УДК 517.9

И. Д. ЧУЕШОВ

СТРУКТУРА МАКСИМАЛЬНОГО АТТРАКТОРА МОДИФИЦИРОВАННОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ КАРМАНА

1. Рассмотрим систему уравнений

$$L_t u + \Delta^2 u - [u,\ v + \theta] = f(x); \tag{1а}$$

$$\Delta^2 v + [u,\ u] = 0, \quad x \in \Omega, \quad t > 0; \tag{1б}$$

$$u\Big|_\Gamma = \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_\Gamma = 0, \quad v\Big|_\Gamma = \frac{\partial v}{\partial n}\Big|_\Gamma = 0; \tag{1в}$$

$$u\,|_{t=0} = u_0(x); \quad \dot{u}\,|_{t=0} = u_1(x). \tag{1г}$$

Здесь Ω — гладкая ограниченная область в R^2, $\Gamma = \partial\Omega$, $L_t(u) = (1 - \alpha\Delta)\ddot{u} + (\varepsilon_1 - \varepsilon_2\Delta)\dot{u}$, $\alpha,\ \varepsilon_1,\ \varepsilon_2 > 0$, $\dot{u} = \dfrac{\partial u}{\partial t}$, Δ — оператор Лапласа, $\Delta^2 = \Delta\cdot\Delta$,

$$[u,\ v] = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_2}. \qquad (2)$$

Система (1) описывает нелинейные колебания пластины, защемленной по контуру с учетом инерции вращения [1]. В (1) u — прогиб пластины; v — функция напряжений; $\theta \in H^4(\Omega)$ — функция, описывающая горизонтальные (в плоскости пластины) усилия; $f \in L^2(\Omega)$ — функция, задающая нормальные к пластине нагрузки. Предполагается, что $u_0 \in H_0^2(\Omega)$, $u_1 \in H_0^1(\Omega)$. Здесь и ниже $H^l(\Omega)$ — соболевское пространство порядка l; $\|\cdot\|_l$ — норма в H^l; $\|\cdot\|$ — норма в L^2. В случае пространств H_0^2 и H_0^1 будем полагать $\|\cdot\|_2 = \|\Delta\cdot\|$ и $\|\cdot\|_1 = \|\nabla\cdot\|$. С помощью (1б) функцию v всегда можно исключить из системы (1). Поэтому решением задачи (1) будем называть функцию $u(t,\ x)$, которая удовлетворяет граничным (1в), начальным (1г) условиям и уравнению (1а) с учетом зависимости (1б) v от u. Пусть $L^\infty(0,\ T;\ X)$ — пространство существенно ограниченных на $[0,\ T]$ функций со значениями в X. При сделанных предположениях [1, 2] задача (1) однозначно разрешима на любом интервале $[0,\ T]$ в классе функций

$$\mathscr{L} = \{u \in L^\infty(0,\ T;\ H_0^2(\Omega)) \mid \dot{u} \in L^\infty(0,\ T,\ H_0^1(\Omega))\}.$$

Поэтому в силу леммы 8.1 [3, гл. 3] $y(t) = \{u(t),\ \dot{u}(t)\}$ — слабо непрерывная функция со значениями в гильбертовом пространстве $E_1 = H_0^2(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ с нормой $|y|_1^2 = \|u_0\|_2^2 + \|u_1\|_1^2$, $y_0 = \{u_0,\ u_1\}$. Следовательно, в E_1 можно определить слабо непрерывную полугруппу S_t, $t > 0$, действующую по формуле

$$S_t y_0 = y(t),\ y_0 = \{u_0,\ u_1\} \in E_1,\ y(t) = \{u(t),\ \dot{u}(t)\} \in E_1, \qquad (3)$$

где $u(t)$ определяется по $\{u_0,\ u_1\}$ из системы (1).

Заметка посвящена изучению свойств полугруппы S_t и описанию структуры ее максимального аттрактора. Показано, что в рассматриваемом случае можно воспользоваться одной теоремой А. В. Бабина и М. И. Вишика [4], относящейся к абстрактным эволюционным уравнениям, и доказать, что при фиксированном θ для f общего положения S_t обладает регулярным максимальным $(E_2,\ E_1)$-аттрактором, где $E_2 = (H^3(\Omega) \cap H_0^2(\Omega)) \times H_0^2(\Omega)$ с нормой $|y|_2^2 = \|u_0\|_3^2 + \|u_1\|_2^2$, $y = \{u_0,\ u_1\}$. Напомним, что максимальным $(E_2,\ E_1)$-аттрактором полугруппы S_t называется ограниченное замкнутое множество A в E_1, такое, что $S_t A = A$ для всех $t > 0$ и для любого ограниченного множества $B \subset E_2$, $\operatorname{dist}(S_t B,\ A) \to 0$ при $t \to \infty$. Определение регулярности см. в [4].

2. Полугруппа S_t обладает следующими свойствами.

Теорема 1. *Пусть $i = 1$ или $i = 2$. Если $y_0 \in E_i$, то $S_t y_0 \in E_i$ и отображение*

$$\{y_0,\ t\} \to S_t y_0 \qquad (4)$$

непрерывно из $E_i \times [0, T]$ в E_i *для любого* $T > 0$. *Кроме того, выполнено условие обобщенной диссипативности в каждом из пространств* E_i, *т. е. существует константа* $C(R)$, *такая, что из* $|y_0|_i < R$ *следует* $|S_t y_0|_i < C(R)$.

Доказательство проводится по общепринятой схеме. Укажем основные этапы рассуждений.

Лемма 1. *Пусть* $[u, v]$ *определяется формулой* (2). *Тогда для достаточно малых* $\varepsilon > 0$ *имеют место неравенства*

$$\text{а) } \|[u, v]\|_{L^q} \leqslant C \|u\|_2 \cdot \|v\|_{3-\varepsilon},\quad q = 2(1+\varepsilon)^{-1};$$

$$\text{б) } \|[u, v]\|_{-1+\varepsilon} \leqslant C \|u\|_2 \|v\|_{2+\varepsilon};$$

$$\text{в) } \|[u, v]\|_{-1} \leqslant C \|u\|_1 \|v\|_{3+\varepsilon};$$

$$\text{г) } \|[u, v]\|_{-1-\varepsilon} \leqslant C \|u\|_2 \cdot \|v\|_2.$$

Доказательство леммы вытекает из непрерывности следующих вложений: $H^1(\Omega) \subset L^p(\Omega)$ для всех $p < \infty$, $H^{1+\varepsilon}(\Omega) \subset L^\infty(\Omega)$ для любых $\varepsilon > 0$, $H^{1-\varepsilon}(\Omega) \subset L^{2/\varepsilon}(\Omega)$ для малых $\varepsilon > 0$. Подробности см. в работах [2, 5].

Пусть $y(t) = S_t y_0 = \{u(t), \dot{u}(t)\}$. Определим энергию пластины $E(y)$ формулой $E(y(t)) = T(\dot{u}(t)) + \Pi(u(t))$, где кинетическая T и потенциальная Π энергии:

$$T(u) = \frac{1}{2}\left(\|\dot{u}\|^2 + \alpha \|\dot{u}\|_1^2\right);$$

$$\Pi(u) = \frac{1}{2}\left(\|\Delta u\|^2 + \frac{1}{2}\|\Delta v\|^2 - ([u, \theta], u) - 2(u, f)\right),$$

а v определяется по u согласно (1б).

Лемма 2. *Для почти всех* $t, s \geqslant 0$

$$E(y(t)) - E(y(s)) = -\varepsilon_1 \int_s^t \|\dot{u}(\tau)\|^2 d\tau - \varepsilon_2 \int_s^t \|\dot{u}(\tau)\|_1^2 d\tau. \qquad (5)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $s = 0$. Предельным переходом от галеркинских приближений устанавливается энергетическое неравенство [2]. Далее следует использовать методику, развитую для абстрактных линейных дифференциальных уравнений второго порядка [3, гл. 3, § 8]. Имеющейся гладкости решения для этого достаточно.

Непрерывность отображения (4) при $i = 1$ вытекает из слабой непрерывности функции $S_t y_0$ по t и энергетического равенства (5) (нужно рассуждать так же, как и в случае линейных уравнений [3, гл. 3, § 8]).

Чтобы установить принадлежность $S_t y_0$ к E_2 при $y_0 \in E_2$, необходимо получить дополнительные априорные оценки. Для этого рассмотрим линейную относительно $\{w, \tilde{w}\}$ систему

$$L_t w + \Delta^2 w - [w, v + \theta] - [u, \tilde{w}] = 0;$$

$$\Delta^2 \tilde{w} + 2[u, w] = 0, \quad x \in \Omega, \quad t > 0; \qquad (6)$$

$$w|_\Gamma = \frac{\partial w}{\partial n}\Big|_\Gamma = \tilde{w}\Big|_\Gamma = \frac{\partial \tilde{w}}{\partial n}\Big|_\Gamma = 0,\ w|_{t=0} = h_0,\ \dot{w}\ |_{t=0} = h_1,$$

где u и v определяются из (1). Если в (6) в качестве начальных условий взять $h_0 = u_1$, $h_1 = \ddot{u}\,(0)$, то эта система получается дифференцированием (1) по t и введением обозначений $w = \dot{u}$, $\tilde{w} = \dot{v}$. Рассматривая галеркинские приближения задачи (6) и используя оценки для u_m, стандартным методом [2, гл. 1] получаем априорные оценки для w_m, $\dot{w}_m$. Из них в силу теоремы единственности [2] для системы (1) вытекает, что $w(t) = \dot{u}\,(t)$ лежит в $\mathcal{L}$ и удовлетворяет (6) с $h_0 = u_1$, $h_1 = \ddot{u}\,(0)$, причем

$$\|\ddot{u}\,(0)\|_1 \leqslant C\,|y_0|_2^3 + C'. \tag{7}$$

Используя (1а), (1б) и лемму 1, получаем

$$u\,(t) \in L^\infty\big(0,\ T;\ H_0^2(\Omega) \cap H^3(\Omega)\big).$$

Поэтому, как и в случае $i = 1$, лемма 8.1 [3, гл. 3] гарантирует слабую непрерывность $S_t y_0$ в E_2. Для доказательства сильной непрерывности можно рассуждать следующим образом. Так как $w\,(t) = \dot{u}\,(t)$ удовлетворяет (6), то

$$\frac{d}{dt}\Big[T\,(\dot{w}\,(t)) + \frac{1}{2}\,\|\Delta w\,(t)\,\|^2\Big] = A\,(t,\ \dot{w}\,(t),\ w\,(t)), \tag{8}$$

где

$$A\,(t,\ \dot{w},\ w) = -\varepsilon_1\,\|\dot{w}\,\|^2 - \varepsilon_2\,\|\dot{w}\,\|_1^2 + ([w,\ v + \theta] + [u,\ \tilde{w}],\ \dot{w}).$$

Из (8) вытекает энергетическое равенство

$$T\,(\dot{w}\,(t)) + \frac{1}{2}\,\|\Delta w\,(t)\,\|^2 = T\,(\dot{w}\,(s)) + \frac{1}{2}\|\,\Delta w(s)\|^2 + \int_s^t A\,(\tau,\ \dot{w},\ w)\,d\tau. \tag{9}$$

Оно позволяет установить сильную непрерывность в E_1 вектор-функции $\{\dot{u}\,(t),\ \ddot{u}\,(t)\}$. Используя теперь соотношения (1) и лемму 1, легко доказать непрерывность отображения (4) при $i = 2$.

Докажем обобщенную диссипативность полугруппы S_t в E_1 и E_2. В случае E_1 это свойство вытекает из (5). Пусть $i = 2$, $y_0 \in E_2$ и $|y_0|_2 < R$. Тогда $|y_0|_1 < R$, а в силу (7)

$$T\,(\dot{w}\,(0)) + \frac{1}{2}\,\|\Delta w\,(0)\,\|^2 \leqslant C_R.$$

Используя (1а) и обобщенную диссипативность при $i = 2$, получаем, что

$$\|u\|_3 \leqslant C\,\|\ddot{u}\,\|_1 + C_R. \tag{10}$$

Из (9) и (10) вытекает, что

$$|y\,(t)|_2^2 \leqslant C_R + C\,(\varepsilon_1,\ \varepsilon_2)\int_0^t (\|[w,\ v + \theta]\|_{-1}^2 + \|[u,\ \tilde{w}]\|_{-1}^2)\,d\tau.$$

А неравенство $|y\,(t)|_1 < C_R$ и лемма 1 позволяют получить оценку

$$|y(t)|_2^2 \leqslant C_R^1 + C_R^2 \int_0^t |y(\tau)|_2^2 \|\dot{u}(\tau)\|_1^2 d\tau.$$

Но из (5) имеем, что $\int_0^\infty \|\dot{u}(\tau)\|_1^2 d\tau < \infty$. Применяя лемму Гронуолла, получаем обобщенную диссипативность S_t в E_2.

Теорема 2. *Пусть $i=1$ или $i=2$. Оператор S_t из E_i в E_i при любом $y_0 \in E_i$ обладает производной по Фреше, удовлетворяющей условию Липшица:*

$$\|S_t'(y_1) - S_t'(y_2)\| L_{(E_i, E_i)} \leqslant C|y_1 - y_2|_i.$$

Причем для любых $h = \{h_0, h_1\} \in E_i$, $S_t'(y_0)h = \{w, \dot{w}\}$, где w — решение задачи (6), u, v в (6) определяются по $y_0 = \{u_0, u_1\}$ из системы (1).

В идейном плане доказательство этой теоремы следует схеме, использованной в [4] при анализе гиперболической системы с нелинейностью вида $f(u)$.

3. Из (5) вытекает, что любая стационарная точка полугруппы S_t имеет вид $y = \{u(x), 0\}$, где $u(x)$ удовлетворяет стационарной системе уравнений Кармана

$$\begin{aligned} \Delta^2 u - [u, v+\theta] &= f(x); \\ \Delta^2 v + [u, u] &= 0 \end{aligned} \tag{11}$$

с условиями Дирихле (1в) на Г. Как известно [5], каждое решение задачи (11) лежит в $H_0^2(\Omega) \cap H^4(\Omega)$ и является критической точкой функционала потенциальной энергии $\Pi(u)$. Отметим, что число решений системы (11) существенно зависит от величины θ (пластина может иметь несколько форм равновесия [5]). Исключая v, систему (11) можно записать в виде $A[u] = f$. Ясно, A — дифференцируемое отображение из $H_0^2(\Omega) \cap H^4(\Omega)$ в $L^2(\Omega)$.

Элемент $f \in L^2(\Omega)$ будем называть регулярным значением (отображения A), если для каждого решения u системы (11) оператор $A'(u)$ является обратимым.

Свойства системы (11) [5] позволяют установить справедливость следующего утверждения.

Лемма 3. *Пусть $\theta \in H^4(\Omega)$ фиксировано, тогда множество регулярных значений открыто и плотно в $L^2(\Omega)$.*

Доказательство. Лемма 1 позволяет показать, что прообраз каждого компактного в $L^2(\Omega)$ множества при отображении A компактен в $H_0^2(\Omega) \cap H^4(\Omega)$. Далее, как и в [4], нужно применить теорему Сарда-Смейла.

Теорема 3. *Пусть $f \in L^2(\Omega)$ — регулярное значение. Тогда полугруппа S_t имеет конечное число стационарных точек. Каждая стационарная точка имеет вид $y = \{u(x), 0\}$, где $u \in H_0^2 \cap H^4$ — невырожденная критическая точка функционала Π, и является гиперболической для полугруппы S_t в каждом из пространств E_1 и E_2.*

Доказательство использует теорему 2 и проводится по схеме, описанной в [4].

Напомним, что стационарная точка z полугруппы S_t называется гиперболической, если спектр линейного оператора $S'_t(z)$ не пересекается с единичной окружностью $\{\xi : |\xi| = 1\}$, спектральные подпространства E_+ и E_-, отвечающие соответственно внешности и внутренности единичного круга, не зависят от t, $\dim E_+ < \infty$.

4. Все выше изложенное позволяет установить следующий факт.

Теорема 4. *Если $f \in L^2(\Omega)$ — регулярное значение, то полугруппа S_t, действующая согласно (3), обладает регулярным максимальным (E_2, E_1)-аттрактором A, т. е.*

$$A = U_{z \in N} M(z),$$

где N — множество стационарных точек полугруппы S_t, а $M(z)$ — неустойчивое инвариантное многообразие, выходящее из точки z (см. [4]). *Если стационарные точки $z_i = \{u_i, 0\}$ упорядочить по возрастанию потенциальной энергии, т. е. так, чтобы $\Pi(u_i) \leqslant \Pi(u_{i+1})$, то для множеств $M_j = U_{i=1}^{j} M(z_i)$ выполнены условия* (1.22) — (1.27) *из* [4]. *Каждое $M(z_i)$ есть C^1 — многообразие, диффеоморфное R^{n_i}, $n_i = \dim E_+(z_i)$.*

Доказательство. Теоремы 1 и 3 дают возможность показать, что S_t удовлетворяет условиям теоремы 6.1 [4]. В качестве функции Ляпунова следует взять полную энергию $E(y)$. Свойства полугруппы S_t на неустойчивых многообразиях $M(z)$ могут быть извлечены из энергетического равенства, априорных оценок, которые можно получить как при положительных, так и при отрицательных ε_1, ε_2, а также единственности решения задачи (1). Наконец, как и в [4], для любой стационарной точки z и достаточно малого $R > 0$ можно установить принадлежность к E_2 множества $M_1^R(z)$ точек $x_0 \in E_1$, таких, что существует последовательность $\{x_n\}$, обладающая свойствами $|x_n - z|_1 < R$, $S_1(x_{n+1}) = x_n$ при $n \geqslant 0$ и $|x_n - z|_1 \to 0$ при $n \to \infty$.

Заметим также, что с помощью принципа минимакса можно получить оценки для величины $\max \dim M(z_i)$.

Список литературы: 1. *Морозов Н. Ф.* О нелинейных колебаниях тонких пластин с учетом инерции вращения. — Докл. АН СССР, 1967, **176**, № 3, с. 522.— 525 с. 2. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач.— М.: Мир, 1972.—588 с. 3. *Лионс Ж.-Л., Мадженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения. — М.: Мир, 1971.—372 с. 4. *Babin A. V., Vishik M. I.* Regular attractors of semigroups and evolution equations. — J. Math. pures et appl., 1983, **62**, p. 441—491. 5. *Сьярле Ф., Рабье П.* Уравнения Кармана. — М.: Мир, 1983. — 174 с.

Поступила в редколлегию 01.08.84.