобразование» чаще пишут просто «преобразование»).

Будем рассматривать также  $P_\mu^\nu(X, \Gamma)$  — подмножество  $P(X, \Gamma)$ , содержащее такие эндоморфизмы, что  $|\text{rg}_1 a| < \nu$ ,  $|\text{rg}_2 a| < \mu$  [3], [8], где  $\mu$ ,  $\nu$  — кардинальные числа.

Множества  $P(X, \Gamma)$  и  $P_\mu^\nu(X, \Gamma)$ , как легко показать, являются подполугруппами полугруппы  $P(X)$ .

Полугруппу взаимно-однозначных, (однозначных, обратно однозначных)\* бинарных отношений обозначим через  $V(X)$  (соответственно  $W(X)$ ,  $M(X)$ ).

В дальнейшем вместо «взаимно однозначный эндоморфизм» будем говорить «I—I эндоморфизм».

Будем рассматривать такие полугруппы:

$$V_\mu(X, \Gamma) = V(X) \cap P_\mu^\nu(X, \Gamma), \quad W_\mu^\nu(X, \Gamma) = W(X) \cap P_\mu^\nu(X, \Gamma). \quad (4)$$

3. Введем некоторые обозначения.

Множество  $X_1$  для данного графа  $(X, \Gamma)$  определим как совокупность всех элементов  $a \in X$ , таких, что  $(a, a) \in \Gamma \cap \Delta$ ,  $X_2 = X \setminus X_1$ ,  $\Delta_{X_1} = X_1^2 \cap \Delta$ . Отношение  $\Gamma_1 = \Gamma \cap X_1^2$  является, очевидно, рефлексивным отношением в множестве  $X_1$ , а  $\Gamma_2 = \Gamma \cap X_2^2$  — антирефлексивным отношением в множестве  $X_2$ . Пусть, кроме того,  $\Gamma_{12} = \Gamma \cap X_1 \times X_2$ ,  $\Gamma_{21} = \Gamma \cap X_2 \times X_1$ .

Графы  $(X, \Gamma)$  и  $(X, \Gamma')$  назовем сопряженными [8], если выполняется одно из следующих условий:

$$\left. \begin{aligned} 1) \Gamma &= \Gamma'; \\ 2) \Gamma_1 &= \Gamma_1^{-1}, \Gamma_2 = \emptyset, \Gamma_{12} = \emptyset; \Gamma' = \Gamma \cup \Gamma^{-1}; \\ 3) \Gamma_1 &= X_1^2, \Gamma_2 = \Gamma_2^{-1}, \Gamma_{12} = X_1 \times X_2, \Gamma' = \Gamma_1 \cup \Gamma_{21} \cup \Gamma_{21}^{-1}. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Определим следующие классы бинарных отношений на множестве  $X$  (где  $X_1 \subset X$ ):

$$\left. \begin{aligned} P[X, X_1] &= \{X_1^2, X \times X_1, X_1 \times X, X^2 \setminus X_2^2\}, \\ M[X, X_1] &= P[X, X_1] \cup \{X^2 \setminus \Delta_{X_2}\}, \\ W[X, X_1] &= P[X, X_1] \cup \{\Delta_{X_1}\}, \\ V[X, X_1] &= P[X, X_1] \cup \{\Delta_{X_1}, X^2 \setminus \Delta_{X_2}\}. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

В дальнейшем будем рассматривать графы без изолированных точек [6], т. е.

$$\forall a \in X \quad \{\Gamma a \neq \emptyset, V\Gamma^{-1}a \neq \emptyset\}.$$

\* Т. е. таких  $a$ , что  $a^{-1}$  есть однозначное преобразование.



## § 2. ГРАФЫ, ОПРЕДЕЛЕННЫЕ НА ОДНОМ МНОЖЕСТВЕ

1. Пусть  $Y$  — непустое подмножество  $X$ ,  $(X, \Gamma)$  — произвольный граф.

**Лемма.** Полугруппы  $V_\mu(X, \Gamma)$  и  $V_\mu(X, X \times Y)$  совпадают тогда и только тогда, когда  $\Gamma \in V[X, Y]$ .

Доказательство. Если  $\Gamma \in V[X, Y]$ , то, очевидно,  $V_\mu(X, \Gamma) = V_\mu(X, X \times Y)$ . Обратно, пусть  $V_\mu(X, \Gamma) = V_\mu(X, X \times Y)$ .

Если  $\alpha, \beta \in X \setminus Y$  ( $\alpha \neq \beta$ ),  $\gamma \in X$ ,  $\delta \in Y$ , то эндоморфизм  $f = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in V_\mu(X, X \times Y)$  и, следовательно,  $f \in V_\mu(X, \Gamma)$ . С другой стороны, если  $f \in V_\mu(X, \Gamma)$  и  $(\alpha, \beta) \in \Gamma$ , а  $(\alpha_1, \beta_1) \notin \Gamma$  ( $\alpha_1, \beta_1 \in X \setminus Y$ ), то  $f_1 = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha_1 & \beta_1 \end{pmatrix} \in V_\mu(X, X \times Y)$ , но  $f_1 \notin V_\mu(X, \Gamma)$ . Поэтому (ввиду произвольности выбора  $\alpha, \beta \in X \setminus Y$ ) либо все  $(\alpha, \beta) \in \Gamma$ , либо все  $(\alpha, \beta) \notin \Gamma$ . Рассмотрим оба случая.

1) Пусть  $(\alpha, \beta) \in \Gamma$  для всяких  $\alpha, \beta \in X \setminus Y$  ( $\alpha \neq \beta$ ). Тогда и все  $(\gamma, \delta) \in \Gamma$  (ибо в противном случае  $f \in V_\mu(X, X \times Y)$ , но  $f \notin V_\mu(X, \Gamma)$ , откуда  $\Gamma = X^2 \setminus \Delta_{X \setminus Y} = X^2 \setminus \Delta_{X_2}$  (так как  $Y = X_1$ )).

2) Если же  $(\alpha, \beta) \notin \Gamma$  для всяких  $\alpha, \beta \in X \setminus Y$  ( $\alpha \neq \beta$ ), то отношение  $\Gamma$  зависит от принадлежности  $\gamma$  и  $\delta$ , а именно:

а) пусть  $\gamma \in X$ ,  $\delta \in Y$ ; тогда, как и выше, рассматривая эндоморфизм  $f = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ , заключаем что  $(\gamma, \delta) \in \Gamma$  для всех  $\gamma \in X$  и  $\delta \in Y$ , т. е.  $\Gamma = X \times Y$ ;

б) аналогично, если  $\gamma \in Y$ , а  $\delta \in X$ , получаем  $\Gamma = Y \times X$ ;

в) если  $\gamma, \delta \in X$ , причем  $(\gamma, \delta) \notin X_2^2$ , то  $(\gamma, \delta) \in \Gamma$ ; при этом  $\Gamma = X^2 \setminus X_2^2$  (так как  $X \setminus Y = X_2$ );

г) если же  $\gamma, \delta \in X_1$ , но  $(\gamma, \delta) \in X_1^2$ , то оказывается  $\Gamma = X_1^2$ ;

д) и, наконец, если  $\gamma, \delta \in X_1$ , но  $(\gamma, \delta) \notin X_1^2$  для  $\gamma \neq \delta$ , то  $\Gamma = \Delta_{X_1}$ .

Итак, во всех этих случаях  $\Gamma \in V[X, Y]$ .

2. Пусть  $(X, \Gamma)$  — произвольный граф. Обозначим через  $\hat{\Gamma}$  дополнение  $\Gamma$  в  $X^2$ , т. е.  $\hat{\Gamma} = X^2 \setminus \Gamma$ .

Графы  $(X, \Gamma)$  и  $(X, \hat{\Gamma})$  называются двойственными.

**Теорема.** Полугруппы  $P_\mu^\nu(X, \Gamma)$  и  $P_\mu^\mu(X, \hat{\Gamma})$  антиизоморфны.

Доказательство. Установим взаимно-однозначное соответствие между преобразованиями.

$$f = \begin{pmatrix} \dots & \alpha_1 & \dots & \beta_1 & \dots \\ \dots & \alpha_2 & \dots & \beta_2 & \dots \end{pmatrix}$$

и

$$f^{-1} = \begin{pmatrix} \dots & \alpha_2 & \dots & \beta_2 & \dots \\ \dots & \alpha_1 & \dots & \beta_1 & \dots \end{pmatrix},$$

и покажем, что из  $f \in P_\mu^\nu(X, \Gamma)$  следует  $f^{-1} \in P_\mu^\mu(X, \hat{\Gamma})$ , и наоборот.

Из определения эндоморфизма (3) вытекает

$$f \in P_\mu^\nu(X, \Gamma) \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow \bigvee_{\alpha_1, \beta_1 \in \text{pr}_1 f; \alpha_2, \beta_2 \in \text{pr}_2 f} \{(\alpha_2, \beta_2) \in \Gamma \cap \Gamma^{-1}\} \vee, \quad (7)$$

$$\vee \{[(\alpha_1, \beta_1) \in \Gamma \setminus \Gamma^{-1}] \wedge [(\alpha_2, \beta_2) \in \Gamma \setminus \Gamma^{-1}]\} \vee, \quad (8)$$

$$\vee \{[(\alpha_1, \beta_1) \in \Gamma^{-1} \setminus \Gamma] \wedge [(\alpha_2, \beta_2) \in \Gamma^{-1} \setminus \Gamma]\} \vee, \quad (9)$$

$$\vee \{[(\alpha_1, \beta_1) \notin \Gamma] \wedge [(\alpha_1, \beta_1) \notin \Gamma^{-1}]\}. \quad (10)$$



С другой стороны

$$f^{-1} \in P_v^u(X, \Gamma) \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow V_{\alpha_2, \beta_2} \in \text{pr}_1 f^{-1}; \alpha_1, \beta_1 \in \text{pr}_2 f^{-1}; \{(\alpha_1, \beta_1) \in \hat{\Gamma} \cap \hat{\Gamma}^{-1}\} \vee, \quad (7')$$

$$\vee \{[(\alpha_1, \beta_1) \in \hat{\Gamma} \setminus \hat{\Gamma}^{-1}] \wedge [(\alpha_2, \beta_2) \in \hat{\Gamma} \setminus \hat{\Gamma}^{-1}]\} \vee, \quad (8')$$

$$\vee \{[(\alpha_1, \beta_1) \in \hat{\Gamma}^{-1} \setminus \hat{\Gamma}] \wedge [(\alpha_2, \beta_2) \in \hat{\Gamma}^{-1} \setminus \hat{\Gamma}]\} \vee, \quad (9')$$

$$\vee \{[(\alpha_2, \beta_2) \in \hat{\Gamma}] \wedge [(\alpha_2, \beta_2) \in \hat{\Gamma}^{-1}]\}. \quad (10')$$

Так как  $\hat{\Gamma} = X^2 \setminus \Gamma$  то из (7) следует (10'), из (8) — (9'), из (9) — (8'), из (10) следует (7'), и наоборот. Итак

$$f \in P_u^v(X, \Gamma) \leftrightarrow f^{-1} \in P_v^u(X, \hat{\Gamma}).$$

Отображение  $\varphi: f \rightarrow f^{-1}$  есть антиизоморфизм:

$$\varphi(f_1 f_2) = (f_1 f_2)^{-1} = f_2^{-1} f_1^{-1} = \varphi(f_2) \varphi(f_1).$$

Итак, полугруппы  $P_u^v(X, \Gamma)$  и  $P_v^u(X, \hat{\Gamma})$  антиизоморфны.

**2.2.1. Теорема.** Полугруппа  $V_u(X, \Gamma)$  антиизоморфна  $V_v(X, \hat{\Gamma})$ .

Доказательство аналогично доказательству теоремы п. 2.2, где следует только в формулах (7) — (10') положить  $\alpha_1 \neq \beta_1$ ,  $\alpha_2 \neq \beta_2$ .

**2.2.2.** Потребовав в формулах (7) — (10'), чтобы  $\alpha_2 \neq \beta_2$ , получим доказательство следующей теоремы:

**Теорема.** Полугруппы  $W_u^v(X, \Gamma)$  и  $M_v^u(X, \hat{\Gamma})$  антиизоморфны.

**2.3.** В леммах п. п. 2.3.1 — 2.4 мы будем рассматривать граф  $(X, \Gamma)$  подчиненный условиям  $\Gamma \in V[X, X_1]$ ,  $X_1 \neq \emptyset$ ,  $X_1 \neq X$ ;  $\mu > 2$  и произвольный граф  $(X, \Gamma')$ .

**2.3.1. Лемма.** При условиях п. 2.3 из  $V_u(X, \Gamma) = V_u(X, \Gamma')$  следует,  $\Gamma_1 \cap \Gamma_1^{-1} = \Gamma_1 \cap \Gamma_1'^{-1}$  (п. 13).

Доказательство. Пусть  $V_u(X, \Gamma) = V_u(X, \Gamma')$  и  $\Gamma \in V[X, X_1]$ . Тогда и  $\Gamma' \in V[X, X_1]$  (в противном случае согласно лемме п. 2.1  $V_u(X, \Gamma') = V_u(X, X \times X_1)$ , откуда  $V_u(X, \Gamma) = V_u(X, X \times X_1)$  и  $\Gamma \in V[X, X_1]$ , что противоречит условию леммы).

Пусть далее  $\alpha \in X_1$ ,  $\beta \in X_2$  (такие  $\alpha$  и  $\beta$  существуют, так как  $X_1 \neq \emptyset$  и  $X_1 \neq X$ ). Тогда

$$\begin{aligned} \{(\alpha, \alpha) \in \Gamma, (\beta, \beta) \in \Gamma\} &\rightarrow \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \in V_u(X, \Gamma) \rightarrow \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \in V_u(X, \Gamma') \rightarrow \\ &\rightarrow \{(\alpha, \alpha) \in \Gamma', (\beta, \beta) \in \Gamma'\}. \end{aligned}$$

Аналогично доказывается обратная импликация. Следовательно,

$$\Gamma \cap \Delta = \Gamma' \cap \Delta.$$

Пусть теперь граф  $(X, \Gamma)$  таков, что  $\Delta_{X_1} \neq \Gamma_1 \neq X_1^2$ .

Докажем, что  $\Gamma'_1 \neq \Delta_{X_1}$ . Предположим, что  $\Gamma'_1 = \Delta_{X_1}$ . Тогда существует такая пара неравных элементов  $\alpha, \beta \in X_1$ , что  $(\alpha, \beta) \in \Gamma$  и  $(\alpha, \beta) \in \Gamma'$ . Так как  $\Gamma_1 \neq X_1^2$ , то существует пара  $(\gamma, \delta) \in X_1^2$  такая, что  $(\gamma, \delta) \notin \Gamma_1$ .

Тогда отображение  $f = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in V_u(X, \Gamma')$ ; но  $f \notin V_u(X, \Gamma)$ , что противоречит условию леммы. Следовательно,  $\Gamma'_1 \neq \Delta_{X_1}$ . Аналогично показывается, что  $\Gamma' \neq X_1^2$ . Вследствие доказанного, существует такая пара неравных элементов:  $\alpha, \beta \in X_1$ , что  $(\alpha, \beta) \in \Gamma'$  и

$$\begin{aligned} V_{\gamma, \delta \in X, \gamma \neq \delta} \{(\gamma, \delta) \in \Gamma_1 \cap \Gamma_1'^{-1}\} &\rightarrow \left\{ \begin{aligned} f_1 &= \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in V_u(X, \Gamma), \\ f_2 &= \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \delta & \gamma \end{pmatrix} \in V_u(X, \Gamma) \end{aligned} \right\} \rightarrow \\ &\rightarrow \{f_1, f_2 \in V_u(X, \Gamma')\} \rightarrow \{(\gamma, \delta) \in \Gamma'_1 \cap \Gamma_1'^{-1}\} \end{aligned}$$



Аналогично выводится обратная импликация. Итак, если  $\Delta_{X_1} \neq \Gamma_1 \neq X_1^2$ , то

$$\Gamma_1 \cap \Gamma_1^{-1} = \Gamma_1 \cap \Gamma_1'^{-1}.$$

Рассмотрим теперь случай, когда  $\Gamma_1 = \Delta_{X_1}$ . Так как  $(X, \Gamma)$  — граф без изолированных точек [6], то существует пара  $(\alpha, \beta) \in \Gamma$ ,  $(\alpha \neq \beta)$ . Допустим, что найдется такая пара  $\gamma, \delta \in X_1$ , что  $(\gamma, \delta) \in \Gamma_1'$ . В случае симметрического  $\Gamma_1' f = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in V_\mu(X, \Gamma')$ , но  $f \notin V_\mu(X, \Gamma)$ . Если же  $\Gamma_1'$  несимметрично и  $(\gamma, \delta) \in \Gamma_1' \setminus \Gamma_1'^{-1}$ , то  $g = \begin{pmatrix} \gamma & \delta \\ \delta & \gamma \end{pmatrix} \in V_\mu(X, \Gamma)$ , но  $g \notin V_\mu(X, \Gamma')$ .

Таким образом,  $\Gamma_1' = \Delta_{X_1}$ , т. е.  $\Gamma_1' = \Gamma_1$ .

Аналогично доказывается, что  $\Gamma_1' = \Gamma_1$  и в случае  $\Gamma_1 = X_1^2$ .

Итак, для любого отношения  $\Gamma_1$  выполняется равенство

$$\Gamma_1 \cap \Gamma_1^{-1} = \Gamma_1' \cap \Gamma_1'^{-1}. \quad (12)$$

**2.3.2. Лемма.** Пусть выполнены условия п.2.3. Если  $V_\mu(X, \Gamma) = V_\mu(X, \Gamma')$ , то  $\Gamma_1 = \Gamma_1$  или  $\Gamma_1 = \Gamma_1'^{-1}$ .

Доказательство. Пусть отношение  $\Gamma_1$  симметрично,  $(\alpha, \beta) \notin \Gamma_1'$ . Предположим, что  $(\alpha, \beta) \notin \Gamma$ . Тогда из (12) следует, что  $(\alpha, \beta) \notin \Gamma_1'^{-1}$ . В силу симметрии  $\Gamma(\alpha, \beta) \notin \Gamma_1^{-1}$ . Тогда  $t = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \in V_\mu(X, \Gamma)$  и  $t \notin V_\mu(X, \Gamma')$  вопреки условию леммы. Следовательно, предположение неверно и  $(\alpha, \beta) \in \Gamma_1$ , т. е.  $\Gamma_1' \subseteq \Gamma_1$ . Из (12) и симметричности  $\Gamma$  следует, что  $\Gamma_1 \subseteq \Gamma_1'$ . Итак,  $\Gamma_1 = \Gamma_1'$ .

Теперь пусть отношение  $\Gamma$  несимметрично. Тогда найдется такая пара элементов  $(\alpha, \beta) \in X_1$ , что

$$(\alpha, \beta) \in \Gamma_1 \text{ и } (\alpha, \beta) \notin \Gamma_1'^{-1}. \quad (13)$$

Эндоморфизм  $f = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \notin V_\mu(X, \Gamma)$  и, следовательно,  $f \notin V_\mu(X, \Gamma')$ . Последнее же возможно тогда и только тогда, когда

$$\text{либо } (\alpha, \beta) \in \Gamma_1' \text{ и } (\beta, \alpha) \notin \Gamma_1', \quad (14)$$

$$\text{либо } (\alpha, \beta) \notin \Gamma_1' \text{ и } (\beta, \alpha) \in \Gamma_1'. \quad (15)$$

Пусть  $(\gamma, \delta) \in X_1^2$ ,  $f_1 = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ . Из (13) и (3) следует, что

$$f_1 \in V_\mu(X, \Gamma) \leftrightarrow (\gamma, \delta) \in \Gamma. \quad (16)$$

В случае (14)

$$f_1 \in V_\mu(X, \Gamma') \leftrightarrow (\gamma, \delta) \in \Gamma_1'. \quad (17)$$

Если же выполняется (15), то

$$f_1 \in V_\mu(X, \Gamma') \leftrightarrow (\delta, \gamma) \in \Gamma_1'. \quad (18)$$

Из (16) и (17) следует, что

$$(\gamma, \delta) \in \Gamma_1 \leftrightarrow (\gamma, \delta) \in \Gamma_1', \text{ т. е. } \Gamma_1' = \Gamma_1.$$

Аналогично, из (16) и (18) получаем, что

$$(\gamma, \delta) \in \Gamma_1 \leftrightarrow (\delta, \gamma) \in \Gamma_1', \text{ т. е. } \Gamma_1 = \Gamma_1'^{-1}.$$

И в этом случае  $\Gamma_1 = \Gamma_1'$  или  $\Gamma_1 = \Gamma_1'^{-1}$ .

**2.3.3.** Используя теорему п. 2.2.1. и лемму п.2.3.2. получаем следующую лемму.



**Лемма.** Пусть выполняются условия п.2.3. Если  $V_\mu(X, \Gamma) = V_\mu(X, \Gamma')$ , то  $\Gamma'_2 = \Gamma_2$  или  $\Gamma'_2 = \Gamma_2^{-1}$ .

2.3.4. Пусть одновременно  $\Gamma_1 = \Gamma'_1$  и  $\Gamma_2^{-1} = \Gamma'_2$  (причем  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  не симметричны). Тогда

$$\exists (\alpha, \beta) \in X_1^2 \{(\alpha, \beta) \in \Gamma_1 \wedge (\alpha, \beta) \notin \Gamma_1^{-1}\}$$

и

$$\exists (\gamma, \delta) \in X_2^2 \{(\gamma, \delta) \in \Gamma_2 \wedge (\gamma, \delta) \notin \Gamma_2^{-1}\},$$

откуда следует, что  $f = \begin{pmatrix} \gamma & \delta \\ \alpha & \beta \end{pmatrix} \in V_\mu(X, \Gamma)$ , но  $f \notin V_\mu(X, \Gamma')$ . Следовательно,

$$\text{либо } \Gamma_2 = \Gamma'_2 \text{ и } \Gamma_1 = \Gamma'_1,$$

$$\text{либо } \Gamma_2^{-1} = \Gamma'_2 \text{ и } \Gamma_1^{-1} = \Gamma'_1.$$

Этим доказана следующая.

**Лемма.** Пусть выполнены условия п.2.3. Если  $V_\mu(X, \Gamma) = V_\mu(X, \Gamma')$ , то  $\Gamma_1 \cap \Gamma'_2 = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$  или  $\Gamma'_1 \cup \Gamma'_2 = \Gamma_1^{-1} \cup \Gamma_2^{-1}$ .

2.4. Основным в этом параграфе является:

**Лемма.** Пусть графы  $(X, \Gamma)$  и  $(X, \Gamma')$  удовлетворяют условию п.2.3.  $V_\mu(X, \Gamma) = V_\mu(X, \Gamma')$  тогда и только тогда, когда граф  $(X, \Gamma')$  сопряжен п.1.3. с графом  $(X, \Gamma)$  или  $(X, \Gamma^{-1})$ .

Доказательство. Достаточность условий леммы проверяется непосредственно. Докажем их необходимость. Пусть  $V_\mu(X, \Gamma) = V_\mu(X, \Gamma')$ .  $\Gamma \in V[X, X_1] \rightarrow \Gamma' \in V[X, X_1]$ . (п. 2.3.1.)

А) Пусть граф  $(X, \Gamma)$  таков, что  $\Gamma_2 = \Phi$ .

1) Рассмотрим случай, когда  $\Gamma_1$  симметрично.

Возможны варианты, когда а)  $\Gamma_{12} = \Phi \vee \Gamma_{21} = \Phi$  (причем одновременно  $\Gamma_{12} = \Gamma_{21} = \Phi$  не может быть, т. к. тогда  $(X, \Gamma)$  — граф с изолированными точками) или б)  $\Gamma_{12} \neq \Phi \wedge \Gamma_{21} \neq \Phi$ .

а) Пусть  $\Gamma_{12} = \Phi \vee \Gamma_{21} = \Phi$ . Для определенности положим  $\Gamma_{12} = \Phi$ ,  $\Gamma_{21} \neq \Phi$ . Тогда (лемма п.2.3.2.)  $\Gamma'_1 = \Gamma_1$  и

$$\begin{aligned} V_{\alpha, \beta \in X; \eta, \zeta \in X_2; \alpha \neq \beta; \eta \neq \zeta} \{(\alpha, \beta) \in \Gamma_{21} \wedge (\alpha, \beta) \notin \Gamma_{21}^{-1}\} \rightarrow \\ \rightarrow f = \begin{pmatrix} \eta & \zeta \\ \alpha & \beta \end{pmatrix} \in V_\mu(X, \Gamma) \rightarrow f \in V_\mu(X, \Gamma'). \end{aligned} \quad (19)$$

С другой стороны покажем, что

$$f \in V_\mu(X, \Gamma') \leftrightarrow \{(\alpha, \beta) \in \Gamma'_{21} \vee (\beta, \alpha) \in \Gamma'_{21}\}. \quad (20)$$

В самом деле, если бы  $(\alpha, \beta) \notin \Gamma_{21}$  и  $(\beta, \alpha) \notin \Gamma_{21}$ , то это значило бы, что существует  $(\alpha, \beta) \in \Gamma$ , но  $(\alpha, \beta) \notin \Gamma'$ . Тогда либо а<sub>1</sub>)  $\Gamma \subset X_1^2$  и существуют такие  $\gamma, \delta \in X_1$ , что

$$(\gamma, \delta) \notin \Gamma_1 \leftrightarrow (\gamma, \delta) \in \Gamma'_1,$$

откуда  $f = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in V_\mu(X, \Gamma')$ , но  $f \notin V_\mu(X, \Gamma)$ , что невозможно, либо

а<sub>2</sub>)  $\Gamma_1 = X_1^2$  и ввиду того, что по условию  $\Gamma \in V[X, X_1]$ , существует такая пара  $(\alpha_1, \beta_1) \in X_2 \times X_1$ , что  $(\alpha_1, \beta_1) \notin \Gamma$ , откуда  $f_1 = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha_1 & \beta_1 \end{pmatrix} \notin V_\mu(X, \Gamma)$ , но  $f_1 \in V_\mu(X, \Gamma')$ , что опять-таки противоречит условию леммы.

Таким образом, доказана эквивалентность (20), откуда вытекает для элементов  $\alpha, \beta \in X$  одна из следующих возможностей:

$$(\alpha, \beta) \in \Gamma' \text{ и } (\beta, \alpha) \in \Gamma', \quad (21)$$

$$(\alpha, \beta) \in \Gamma' \text{ и } (\beta, \alpha) \in \Gamma', \quad (22)$$

$$(\alpha, \beta) \in \Gamma' \text{ и } (\beta, \alpha) \in \Gamma'. \quad (23)$$



Пусть  $\gamma, \delta \in X$ ,  $g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$  Тогда (так как  $(\alpha, \beta) \in \Gamma \setminus \Gamma^{-1}$ )

$$g \in V_\mu(X, \Gamma) \rightarrow (\gamma, \delta) \in \Gamma$$

и наоборот, т. е.

$$g \in V_\mu(X, \Gamma) \leftrightarrow (\gamma, \delta) \in \Gamma. \quad (24)$$

Если выполняется соотношение (21), то

$$g \in V_\mu(X, \Gamma') \leftrightarrow (\gamma, \delta) \in \Gamma'. \quad (25)$$

Если же справедливо условие (22), то

$$g \in V_\mu(X, \Gamma') \leftrightarrow (\gamma, \delta) \in \Gamma'^{-1}, \quad (26)$$

и, наконец, из (23) следует

$$g \in V_\mu(X, \Gamma') \leftrightarrow \{(\gamma, \delta) \in \Gamma' \wedge (\gamma, \delta) \in \Gamma'^{-1}\}. \quad (27)$$

Сопоставляя (24) с (25), (26), (27), получаем соответственно либо  $\Gamma' = \Gamma$  либо  $\Gamma' = \Gamma^{-1}$ , либо  $\Gamma' = \Gamma \cup \Gamma'$  Во всех случаях граф  $(X, \Gamma')$  оказывается сопряженным (п. 1.3) с графом  $(X, \Gamma)$ .

б) Пусть  $\Gamma_{12} \neq \Phi \wedge \Gamma_{21} \neq \Phi$ . Аналогично п. а) получаем в случае симметричного  $\Gamma$  один из следующих вариантов:

$$(\alpha, \beta) \in \Gamma' \text{ и } (\beta, \alpha) \in \Gamma', \quad (28)$$

$$(\alpha, \beta) \notin \Gamma' \text{ и } (\beta, \alpha) \in \Gamma', \quad (29)$$

$$(\alpha, \beta) \in \Gamma' \text{ и } (\beta, \alpha) \notin \Gamma' \quad (30)$$

для всякого  $(\alpha, \beta) \in \Gamma$

Если  $(\alpha, \beta) \in \Gamma_{12}$ , то

$$\forall_{(\gamma, \delta) \in X_1 \times X_2} \left\{ \left[ g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in V_\mu(X, \Gamma) \right] \rightarrow [(\gamma, \delta) \in \Gamma \wedge (\delta, \gamma) \in \Gamma] \right\}. \quad (31)$$

Если выполняется (28), (29) или (30), то получаем соответственно

$$b \in V_\mu(X, \Gamma') \leftrightarrow \{(\gamma, \delta) \in \Gamma' \wedge (\delta, \gamma) \in \Gamma'\}, \quad (32)$$

$$b \in V_\mu(X, \Gamma') \leftrightarrow \{(\delta, \gamma) \in \Gamma' \wedge (\gamma, \delta) \notin \Gamma'\}, \quad (33)$$

$$b \in V_\mu(X, \Gamma') \leftrightarrow \{(\gamma, \delta) \in \Gamma' \wedge (\gamma, \delta) \in \Gamma'^{-1}\}. \quad (34)$$

Аналогично п. а) доказательства, сопоставляя (31) с (32), (33) и (34), получаем соответственно  $\Gamma' = \Gamma \setminus X_1 \times X_2$ , либо  $\Gamma' = \Gamma \setminus X_2 \times X_1$ , либо  $\Gamma' = \Gamma$ . И в любом из этих случаев граф  $(X, \Gamma')$  сопряжен с  $(X, \Gamma)$  или  $(X, \Gamma^{-1})$ .

Если же отношение  $\Gamma$  несимметрично, то

$$\begin{aligned} & \forall_{\eta, \zeta \in X_2; \alpha, \beta \in X; \eta \neq \zeta; \alpha \neq \beta} \{(\alpha, \beta) \in \Gamma \wedge (\alpha, \beta) \notin \Gamma^{-1}\} \rightarrow \\ & \rightarrow \left\{ f = \begin{pmatrix} \eta & \zeta \\ \alpha & \beta \end{pmatrix} \in V_\mu(X, \Gamma) \right\} \rightarrow f \in V_\mu(X, \Gamma'). \end{aligned} \quad (35)$$

С другой стороны

$$f \in V_\mu(X, \Gamma') \leftrightarrow \{(\alpha, \beta) \in \Gamma' \vee (\beta, \alpha) \in \Gamma'\} \vee \{(\alpha, \beta) \notin \Gamma' \wedge (\beta, \alpha) \notin \Gamma'\}. \quad (36)$$

Прежде всего заметим, что правая часть последней дизъюнкции невозможна, если

$$\exists_{\eta, \xi \in X} \{(\eta, \xi) \notin \Gamma \wedge (\xi, \eta) \in \Gamma\}$$

(так как  $f = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \eta & \xi \end{pmatrix} \in V_\mu(X, \Gamma)$ , но  $f \notin V_\mu(X, \Gamma')$ ), или если

$$\exists_{\alpha_1, \beta_1 \in X} \{(\alpha_1, \beta_1) \in \Gamma_{12} \wedge (\alpha_1, \beta_1) \notin \Gamma_{21}\} \leftrightarrow (\alpha, \beta) \in \Gamma_{21}$$

(т. к.  $f_1 = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta_1 & \alpha_1 \end{pmatrix} \notin V_\mu(X, \Gamma)$ , но  $f_1 \in V_\mu(X, \Gamma')$ ).



Следовательно, правая часть дизъюнкции в (36) имеет место только для  $\Gamma = \Gamma_{12} \cup X \times X_1$ , и тогда  $\Gamma' = \Gamma_1 \cup \Gamma_{21} \cup \Gamma_{21}^{-1}$ , т. е. сопряжен с  $(X, \Gamma)$ . Теперь покажем, что  $(\alpha, \beta) \notin \Gamma' \cap \Gamma'^{-1}$ . Допустим, что для всяких  $\alpha_i, \beta_i \in X$  таких, что  $(\alpha_i, \beta_i) \in \Gamma$  и  $(\alpha_i, \beta_i) \notin \Gamma^{-1}$  выполняется  $(\alpha_i, \beta_i) \in \Gamma' \cap \Gamma'^{-1}$ . Тогда при  $(\alpha_1, \beta_1) \in X_1 \times X_2, (\alpha_2, \beta) \in X_2 \times X_1$  получаем, что

$$f = \begin{pmatrix} \alpha_2 & \beta_2 \\ \alpha_1 & \beta_1 \end{pmatrix} \in V_\mu(X, \Gamma'), \text{ но } f \notin V_\mu(X, \Gamma).$$

Пусть теперь существуют элементы  $\gamma, \delta \in X$  такие, что  $(\gamma, \delta) \in \Gamma$  и  $(\delta, \gamma) \notin \Gamma$ . Тогда, если  $(\gamma, \delta) \in \Gamma'$  и  $(\gamma, \delta) \notin \Gamma'^{-1}$ , причем  $(\gamma, \delta)$  и  $(\alpha, \beta)$  принадлежат  $X_1 \times X_2$ , —  $f = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in V_\mu(X, \Gamma)$ , но  $f \notin V_\mu(X, \Gamma')$ . Если же пары  $(\gamma, \delta)$  и  $(\beta, \alpha)$  принадлежат  $X_1 \times X_2$ ,  $(\delta, \gamma) \in \Gamma$  и  $(\gamma, \delta) \notin \Gamma$ ,  $(\delta, \gamma) \in \Gamma'$  и  $(\gamma, \delta) \notin \Gamma'$ , то

$$f = \begin{pmatrix} \gamma & \delta \\ \alpha & \beta \end{pmatrix} \in V_\mu(X, \Gamma'), \text{ но } f \notin V_\mu(X, \Gamma).$$

Итак,  $(\alpha, \beta) \notin \Gamma' \cup \Gamma'^{-1}$ .

Поэтому из всего сказанного выше следует, что в (36) возможны лишь 2 случая:

либо  $(\alpha, \beta) \in \Gamma'$  и  $(\alpha, \beta) \notin \Gamma'^{-1}$ ,

либо  $(\alpha, \beta) \notin \Gamma'$  и  $(\alpha, \beta) \in \Gamma'^{-1}$ .

Теперь обозначим  $R$  множество пар  $(\alpha, \beta)$  таких, что  $(\beta, \alpha) \notin \Gamma$  и  $(\alpha, \beta) \in \Gamma$ ,  $U (U \subseteq R)$  — множество пар  $(\alpha_i, \beta_i)$  таких, что  $(\alpha_i, \beta_i) \in \Gamma' \leftrightarrow (\beta_i, \alpha_i) \in \Gamma$ ; а  $T (T \subseteq R)$  — множество пар  $(\alpha_k, \beta_k)$  таких, что  $(\alpha_k, \beta_k) \in \Gamma' \leftrightarrow (\beta_k, \alpha_k) \in \Gamma$ . Если  $U = \Phi (R = T)$ , то, очевидно,  $\Gamma' = \Gamma^{-1}$ . Если  $T = \Phi (R = U)$ , то  $\Gamma' = \Gamma$ .

Если бы  $T = \Phi$  и  $U = \Phi$ , то положив для определенности  $(\alpha_i, \beta_i) \in \Gamma_{12}$  при  $(\alpha_k, \beta_k) \in \Gamma_{12}$  имеем

$$f = \begin{pmatrix} \alpha_i & \beta_i \\ \alpha_k & \beta_k \end{pmatrix} \in V_\mu(X, \Gamma), \text{ но } f \notin V_\mu(X, \Gamma'),$$

а при  $(\alpha_k, \beta_k) \in \Gamma_{21}$  имеем  $g = \begin{pmatrix} \alpha_i & \beta_i \\ \beta_k & \alpha_k \end{pmatrix} \notin V_\mu(X, \Gamma)$ , но  $g \in V_\mu(X, \Gamma')$ , что опровергает допущение.

Итак, и в случае несимметричного  $\Gamma$ ,  $(X, \Gamma')$  сопряжен с  $(X, \Gamma)$ .

2) Пусть теперь отношение  $\Gamma_1$  несимметрично. Тогда существует пара  $(\alpha, \beta) \in X_1^2$  такая, что  $(\alpha, \beta) \in \Gamma \setminus \Gamma^{-1}$ . Кроме того,

$$\forall \eta, \zeta \in X, \alpha, \beta \in X; \eta \neq \zeta; \alpha \neq \beta \left\{ (\alpha, \beta) \in \Gamma \rightarrow f = \begin{pmatrix} \eta & \zeta \\ \alpha & \beta \end{pmatrix} \in V_\mu(X, \Gamma) \rightarrow f \in V_\mu(X, \Gamma') \right\}.$$

С другой стороны,

$$f \in V_\mu(X, \Gamma') \leftrightarrow \{(\alpha, \beta) \in \Gamma' \vee (\beta, \alpha) \in \Gamma'\} \vee \{(\alpha, \beta) \notin \Gamma' \wedge (\beta, \alpha) \notin \Gamma'\}. \quad (37)$$

а) Пусть  $\Gamma \setminus \Gamma_1$  симметрично. Тогда

$$A_{\gamma, \delta \in X, \gamma \neq \delta} \{(\gamma, \delta) \in \Gamma \setminus \Gamma_1\} \rightarrow \{(\gamma, \delta) \in \Gamma \cap \Gamma^{-1}\}.$$

Допустим, что  $(\gamma, \delta) \notin \Gamma'$ ,  $(\gamma_1, \delta) \notin \Gamma'^{-1}$ . Но при этом

$$f = \begin{pmatrix} \gamma & \delta \\ \alpha & \beta \end{pmatrix} \notin V_\mu(X, \Gamma), \text{ но } f \in V_\mu(X, \Gamma').$$

Если бы  $(\gamma, \delta) \in \Gamma' \setminus \Gamma'^{-1}$ , то опять-таки  $f \notin V_\mu(X, \Gamma)$ , но  $f \in V_\mu(X, \Gamma')$ .

Если же  $(\gamma, \delta) \in \Gamma'^{-1} \setminus \Gamma'$ , то  $g = \begin{pmatrix} \delta & \gamma \\ \alpha & \beta \end{pmatrix} \in V_\mu(X, \Gamma)$ , но  $g \notin V_\mu(X, \Gamma')$ .



Следовательно, все три варианта невозможны.

в) Пусть  $\Gamma \setminus \Gamma_1$  несимметрично. Тогда существует пара  $(\gamma, \delta) \in \Gamma \setminus \Gamma^{-1}$ . При этом

если бы  $\Gamma' = \Gamma \cup \Gamma^{-1}$ , то  $f = \begin{pmatrix} \gamma & \delta \\ \alpha & \beta \end{pmatrix} \in V_\mu(X, \Gamma)$ , но  $f \notin V_\mu(X, \Gamma')$ ,

если же  $(\gamma, \delta) \notin \Gamma'$  и  $(\gamma, \delta) \notin \Gamma'^{-1}$ , то  $g = \begin{pmatrix} \gamma & \delta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \in V_\mu(X, \Gamma)$ , но  $g \in V_\mu(X, \Gamma')$ ;

и, наконец, в случае  $(\gamma, \delta) \in \Gamma'^{-1} \setminus \Gamma'$ ,  $f = \begin{pmatrix} \gamma & \delta \\ \alpha & \beta \end{pmatrix} \in V_\mu(X, \Gamma)$ , но  $f \notin V_\mu(X, \Gamma')$ , что опять-таки невозможно.

Из (37) и пп. а) и в) видно, что возможны лишь 2 случая:

либо  $(\alpha, \beta) \in \Gamma'$  и  $(\alpha, \beta) \notin \Gamma'^{-1}$ ,

либо  $(\alpha, \beta) \notin \Gamma'$  и  $(\alpha, \beta) \in \Gamma'^{-1}$ .

Окончание доказательства этого пункта проводится аналогично п. 2.4, А, 1).

В) Если граф  $(X, \Gamma)$  таков, что  $\Gamma_2 = \Phi$ , то граф  $(X, \hat{\Gamma})$  имеет  $\Gamma_1 = X_1^2$ . Используя теорему п. 2.2.1. и п. А), легко получить доказательство леммы при  $\Gamma_1 = X_1^2$ .

С) Остается доказать только случай  $\Gamma_1 \neq X_1^2$ ,  $\Gamma_2 \neq \Phi$ .

На основании леммы п. 2.3.4. имеем  $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \Gamma'_1 \cup \Gamma'_2$  или  $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \Gamma'^{-1}_1 \cup \Gamma'^{-1}_2$ . Пусть  $\eta, \zeta \in X_1$ ,  $(\eta, \zeta) \notin \Gamma \cup \Gamma^{-1}$  (такая пара существует т. к.  $\Gamma_1 \neq X_1^2$ );  $\gamma, \delta \in X_2$ ,  $(\gamma, \delta) \in \Gamma_2$  (такая пара также существует ввиду  $\Gamma_2 \neq \Phi$ );  $f = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \eta & \zeta \end{pmatrix}$ ,  $g = \begin{pmatrix} \gamma & \delta \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}$  ( $\alpha, \beta \in X$ ).

Покажем, что справедлива формула (20). Пусть  $(\alpha, \beta) \in X_2 \times X$ ,  $(\alpha, \beta) \notin \Gamma$  и  $(\alpha, \beta) \notin \Gamma^{-1}$ ; если бы  $(\alpha, \beta) \in \Gamma' \vee (\alpha, \beta) \in \Gamma'^{-1}$ , то  $f \in V_\mu(X, \Gamma)$  но  $f \notin V_\mu(X, \Gamma')$ , поэтому  $(\alpha, \beta) \notin \Gamma'$  и  $(\alpha, \beta) \notin \Gamma'^{-1}$ . Далее возможны следующие случаи

1)  $\Gamma_2$  симметрично.

Пусть  $(\alpha, \beta) \in \Gamma_2$ ,  $(\beta, \alpha) \in \Gamma_{12}$ ; если бы  $(\alpha, \beta) \in \Gamma'_{21}$  и  $(\alpha, \beta) \in \Gamma'^{-1}_{12}$ , то  $g \in V_\mu(X, \Gamma)$ , но  $g \in V_\mu(X, \Gamma')$ ; в случае же  $(\alpha, \beta) \notin \Gamma'_{21}$  и  $(\alpha, \beta) \notin \Gamma'^{-1}_{12}$ , то  $f \in V_\mu(X, \Gamma)$ , но  $f \in V_\mu(X, \Gamma')$ .

Если же  $(\alpha, \beta) \in \Gamma_{21} \cap \Gamma_{12}^{-1}$ , то  $(\alpha, \beta) \in \Gamma'_{21} \cap \Gamma'^{-1}_{12}$ , ибо в противном случае  $g \in V_\mu(X, \Gamma)$ ; но  $g \notin V_\mu(X, \Gamma')$ .

2)  $\Gamma_2$  несимметрично. Пусть  $(\alpha, \beta) \in \Gamma_{21}$  и  $(\gamma, \delta) \in \Gamma_2 \setminus \Gamma_2^{-1}$ ; если бы  $(\alpha, \beta) \notin \Gamma_{21}$ , то  $g \in V_\mu(X, \Gamma)$ , но  $g \notin V_\mu(X, \Gamma')$ .

Таким образом, возможны лишь такие случаи:

либо  $(\alpha, \beta) \in \Gamma'$  и  $(\alpha, \beta) \notin \Gamma'^{-1}$ ,

либо  $(\alpha, \beta) \notin \Gamma'$  и  $(\alpha, \beta) \in \Gamma'^{-1}$ .

Отсюда, аналогично п. п. А) 1) и 2) доказательства, легко показать что  $\Gamma' = \Gamma$  или  $\Gamma' = \Gamma'^{-1}$ .

### § 3. ГРАФЫ, ЗАДАННЫЕ НА РАЗНЫХ МНОЖЕСТВАХ

3.1. Из п. 2.4. методом, близким к использованному в работах [1] [3], можно доказать следующую теорему.

**Теорема.** Пусть  $\Gamma \in V[X, X_1]$ ,  $X_1 \neq \Phi$ ,  $X_1 \neq X$ ,  $\mu \geq 2$  и  $(X', \Gamma')$  — произвольный граф. Для изоморфизма полугрупп  $V_\mu(X, \Gamma)$  и  $V_\mu(X', \Gamma')$  необходимо и достаточно выполнения условий:

1)  $\mu = \mu'$ ,



2) граф  $(X', \Gamma')$  изоморфен одному из графов, сопряженных с  $(X, \Gamma)$  или  $(X, \Gamma^{-1})$ .

3.2. Выделим некоторые классы графов, вполне характеризующие своей полугруппой  $1-1$  — эндоморфизмов.

**Теорема.** Пусть  $\Gamma \in V[X, X_1]$ ,  $X_1 \neq \Phi$ ,  $X_1 = X$ ,  $\mu > 2$ ;  $(X', \Gamma')$  — произвольный граф. И пусть, кроме того, граф  $(X, \Gamma)$  удовлетворяет одному из следующих условий:

- 1)  $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \neq (\Gamma_1 \cup \Gamma_2)^{-1}$ .
- 2)  $\Gamma_1 \neq X_1^2$ ,  $\Gamma_2 \neq \Phi$ ,
- 3)  $\Gamma_1 \neq X_1^2$ ,  $\Gamma_{12} \neq \Phi$ ,  $\Gamma_{21} \neq \Phi$ ,  $\Gamma_{12}^{-1} \neq \Gamma_{21}$ ,
- 4)  $\Gamma_2 \neq \Phi$ ,  $\Gamma_{12} \neq X_1 \times X_2$ ,  $\Gamma_{21} \neq X_2 \times X_1$ ,  $\Gamma_{12} \neq \Gamma_{21}^{-1}$ .

Для того чтобы полугруппы  $V_\mu(X, \Gamma)$  и  $V_\mu(X, \Gamma')$  были изоморфны, необходимо и достаточно, чтобы  $\mu' = \mu$  и граф  $(X', \Gamma')$  был изоморфен одному из графов  $(X, \Gamma)$  или  $(X, \Gamma^{-1})$ .

Доказательство легко провести, используя определение сопряженности (2) и теорему п. 3.1.

3.3. Из п. 2.1, аналогично теореме п. 3.1, получаем следующий результат:

**Теорема.** Полугруппы  $V_\mu(X, X \times Y)$  и  $V_{\mu'}(X', \Gamma')$  изоморфны тогда и только тогда, когда выполняются условия.

- 1)  $\mu = \mu'$ ,
- 2) граф  $(X', \Gamma')$  изоморфен одному из графов  $(X, \Gamma)$ , где  $\Gamma \in V[X, Y]$ .

3.4. **Лемма.** Пусть граф  $(X, \Gamma)$  таков, что  $X_1 \neq \Phi$ ,  $X_1 \neq X$ .  $V_2(X, \Gamma) = V_2(X, \Gamma')$  тогда и только тогда, когда  $X_1 = X'_1$ .

Доказательство. Достаточность условия очевидна. Докажем его необходимость. Пусть  $V_2(X, \Gamma) = V_2(X, \Gamma')$ , причем  $X_1 \neq \Phi$ ,  $X_1 \neq X$ . Тогда

$$\forall \alpha \in X_1 \exists \gamma \in X_1 \left\{ \begin{pmatrix} \alpha \\ \gamma \end{pmatrix} \in V_2(X, \Gamma) \right\} \rightarrow \left\{ \begin{pmatrix} \alpha \\ \gamma \end{pmatrix} \in V_2(X, \Gamma') \right\} \rightarrow \{(\alpha, \alpha) \in \Gamma', (\gamma, \gamma) \in \Gamma'\},$$

т. е.  $(\alpha, \alpha) \in \Gamma \rightarrow (\alpha, \alpha) \in \Gamma'$ .

Аналогично доказывается обратная импликация.

Итак,  $X_1 = X'_1$ .

3.5. Используя лемму п. 3.4, также, как и в п. 3.1, получаем следующую теорему:

**Теорема.** Пусть граф  $(X, \Gamma)$  таков, что множество  $X_1 \subset X$  удовлетворяет условиям  $X_1 \neq \Phi$ ,  $X_1 \neq X$ ,  $(X', \Gamma')$  — произвольный граф. Полугруппы  $V_2(X, \Gamma)$  и  $V_2(X', \Gamma')$  изоморфны тогда и только тогда, когда

$$|X| = |X'| \text{ и } |X_1| = |X'_1|.$$

3.6. **Лемма.** Пусть граф  $(X, \Gamma)$  рефлексивен или антирефлексивен (т. е.  $X_1 = X$  или  $X_1 = \Phi$ ), причем  $\Gamma \in V[X, X_1]$ . Полугруппы  $V_2(X, \Gamma)$  и  $V_2(X, \Gamma')$  совпадают тогда и только тогда, когда  $\Gamma' = \Gamma \setminus \Delta$  или  $\Gamma' = \Gamma \cup \Delta$ .

Доказательство. Пусть  $V_2(X, \Gamma) = V_2(X, \Gamma')$ . Тогда

$$\forall \alpha, \beta \in X \left\{ \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \in V_2(X, \Gamma), \begin{pmatrix} \beta \\ \alpha \end{pmatrix} \in V_2(X, \Gamma) \right\} \rightarrow \left\{ \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \in V_2(X, \Gamma'), \begin{pmatrix} \beta \\ \alpha \end{pmatrix} \in V_2(X, \Gamma') \right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow \{[(\alpha, \alpha) \in \Gamma' \wedge (\beta, \beta) \in \Gamma'] \vee [(\alpha, \alpha) \notin \Gamma' \wedge (\beta, \beta) \notin \Gamma']\},$$

т. е. если  $(X, \Gamma)$  — рефлексивный или антирефлексивный граф, то  $(X, \Gamma')$  может быть как рефлексивным, так и антирефлексивным графом.

3.7. Пользуясь леммой п. 3.6, легко доказать следующую теорему.

**Теорема.** Пусть  $(X, \Gamma)$  — рефлексивный или антирефлексивный граф. Полугруппы  $V_2(X, \Gamma)$  и  $V_2(X', \Gamma')$  изоморфны тогда и только тогда, когда выполняются условия:

- 1)  $|X| = |X'|$ ,
- 2)  $\Gamma' = \Gamma \setminus \Delta$  (если  $X_1 = X$ ) и  $\Gamma' = \Gamma \cup \Delta$  (если  $X_1 = \Phi$ ).



§ 4. ОДНО ЗАМЕЧАНИЕ О ПОЛУГРУППЕ  $V_3(X, \Gamma)$ 

Результаты полученные выше для полугруппы  $V_\mu(X, \Gamma)$ , можно легко доказать, точно таким же методом и для полугрупп

$$V_\mu^v(X, \Gamma), W_\mu^v(X, \Gamma) \text{ и } M_\mu^v(X, \Gamma).$$

Различия в формулировках соответствующих теорем касаются лишь исключений т. е. вместо класса  $V[X, X_1]$  будут фигурировать соответственно классы  $P[X, X_1]$ ,  $W[X, X_1]$ ,  $M[X, X_1]$ . При доказательстве фактов, соответствующих леммам п. 2.3.3., п. 2.4. следует учесть теоремы пп. 2.2. и 2.2.2.

Такое сходство методов и результатов для различных полугрупп частичных эндоморфизмов графов не случайно и объясняется тем, что при доказательстве теорем п. 2.4 и др фактически использовалась лишь полугруппа  $V_3(X, \Gamma)$ , содержащаяся во всех вышеупомянутых полугруппах.

Таким образом, вся информация о графе, которую несет в себе его полугруппа тех или иных частичных эндоморфизмов, заключена уже в полугруппе  $V_3(X, \Gamma)$ .

В заключение хочу горячо поблагодарить профессора Л. М. Глускина за постановку задачи и постоянное внимание к моей работе.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Л. М. Глускин. Полугруппы изотонных преобразований, «Усп. матем. наук» 16, № 5 (1961), 157—162.
2. Л. М. Глускин. Транзитивные полугруппы преобразований. ДАН СССР, 129, № 1 (1959), 16—18.
3. Л. М. Попова. Полугруппы частичных эндоморфизмов множества с отношением. «Сиб. матем. ж.», том IV, № 2 (1963), 309—317.
4. Е. С. Ляпин. Полугруппы, Физматгиз, М. 1960.
5. Ж. Риге. Бинарные отношения, замыкания, соответствия Галуа. «Кибернетический сборник», № 7, ИЛ, М., 1963, 129—185.
6. К. Берг. Теория графов и ее применения, ИЛ, М., 1962.
7. Л. М. Глускин. О плотных вложениях. «Матем. сб.», т. 61 (103), 175 (1963).
8. А. М. Калманович. Підгрупи часткових ендоморфізмів графа. ДАН УРСР, 2 (1965), 147—150.



## О НЕКОТОРЫХ МОДУЛЯХ НАД КОЛЬЦОМ ОГРАНИЧЕННЫХ ФУНКЦИЙ

*В. Д. Головин*

Пусть  $E$  — отделимое локально выпуклое топологическое векторное пространство, и пусть  $E'$  — сопряженное к  $E$  векторное пространство, наделенное сильной топологией (для определенности здесь и далее все рассматриваемые векторные пространства предполагаются вещественными). Пусть  $A$  — произвольное непустое множество и пусть  $B(A)$  — нормированная алгебра всех ограниченных вещественных числовых функций на  $A$ . Рассмотрим  $B(A)$  — модуль

$$E_{(A)} = L(E', B(A))$$

всевозможных непрерывных линейных отображений топологического векторного пространства  $E'$  в нормированное пространство  $B(A)$ . Модуль  $E_{(A)}$  является также (вещественным) векторным пространством, для которого определено каноническое линейное отображение

$$i: E \rightarrow E_{(A)},$$

соотносящее каждому элементу  $x \in E$  такое непрерывное линейное отображение  $f: E' \rightarrow B(A)$ , что  $f(y)$  при каждом  $y \in E'$  есть функция на  $A$ , тождественно равная значению  $\langle x, y \rangle$  канонической билинейной формы, приводящей в двойственность пространства  $E$  и  $E'$ . При этом, если  $f = 0$ , то  $\langle x, y \rangle = 0$  для каждого  $y \in E'$  и, следовательно,  $x = 0$ . Другими словами, отображение  $i$  инъективно, и  $E_{(A)}$  можно рассматривать как модуль, полученный из векторного пространства  $E$  путем расширения его поля скаляров  $R$  до алгебры  $B(A)$ .

Аналогично может быть рассмотрен  $B(A)$ -модуль

$$E'_{(A)} = L(E, B(A))$$

всех непрерывных линейных отображений пространства  $E$  в пространство  $B(A)$ . Для этого модуля определено каноническое линейное отображение

$$j: E' \rightarrow E'_{(A)},$$

соотносящее каждому элементу  $y \in E'$  такое непрерывное линейное отображение  $g: E \rightarrow B(A)$ , что  $g(x)$  при каждом  $x \in E$  есть функция на  $A$ , тождественно равная  $\langle x, y \rangle$ . Отображение  $j$  инъективно, ибо из  $g = 0$  следует, что  $\langle x, y \rangle = 0$  при каждом  $x \in E$ , откуда  $y = 0$ . Тем самым  $E'_{(A)}$  можно рассматривать как модуль, полученный из векторного пространства  $E'$  расширением его поля скаляров до алгебры  $B(A)$ .

Изучение модулей  $E_{(A)}$  и  $E'_{(A)}$  является темой настоящей работы.

### ДВОЙСТВЕННОСТЬ

Каждый элемент  $x$  модуля  $E_{(A)}$  отождествим с некоторым семейством непрерывных линейных форм  $x_\alpha$  ( $\alpha \in A$ ) на топологическом векторном пространстве  $E'$ . Именно в качестве  $x_\alpha$  при каждом  $\alpha \in A$  следует взять линейную форму, соотносящую каждому  $s \in E'$  значение функции  $x(s) \in B(A)$



в точке  $\alpha$ ; другими словами,  $x_\alpha = \varepsilon_\alpha \circ x$ , где  $\varepsilon_\alpha$  — такая непрерывная линейная форма на  $B(A)$ , что  $\varepsilon_\alpha(b) = b(\alpha)$  при каждом  $b \in B(A)$ . Так как  $x$  есть непрерывное линейное отображение  $E' \rightarrow B(A)$ , то семейство  $(x_\alpha)$  равностепенно непрерывно. Аналогично каждый элемент  $y$  модуля  $E'_{(A)}$  отождествим с равностепенно непрерывным семейством линейных форм  $y_\alpha = \varepsilon_\alpha \circ y$  ( $\alpha \in A$ ) на топологическом векторном пространстве  $E$ . Поскольку любое равностепенно непрерывное множество линейных форм на  $E$  является ограниченным в пространстве  $E'$  (наделенном сильной топологией), значения  $\langle x_\alpha, y_\beta \rangle$  ( $\alpha, \beta \in A$ ) канонической билинейной формы, определенной на произведении  $E'' \times E'$ , ограничены в совокупности. Мы определим на произведении  $E_{(A)} \times E'_{(A)}$  (каноническую)  $B(A)$ -билинейную форму, соотнося каждой паре  $(x, y) \in E_{(A)} \times E'_{(A)}$  ограниченную функцию  $\alpha \rightarrow \langle x_\alpha, y_\alpha \rangle$  на  $A$ , которую обозначим через  $\langle x, y \rangle$ . Очевидно, что  $\langle i(s), j(t) \rangle(\alpha) = \langle s, t \rangle$  для каждой пары  $(s, t) \in E \times E'$  и каждого  $\alpha \in A$ .

Покажем, что  $B(A)$ -билинейная форма  $(x, y) \rightarrow \langle x, y \rangle$  приводит модули  $E_{(A)}$  и  $E'_{(A)}$  в двойственность. Действительно, если  $\langle x, y \rangle = 0$  при некотором  $x \in E_{(A)}$  и каждом  $y \in E'_{(A)}$ , то  $\langle x_\alpha, t \rangle = 0$  для любых  $\alpha \in A$  и  $t \in E'$ , откуда  $x_\alpha = 0$  ( $\alpha \in A$ ), т. е.  $x = 0$ . Если  $\langle x, y \rangle = 0$  при каждом  $x \in E_{(A)}$  и некотором  $y \in E'_{(A)}$ , то  $\langle s, y_\alpha \rangle = 0$  для любых  $\alpha \in A$  и  $s \in E'$ , откуда  $y_\alpha = 0$  ( $\alpha \in A$ ) и, следовательно,  $y = 0$ .

Итак, доказана

**Теорема 1.** На произведении модулей  $E'_{(A)}$  и  $E'_{(A)}$  существует каноническая  $B(A)$ -билинейная форма  $(x, y) \rightarrow \langle x, y \rangle$ , приводящая эти модули в двойственность и такая, что ее значение  $\langle i(s), j(t) \rangle$  для каждой пары  $(s, t) \in E \times E'$  тождественно совпадает со значением канонической билинейной формы  $\langle s, t \rangle$ , определенной на произведении  $E \times E'$ .

### СЛАБЫЕ ТОПОЛОГИИ

Наделим модуль  $E_{(A)}$  слабой топологией  $\sigma(E_{(A)}, E'_{(A)})$ , определяемой двойственностью между  $E_{(A)}$  и  $E'_{(A)}$ . По определению, это слабейшая из всевозможных топологий в  $E_{(A)}$ , для которых непрерывны отображения  $x \rightarrow \langle x, y \rangle$  ( $y \in E'_{(A)}$ ) пространство  $E_{(A)}$  в  $B(A)$ . Топология  $\sigma(E_{(A)}, E'_{(A)})$  согласуется со структурой  $B(A)$ -модуля в  $E_{(A)}$ ; фундаментальную систему окрестностей нуля для нее образуют множества  $V(y_1, \dots, y_n; \varepsilon)$ , каждое из которых определяется конечным набором элементов  $y_1, \dots, y_n \in E'_{(A)}$  и числом  $\varepsilon > 0$  и состоит из тех  $x \in E_{(A)}$ , для которых  $\|\langle x, y_k \rangle\| \leq \varepsilon$  ( $k = 1, \dots, n$ ).

**Теорема 2.** Модуль  $L_{B(A)}(E_{(A)}, B(A))$  всех  $B(A)$ -линейных форм на  $E_{(A)}$  непрерывных в слабой топологии  $\sigma(E_{(A)}, E'_{(A)})$ , канонически отождествим с модулем  $E'_{(A)}$ : каждая непрерывная  $B(A)$ -линейная форма на  $E_{(A)}$  однозначно представима в виде  $x \rightarrow \langle x, y \rangle$ , где  $y \in E'_{(A)}$ .

Действительно, то, что каждое отображение вида  $x \rightarrow \langle x, y \rangle$  ( $y \in E'_{(A)}$ ) является непрерывной  $B(A)$ -линейной формой на  $E_{(A)}$ , следует из определения слабой топологии  $\sigma(E_{(A)}, E'_{(A)})$ . Пусть  $g$  — произвольная непрерывная  $B(A)$ -линейная форма на  $E_{(A)}$ . При каждом  $\alpha \in A$  положим  $g_\alpha = \varepsilon_\alpha \circ g$ . Тогда  $g(bx) = bg(x)$  при любых  $b \in B(A)$ ,  $x \in E_{(A)}$  и, следовательно,  $g_\alpha(bx) = b(\alpha)g_\alpha(x)$  при каждом  $\alpha \in A$ ; в частности,  $g_\alpha(x) = 0$ , если  $x_\alpha = \varepsilon_\alpha \circ x = 0$ .

Другими словами, при каждом  $\alpha \in A$  определено отображение  $x_\alpha \rightarrow g_\alpha(x)$ , являющееся линейной формой на векторном пространстве  $E'$ . Так как форма  $g$  непрерывна в топологии  $\sigma(E_{(A)}, E'_{(A)})$ , то отображение  $x_\alpha \rightarrow g_\alpha(x)$  непрерывно в топологии  $\sigma(E'', E')$ ; следовательно,  $g_\alpha(x) = \langle x_\alpha, y_\alpha \rangle$  при некотором  $y_\alpha \in E'$ , каково бы ни было  $\alpha \in A$ . С другой стороны, опять в силу непрерывности формы  $g$  в слабой топологии су-



существуют такие  $z_k \in E'_{(A)}$  ( $1 \leq k \leq n$ ), что  $|\langle x_\alpha, y_\alpha \rangle| \leq 1$  ( $\alpha \in A$ ), если  $\|\langle x, z_k \rangle\| \leq \varepsilon$  ( $1 \leq k \leq n$ ). Так как семейство линейных форм  $z_{k\alpha} = \varepsilon_\alpha \circ z_k$  ( $1 \leq k \leq n$ ;  $\alpha \in A$ ) равностепенно непрерывно на  $E$ , то при каждом  $s$  из некоторой окрестности нуля в  $E$   $|\langle s, z_{k\alpha} \rangle| \leq \varepsilon$  ( $1 \leq k \leq n$ ;  $\alpha \in A$ ), откуда  $|\langle s, y_\alpha \rangle| \leq 1$  ( $\alpha \in A$ ). Таким образом, семейство линейных форм  $y_\alpha$  ( $\alpha \in A$ ) равностепенно непрерывно на  $E$  и, следовательно, определяет некоторый элемент  $y \in E'_{(A)}$ , для которого  $\varepsilon_\alpha \circ y = y_\alpha$  при каждом  $\alpha \in A$  и  $g(x) = \langle x, y \rangle$  при любом  $x \in E'_{(A)}$ . Если, кроме того, существует  $z \in E'_{(A)}$ , для которого также  $g(x) = \langle x, z \rangle$ , то ввиду двойственности между  $E_{(A)}$  и  $E'_{(A)}$  из  $\langle x, y - z \rangle = 0$  ( $x \in E_{(A)}$ ) следует  $y = z$ . Тем самым теорема доказана.

По аналогии с предыдущим наделим модуль  $E'_{(A)}$  слабой топологией  $\sigma(E'_{(A)}, E_{(A)})$ , т. е. слабой из топологий в  $E'_{(A)}$ , для которых непрерывны все  $B(A)$ -линейные формы на  $E'_{(A)}$  вида  $y \rightarrow \langle x, y \rangle$  ( $x \in E_{(A)}$ ). Топология  $\sigma(E'_{(A)}, E_{(A)})$  согласуется со структурой  $B(A)$ -модуля в  $E'_{(A)}$ , а фундаментальную систему окрестностей нуля для нее образуют множества  $V(x_1, \dots, x_n; \varepsilon)$ , каждое из которых определяется конечным набором элементов  $x_k \in E_{(A)}$  ( $1 \leq k \leq n$ ) и числом  $\varepsilon > 0$  и состоит из тех  $y \in E'_{(A)}$ , для которых  $\|\langle x_k, y \rangle\| \leq \varepsilon$  ( $1 \leq k \leq n$ ).

**Теорема 2\*.** Модуль  $L_{B(A)}(E'_{(A)}, B(A))$  всех  $B(A)$ -линейных форм на  $E'_{(A)}$ , непрерывных в топологии  $\sigma(E'_{(A)}, E_{(A)})$ , канонически отождествим с модулем  $E_{(A)}$ : каждая непрерывная  $B(A)$ -линейная форма на  $E'_{(A)}$  однозначно представима в виде  $y \rightarrow \langle x, y \rangle$ , где  $x$  — некоторый элемент из  $E_{(A)}$ .

Непосредственно из определения топологии  $\sigma(E'_{(A)}, E_{(A)})$  следует, что каждое отображение  $y \rightarrow \langle x, y \rangle$  ( $x \in E_{(A)}$ ) является непрерывной  $B(A)$ -линейной формой на  $E'_{(A)}$ . Пусть  $f$  — произвольная  $B(A)$ -линейная форма на  $E'_{(A)}$ , непрерывная в слабой топологии. Тогда, положив  $f_\alpha = \varepsilon_\alpha \circ f$ , получим  $f_\alpha(by) = b(\alpha)f_\alpha(y)$  при каждом  $b \in B(A)$  и каждом  $y \in E'_{(A)}$ ; в частности,  $f_\alpha(y) = 0$ , если  $y_\alpha = \varepsilon_\alpha \circ y = 0$ . Тем самым при каждом  $\alpha \in A$  на векторном пространстве  $E'$  определена линейная форма  $y_\alpha \rightarrow f_\alpha(y)$ , непрерывная в топологии  $\sigma(E', E'')$ , поскольку форма  $f$  непрерывна в топологии  $\sigma(E'_{(A)}, E_{(A)})$ . Поэтому при каждом  $\alpha \in A$  существует такой элемент  $x_\alpha \in E''$ , что  $f_\alpha(y) = \langle x_\alpha, y_\alpha \rangle$ . С другой стороны, существуют такие  $x_k \in E_{(A)}$  ( $1 \leq k \leq n$ ), что  $|\langle x_\alpha, y_\alpha \rangle| \leq 1$  для каждого  $\alpha \in A$  и каждого  $y \in E'_{(A)}$ , удовлетворяющего условию  $\|\langle x_k, y \rangle\| \leq \varepsilon$  ( $1 \leq k \leq n$ ) при некотором  $\varepsilon > 0$ . Так как семейство линейных форм  $x_{k\alpha} = \varepsilon_\alpha \circ x_k$  ( $1 \leq k \leq n$ ;  $\alpha \in A$ ) равностепенно непрерывно на  $E'$ , то при каждом  $t$  из некоторой окрестности нуля в  $E'$  имеем  $|\langle x_{k\alpha}, t \rangle| \leq \varepsilon$  ( $1 \leq k \leq n$ ;  $\alpha \in A$ ) и, следовательно,  $|\langle x_\alpha, t \rangle| \leq 1$  ( $\alpha \in A$ ). Последнее означает, что семейство линейных форм  $x_\alpha$  ( $\alpha \in A$ ) равностепенно непрерывно на  $E'$  и поэтому определяет некоторый элемент  $x$  модуля  $E_{(A)}$ , для которого  $\varepsilon_\alpha \circ x = x_\alpha$  ( $\alpha \in A$ ) и  $f(y) = \langle x, y \rangle$  при любом  $y \in E'_{(A)}$ . Если существует еще один элемент  $y \in E_{(A)}$ , для которого также  $f(y) = \langle z, y \rangle$  ( $y \in E'_{(A)}$ ), то из  $\langle x - z, y \rangle = 0$  ( $y \in E'_{(A)}$ ) следует  $x = z$ , и утверждение доказано.

### КАНОНИЧЕСКИЕ ВЛОЖЕНИЯ

**Предложение 1.** Для любого (непустого) множества  $A$  отображение  $i: E \rightarrow E_{(A)}$  непрерывно.

Действительно, пусть элементы  $y_k \in E'_{(A)}$  ( $1 \leq k \leq n$ ) и число  $\varepsilon > 0$  определяют окрестность нуля  $V(y_1, \dots, y_n; \varepsilon)$  в  $E_{(A)}$  для топологии  $\sigma(E_{(A)}, E'_{(A)})$ . Тогда линейные формы  $y_{k\alpha} = \varepsilon_\alpha \circ y_k$  ( $1 \leq k \leq n$ ;  $\alpha \in A$ ) образуют равностепенно непрерывное семейство на  $E$ , поэтому существует такая окрестность нуля  $U$  в  $E$ , что  $|\langle s, y_{k\alpha} \rangle| \leq \varepsilon$  ( $1 \leq k \leq n$ ;  $\alpha \in A$ ) при



любом  $s \in U$ ; другими словами,  $\| \langle i(s), y_k \rangle \| \leq \varepsilon$  ( $1 \leq k \leq n$ ) или еще иначе  $i(U) \subset V(y_1, \dots, y_n; \varepsilon)$ , чем и доказано утверждение.

**Теорема 3.** *Каково бы ни было отделимое локально выпуклое пространство  $E$ , существует такое множество  $A$ , что отображение  $i: E \rightarrow E_{(A)}$  является мономорфизмом.*

Действительно, пусть  $U$  — произвольная замкнутая уравновешенная выпуклая окрестность нуля в  $E$ ; она является полярной  $M^\circ$  некоторого равностепенно непрерывного множества  $M \subset E'$ . Предположим, что мощность множества  $A$  мажорирует мощность любого равностепенно непрерывного множества из  $E'$ , в частности,  $\text{Card}(M) \leq \text{Card}(A)$ . В таком случае, множество  $M$  можно представить параметрически как равностепенно непрерывное семейство форм  $y_\alpha$  ( $\alpha \in A$ ) на  $E$ , множеством индексов для которого служит  $A$ . Семейство  $(y_\alpha)$  определяет элемент  $y \in E'_{(A)}$ , для которого  $\varepsilon_\alpha \circ y_\alpha$  при каждом  $\alpha \in A$ . Пусть  $s$  — такой элемент в  $E$ , что  $i(s) \in V(y; 1)$ ; тогда  $|\langle s, y_\alpha \rangle| \leq 1$  ( $\alpha \in A$ ), и обратно. Другими словами,  $i(U) = V(y; 1) \cap i(E)$  и, следовательно, отображение  $i$  является изоморфизмом пространства  $E$  на  $i(E)$ .

**Предположение 1\*.** Для любого множества  $A$  отображение  $j: E' \rightarrow E'_{(A)}$  непрерывно.

Если элементы  $x_k \in E_{(A)}$  ( $1 \leq k \leq n$ ) и число  $\varepsilon > 0$  определяют окрестность нуля  $V(x_1, \dots, x_n; \varepsilon)$  для слабой топологии в  $E'_{(A)}$ , то формы  $x_{k\alpha} = \varepsilon_\alpha \circ x_k$  ( $1 \leq k \leq n$ ;  $\alpha \in A$ ) образуют равностепенно непрерывное семейство на  $E'$  и, следовательно, существует такая окрестность нуля  $U$  в  $E'$ , что  $|\langle x_{k\alpha}, t \rangle| \leq \varepsilon$  ( $1 \leq k \leq n$ ;  $\alpha \in A$ ) при каждом  $t \in U$ . Иначе говоря,  $\| \langle x_k, j(t) \rangle \| \leq \varepsilon$ , т. е.  $j(U) \subset V(x_1, \dots, x_n; \varepsilon)$ .

**Теорема 3\*.** *Каково бы ни было отделимое локально выпуклое пространство  $E$ , существует такое множество  $A$ , что отображение  $i: E' \rightarrow E'_{(A)}$  является мономорфизмом.*

Пусть  $U$  — произвольная замкнутая уравновешенная выпуклая окрестность нуля в  $E'$  для сильной топологии; она является полярной  $M^\circ$  некоторого ограниченного множества  $M$  в  $E$ . Предположим, что мощность каждого ограниченного множества в  $E$  мажорируется мощностью множества  $A$ ; в частности,  $\text{Card}(M) \leq \text{Card}(A)$  и, следовательно, множество  $M$  можно представить параметрически как семейство линейных форм  $x_\alpha$  ( $\alpha \in A$ ) на  $E'$ , равностепенно непрерывное в сильной топологии. Семейство  $(x_\alpha)$  отождествимо с некоторым элементом  $x \in E_{(A)}$ , для которого  $\varepsilon_\alpha \circ x = x_\alpha$  ( $\alpha \in A$ ). Каков бы ни был элемент  $t \in E'$ , включение  $j(t) \in V(x, 1)$  равносильно выполнению неравенств  $|\langle x_\alpha, t \rangle| \leq 1$  ( $\alpha \in A$ ); иначе говоря,  $j(U) = V(x; 1) \cap j(E')$ , и утверждение теоремы доказано.

**Замечание.** Теоремы 3 и 3\* по существу означают следующее: каково бы ни было отделимое локально выпуклое пространство  $E$ , найдется такое множество  $A$ , что двойственные векторные пространства  $E$  и  $E'$  можно инъективно вложить в двойственные модули  $E_{(A)}$  и  $E'_{(A)}$  соответственно так, чтобы слабые топологии  $\sigma(E_{(A)}, E'_{(A)})$  и  $\sigma(E'_{(A)}, E_{(A)})$  индуцировали соответственно в  $E$  и  $E'$  исходную и сильную топологии.

### ТЕНЗОРНЫЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ

Пусть  $E \otimes B(A)$  — тензорное произведение векторных пространств над полем вещественных чисел, наделенное структурой  $B(A)$ -модуля. Тогда определено каноническое  $B(A)$ -линейное отображение

$$\varphi: E \otimes B(A) \rightarrow E_{(A)},$$

соотносящее каждому элементу вида  $x \otimes b$  из  $E \otimes B(A)$  непрерывное линейное отображение  $y \rightarrow \langle x, y \rangle b$  топологического векторного простран-



ства  $E'$  в пространство  $B(A)$ . Отображения  $i$  и  $\varphi$  связаны коммутативной диаграммой

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\quad} & E \otimes B(A) \\ & \searrow i & \swarrow \varphi \\ & E_{(A)} & \end{array}$$

где горизонтальная стрелка является (каноническим) линейным отображением, соотносящим каждому элементу  $x \in E$  элемент  $x \otimes 1$  тензорного произведения  $E \otimes B(A)$ . Непосредственно очевидно, что подмодуль в  $E_{(A)}$ , порожденный образом отображения  $i$ , совпадает с образом отображения  $\varphi$ .

Говоря о *топологическом* тензорном произведении  $E \otimes B(A)$  пространств  $E$  и  $B(A)$ , мы будем предполагать, что оно наделено сильнейшей из локально выпуклых топологий, для которых непрерывно каноническое билинейное отображение

$$\sigma: E \times B(A) \rightarrow E \otimes B(A).$$

Фундаментальную систему окрестностей нуля для топологии пространства  $E \otimes B(A)$  образуют выпуклые оболочки всевозможных множеств вида  $\sigma(V \times B)$ , где  $V$  — произвольная уравновешенная выпуклая окрестность нуля в  $E$ , а  $B$  — единичный шар пространства  $B(A)$ . Действительно, множества, о которых идет речь, образуют базис фильтра  $\mathfrak{B}$  в  $E \otimes B(A)$ , состоящий из поглощающих уравновешенных выпуклых множеств и инвариантный относительно ненулевых гомотетий; следовательно,  $\mathfrak{B}$  является фундаментальной системой окрестностей нуля для некоторой локально выпуклой топологии  $T$  в  $E \otimes B(A)$ . Билинейное отображение  $\sigma$  непрерывно, если  $E \otimes B(A)$  наделено топологией  $T$ . С другой стороны, если  $T'$  — какая-нибудь локально выпуклая топология в  $E \otimes B(A)$ , для которой непрерывно отображение  $\sigma$ , то  $T'$  мажорируется топологией  $T$ .

Топология  $T$  обладает следующим свойством универсальности. Как бы ни были локально выпуклое пространство  $F$  и непрерывное билинейное отображение  $f: E \times B(A) \rightarrow F$ , существует (и притом единственное) непрерывное линейное отображение  $g: E \otimes B(A) \rightarrow F$ , для которого коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} E \times B(A) & \xrightarrow{\sigma} & E \otimes B(A) \\ & \searrow f & \swarrow g \\ & F & \end{array}$$

Действительно, непрерывность отображения  $g$  (которое существует в силу определения тензорного произведения векторных пространств и линейно) следует из того, что для любой уравновешенной выпуклой окрестности нуля  $U$  в  $F$  ее прообраз  $g^{-1}(U)$  содержит некоторое множество вида  $\sigma(V \times B)$ , выпуклая оболочка которого является окрестностью нуля в  $E \otimes B(A)$ , и также содержится в  $g^{-1}(U)$ .

Заметим наконец, что топология  $T$  тензорного произведения согласуется со структурой  $B(A)$ -модуля в  $E \otimes B(A)$  — это проверяется непосредственно.

**Предложение 2.** Отображение  $E \rightarrow E \otimes B(A)$  является мономорфизмом топологических векторных пространств.

Действительно, рассматриваемое отображение непрерывно, ибо образ произвольной окрестности нуля  $V$  из  $E$  содержится в множестве  $\sigma(V \times B) = \{x \otimes b : x \in V, b \in B\}$ . С другой стороны, существует непрерывное линейное отображение  $E \otimes B(A) \rightarrow E$ , являющееся левым обратным к рас-



смаатриваемому и соотносящее каждому элементу  $x \otimes b$  из  $E \otimes B(A)$  элемент  $b(\alpha)x$  в  $E$  при фиксированном  $\alpha \in A$ . Тем самым утверждение доказано.

*Предложение 3.* Каково бы ни было множество  $A$ , отображение  $\varphi: E \otimes B(A) \rightarrow E_{(A)}$  непрерывно.

Действительно, пусть элементы  $y_k (1 \leq k \leq n)$  и число  $\varepsilon > 0$  определяют окрестность нуля  $V(y_1, \dots, y_n; \varepsilon)$  в  $E_{(A)}$  для топологии  $\sigma(E_{(A)}, E'_{(A)})$ . Тогда семейство линейных форм  $y_{k\alpha} = \varepsilon_\alpha \circ y_k (1 \leq k \leq n; \alpha \in A)$  равномерно непрерывно на  $E$  и, следовательно, в  $E$  существует такая окрестность нуля  $V$ , что  $|\langle x, y_{k\alpha} \rangle| \leq \varepsilon (1 \leq k \leq n; \alpha \in A)$  при каждом  $x \in V$ . Если элемент  $z \in E \otimes B(A)$  принадлежит множеству  $U = \Gamma(\sigma(V \times B))$ , то  $z = \sum \lambda_i (x_i \otimes b_i)$ , где  $\lambda_i \geq 0$  ( $\lambda_i > 0$  лишь для конечного числа значений  $i$ ),  $\sum \lambda_i = 1$ ,  $x_i \in V$ ,  $b_i \in B$ . Тогда  $\varepsilon_\alpha(\langle \varphi(z), y_k \rangle) = \sum \lambda_i \langle x_i, y_{k\alpha} \rangle b_i(\alpha)$  и, следовательно,  $\|\langle \varphi(z), y_k \rangle\| \leq \varepsilon (1 \leq k \leq n)$ , откуда  $\varphi(U) \subset V(y_1, \dots, y_n; \varepsilon)$ , и предложение доказано.

Аналогично, пусть  $E' \otimes B(A)$  — тензорное произведение (над полем вещественных чисел), наделенное структурой  $B(A)$ -модуля. Тогда определено  $B(A)$ -линейное отображение

$$\psi: E' \otimes B(A) \rightarrow E'_{(A)},$$

относящее каждому элементу вида  $y \otimes b$  из  $E' \otimes B(A)$  непрерывное линейное отображение  $x \rightarrow \langle x, y \rangle b$  пространства  $E$  в  $B(A)$ . Отображения  $j$  и  $\psi$  связаны коммутативной диаграммой

$$\begin{array}{ccc} E' & \xrightarrow{\quad} & E' \otimes B(A) \\ & \searrow j & \swarrow \psi \\ & E'_{(A)} & \end{array},$$

где горизонтальная стрелка является линейным отображением, соотносящим каждому элементу  $y \in E'$  элемент  $y \otimes 1$  тензорного произведения  $E' \otimes B(A)$ ; подмодуль в  $E'_{(A)}$ , порожденный образом отображения  $j$ , совпадает с образом отображения  $\psi$ .

Наделим  $E' \otimes B(A)$  сильнейшей из локально выпуклых топологий, для которых непрерывно каноническое билинейное отображение

$$\tau: E' \times B(A) \rightarrow E' \otimes B(A).$$

Фундаментальную систему окрестностей нуля для этой топологии образуют выпуклые оболочки множеств  $\tau(V \times B) = \{y \otimes b: y \in V, b \in B\}$ , где  $V$  — произвольная уравновешенная выпуклая окрестность нуля в  $E'$ , а  $B$  — единичный шар пространства  $B(A)$ . Очевидно, что рассматриваемая топология согласуется со структурой  $B(A)$ -модуля в  $E' \otimes B(A)$ .

*Предложение 2\*.* Отображение  $E' \rightarrow E' \otimes B(A)$  является мономорфизмом.

*Предложение 3\*.* Отображение  $\psi: E' \otimes B(A) \rightarrow E'_{(A)}$  непрерывно.

Доказательства этих предложений вполне аналогичны доказательствам предложений 2 и 3 соответственно.

### С-топологии

Пусть  $\alpha \in A$ , и пусть отображение

$$i_\alpha: E'' \rightarrow E_{(A)}$$

соотносит каждому  $s \in E''$  такое непрерывное линейное отображение  $x: E' \rightarrow B(A)$ , что  $\varepsilon_\alpha \circ x = s$  и  $\varepsilon_\beta \circ x = 0$  при каждом  $\beta \neq \alpha$ .



*Предложение 4. Отображение  $i_\alpha$  является мономорфизмом при топологиях  $\sigma(E'', E')$  и  $\sigma(E_{(A)}, E'_{(A)})$ .*

Действительно, отображение  $i_\alpha$  инъективно. Пусть  $y_k \in E'_{(A)}$  ( $1 \leq k \leq n$ ),  $y_{k\alpha} = \varepsilon_\alpha \circ y_k$  ( $\alpha \in A$ ) и  $\varepsilon > 0$ . Тогда

$$i_\alpha(V(y_{1\alpha}, \dots, y_{n\alpha}; \varepsilon)) = V(y_1, \dots, y_n; \varepsilon) \cap i_\alpha(E''),$$

что и доказывает предложение.

*Предложение 5. Отображение  $i_\alpha$  является мономорфизмом при  $\mathfrak{S}$ -топологиях соответственно в  $E''$  и  $E_{(A)} = L(E', B(A))$  для любого множества  $\mathfrak{S}$  ограниченных подмножеств в  $E'$ .*

Действительно, пусть  $M \in \mathfrak{S}$ ,  $U$  — окрестность нуля в  $E_{(A)}$ , состоящая из тех  $x$ , для которых  $|\langle \varepsilon_\alpha \circ x, t \rangle| \leq \varepsilon$  ( $\alpha \in A$ ) при любом  $t \in M$ , и пусть  $V$  — окрестность нуля в  $E''$ , состоящая из тех  $s \in E''$ , для которых  $|\langle s, t \rangle| \leq \varepsilon$  ( $t \in M$ ). Тогда  $i_\alpha(V) = U \cap i_\alpha(E'')$ , и утверждение доказано.

*Предложение 6. Слабая топология  $\sigma(E_{(A)}, E'_{(A)})$  не совпадает, вообще говоря, с  $\mathfrak{S}$ -топологией в  $E_{(A)} = L(E', B(A))$  ни для какого множества  $\mathfrak{S}$  ограниченных подмножеств в  $E'$ .*

Если это не так, то топология  $\sigma(E_{(A)}, E'_{(A)})$  совпадает с некоторой  $\mathfrak{S}$ -топологией. Тогда в пространстве  $E''$  слабая топология  $\sigma(E'', E')$  совпадает с  $\mathfrak{S}$ -топологией. Так как множество  $\mathfrak{S}$  можно считать насыщенным, то оно совпадает с множеством всех замкнутых выпуклых оболочек конечных подмножеств из  $E'$ . Следовательно, топология  $\sigma(E_{(A)}, E'_{(A)})$  совпадает с топологией простой сходимости на  $E'$ . Поэтому каждое равномерно непрерывное семейство линейных форм  $y_\alpha$  ( $\alpha \in A$ ) из  $E'$  принадлежит выпуклой оболочке конечного подмножества в  $E'$ , замкнутой в топологии  $\sigma(E', E)$ . Однако это, вообще говоря, не так, если множество  $A$  бесконечно.

#### ТОТАЛЬНОСТЬ И ПЛОТНОСТЬ

*Предложение 7. Образ отображения  $i: E \rightarrow E_{(A)}$  тотален в следующем смысле: каждая  $B(A)$ -линейная форма на  $E_{(A)}$ , непрерывная в слабой топологии  $\sigma(E_{(A)}, E'_{(A)})$  и равная нулю на  $i(E)$ , тождественно равна нулю.*

Действительно, если  $\langle i(s), y \rangle = 0$  при некотором  $y \in E'_{(A)}$  и каждом  $s \in E$ , то  $\langle s, y_\alpha \rangle = 0$  ( $\alpha \in A$ ), откуда  $y_\alpha = 0$  ( $\alpha \in A$ ), в силу двойственности между  $E$  и  $E'$ .

*Предложение 8. Модуль, порожденный образом отображения  $i$ , вообще говоря, не плотен в модуле  $E_{(A)}$ , наделенном топологией  $\sigma(E_{(A)}, E'_{(A)})$ .*

Пусть  $E$  — рефлексивное банаховское пространство, не имеющее счетного всюду плотного множества. Пусть  $A = I \times I$  и  $(x_{ix})$  — такое семейство элементов в  $E$ , что при фиксированном  $x \in I$  элементы  $x_{ix}$  ( $i \in I$ ) заполняют единичный шар пространства  $E$  и  $x_{ix} = x_{i\lambda}$ , каковы бы ни были  $x, \lambda \in I$ . Аналогично, пусть элементы  $y_{ix} \in E'$  ( $x \in I$ ) при фиксированном  $i \in I$  заполняют единичный шар пространства  $E'$  и  $y_{ix} = y_{\lambda x}$  при любых  $i, \lambda \in I$ . Тогда семейства  $(x_{ix})$  и  $(y_{ix})$  определяют соответственно элементы  $x \in E_{(A)}$  и  $y \in E'_{(A)}$  так, что  $\varepsilon_{ix} \circ x = x_{ix}$  и  $\varepsilon_{ix} \circ y = y_{ix}$  ( $i, x \in I$ ). Предположим, что замкнутый подмодуль, порожденный образом отображения  $i$ , совпадает с  $E_{(A)}$ . Тогда при любом целом  $m > 0$  существуют такие  $s_k = s_k^{(m)} \in E$  ( $1 \leq k \leq n = n(m)$ ) и такие  $b_k = b_k^{(m)} \in B(A)$ , что  $\| \langle x - \sum_{k=1}^n b_k i(s_k), y \rangle \| \leq \frac{1}{m}$ . Другими словами,

$$\left| \left\langle x_{ix} - \sum_{k=1}^n b_k(i, x) s_k, y_{ix} \right\rangle \right| \leq \frac{1}{m},$$



каковы бы ни были  $i, x \in I$ . При фиксированном  $i \in I$  это означает, что элемент  $x_{ix}$  принадлежит замкнутому векторному подпространству, порожденному в  $E$  элементами  $x_k^{(m)}$  ( $m = 1, 2, \dots; k = 1, \dots, n(m)$ ). Действительно, пусть непрерывная линейная форма  $t = y_{ix_0} \in E'$  равна нулю на всех элементах  $s_k^{(m)}$ . Тогда  $\langle x_{ix_0}, y_{ix_0} \rangle = 0$  ( $i \in I$ ) и, следовательно,  $y_{ix_0} = 0$ ; последнее означает, что семейство  $(s_k^{(m)})$  тотально в  $E$ , вопреки предположению. Предложение доказано.

*Замечание.* Таким образом, подмодуль  $F$  в  $E_{(A)}$  может не быть всюду плотным в топологии  $\sigma(E_{(A)}, E'_{(A)})$  даже, если каждая непрерывная  $B(A)$ -линейная форма на  $E_{(A)}$ , равная нулю на  $F$ , тождественно равна нулю. Поэтому теорема Хана — Банаха (в геометрической форме) не имеет места для  $B(A)$ -модулей.

*Предложение 9.* Подмодуль, порожденный в  $E_{(A)}$  образом отображения  $i$ , всюду плотен в топологии простой сходимости на  $E'$ .

Пусть элемент  $x \in E_{(A)}$  отождествлен с равностепенно непрерывным семейством линейных форм  $x_\alpha = \varepsilon_\alpha \circ x$  ( $\alpha \in A$ ) на  $E'$ , и пусть элементы  $t_k \in E'$  ( $1 \leq k \leq n$ ) и число  $\varepsilon > 0$  определяют окрестность нуля  $V = V(t_1, \dots, t_n; \varepsilon)$  в  $E''$  для топологии простой сходимости на  $E'$ . Так как семейство  $(x_\alpha)$  относительно компактно в слабой топологии  $\sigma(E'', E')$ , то существуют такие  $\alpha_i \in A$  ( $1 \leq i \leq m$ ), что  $x_\alpha \in \bigcup (x_{\alpha_i} + V)$ , откуда

$$|\langle x_\alpha - \sum_{1 \leq i \leq m} b_i(\alpha) x_{\alpha_i}, t_k \rangle| \leq \varepsilon,$$

каковы бы ни были  $\alpha \in A$  и  $1 \leq k \leq n$ , где  $b_i(\alpha) = 1$  (если  $x_\alpha \in x_{\alpha_i} + V$ ) и  $b_i(\alpha) = 0$  (при остальных  $i$ ) для фиксированного  $\alpha$ . Другими словами,  $\|\langle x - \sum b_i i(x_{\alpha_i}), j(t_k) \rangle\| \leq \varepsilon$ , чем и завершается доказательство, ибо  $E$  плотно в  $E''$  в топологии  $\sigma(E'', E')$ .

Тем самым образ отображения  $\varphi: E \otimes B(A) \rightarrow E_{(A)}$ , вообще говоря, не плотен в  $E_{(A)}$  в топологии  $\sigma(E_{(A)}, E'_{(A)})$ , хотя и плотен в топологии простой сходимости на  $E'$ .

*Предложение 7\*.* Образ отображения  $j: E' \rightarrow E'_{(A)}$  тотален в следующем смысле: каждая  $B(A)$ -линейная форма на  $E'_{(A)}$ , непрерывная в слабой топологии  $\sigma(E'_{(A)}, E_{(A)})$  и равная нулю на  $j(E')$ , тождественно равна нулю.

Действительно, если  $\langle x, j(t) \rangle = 0$  при некотором  $x \in E_{(A)}$  и каждом  $t \in E'$ , то  $\langle x_\alpha, t \rangle = 0$  ( $\alpha \in A$ ) и, следовательно,  $x_\alpha = 0$  ( $\alpha \in A$ ) в силу двойственности между  $E'$  и  $E''$ .

Модуль, порожденный образом отображения  $j$ , вообще говоря, не плотен в модуле  $E'_{(A)}$ , наделенном слабой топологией  $\sigma(E'_{(A)}, E_{(A)})$ .

*Предложение 9\*.* Подмодуль, порожденный в  $E'_{(A)}$  образом отображения  $j$ , всюду плотен в топологии простой сходимости на  $E$ .

Пусть элемент  $y \in E'_{(A)}$  отождествлен с равностепенно непрерывным семейством линейных форм  $y_\alpha$  ( $\alpha \in A$ ) на  $E$ , и пусть  $V = V(s_1, \dots, s_n; \varepsilon)$  — окрестность нуля в  $E'$  для слабой топологии  $\sigma(E', E)$ . Тогда существуют такие  $\alpha_p \in A$  ( $1 \leq p \leq m$ ), что  $y_\alpha \in \bigcup (y_{\alpha_p} + V)$ , т. е.  $|\langle y_\alpha - \sum b_p(\alpha) y_{\alpha_p}, s_k \rangle| \leq \varepsilon$  ( $1 \leq k \leq n; \alpha \in A$ ), что и требовалось.

## АССОЦИИРОВАННЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ

Пусть  $f: E \rightarrow F$  — непрерывное линейное отображение пространства  $E$  в отделимое локально выпуклое пространство  $F$ . Тогда определено каноническое  $B(A)$ -линейное отображение

$$\hat{f}_{(A)}: E_{(A)} \rightarrow F_{(A)},$$



соотносящее каждому непрерывному линейному отображению  $x: E' \rightarrow B(A)$  композицию  $y = x \circ {}^t f$ , являющуюся непрерывным линейным отображением пространства  $F'$  в  $B(A)$ . Отображения  $f$  и  $f_{(A)}$  связаны коммутативной диаграммой

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{f} & F \\ \downarrow i & & \downarrow i \\ E_{(A)} & \xrightarrow{f_{(A)}} & F_{(A)}. \end{array}$$

Пусть  ${}^t f: F' \rightarrow E'$  — непрерывное линейное отображение, сопряженное с  $f$ . Тогда может быть определено каноническое  $B(A)$ -линейное отображение

$${}^t f_{(A)}: F'_{(A)} \rightarrow E'_{(A)},$$

соотносящее каждому непрерывному линейному отображению  $y: F \rightarrow B(A)$  композицию  $x = y \circ f$ , являющуюся непрерывным линейным отображением пространства  $E$  в  $B(A)$ . Отображения  ${}^t f$  и  ${}^t f_{(A)}$  связаны коммутативной диаграммой

$$\begin{array}{ccc} F' & \xrightarrow{{}^t f} & E' \\ \downarrow j & & \downarrow j \\ F'_{(A)} & \xrightarrow{{}^t f_{(A)}} & E'_{(A)} \end{array}$$

Другими словами,  $j \circ {}^t f = {}^t f_{(A)} \circ j$ .

**Предложение 10.** Каково бы ни было непрерывное линейное отображение  $f: E \rightarrow F$ , ассоциированное с ним  $B(A)$ -линейное отображение  $f_{(A)}: E_{(A)} \rightarrow F_{(A)}$  непрерывно.

Действительно, существует  $B(A)$ -линейное отображение  ${}^t f_{(A)}$ , сопряженное к  $f_{(A)}$ :

$$\langle f_{(A)}(x), y' \rangle = \langle x, {}^t f_{(A)}(y') \rangle,$$

каковы бы ни были  $x \in E_{(A)}$  и  $y' \in F'_{(A)}$ . Отсюда же следует.

**Предложение 10\*.** Каково бы ни было отображение  $f$ , отображение  ${}^t f_{(A)}$  непрерывно.

**Теорема 4.** Пусть  $f: E \rightarrow F$  — непрерывное линейное отображение. Тогда каждое  $B(A)$ -линейное отображение  $\xi: E_{(A)} \rightarrow F_{(A)}$ , непрерывное в слабых топологиях  $\sigma(E_{(A)}, E_{(A)})$  и  $\sigma(F_{(A)}, F'_{(A)})$  и входящее в коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{f} & F \\ \downarrow i & & \downarrow i \\ E_{(A)} & \xrightarrow{\xi} & F_{(A)}, \end{array}$$

совпадает с  $f_{(A)}$ .

Действительно, из коммутативной диаграммы имеем  $(\xi - f_{(A)}) \circ i = 0$ . Поэтому  $g \circ (\xi - f_{(A)}) = 0$  для любой  $B(A)$ -линейной непрерывной формы  $g$  на  $F_{(A)}$ . В силу двойственности между  $F_{(A)}$  и  $F'_{(A)}$  отсюда следует  $\xi - f_{(A)} = 0$ .

**Теорема 4\*.** Каково бы ни было непрерывное линейное отображение  $f: E \rightarrow F$ , каждое  $B(A)$ -линейное отображение  $\zeta: F'_{(A)} \rightarrow E'_{(A)}$ , непрерывное в топологиях  $\sigma(F'_{(A)}, F_{(A)})$ ,  $\sigma(E'_{(A)}, E_{(A)})$  и входящее в коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} F' & \xrightarrow{{}^t f} & E' \\ \downarrow j & & \downarrow j \\ F'_{(A)} & \xrightarrow{\zeta} & E'_{(A)}, \end{array}$$

совпадает с  ${}^t f_{(A)}$ .



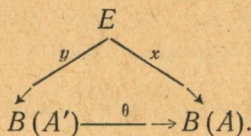
Действительно, из коммутативности диаграммы следует, что  $(\zeta - {}^t f_{(A)}) \circ j = 0$ . В силу предложения 7  $g \circ (\zeta - {}^t f_{(A)}) = 0$  для любой непрерывной  $B(A)$ -линейной формы  $g$  на  $E'_{(A)}$ . Двойственность между  $E_{(A)}$  и  $E'_{(A)}$  позволяет тогда утверждать, что  $\zeta - {}^t f_{(A)} = 0$ .

### НЕПРЕРЫВНОСТЬ

Пусть  $\sigma(E, E'_{(A)})$  — слабая топология в  $E$ , для которых непрерывны все линейные отображения  $y: E \rightarrow B(A)$ , принадлежащие  $E'_{(A)}$ . Фундаментальную систему окрестностей нуля для топологии  $\sigma(E, E'_{(A)})$  образуют множества  $V(y_1, \dots, y_n; \varepsilon)$ , каждое из которых определяется элементами  $y_k \in E'_{(A)}$  ( $1 \leq k \leq n$ ) и числом  $\varepsilon > 0$  и состоит из тех  $s \in E$ , для которых  $|\langle s, y_{k\alpha} \rangle| \leq \varepsilon$ , где  $y_{k\alpha} = e_\alpha \circ y_k$  ( $1 \leq k \leq n; \alpha \in A$ ). Выше было показано, что исходная топология в  $E$  при некотором  $A$  совпадает с топологией  $\sigma(E, E'_{(A)})$  (теорема 3); в любом случае топология  $\sigma(E, E'_{(A)})$  мажорируется исходной.

*Предложение 11. Если  $A \subset A'$ , то топология  $\sigma(E, E'_{(A)})$  мажорируется топологией  $\sigma(E, E'_{(A')})$ .*

Действительно, каждое непрерывное линейное отображение  $x: E \rightarrow B(A)$  представимо в виде  $x = \theta \circ y$ , где  $y: E \rightarrow B(A')$  — непрерывное линейное отображение, а  $\theta: B(A') \rightarrow B(A)$  — отображение сужения:



Если векторное пространство  $E$  наделено топологией  $\sigma(E, E'_{(A')})$ , то каждое отображение  $y \in E'_{(A')}$  непрерывно, а следовательно, непрерывно и каждое отображение  $x \in E'_{(A)}$ . Тем самым топология  $\sigma(E, E'_{(A')})$  мажорирует топологию  $\sigma(E, E'_{(A)})$ .

*Предложение 12. Пусть  $A \subset A'$ . Если отображение  $i: E \rightarrow E_{(A)}$  является мономорфизмом, то и отображение  $i: E \rightarrow E_{(A')}$  является мономорфизмом.*

Отображение  $i: E \rightarrow E_{(A)}$  в том и только в том случае является мономорфизмом, когда исходная топология в  $E$  совпадает с топологией  $\sigma(E, E'_{(A)})$ . Поэтому, в силу сделанных предположений, исходная топология в  $E$  мажорируется топологией  $\sigma(E, E'_{(A')})$  и значит, они совпадают; тем самым утверждение доказано.

*Предложение 13. Пусть  $A \subset A'$ . Если линейное отображение  $f: E \rightarrow F$  непрерывно при топологиях  $\sigma(E, E'_{(A')})$ ,  $\sigma(F, F'_{(A')})$ , то оно непрерывно и при топологиях  $\sigma(E, E'_{(A)})$ ,  $\sigma(F, F'_{(A)})$ .*

Действительно, каково бы ни было непрерывное линейное отображение  $y: F \rightarrow B(A)$ , принадлежащее  $F'_{(A)}$ , отображение  $x = y \circ f$  непрерывно в топологии  $\sigma(E, E'_{(A')})$ . Тогда оно непрерывно в исходной топологии, а значит, и в топологии  $\sigma(E, E'_{(A)})$ . С другой стороны,  $x(s) = \langle f(s), y \rangle$  при каждом  $s \in E$ ; следовательно, отображение  $f$  непрерывно при топологиях  $\sigma(E, E'_{(A)})$  и  $\sigma(F, F'_{(A)})$ .

**Следствие.** Если линейное отображение  $f: E \rightarrow F$  непрерывно при исходных топологиях, то оно непрерывно и при топологиях  $\sigma(E, E'_{(A)})$ ,  $\sigma(F, F'_{(A)})$ , каково бы ни было непустое множество  $A$ .

Для доказательства достаточно воспользоваться тем, что для некоторого множества  $A' \supset A$  топологии  $\sigma(E, E'_{(A')})$ ,  $\sigma(F, F'_{(A')})$  совпадают с исходными соответственно в  $E$  и  $F$ .



*Предложение 14.* Каково бы ни было непрерывное линейное отображение  $f: E \rightarrow F$ , сопряженное отображение  ${}^t f: F' \rightarrow E'$  непрерывно при топологиях  $\sigma(E', F_{(A)})$ ,  $\sigma(E', E_{(A)})$  для любого непустого множества  $A$ .

Действительно, посредством отображения  $j$  векторные пространства  $E'$  и  $F'$ , наделенные топологиями  $\sigma(E', E_{(A)})$ ,  $\sigma(F', F_{(A)})$ , можно отождествить с подпространствами соответственно в  $E_{(A)}$  и  $F_{(A)}$ . Тогда отображение  ${}^t f$  можно рассматривать как сужение отображения  ${}^t f_{(A)}$ , а последнее непрерывно в топологиях  $\sigma(F'_{(A)}, F_{(A)})$ ,  $\sigma(E'_{(A)}, E_{(A)})$ .

### МОНОМОРФИЗМЫ

Пусть  $E$  — отделимое локально выпуклое пространство и  $M$  — его векторное подпространство. Через  $M_{(A)}^\circ$  обозначим  $B(A)$ -подмодуль в  $E'_{(A)}$ , состоящий из тех отображений  $y: E \rightarrow B(A)$ , которые равны нулю на  $M$ .

*Предложение 15.* Модуль  $M'_{(A)}$  канонически отождествим с фактормодулем  $E'_{(A)}/M_{(A)}^\circ$ . Топология  $\sigma(M, M'_{(A)})$  совпадает с топологией, индуцируемой в  $M$  топологией  $\sigma(E, E'_{(A)})$ .

Действительно, пусть  $\varphi: E'_{(A)} \rightarrow M'_{(A)}$  — каноническое  $B(A)$ -линейное отображение, соотносящее каждому непрерывному линейному отображению  $E \rightarrow B(A)$  его сужение на  $M$ . Отображение  $\varphi$  сюръективно, ибо каждое непрерывное линейное отображение  $y: M \rightarrow B(A)$  является сужением на  $M$  некоторого непрерывного линейного отображения  $z: E \rightarrow B(A)$ . Действительно, отображение  $y$  отождествимо с равностепенно непрерывным семейством линейных форм  $y_\alpha = \varepsilon_\alpha \circ y$  ( $\alpha \in A$ ) на  $M$ . По теореме Хана — Банаха каждая форма  $y_\alpha$  может быть продолжена до непрерывной линейной формы  $z_\alpha$  ( $\alpha \in A$ ) на  $E$  так, чтобы семейство  $(z_\alpha)$  было равностепенно непрерывным и тем самым определяло некоторое непрерывное линейное отображение  $z \in E'_{(A)}$ , совпадающее с  $y$  на  $M$ . Наконец, очевидно, что ядром отображения  $\varphi$  служит подмодуль  $M_{(A)}^\circ$  в  $E'_{(A)}$ . Тем самым первая часть предложения доказана; вторая — непосредственно очевидна.

*Предложение 16.* Пусть  $f: E \rightarrow F$  — линейное отображение, непрерывное при топологиях  $\sigma(E, E'_{(A)})$ ,  $\sigma(F, F'_{(A)})$ . Для того чтобы  $f$  было мономорфизмом при тех же топологиях, необходимо и достаточно, чтобы отображение  ${}^t f_{(A)}: F'_{(A)} \rightarrow E'_{(A)}$  было сюръективно.

Действительно, если  $f$  — мономорфизм при топологиях  $\sigma(E, E'_{(A)})$ ,  $\sigma(F, F'_{(A)})$ , то в силу предложения 15 каждое непрерывное линейное отображение  $x: E \rightarrow B(A)$  представимо в виде  $x = y \circ f = {}^t f_{(A)}(y)$ , т. е. отображение  ${}^t f_{(A)}$  сюръективно. Наоборот, если отображение  ${}^t f_{(A)}$  сюръективно, то каждое  $x \in E'_{(A)}$  представимо в виде  $x = y \circ f$ , где  $y \in F'_{(A)}$  и, следовательно,  $f$  инъективно (ибо исходные топологии в  $E$  и  $F$  предполагаются отделимыми). Так как, кроме того,  $\langle s, \varepsilon_\alpha \circ x \rangle = \langle f(s), \varepsilon_\alpha \circ y \rangle$  при любых  $s \in E$  и  $\alpha \in A$ , то  $f$  является мономорфизмом.

*Предложение 17.* Если  $A \subset A'$  и линейное отображение  $f: E \rightarrow F$  является мономорфизмом при топологиях  $\sigma(E, E'_{(A)})$ ,  $\sigma(F, F'_{(A)})$ , то  $f$  является мономорфизмом и при топологиях  $\sigma(E, E'_{(A')})$ ,  $\sigma(F, F'_{(A')})$ .

Действительно,  $f$  непрерывно при топологиях  $\sigma(E, E'_{(A)})$  и  $\sigma(F, F'_{(A)})$ . Пусть  $x: E \rightarrow B(A)$  — произвольное непрерывное линейное отображение; оно представимо в виде  $x = \theta \circ x'$ , где  $\theta: B(A') \rightarrow B(A)$  — отображение сужения, а  $x': E \rightarrow B(A')$  — некоторое непрерывное линейное отображение. Так как  $f$  является мономорфизмом при топологиях  $\sigma(E, E'_{(A)})$ ,  $\sigma(F, F'_{(A)})$ , то  $x' = y' \circ f$ , где  $y': F \rightarrow B(A')$  — некоторое непрерывное линейное отображение. Тогда  $x = y \circ f$ , где  $y = \theta \circ y'$  — непрерывное линейное отображение  $F \rightarrow B(A)$ .

*Предложение 18.* Если линейное отображение  $f: E \rightarrow F$  является мономорфизмом при исходных топологиях, то оно является мономор-



физмом и при топологиях,  $\sigma(E, E'_{(A)})$ ,  $\sigma(F, F'_{(A)})$ , каково бы ни было непустое множество  $A$ .

Действительно, при некотором  $A' \supset A$  топологии  $\sigma(E, E'_{(A')})$  и  $\sigma(F, F'_{(A')})$  совпадают с исходными соответственно в  $E$  и  $F$ .

**Теорема 5.** Для того чтобы непрерывное линейное отображение  $f: E \rightarrow F$  было мономорфизмом (при исходных топологиях), необходимо и достаточно, чтобы для любого непустого множества  $A$  отображение  $f'_{(A)}: F'_{(A)} \rightarrow E'_{(A)}$  было сюръективно.

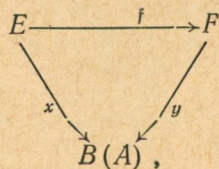
Утверждение следует непосредственно из предыдущих предложений.

**Теорема 6.** Пусть  $E$  и  $F$  — (не обязательно отделимые) локально выпуклые пространства. Для того чтобы топология в  $E$  была прообразом топологии пространства  $F$  относительно непрерывного линейного отображения  $f: E \rightarrow F$ , необходимо и достаточно, чтобы каждое непрерывное линейное отображение  $x: E \rightarrow B(A)$  для любого непустого множества  $A$  представлялось в виде  $x = y \circ f$ , где  $y: F \rightarrow B(A)$  — некоторое непрерывное линейное отображение.

Пусть топология в  $E$  является прообразом топологии пространства  $F$  относительно отображения  $f$ . Тогда каждая окрестность нуля в  $E$  имеет вид  $\bar{f}^{-1}(V)$ , где  $V$  — окрестность нуля в  $F$ ; следовательно, каждая непрерывная линейная форма  $s$  на  $E$  представима в виде  $s = t \circ f$ , где  $t$  — некоторая непрерывная линейная форма на  $f(E)$ . Каждое непрерывное линейное отображение  $x: E \rightarrow B(A)$  отождествимо с равностепенно непрерывным семейством линейных форм  $x_\alpha (\alpha \in A)$  на  $E$ ; по предыдущему  $x_\alpha = t_\alpha \circ f$  ( $\alpha \in A$ ), где  $(t_\alpha)$  — равностепенно непрерывное семейство линейных форм на подпространстве  $f(E)$  в  $F$ . По теореме Хана — Банаха каждая форма  $t_\alpha$  может быть продолжена до непрерывной линейной формы  $y_\alpha$  на  $F$  так, чтобы семейство  $(y_\alpha)$  было равностепенно непрерывным и тем самым определяло непрерывное линейное отображение  $y: F \rightarrow B(A)$ . Тогда  $x = y \circ f$ , и необходимость условия доказана.

Для доказательства достаточности пусть  $V$  — замкнутая уравновешенная выпуклая окрестность нуля в  $E$ . Тогда  $V = K^\circ$ , где  $K = V^\circ$  — поляр множества  $V$  в  $E'$  и  $K^\circ$  — поляр множества  $K$  в  $E$  (т. е. пересечение ядер всех форм, принадлежащих  $K$ ). Представим множество  $K$  параметрически как некоторое равностепенно непрерывное семейство линейных форм  $x_\alpha (\alpha \in A)$  на  $E$ . С другой стороны, семейство  $(x_\alpha)$  определяет непрерывное линейное отображение  $x: E \rightarrow B(A)$ , которое, по предположению, представимо в виде  $x = y \circ f$ , где  $y$  — непрерывное линейное отображение  $F \rightarrow B(A)$ . Последнее определяет некоторое равностепенно непрерывное семейство линейных форм  $y_\alpha (\alpha \in A)$  на  $F$ . Пусть  $U$  — такая окрестность нуля в  $F$ , что  $|y_\alpha(s)| \leq 1$  при каждом  $s \in U$  и каждом  $\alpha \in A$ . Тогда  $\bar{f}^{-1}(U) \subset V$ , и теорема доказана.

**Следствие.** Пусть  $E$  и  $F$  — локально выпуклые пространства, причем  $E$  отделимо. Для того чтобы непрерывное линейное отображение  $f: E \rightarrow F$  было мономорфизмом, необходимо и достаточно, чтобы каждое непрерывное линейное отображение  $x: E \rightarrow B(A)$  входило в коммутативную диаграмму



где  $y$  — некоторое непрерывное линейное отображение.



Действительно, если  $f$  — мономорфизм, то по предыдущему сформулированное условие выполняется. Наоборот, если условие выполнено, то  $f$  инъективно (в силу отделимости  $E$ ) и, следовательно, является мономорфизмом.

*Замечание.* Пусть  $M$  — замкнутое векторное подпространство пространства  $E$ . Тогда модуль  $(E/M)'_{(A)}$  канонически отождествим с подмодулем  $M^{\circ}_{(A)}$  в  $E'_{(A)}$ . Совпадает ли топология  $\sigma(E/M, M^{\circ}_{(A)})$  с фактортопологией топологии  $\sigma(E, E'_{(A)})$  по  $M$ ? Этот вопрос остался открытым, как и связанный с ним нижеследующий.

Пусть  $f: E \rightarrow F$  — линейное отображение, непрерывное в топологиях  $\sigma(E, E'_{(A)})$  и  $\sigma(F, F'_{(A)})$ . Для того чтобы  $f$  было гомоморфизмом пространства  $E$  на  $f(E)$ , достаточно ли, чтобы образ  $f'_{(A)}(F'_{(A)})$  был замкнут в топологии  $\sigma(E'_{(A)}, E)$ ?



# АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ОЦЕНКИ МОЩНОСТЕЙ КЛАССОВ ДЛЯ ОДНОЙ КЛАССИФИКАЦИИ КОНЕЧНЫХ ГРАФОВ

*В. С. Гринберг*

Классификация конечных графов  $* G=(X, \Gamma)$ , рассматриваемая в настоящей заметке, восходит к Фробениусу [2] (см. также [3], [4], [5]) и играет существенную роль в теории цепей Маркова (см., например, [6]) и в некоторых вопросах теории конечных автоматов [7], [8]. Она состоит в следующем.

Граф  $G$  называется разложимым, если существует нетривиальное подмножество  $Y \subset X$ , инвариантное относительно переходов в графе, т. е. такое, что  $\Gamma Y \subseteq Y$ . В противном случае граф называется неразложимым. Неразложимость графа эквивалентна его сильной связности.

Пусть  $G$  — неразложимый граф и пусть  $\{Y_1, Y_2, \dots, Y_k\}$  — какое-нибудь разбиение множества  $X$  с непустыми компонентами  $Y_i$  ( $i = 1, 2, \dots, k$ ), обладающее тем свойством, что

$$\Gamma Y_i \subseteq Y_{i+1} \quad (i = 1, 2, \dots, k; Y_{k+1} \equiv Y_1). \quad (1)$$

Тогда подмножества  $Y_i$  называются системами импримитивности графа \*\*. Максимальная мощность  $h = \max k$  всех таких разбиений называется индексом импримитивности графа \*\*\*  $G$ . Если  $h = 1$ , то граф называется примитивным; в противном случае он называется импримитивным.

Мы будем рассматривать класс  $\mathfrak{G}(X)$  всевозможных графов  $G = (X, \Gamma)$  с фиксированным множеством  $X$ . Мощность множества  $X$  обозначим через  $n$ . Тогда мощность класса  $\mathfrak{G}(X)$  равна  $2^{n^2}$ .

Обозначим через  $f(n)$ ,  $p(n)$ ,  $g(n)$  соответственно количества разложимых, примитивных и импримитивных графов в классе  $\mathfrak{G}(X)$ ; через  $g_h(n)$  обозначим количество импримитивных графов с индексом импримитивности  $h$ . Очевидно,

$$f(n) + p(n) + g(n) = 2^{n^2} \quad (2)$$

и

$$g(n) = \sum_{h=2}^n g_h(n). \quad (3)$$

Наша задача — исследовать поведение указанных функций при  $n \rightarrow \infty$ . В дальнейшем мы пользуемся символом  $\sim$  для обозначения асимптотического равенства.

**Теорема 1.**

$$f(n) \sim n \cdot 2^{n^2-n+2}.$$

\* Мы будем пользоваться терминологией и стандартными обозначениями, употребляемыми в [1]. В частности,  $X$  означает множество вершин графа,  $\Gamma$  — отображение.

\*\* Легко видеть, что для неразложимых графов из (1) следует  $\Gamma Y_i = Y_{i+1}$ .

\*\*\* Обычно индекс импримитивности определяется несколько иначе; наше определение равносильно обычному.



Доказательство. Обозначим через  $\mathfrak{G}_i$  класс всех графов  $(X, \Gamma)$  таких, что  $X$  содержит инвариантное подмножество мощности  $i$ . Мощность класса  $\mathfrak{G}_i$  ее превосходит

$$C_n^i \cdot 2^{n^2-i(n-i)}.$$

Отсюда

$$f(n) \leq \sum_{i=1}^{n-1} C_n^i \cdot 2^{n^2-i(n-i)} = n \cdot 2^{n^2-n+2} [1 + O(n \cdot 2^{-n})]. \quad (4)$$

С другой стороны, мощность класса  $\mathfrak{G}_1$  не меньше, чем

$$n \cdot 2^{n^2-n+1} - C_n^2 \cdot 2^{n^2-2n+2},$$

мощность класса  $\mathfrak{G}_{n-1}$  не меньше, чем

$$n \cdot 2^{n^2-n+1} - C_n^2 \cdot 2^{n^2-2n+2}$$

и мощность пересечения  $\mathfrak{G}_1 \cap \mathfrak{G}_{n-1}$  не больше, чем

$$n(n-1) \cdot 2^{n^2-2n+3} + n \cdot 2^{n^2-2n+2}.$$

Отсюда

$$f(n) \geq n \cdot 2^{n^2-n+2}. \quad (5)$$

Из (4) и (5) следует утверждение теоремы.

Перейдем к изучению  $g_h(n)$ . Пусть  $\{Y_1, Y_2, \dots, Y_h\}$  — разбиение множества  $X$  с непустыми компонентами  $Y_i$  ( $i = 1, 2, \dots, h$ ). Обозначим через  $\mathfrak{M}(Y_1, Y_2, \dots, Y_h)$  класс графов (не обязательно сильно связанных) таких, что

$$\Gamma Y_i \subseteq Y_{i+1} \quad (i = 1, 2, \dots, h; Y_{n+1} \equiv Y_1).$$

Мощность класса  $\mathfrak{M}(Y_1, Y_2, \dots, Y_h)$  равна

$$2^{k_1 k_2 + k_2 k_3 + \dots + k_h k_1},$$

где через  $k_i$  обозначена мощность множества  $Y_i$ , так что

$$\sum_{i=1}^h k_i = n.$$

Отсюда следует, что

$$g_h(n) \leq h^n \cdot 2^{\max(k_1 k_2 + k_2 k_3 + \dots + k_h k_1)}, \quad (6)$$

где максимум берется по всем системам неотрицательных (не обязательно целых) чисел  $k_i$  ( $i = 1, 2, \dots, h$ ), удовлетворяющих условию

$$\sum_{i=1}^h k_i = n.$$

Легко видеть, что при  $h \leq 4$  этот максимум достигается при

$$k_i = \frac{n}{h} \quad (1 \leq i \leq h)$$

и равен  $\frac{n^2}{h}$ .

Если же  $h \geq 4$ , то максимум достигается при

$$k_1 = k_2 = \frac{n}{2}, \quad k_i = 0 \quad (3 \leq i \leq h)$$

и равен

$$\frac{n^2}{4}. \quad (7)$$

Отсюда

$$g(n) = \sum_{h=2}^n g_h(n) < n^{n+1} \cdot 2^{\frac{n^2}{2}} \quad (8)$$



и

$$\sum_{h=3}^n g_h(n) < n^{n+1} \cdot 2^{\frac{n^2}{3}}. \quad (9)$$

**Теорема 2.**

$$p(n) \sim 2^{n^2}.$$

Эта теорема непосредственно вытекает из теоремы 1 и соотношений (2), (8).

Рассмотрим подробнее  $g_2(n)$ . Обозначим через  $\varphi(k_1, k_2)$  число разложимых графов в классе  $\mathfrak{M}(Y_1, Y_2)$ . (Напомним, что  $k_i$  — мощность множества  $Y_i$ ). Число неразложимых графов в классе  $\mathfrak{M}(Y_1, Y_2)$  равно, очевидно,

$$2^{2k_1k_2} - \varphi(k_1, k_2).$$

Легко показать, что если неразложимый граф разбивается на две системы импримитивности, то это разбиение единственно с точностью до нумерации систем. Поэтому, если обозначить через  $q_2(n)$  число неразложимых графов, разбивающихся на две системы импримитивности, то

$$q_2(n) = \frac{1}{2} \sum_{k_1=1}^{n-1} C_n^{k_1} [2^{2k_1k_2} - \varphi(k_1, k_2)]. \quad (10)$$

Для дальнейшего нам понадобится следующая

**Лемма 1.** Если  $k_1$  и  $k_2$  растут так, что

$$\left| k_i - \frac{n}{2} \right| < \nu \quad (i = 1, 2; \nu = \text{const}),$$

то

$$\varphi(k_1, k_2) = O(2^{2k_1k_2}).$$

**Доказательство.** Пусть  $A \subset X$ . Обозначим мощности пересечений  $A \cap Y_1$  и  $A \cap Y_2$  через  $s$  и  $t$  соответственно. Тогда число графов класса  $\mathfrak{M}(Y_1, Y_2)$ , для которых  $A$  является инвариантным подмножеством, равно  $2^{2k_1k_2 + 2st - sk_2 - tk_1}$ .

Отсюда ясно, что

$$\varphi(k_1, k_2) \leq \sum C_{k_1}^s C_{k_2}^t 2^{k_1k_2 + 2st - sk_2 - tk_1},$$

где суммирование ведётся по всем целым  $s$  и  $t$ , удовлетворяющим неравенствам  $0 \leq s \leq k_1$ ,  $0 \leq t \leq k_2$ ,  $1 \leq s + t \leq n - 1$ . Отсюда

$$\begin{aligned} \varphi(k_1, k_2) &\leq 2^{k_1k_2} [2k_1 \cdot 2^{-k_2} + 2k_2 \cdot 2^{-k_1} + k_1(k_1 - 1) \cdot 2^{-2k_2} + \\ &+ k_2(k_2 - 1) \cdot 2^{-2k_1} + 2k_1k_2 \cdot 2^{-k_1 - k_2 + 2} + 2^n \cdot 2^{\max(2st - sk_2 - tk_1)}], \end{aligned}$$

где максимум берется по всем целым  $s$  и  $t$ , удовлетворяющим неравенствам  $0 \leq s \leq k_1$ ,  $0 \leq t \leq k_2$ ,  $3 \leq s + t \leq n - 3$ . При выполнении условий леммы этот максимум равен  $-\frac{3}{2}n + O(1)$ , и, следовательно,

$$\varphi(k_1, k_2) = 2^{2k_1k_2} O\left(n \cdot 2^{-\frac{n}{2}}\right).$$

Лемма 1 доказана.

**Лемма 2.**

$$q_2(n) \sim \frac{1}{2} C_n^m \cdot 2^{2m^2 + 2dm} \sum_{i=-\infty}^{\infty} 2^{-2i^2 + 2id},$$

где

$$m = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor, \quad d = n - 2m.$$



Доказательство. Рассмотрим для определенности случай четного  $n$ : пусть  $n = 2m$ . Полагая в (10)  $k_1 = m - i$ , имеем

$$q_{12}(2m) = \frac{1}{2} \sum_{i=1-m}^{m-1} C_{2m}^{m-i} [2^{2(m^2-i^2)} - \varphi(m-i, m+i)]. \quad (11)$$

Зададимся произвольным  $\varepsilon > 0$ . Выберем  $\nu$  так, чтобы

$$\sum_{i=-\nu}^{\nu} 2^{-2i^2} : \sum_{i=-\infty}^{\infty} 2^{-2i^2} > 1 - \varepsilon.$$

Выберем затем  $N > \nu$  и так, чтобы при  $m > N$

$$\frac{C_{2m}^{m-\nu}}{C_{2m}^m} > 1 - \varepsilon$$

и

$$\varphi(m-i, m+i) < \varepsilon 2^{2(m^2-i^2)}$$

для  $|i| < \nu$ . Последнее можно сделать согласно лемме 1.

Тогда, учитывая (11), при  $m > N$  будем иметь

$$1 > \frac{q_2(2m)}{\frac{1}{2} C_{2m}^m 2^{2m^2} \sum_{i=-\infty}^{\infty} 2^{-2i^2}} > \frac{\sum_{i=-\nu}^{\nu} C_{2m}^{m-\nu} [2^{2(m^2-i^2)} - \varphi(m-i, m+i)]}{C_{2m}^m 2^{2m^2} \sum_{i=-\infty}^{\infty} 2^{-2i^2}} > (1 - \varepsilon)^3,$$

что и требовалось доказать.

Случай нечетного  $n$  рассматривается аналогично.

**Теорема 3.**

$$g_2(n) \sim \frac{\alpha(n)}{\sqrt{n}} 2^{\frac{n^2}{2} + n}$$

где

$$\alpha(n) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{i=-\infty}^{\infty} 2^{-2i^2} \approx 0,6015, & \text{если } n \equiv 0 \pmod{2} \\ \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \sum_{i=-\infty}^{\infty} 2^{-2i^2+2i} \approx 0,5996, & \text{если } n \equiv 1 \pmod{2}. \end{cases}$$

Доказательство. В силу леммы 2

$$q_2(n) \sim \frac{\alpha(n)}{\sqrt{n}} 2^{\frac{n^2}{2} + n}.$$

Разность  $q_2(n) - g_2(n)$  равна числу таких неразложимых графов, разбивающихся на две системы импримитивности, индекс импримитивности которых больше 2. Из (9) вытекает, что эта разность не превосходит

$$n^{n+12} 2^{\frac{n^2}{3}}.$$

Отсюда непосредственно следует утверждение теоремы.

**Теорема 4.**

$$g(n) \sim \frac{\alpha(n)}{\sqrt{n}} 2^{\frac{n^2}{2} + n}.$$

Справедливость утверждения теоремы немедленно следует из теоремы 3 и соотношений (3), (9).



Исследование поведения функции  $g_3(n)$  проводится аналогично тому, как было проведено исследование для  $g_2(n)$ . При этом получается следующий результат.

**Теорема 5.**

$$g_3(n) \sim \frac{\beta(n)}{n} 3^n 2^{\frac{n^2}{3}},$$

где

$$\beta(n) = \begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{2\pi} \left( \sum_{i=-\infty}^{\infty} 2^{-i^2} \sum_{i=-\infty}^{\infty} 2^{-3i^2} + \frac{1}{2} \sum_{i=-\infty}^{\infty} 2^{-i^2+i} \sum_{i=-\infty}^{\infty} 2^{-3i^2+3i} \right) \approx \\ \approx 1,442695090, \text{ если } n \equiv 0 \pmod{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{2^{\frac{3}{2}} \sqrt{2\pi}} \left( \sum_{i=-\infty}^{\infty} 2^{-i^2} \sum_{i=-\infty}^{\infty} 2^{-3i^2+2i} + \sum_{i=-\infty}^{\infty} 2^{-i^2+i} \sum_{i=-\infty}^{\infty} 2^{-3i^2+i} \right) \approx \\ \approx 1,442695016, \text{ если } n \not\equiv 0 \pmod{3}. \end{cases}$$

Автору не удалось получить асимптотики для  $g_h(n)$  при  $h \geq 4$ . Имеет место, однако, следующая оценка сверху.

**Теорема 6.** При  $h \geq 4$

$$g_h(n) \leq n^n \cdot 2^{\frac{n^2}{4}}.$$

Справедливость этого неравенства вытекает из (6) и (7).

Автор выражает благодарность Ю. И. Любичу за руководство работой.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. К. Берж. Теория графов и ее применения. ИЛ, М., 1962.
2. G. Frobenius. Ueber Matrizen aus nicht negativen Elementen, Sitz.—Ber. Preuss Akad. Wiss., XXVI, 1912, 456—477.
3. Ф. Р. Гантмахер. Теория матриц. Гостехиздат, М., 1953.
4. В. Птак. Об одной комбинаторной теореме и ее применении к неотрицательным матрицам. Чехосл. матем. журн., т. 8 (83), № 4, 1958, 487—495.
5. I. Sedlacek. O incidencnich maticich orientovanych grafů, Casop. pestov. mat., 84, № 3, 1959, 303—316.
6. В. И. Романовский. Дискретные цепи Маркова. Гостехиздат, М.—Л., 1949.
7. Ю. И. Любич. Оценки для оптимальной детерминизации недетерминированных автономных автоматов. «Сиб. матем. журн.», т. V, № 2, 1964, 337—355.
8. Ю. И. Любич и Э. М. Лившиц. Оценки веса регулярных выражений над однобуквенным алфавитом. «Сиб. матем. журн.», т. VI, № 1, 1965, 122—126.