ЗАПИСКИ МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА
ХАРЬКОВСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА имени А. М. ГОРЬКОГО
И ХАРЬКОВСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

Том XXX. Серия 4 1964

СТЕПЕННАЯ ПРОБЛЕМА МОМЕНТОВ НА ВСЕЙ ОСИ ПРИ ЗАДАННОМ КОНЕЧНОМ ЧИСЛЕ ПУСТЫХ ИНТЕРВАЛОВ В СПЕКТРЕ

В. А. Фильштинский

1. В проблеме моментов Гамбургера ищется распределение масс на всей оси. В проблемах моментов Стилтьеса и Хаусдорфа эти массы должны находиться лишь на полуоси, соответственно в заданном конечном интервале. Изучен еще один случай, когда массы должны лежать вне некоторого конечного интервала. Этому случаю посвящена статья К. И. Швецова [4]. В настоящей работе мы задаемся произвольным конечным числом конечных пустых интервалов. Мы займемся вопросами разрешимости и определенности проблемы моментов, а также некоторым ее исследованием в неопределенном случае.

2. Начнем с применяемых далее обозначений. Пустые интервалы, конечные и не имеющие общих точек, обозначим $\mathrm{I}_j = (\alpha_j, \beta_j)$, дополнение их теоретико-множественной суммы — через

$$E_k = C(\mathrm{I}_1 + \mathrm{I}_2 + \ldots + \mathrm{I}_k).$$

Число k пустых интервалов будет иметь разные значения. В проблемах моментов, которые мы будем рассматривать, всегда будет требоваться, чтобы число точек роста искомой неубывающей функции было бесконечным. Соответствующие проблемы моментов будут задаваться уравнениями

$$s_k = \int\limits_{E_m} u^k \, d\sigma(u) \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots). \tag{1}$$

Иногда проблему моментов (1) будем называть проблемой моментов порядка m.

3. Критерий разрешимости проблемы моментов (1) получается очень просто с помощью общего критерия М. Рисса.

Пусть $\mathfrak{S}$ — линейный (в алгебраическом смысле) функционал, определенный на всех многочленах с помощью равенств

$$s_k = \mathfrak{S}\{u^k\} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots).$$

Тогда для разрешимости проблемы моментов (1) необходимо и достаточно, чтобы для любого многочлена $R(u) \not\equiv 0$, удовлетворяющего неравенству

$$R(u) \geqslant 0 \qquad (u \in E_m),$$

имело место неравенство

$$\mathfrak{S}\{R\} > 0.$$

Этому критерию можно придать некоторые другие формы, если воспользоваться следующим, легко доказываемым предложением.

Лемма. *Для того чтобы многочлен $R(x)$ удовлетворял неравенству*

$$R(u) \geqslant 0 \qquad (u \in E_m),$$

необходима и достаточна его представимость в виде

$$R(x) = R_1(x) + (x - \alpha_m)(x - \beta_m) R_2(x), \tag{2}$$

где $R_1(x)$ *и* $R_2(x)$ *удовлетворяют неравенствам*

$$R_1(x) \geqslant 0, \quad R_2(x) \geqslant 0 \qquad (x \in E_{m-1}).$$

На основании леммы получаем следующий критерий: для разрешимости проблемы моментов порядка m

$$s_k = \int_{E_m} u^k d\sigma(u) \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots)$$

необходимо и достаточно, чтобы были разрешимы две проблемы моментов порядка $m-1$:

$$s_k = \int_{E_{m-1}} u^k d\sigma(u) \tag{3}$$

$$(k = 0, 1, 2, \ldots)$$

$$t_k = \int_{E_{m-1}} u^k d\tau(m), \tag{4}$$

где

$$t_k = s_{k+2} - (\alpha_m + \beta_m) s_{k+1} + \alpha_m \beta_m s_k.$$

Дальнейшая форма критерия разрешимости может быть получена с помощью повторного применения леммы, которое приводит в конечном счете к представлению многочлена $R(x)$ в виде суммы, содержащей только квадраты вещественных многочленов, умноженные на некоторые множители. Всего будет 2^m различных слагаемых. Пользуясь этим представлением, находим следующий критерий.

Для того чтобы проблема моментов порядка m

$$s_k = \int_{E_m} u^k d\sigma(u) \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots)$$

была разрешима, необходимо и достаточно, чтобы были позитивными следующие 2^m **последовательностей:**

$$s_k^{(i_1, i_2, \ldots i_r)} = \mathfrak{S}\left\{ u^k \prod_{j=1}^{r} (u - \alpha_{i_j})(u - \beta_{i_j}) \right\} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots),$$

где число r пробегает все значения от нуля до m, а при каждом r система $i_1, i_2, \ldots, i_r$ пробегает все различные допустимые наборы. При этом, когда мы говорим просто о позитивной последовательности, то имеем в виду последовательность, позитивную относительно всей оси.

4. Теперь перейдем к критерию неопределенности рассматриваемой нами проблемы моментов*. С этой целью введем максимальные массы, сосредоточенные в заданной точке в распределениях, отвечающих подлежащим рассмотрению проблемам моментов.

Пусть $V_m^{[n]}$ означает совокупность решений укороченной проблемы порядка m

$$s_k = \int_{E_m} u^k d\sigma(u) \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots, n),$$

а $B_m^{[n]}$ — совокупность всех полиномов степени $\leqslant n$, которые $\geqslant 0$ на E_m.

---

* Этот критерий был несколько ранее получен А. А. Нудельманом с помощью доказательства, отличного от приведенного ниже.

Пусть $\xi \in E_m$. Положим

$$\rho_m^{[n]}(\xi) = \inf_{P \in B_m^{[n]}} \frac{\mathfrak{S}\{P\}}{P(\xi)}.$$

В таком случае

$$\rho_m^{[n]}(\xi) = \max_{\sigma \in V_m^{[n]}} \{\sigma(\xi+0) - \sigma(\xi-0)\}.$$

Доказательство основано на введении функционала $\mathfrak{S}_0$ по формуле

$$\mathfrak{S}_0\{u^k\} = s_k - \rho_m^{[n]}(\xi)\,\xi^k \qquad (k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$$

и почти дословном повторении известных рассмотрений, восходящих к Стилтьесу.

Обозначим теперь через B_m совокупность всех положительных на E_m полиномов, а через V_m — совокупность всех решений проблемы моментов

$$s_k = \int_{E_m} u^k d\sigma(u) \qquad (k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

Теорема. *Пусть*

$$\rho_m(\xi) = \inf_{P \in B_m} \frac{\mathfrak{S}\{P\}}{P(\xi)}.$$

Тогда

$$\rho_m(\xi) = \sup_{\sigma \in V_m} \{\mathfrak{S}(\xi+0) - \sigma(\xi-0)\}.$$

Действительно, при любом конечном n

$$\rho_m(\xi) \leqslant \rho_m^{[n]}(\xi)$$

в силу определения $\rho_m(\xi)$ как infimum'a. С другой стороны, при некоторой функции $\sigma_n(u) \in V_m^{[n]}$

$$\sigma_n(\xi+0) - \sigma_n(\xi-0) = \rho_m^{[n]}(\xi).$$

Далее, по теореме Хелли найдётся такая последовательность $\{n_i\}$, что $\sigma_{n_i}(u) \to \tilde{\sigma}(u)$. Поэтому

$$\tilde{\sigma}(\xi+0) - \tilde{\sigma}(\xi-0) = \lim_{i\to\infty} \{\sigma_{n_i}(\xi+0) - \sigma_{n_i}(\xi-0)\} \geqslant \rho_m(\xi).$$

А так как при любом $R(u) \in B_m$

$$\int_{E_m} R(u)\, d\tilde{\sigma}(u) \geqslant R(\xi)\{\tilde{\sigma}(\xi+0) - \tilde{\sigma}(\xi-0)\},$$

то

$$\rho_m(\xi) \geqslant \tilde{\sigma}(\xi+0) - \tilde{\sigma}(\xi-0),$$

и теорема доказана.

Из нее вытекает

С л е д с т в и е. Если $\rho_m(\xi) \neq 0$ для каждого $\xi \in E_m$, то проблема моментов (1) неопределенная.

Действительно, для каждой точки $\xi \in E_m$ можно найти решение $\sigma(u)$, имеющее скачок в точке ξ, равный $\rho_m(\xi)$. Если бы проблема моментов (1) была определенной, то все эти скачки имела бы одна функция $\sigma(u)$, что невозможно, так как число точек разрыва каждой такой функции лишь счетно.

5. Введём перенумерованные произведения

$$\omega_0(x) = 1;\ \omega_1(x) = (x-\alpha_1)(x-\beta_1);\quad \omega_2(x) = (x-\alpha_2)\cdot(x-\beta_2);$$
$$\ldots\ \omega_{m+1}(x) = (x-\alpha_1)(x-\beta_1)(x-\beta_2)(x-\alpha_2),\ \ldots,$$
$$\omega_N(x) = (x-\alpha_1)(x-\beta_1)\ \ldots\ (x-\alpha_m)(x-\beta_m)$$
$$(N = 2^m - 1).$$

Всякий многочлен, неотрицательный на E_m, можно представить в виде

$$P(x) = \sum_{k=0}^{N} \omega_k(x)[A_k(x)]^2.$$

Поэтому

$$\rho_m(\xi) = \inf \frac{\sum\limits_{k=0}^{N} \mathfrak{S}\{\omega_k(u)[A_k(u)]^2\}}{\sum\limits_{k=0}^{N} \omega_k(\xi)[A_k(\xi)]^2},$$

откуда следует, что

$$\rho_m(\xi) = \min\{\rho^{(0)}(\xi),\ \rho^{(1)}(\xi),\ \ldots,\ \rho^{(N)}(\xi)\},$$

где

$$\rho^{(k)}(\xi) = \inf \frac{\mathfrak{S}\{\omega_k(u)[A_k(u)]^2\}}{\omega_k(\xi)[A_k(\xi)]^2}\qquad (k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ N).$$

Каждая из этих величин отвечает чисто гамбургеровой проблеме моментов, а именно, $\rho^{(k)}(\xi)$ — проблеме моментов

$$s_j^{(k)} = \int_{-\infty}^{\infty} u^j d\sigma(u)\qquad (j = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots), \tag{5}$$

где

$$s_j^k = \mathfrak{S}\{\omega_k(u)u^j\} \equiv \sigma_k\{u^j\}. \tag{6}$$

Можно показать (см. Н. И. Ахиезер [1], М. Г. Крейн [3]), что если некоторая из этих проблем моментов неопределенная, то соответствующая масса $\rho^{(i)}(\xi)$ строго больше нуля в точке ξ.

6. Критерий определенности дается следующим предложением.

Теорема. *Для неопределенности проблемы моментов*

$$s_k = \int_{E_m} u^k d\sigma(u)\qquad (k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$$

необходимо и достаточно, чтобы была неопределенной каждая из 2^m *проблем моментов Гамбургера* (5), (6).

Доказательство. Необходимость очевидна. Чтобы доказать достаточность, допустим, что все 2^m упомянутых проблем моментов являются неопределенными. Но тогда, как было выше замечено, при любом вещественном ξ все $\rho^{(i)}(\xi) > 0$, а значит, $\rho_m(\xi) > 0$. После этого остается воспользоваться следствием n° 4.

Доказанный критерий можно, очевидно, переформулировать следующим образом:

Теорема. *Для неопределенности проблемы моментов порядка* m

$$s_k = \int_{E_m} u^k d\sigma(u)\qquad (k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$$

необходимо и достаточно, чтобы были неопределенными следующие две проблемы моментов порядка $m-1$:

$$s_k = \int_{E_{m-1}} u^k d\sigma(u)$$

$$(k = 0, 1, 2, \dots)$$

$$t_k = \int_{E_{m-1}} u^k d\tau(u),$$

где

$$t_k = s_{k+2} - (\alpha_m + \beta_m) s_{k+1} + \alpha_m \beta_m s_k.$$

7. Пусть $\{c_k\}_0^\infty$ — последовательность вещественных чисел и

$$c_k = \int_{E_m} u^k d\sigma(u) \qquad (k = 0, 1, 2, \dots).$$

Вместе с моментами $\{c_k\}_0^\infty$ рассмотрим моменты

$$c_k^* = \int_{E_m} \frac{u^k d\sigma(u)}{|u - z|^2} \tag{7}$$

для некоторого $z\,(\operatorname{Im} z > 0)$. Моменты c_k^* однозначно определяются моментами c_k и числами z и

$$w = \int_{E_m} \frac{d\sigma(u)}{u - z}.$$

Действительно, всегда можно написать разложение на простейшие дроби

$$\frac{u^k}{|u - z|^2} = R_{k-2}(u) + \frac{A_k}{u - z} + \frac{\overline{A}_k}{u - \overline{z}}, \tag{8}$$

где $R_{k-2}(u)$ — многочлен степени $k-2$, если $k \geqslant 2$, и $R_{k-2}(u) = 0$, если $k < 2$, и

$$A_k = \frac{z^k}{z - \overline{z}}, \quad \overline{A}_k = \frac{\overline{z}^k}{\overline{z} - z};$$

а из этого разложения следует, что

$$c_k^* = A_k w + \overline{A}_k \overline{w} + \mathfrak{S}\{R_{k-2}\}. \tag{9}$$

Обратно, если известны моменты $c_k^*\,(k = 0, 1, 2, \dots)$ при некотором z, то однозначно определяются число w и все старые моменты. А именно, первые два соотношения (9) позволяют выразить величину w через c_0^* и c_1^*, а дальнейшие соотношения (9) позволяют выразить величину $\mathfrak{S}\{R_\nu(u)\}$ через моменты $c_0^*, c_1^*, \dots, c_{\nu+2}^*$; тем самым через моменты c_0^*, c_1^* будут выражены все старые моменты. Отсюда следует, что если проблема моментов

$$c_k^* = \int_{E_m} u^k d\sigma^*(u) \qquad (k = 0, 1, 2, \dots) \tag{7'}$$

определенная, то существует единственная функция $\sigma(u)$, а именно:

$$\sigma(u) = \int_{-\infty}^{u} |u - z|^2 d\sigma^*(u)$$

(на интервалах I_k, $(k = 1, 2, \ldots, m)$ функция $\sigma(u)$, как и $\sigma^*(u)$ постоянна), такая, что

$$c_k = \int_{E_m} u^k d\sigma(u) \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots)$$

и

$$w = \int_{E_m} \frac{d\sigma(u)}{u - z}.$$

Обратное также верно. Этим выводом мы будем пользоваться в дальнейшем.

8. **Теорема.** *Если проблема моментов* (1) *неопределенная, то множество точек*

$$w_m(z) = \int_{E_m} \frac{d\sigma(u)}{u - z}$$

($\operatorname{Im} z > 0$), *где* $\sigma(u) \in V_m$, *не вырождается в точку, а представляет собой круговой многоугольник, каждой внутренней точке которого отвечает бесчисленное множество решений проблемы моментов* (1), *а каждой точке границы — только одно.*

Это предложение будем доказывать по индукции. При $m = 0$ этот результат установили М. Рисс и Р. Неванлинна. Предположим, что теорема верна для некоторого $m - 1$. Докажем ее для m. Пусть $L_{m-1}(z)$ означает множество точек

$$w_{m-1}(z) = \int_{E_{m-1}} \frac{d\sigma(u)}{u - z},$$

где точка z ($\operatorname{Im} z > 0$) зафиксирована, а $\sigma(u)$ пробегает V_{m-1}. Пусть далее $M_{m-1}(z)$ — аналогичное множество, пробегаемое точкой

$$\omega_{m-1}(z) = \int_{E_{m-1}} \frac{d\tau(u)}{u - z},$$

где $\tau(u)$ пробегает совокупность Ω_{m-1} всех решений проблемы моментов

$$t_k = \int_{E_{m-1}} u^k d\tau(u) \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots).$$

Так как проблема моментов (1) по условию неопределенная, то обе проблемы моментов

$$s_k = \int_{E_{m-1}} u^k d\sigma(u), \quad t_k = \int_{E_{m-1}} u^k d\tau(u) \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots)$$

неопределённые. Поэтому в силу сделанного предположения $L_{m-1}(z)$, $M_{m-1}(z)$ — круговые многоугольники. Наша задача — построить множество $L_m(z)$, пробегаемое точкой

$$w(z) = \int_{E_m} \frac{d\sigma(u)}{u - z},$$

где $\sigma(u)$ пробегает совокупность V_m всех решений проблемы моментов (1). Ясно, что точка

$$w(z) = \int_{E} \frac{d\sigma(u)}{u - z} \qquad [\sigma(u) \in V_m]$$

лежит в $L_{m-1}(z)$, а точка

$$w^{(m)}(z) = \int\limits_{E_m} \frac{(u-\alpha_m)(u-\beta_m)\,d\sigma(u)}{u-z}$$

лежит в $M_{m-1}(z)$. Но

$$w^{(m)}(z) = s_1 + (z-\alpha_m-\beta_m)\,s_0 + (z-\alpha_m)(z-\beta_m)\,w(z),$$

откуда

$$w(z) = \frac{w^{(m)}(z) - s_1 - (z-\alpha_m-\beta_m)\,s_0}{(z-\alpha_m)(z-\beta_m)}.$$

Это означает, что точка $w(z)$, а следовательно, и $L_m(z)$ лежит также в многоугольнике $L^*_{m-1}(z)$, получающемся из $M_{m-1}(z)$ путем линейного преобразования

$$Z_1 = \frac{1}{(z-\alpha_m)(z-\beta_m)}\left[-s_1 - (z-\alpha_m-\beta_m)\,s_0 + Z\right].$$

Поэтому многоугольники $L_{m-1}(z)$ и $L^*_{m-1}(z)$ имеют общую часть, в которой и лежит $w(z)$. Если бы эта общая часть состояла при каком-нибудь $z\,(\operatorname{Im} z > 0)$ из одной точки, то эта точка лежала бы на границе многоугольника $L_{m-1}(z)$. Но тогда при переходе к другому $z'\,(\operatorname{Im} z' > 0)$ мы получили бы точку, лежащую на границе $L_{m-1}(z')$. Отсюда вытекало бы, что $L_m(z)$ при любом $z\,(\operatorname{Im} z > 0)$ есть точка и значит проблема моментов (1) определенная. Таким образом, при любом $z\,(\operatorname{Im} z > 0)$ пересечение

$$L'_m(z) = L_{m-1}(z) \cap L^*_{m-1}(z)$$

есть многоугольник. Докажем, что $L'_m(z) = L_m(z)$. Так как $L_m(z) \subset L'_m(z)$, то достаточно доказать, что $L'_m(z) \subset L_m(z)$. Итак, пусть $w \in L'_m(z)$. Но в таком случае $w \in L_{m-1}(z)$ и поэтому существует $\sigma_0(u) \in V_{m-1}$, для которой

$$w = \int\limits_{E_{m-1}} \frac{d\sigma_0(u)}{u-z}.$$

Введем, как и в n° 7, числа

$$s^*_k = \int\limits_{E_{m-1}} \frac{u^k d\sigma_0\,|u|}{|u-z|^2} \qquad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

и докажем существование неубывающей функции $\sigma(u)$, для которой

$$s^*_k = \int\limits_{E_m} \frac{u^k d\sigma(u)}{|u-z|^2} \qquad (k = 0, 1, 2, \dots).$$

Как следует из n° 7, $\sigma(u)$ будет решением проблемы моментов (1), для которого

$$\int\limits_{E_m} \frac{d\sigma(u)}{u-z} = w,$$

и тем самым будет доказано, что $w \in L_m(z)$. Итак, все сводится к доказательству разрешимости проблемы моментов

$$s^*_k = \int\limits_{E_m} u^k d\sigma^*(u) \qquad (k = 0, 1, 2, \dots).$$

Так как проблема

$$s^*_k = \int\limits_{E_{m-1}} u^k d\sigma^*(u) \qquad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

разрешима, то нужно лишь убедиться в разрешимости проблемы

$$f_k = \int\limits_{E_{m-1}} u^k d\varphi(u), \tag{10}$$

где

$$f_k = s^*_{k+2} - (\alpha_m + \beta_m)s^*_{k+1}\,\alpha_m\beta_m s^*_k \qquad (k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

Но точка w принадлежит L^*_{m-1}. Поэтому точка

$$\omega(z) = s_1 + (z - \alpha_m - \beta_m)\,s_0 + (z - \alpha_m)(z - \beta_m)\,w(z)$$

принадлежит $M_{m-1}(z)$. Это значит, что существует неубывающая функция $\tau(u)$, для которой

$$\omega(z) = \int\limits_{E_{m-1}} \frac{d\tau(u)}{u - z}$$

и

$$t_k = \int\limits_{E_{m-1}} u^k d\tau(u) \qquad (k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots),$$

причем

$$t_k = s_{k+2} - (\alpha_m + \beta_m)\,s_{k+1} + \alpha_m\beta_m s_k \qquad (k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

Учитывая способ образования моментов s^*_k по моментам s_k и рассмотрения $n^\circ 7$, мы без труда найдем, что величины, обозначаемые нами через f_k, являются не чем иным как величинами t^*_k. Иначе говоря, если положить

$$\varphi(u) = \int\limits_{-\infty}^{u} \frac{d\tau(u)}{|u - z|^2}$$

(в интервалах I_k, $k = 1,\ 2,\ \ldots,\ m - 1$, функция $\tau(u)$ постоянна), то эта функция $\varphi(u)$ и будет решением проблемы моментов (10). Тем самым разрешимость проблемы (10) доказана, а значит доказано, что

$$L_m(z) = L_{m-1}(z) \cap L^*_{m-1}(z).$$

Остается доказать, что каждой граничной точке многоугольника $L_m(z)$ отвечает единственное решение проблемы моментов (1).

Возьмем точку w, лежащую на границе $L_m(z)$. Эта граница состоит из части границы $L_{m-1}(z)$ и части границы $L^*_{m-1}(z)$, а для $m-1$ наша теорема предполагается верной. Если выбранная точка w лежит на границе $L_{m-1}(z)$, то проблема моментов порядка $m-1$

$$s_k = \int\limits_{E_{m-1}} u^k d\sigma(u) \qquad (k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$$

имеет только одно решение, для которого

$$\int\limits_{E_{m-1}} \frac{d\sigma(u)}{u - z} = w,$$

а поэтому будет иметь только одно решение проблема моментов порядка m

$$s_k = \int\limits_{E_m} u^k d\sigma(u) \qquad (k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots),$$

для которого

$$\int_{E_m} \frac{d\sigma(u)}{u-z} = w.$$

То же верно, если точка w лежит на границе $L^*_{m-1}(z)$.

9. В чисто гамбургеровой проблеме моментов, если имеет место неопределенный случай, каждой точке, лежащей на границе предельного круга, отвечает функция $\sigma(u)$, обладающая лишь дискретными массами. Нетрудно видеть, что это имеет место и в случае проблемы моментов порядка m, рассматриваемой нами. Только теперь вместо предельного круга будет фигурировать предельный круговой многоугольник $L_m(z)$. В самом деле, пусть точка w лежит на границе этого многоугольника. Это значит, что она лежит либо на границе многоугольника $L_{m-1}(z)$, либо на границе подвергнутого некоторому линейному преобразованию многоугольника $M_{m-1}(z)$. Продолжая эту редукцию, мы придем к 2^m обычным кружкам, отвечающим чисто гамбургеровым проблемам моментов

$$s_j^{(k)} = \int_{-\infty}^{\infty} u^j d\sigma_k(u) \qquad (j = 0, 1, 2, \ldots), \quad (k = 0, 1, 2, \ldots, 2^m - 1).$$

При этом для одного из k будет иметь место равенство

$$d\sigma_k(u) = \omega_k(u)\, d\sigma(u),$$

где $\sigma(u)$ — рассматриваемое нами решение проблемы моментов (1). А так как всякая функция $\sigma_k(u)$ является кусочно постоянной, то тем же свойством обладает и $\sigma(u)$.

Пусть $\sigma(u)$ — некоторое решение проблемы (1), для которого $w(z)$ лежит на границе $L_m(z)$. Возьмем какую-нибудь точку роста ξ функции $\sigma(u)$. Докажем, что соответствующая масса $\sigma(\xi+0) - \sigma(\xi-0)$ есть максимальная масса, которая может получиться в точке ξ в решении проблемы (1). Для случая $m = 0$ это известный факт. Предположим, что он установлен для $m-1$, и докажем, что он будет тогда верен для m. Действительно, если точка $w(z)$ лежит на границе $L_m(z)$, то она лежит либо на границе $L_{m-1}(z)$, либо на границе $L^*_{m-1}(z)$. В первом случае, по нашему предположению,

$$\sigma(\xi+0) - \sigma(\xi-0) = \rho_{m-1}(\xi) = \inf_{P \in B_{m-1}} \frac{\mathfrak{S}\{P\}}{P(\xi)}.$$

Но $\rho_{m-1}(\xi) \geqslant \rho_m(\xi)$ и поэтому

$$\sigma(\xi+0) - \sigma(\xi-0) \geqslant \rho_m(\xi),$$

а так как

$$\sigma(\xi+0) - \sigma(\xi-0) \leqslant \rho_m(\xi),$$

то равенство

$$\sigma(\xi+0) - \sigma(\xi-0) = \rho_m(\xi)$$

доказано.

Допустим теперь, что точка $w(z)$ лежит на границе $L^*_{m-1}(z)$. Тогда масса в точке ξ, то есть $\sigma(\xi+0) - \sigma(\xi-0)$, удовлетворяющая неравенству

$$\sigma(\xi+0) - \sigma(\xi-0) \leqslant \rho_m(\xi),$$

снова, в силу сделанного относительно $m-1$ предположения, равна

$$\sigma(\xi+0)-\sigma(\xi-0)=\frac{1}{(\xi-\alpha_m)(\xi-\beta_m)}\inf_{P\in B_{m-1}}\frac{\mathfrak{S}\{(u-\alpha_m)(u-\beta_m)P(u)\}}{P(\xi)}=$$

$$=\inf\frac{\mathfrak{S}\{(u-\alpha_m)(u-\beta_m)P(u)\}}{(\xi-\alpha_m)(\xi-\beta_m)P(\xi)}\geqslant$$

$$\geqslant\inf\frac{\mathfrak{S}\{c(u)+(u-\alpha_m)(u-\beta_m)D(u)\}}{c(\xi)+(\xi-\alpha_m)(\xi-\beta_m)D(\xi)}=\rho_m(\xi).$$

Таким образом, и во втором случае

$$\sigma(\xi+0)-\sigma(\xi-0)=\rho_m(\xi).$$

Решение проблемы моментов (1), имеющее в данной точке максимальную массу, единственно.

Для доказательства достаточно рассмотреть проблему моментов с моментами

$$s_k^{(0)}=s_k-\rho_m(\xi)\,\xi^k.$$

Последовательность $\{s_k\}$ позитивна относительно множества E_m (это мы видели раньше). Если наше утверждение неверно, то $\{s_k^{(0)}\}_0^\infty$ порождает неопределенную проблему моментов вида (1). Но тогда существует решение $\sigma_0(u)$ этой вспомогательной проблемы моментов, имеющее в точке ξ положительную массу, а поэтому исходная проблема будет иметь решение с массой в точке ξ, превышающей $\rho_m(\xi)$, что невозможно.

Теперь можно доказать, что если точка $w(z)$ движется по границе многоугольника $L_m(z)$, то массы у соответствующих функций $\sigma(u)$ движутся в одну сторону. При $m=0$ это известно. Предположим, что утверждение верно для $m-1$, и докажем, что оно верно для m. Рассмотрим две соседние стороны многоугольника $L_m(z)$: AB — часть границы $L_{m-1}(z)$, и BC — часть границы $L_{m-1}^*(z)$. Пусть точка $w(z)$ находится на дуге AB и пусть ξ — одна из масс соответствующего решения проблемы моментов (1). Когда точка $w(z)$ пробегает дугу AB, масса ξ движется и притом в одну сторону (так как по предположению наше утверждение для $m-1$ верно) от некоторого положения ξ_A к некоторому положению ξ_B. Теперь положим, что точка $w(z)$ продолжает двигаться от B к C. Здесь ξ также движется монотонно, и она не может двигаться в сторону ξ_A, так как в этом последнем случае точкам ξ, близким к ξ_B и лежащим со стороны ξ_A, отвечало бы более одного решения с максимальной массой.

Наш результат можно сформулировать следующим образом.

Теорема. *Граничным точкам многоугольника $L_m(z)$ отвечают функции $\sigma(u)$, имеющие дискретные и притом максимальные массы. При движении точки $w(z)$ по границе многоугольника $L_m(z)$ эти массы движутся в одну сторону. Исключение представляют концы интервалов I_k. Там массы могут накапливаться или убывать.*

10. В классической проблеме моментов Гамбургера выясняется (это сделал Неванлинна), какова совокупность всех решений проблемы моментов в неопределенном случае. Аналогичный результат может быть получен также и для изучаемой проблемы моментов на множестве E_m. Рассмотрением этого вопроса мы теперь и займемся. Предварительно напомним некоторые понятия, которые вводятся в неопределенном случае для проблемы моментов Гамбургера. Пусть $\{P_k(z)\}_{k=0}^\infty$ — система ортонор-

мированных полиномов для функционала $\mathfrak{S}$. $\{Q_k(z)\}_0^\infty$ — полиномы второго рода. Составим четыре целые функции

$$A(z) = z \cdot \sum_0^\infty Q_k(0)\, Q_k(z),$$

$$B(z) = -1 + z \cdot \sum_0^\infty Q_k(0)\, P_k(z),$$

$$C(z) = 1 + z \sum_0^\infty P_k(0)\, Q_k(z),$$

$$D(z) = z \cdot \sum_0^\infty P_k(0)\, P_k(z).$$

Эти четыре функции образуют так называемую матрицу Неванлинны. Справедлива следующая теорема Р. Неванлинны:

Пусть

$$\begin{Vmatrix} A(z) & C(z) \\ B(z) & D(z) \end{Vmatrix}$$

есть матрица Неванлинны, отвечающая неопределенной проблеме моментов. В таком случае формула

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\sigma(u)}{u-z} = -\frac{A(z)\,\varphi(z) - C(z)}{B(z)\,\varphi(z) - D(z)}$$

устанавливает взаимно однозначное соответствие между совокупностью V всех решений проблемы моментов Гамбургера и совокупностью всех функций $\varphi(z)$ класса N.

Класс N состоит из функций, регулярных в полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$ и имеющих там неотрицательную мнимую часть, и еще константы ∞.

Мы докажем следующее предложение.

Теорема. *Пусть*

$$\begin{Vmatrix} A(z) & C(z) \\ B(z) & D(z) \end{Vmatrix}$$

есть матрица Неванлинны, отвечающая неопределенной проблеме моментов

$$s_j = \int_{-\infty}^{\infty} u^j d\sigma(u) \qquad (j = 0,\ 1,\ 2,\ \dots)$$

и пусть проблема

$$s_j = \int_{E_m} u^j d\sigma(u) \qquad (j = 0,\ 1,\ 2,\ \dots) \tag{1}$$

также является неопределенной. В таком случае существует набор дробно-линейных функций от параметра θ

$$\Phi_k(z,\ \theta) = \frac{a_k(z) - \theta c_k(z)}{b_k(z) - \theta d_k(z)},$$

где $a_k(z)$, $b_k(z)$, $c_k(z)$, $d_k(z)$ — *некоторые многочлены степени* $\leqslant m$, *зависящие лишь от длин и расположения интервалов* I_k $(k = 1,\ 2,\ \dots,\ m)$ *такой, что совокупность* V_m *всех решений* $\sigma(u)$ *проблемы* (1) *отображается формулой*

$$\int_E \frac{d\sigma(u)}{u-z} = -\frac{A(z)\,\varphi(z) - C(z)}{B(z)\,\varphi(z) - D(z)} \tag{11}$$

однозначно в совокупность всех функций $\varphi(z)$, *обладающих тем свойством, что каждая из функций*

$$\Phi_k(z, \varphi(z)) \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots, 2^m-1)$$

принадлежит классу N.

Доказательство. Заметим прежде всего, что многочлены

$$P_n(z; \alpha_m) = P_n(z) P_{n-1}(\alpha_m) - P_n(\alpha_m) P_{n-1}(z),$$

которые обращаются в 0 в точке $z = \alpha_m$, будут отличны от 0 при $\alpha_m < z \leqslant \beta_m$. Подобным образом многочлены

$$P_n(z; \beta_m) = P_n(z) P_{n-1}(\beta_m) - P_n(\beta_m) P_{n-1}(z)$$

обращаются в 0 при $z = \beta_m$ и отличны от 0 при $\alpha_m \leqslant z < \beta_m$. При $n \to \infty$ многочлены $P_n(z; \alpha_m)$, $P_n(z; \beta_m)$ стремятся к целым функциям

$$\lim_{n\to\infty} P_n(z; \alpha_m) = H(z; \alpha_m)$$

$$\lim_{n\to\infty} P_n(z; \beta_m) = H(z; \beta_m).$$

Соответствующие полиномы второго рода

$$Q_n(z; \alpha_m) = Q_n(z) P_{n-1}(\alpha_m) - P_n(\alpha_m) Q_{n-1}(z)$$
$$Q_n(z; \beta_m) = Q_n(z) P_{n-1}(\beta_m) - P_n(\beta_m) Q_{n-1}(z)$$

стремятся к целым функциям

$$\lim Q_n(z; \alpha_m) = G(z; \alpha_m)$$
$$\lim Q_n(z; \beta_m) = G(z; \beta_m).$$

Так как имеет место легко проверяемое тождество

$$Q_n(z; \alpha_m) P_n(z; \beta_m) - P_n(z; \alpha_m) Q_n(z; \beta_m) = P_n(\alpha_m; \beta_m) < 0,$$

то

$$G(z; \alpha_m) H(z; \beta_m) - H(z; \alpha_m) G(z; \beta_m) = H(\alpha_m; \beta_m),$$

и легко видеть, что $H(\alpha_m; \beta_m) \neq 0$. Следовательно,

$$G(z; \alpha_m) H(z; \beta_m) - H(z; \alpha_m) G(z; \beta_m) = \Delta = \text{const} < 0.$$

Поэтому формулу Неванлинны (11) можно переписать в виде

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\sigma(u)}{u-z} = -\frac{G(z; \beta_m)\psi(z) - G(z; \alpha_m)}{H(z; \beta_m)\psi(z) - H(z; \alpha_m)}, \tag{12}$$

где $\psi(z)$ также пробегает класс N и с функцией $\varphi(z)$ связана дробно-линейным соотношением с постоянными коэффициентами, зависящими от m:

$$\varphi(z) = S_m[\psi(z)].$$

Теперь построим аналогичную формулу Неванлинны для функции

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\tau(u)}{u-z},$$

где $\tau(u)$ — решение проблемы моментов (также неопределенной)

$$t_k = \int_{-\infty}^{\infty} u^k d\tau(u)$$

$$t_k = s_{k+2} - (\alpha_m + \beta_m) s_{k+1} + \alpha_m \beta_m s_k \quad (k = 0, 1, 2, \ldots).$$

Относительно последовательности $\{t_k\}_0^\infty$ два независимых квазиортогональных многочлена степени $n-1$ можно записать в виде

$$\frac{P_n(z; \alpha_m)}{z-\alpha_m}, \quad \frac{P_n(z; \beta_m)}{z-\beta_m},$$

а соответствующие многочлены второго рода будут

$$(z-\beta_m)\left\{Q_n(z; \alpha_m) - P_n(z; \alpha_m)\frac{s_1 + (z-\alpha_m-\beta_m)s_0}{(z-\alpha_m)(z-\beta_m)}\right\},$$

$$(z-\alpha_m)\left\{Q_n(z; \beta_m) - P_n(z; \beta_m)\frac{s_1 + (z-\alpha_m-\beta_m)s_0}{(z-\alpha_m)(z-\beta_m)}\right\}.$$

Введя предельные функции

$$H_1(z; \alpha_m) = \frac{H(z; \alpha_m)}{z-\alpha_m}, \quad H_1(z; \beta_m) = \frac{H(z; \beta_m)}{z-\beta_m},$$

$$G_1(z; \alpha_m) = (z-\beta_m)\left\{G(z; \alpha_m) - H(z; \alpha_m)\frac{s_1 + (z-\alpha_m-\beta_m)s_0}{(z-\alpha_m)(z-\beta_m)}\right\},$$

$$G_1(z; \beta_m) = (z-\alpha_m)\left\{G(z; \beta_m) - H(z; \beta_m)\frac{s_1 + (z-\alpha_m-\beta_m)s_0}{(z-\alpha_m)(z-\beta_m)}\right\},$$

найдем, что

$$G_1(z; \beta_m) H_1(z; \alpha_m) - G_1(z; \alpha_m) H_1(z; \beta_m) =$$
$$= G(z; \beta_m) H(z; \alpha_m) - G(z; \alpha_m) H(z; \beta_m) = -\Delta > 0,$$

и нужную нам формулу Неванлинны можно записать в виде

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\tau(u)}{u-z} = -\frac{G_1(z; \beta_m)\omega(z) - G_1(z; \alpha_m)}{H_1(z; \beta_m)\omega(z) - H_1(z; \alpha_m)}, \tag{13}$$

где $\omega(z)$ пробегает класс N. Пользуясь представлением функций $H_1(z; \gamma)$, $G_1(z; \gamma)$ через функции $H(z; \gamma)$, $G(z; \gamma)$, можем переписать формулу (13) иначе, а именно:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\tau(u)}{u-z} = s_1 + (z-\alpha_m-\beta_m)s_0 -$$

$$-(z-\alpha_m)(z-\beta_m)\frac{G(z; \beta_m)\dfrac{z-\alpha_m}{z-\beta_m}\omega(z) - G(z; \alpha_m)}{H(z; \beta_m)\dfrac{z-\alpha_m}{z-\beta_m}\omega(z) - H(z; \alpha_m)}. \tag{14}$$

Теперь уже можно заняться доказательством нашей теоремы. При $m=0$ она, очевидно, верна и единственной функцией $\Phi_k = (z; \theta)$ является

$$\Phi_0(z, \theta) \equiv \theta.$$

Примем, что теорема уже доказана для $m-1$. Таким образом, мы уже имеем 2^{m-1} функций

$$\Phi_k(z; \theta) \quad (k = 0, 1, 2, \ldots, 2^{m-1}-1),$$

зависящих от чисел α_j, β_j $(j=1, 2, \ldots, m-1)$. Пусть $\sigma(u)$ есть какое-нибудь решение проблемы моментов порядка m

$$s_k = \int_{E_m} u^k d\sigma(u) \quad (k=0, 1, 2, \ldots).$$

В таком случае $\sigma(u)$ и $\tau(u) = \int\limits_{-\infty}^{u} (u-\alpha_m)(u-\beta_m)\, d\sigma(u)$ являются решениями проблем порядка $m-1$

$$s_k = \int_{E_{m-1}} u^k d\sigma(u), \quad t_k = \int_{E_{m-1}} u^k d\tau(u) \quad (k=0, 1, 2, \ldots).$$

Функция $\psi(z)$ в представлении (12) такова, что все 2^{m-1} функций

$$\Phi_k(z, S_m[\psi(z)]) = \Psi_k(z; \psi(z)) \quad (k=0, 1, 2, \ldots 2^{m-1}-1)$$

принадлежат классу N. Подобным образом принадлежат классу N все 2^{m-1} функций

$$\Omega_k(z; \omega(z)) \quad (k=0, 1, 2, \ldots, 2^{m-1}-1),$$

где $\Omega_k(z, \theta)$ — некоторые дробно-линейные функции от θ с многочленами степени $\leqslant m-1$ в качестве коэффициентов. С другой стороны, благодаря построению функции $\tau(u)$ по функции $\sigma(u)$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{d\tau(u)}{u-z} = s_1 + s_0(z-\alpha_m-\beta_m) + (z-\alpha_m)(z-\beta_m) \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{d\sigma(u)}{u-z}.$$

Сопоставляя это с представлениями (14) и (12), находим, что

$$\psi(z) = \frac{z-\alpha_m}{z-\beta_m}\,\omega(z).$$

Поэтому принадлежность классу N функций

$$\Omega_k(z, \omega(z)) \quad (k=0, 1, 2, \ldots, 2^{m-1}-1)$$

означает принадлежность этому классу функций

$$\Omega_k\left(z; \frac{z-\beta_m}{z-\alpha_m}\psi(z)\right) \equiv \Psi_{2m-1+k}(z; \psi(z)) \quad (k=0, 1, \ldots 2^{m-1}-1). \tag{15}$$

Всего для m мы получим 2^m функций: 2^{m-1} функций (15) и 2^{m-1} функций

$$\Psi_k(z; \psi(z)) \quad (k=0, 1, 2, \ldots, 2^{m-1}-1). \tag{16}$$

Отсюда видно, как функции $\Psi_k(z, \theta)$, а значит, и функции $\Phi_k(z; \theta)$ могут быть последовательно построены. Вместе с тем мы доказали необходимость условия нашей теоремы для любого m.

Достаточность доказывается так же просто. Действительно, пусть функция $\psi(z)$ такова, что все функции (15) и (16) принадлежат классу N. В таком случае благодаря второй половине условий и нашему предположению, функция $\sigma(u)$, определяемая равенством (12), является решением проблемы моментов

$$s_k = \int_{E_{m-1}} u^k d\sigma(u) \quad (k=0, 1, 2, \ldots)$$

порядка $m-1$. Но так как все функции

$$\Phi_{2^{m-1}+k}(z;\ \psi(z)) \quad (k=0,\ 1,\ \ldots\ 2^{m-1}-1)$$

также принадлежат N, то функции

$$\Omega_k(z;\ \omega(z)),$$

где

$$\omega(z)=\frac{z-\beta_m}{z-\alpha_m}\psi(z), \tag{17}$$

принадлежат N и значит (снова, благодаря предположению) функция $\tau(u)$, определяемая равенством (13), является решением проблемы моментов

$$t_k=\int\limits_{E_{m-1}} u^k d\tau(u) \quad (k=0,\ 1,\ 2\ \ldots),$$

где

$$t_k=s_{k+2}-(\alpha_m+\beta_m)s_{k+1}+\alpha_m\beta_m s_k.$$

Благодаря соотношению (17) и равенству (14)

$$\int\limits_{E_{m-1}}\frac{d\tau(u)}{u-z}=s_1+s_0(z-\alpha_m-\beta_m)+(z-\alpha_m)(z-\beta_m)\int\limits_{E_{m-1}}\frac{d\sigma(u)}{u-z},$$

откуда уже следует, что

$$d\tau(u)=(u-\alpha_m)(u-\beta_m)\,d\sigma(u).$$

Поэтому $\sigma(u)$ является решением не только проблемы порядка $m-1$, но и проблемы порядка m

$$s_k=\int\limits_{E_m} u^k d\sigma(u) \quad (k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. И. Ахиезер. Классическая проблема моментов. Физматгиз, 1961.
2. Н. И. Ахиезер и М. Г. Крейн. О некоторых вопросах теории моментов, ДНТВУ, 1938.
3. М. Г. Крейн. Идеи П. Л. Чебышева и А. А. Маркова в теории предельных величин интегралов и их дальнейшее развитие. «Усп. математических наук», вып. 44, 1951.
4. К. И. Швецов. О проблеме моментов Гамбургера при дополнительном требовании отсутствия масс на заданном интервале. Сообщ. Харьковск. матем. об-ва, XVI, 1939.