

ЛОКАЛЬНАЯ АСИМПТОТИЧЕСКАЯ ФОРМУЛА ДЛЯ ПОЛИНОМОВ, ОРТОГОНАЛЬНЫХ НА ДУГЕ ОКРУЖНОСТИ

М. А. Перельман

1. Наиболее общие известные в настоящее время локальные критерии справедливости асимптотической формулы С. Н. Бернштейна — Г. Сеге [3] для ортогональных полиномов на окружности принадлежат Г. Фрейду [4]. Одна из его теорем гласит: *пусть вес $w(\theta)$ ($0 \leq \theta \leq 2\pi$) есть измеримая функция, удовлетворяющая в каждой точке θ неравенству*

$$0 < m \leq w(\theta) \leq M < \infty; \quad (A)$$

пусть вблизи некоторой точки θ_0 имеет место соотношение

$$w(\theta) - w(\theta_0) = O(|\theta - \theta_0|); \quad (B)$$

тогда при $z = e^{i\theta_0}$ асимптотическая формула Г. Сеге справедлива.

Условие (A) заведомо не выполняется, если носителем спектра является дуга l ($0 < \alpha \leq \theta \leq 2\pi - \alpha$) окружности, так как в этом случае на дополнении дуги вес равен нулю. Известные другие локальные критерии также неприменимы, если речь идет о дуге. Однако сформулированный критерий Г. Фрейда удастся перенести на случай дуги. Этому вопросу и посвящена настоящая заметка*.

Мы будем пользоваться результатами статьи Н. И. Ахиезера [1], в которой были получены при условиях С. Н. Бернштейна равномерные асимптотические формулы для ортогональных полиномов на дуге окружности.

2. Итак, носителем спектра является дуга l :

$$z = e^{i\theta} \quad (0 < \alpha \leq \theta \leq 2\pi - \alpha). \quad (1)$$

Вес имеет вид

$$w(\theta) = t(\theta) \frac{\sin \frac{\theta}{2}}{\sqrt{\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \cos^2 \frac{\theta}{2}}} \quad (\alpha \leq \theta \leq 2\pi - \alpha);$$

$t(\theta)$ здесь соответствует тому, что в случае ортогональных многочленов на окружности С. Н. Бернштейн называет тригонометрическим весом. Предполагается, что $t(\theta)$ — измеримая функция, для которой

$$0 < m \leq t(\theta) \leq M < \infty \quad (\alpha \leq \theta \leq 2\pi - \alpha).$$

Ортогональные многочлены обозначим

$$\Phi_n(z) = \Phi_n(z; t) = a_{nn}z^n + a_{n, n-1}z^{n-1} + \dots + a_{n0}, \quad a_{nn} > 0.$$

* В случае не одной, а нескольких дуг мы не видим, как можно было бы получить аналогичный по общности результат. В силу этого обстоятельства мы и решились опубликовать наши построения. Кроме того, наш результат открывает некоторые возможности для получения общих локальных оценок методом сравнения билинейных форм (см. Я. Л. Геронимус, [2] стр. 52).

Соотношение ортогональности —

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\alpha}^{2\pi-\alpha} \Phi_m(e^{i\theta}) \overline{\Phi_n(e^{i\theta})} \omega(\theta) d\theta = \delta_{mn}$$

Из принадлежащей Г. Сеге [3] общей теории эрмитовых форм, ассоциированных с произвольной кривой, вытекает применяемое ниже предельное соотношение

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\gamma^n a_{nn}} = \sqrt{1 + \sin \frac{\alpha}{2}} \exp \left\{ \frac{1}{4\pi} \int_{\alpha}^{2\pi-\alpha} \ln t(\theta) \frac{\sin \frac{\theta}{2} d\theta}{\sqrt{\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \cos^2 \frac{\theta}{2}}} \right\}, \quad (2)$$

где $\gamma = \cos \frac{\alpha}{2}$ — трансфинитный диаметр дуги l .

Как и в [1] используется конформное отображение

$$z = \frac{(v - \beta)(\beta v - 1)}{(v + \beta)(\beta v + 1)}, \quad \left(\beta = i \operatorname{tg} \frac{\pi - \alpha}{4} \right), \quad (3)$$

переводящее двухбереговую разрез l в единичную окружность плоскости v , а разрезанную z — плоскость в единичный круг. Условимся обозначать плюсом предельные значения на правом берегу l (если идти от точки $\theta = \alpha$ к точке $\theta = 2\pi - \alpha$) и минусом — на левом. В таком случае имеем соответствие

$$\begin{aligned} z_+ = e^{i\theta} &\rightarrow v_+ = e^{-i\omega} \\ z_- = e^{i\theta} &\rightarrow v_- = e^{i\omega}. \end{aligned} \quad (0 \leq \omega \leq \pi)$$

Нам понадобится еще вспомогательная переменная

$$\zeta = \frac{1}{i} \frac{v + \beta}{1 - \beta v}. \quad (4)$$

Ее значения $\zeta_+ = e^{i\varphi}$ и $\zeta_- = e^{i\varphi}$ связаны соотношением

$$\zeta_- = \frac{1 - \cos \frac{\alpha}{2} \zeta_+}{\cos \frac{\alpha}{2} - \zeta_+},$$

откуда, между прочим, следует, что

$$\frac{d\varphi}{d\varphi_+} = - \frac{\sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\left| \cos \frac{\alpha}{2} - e^{i\varphi_+} \right|^2} = - \frac{\left| \cos \frac{\alpha}{2} - e^{i\varphi_-} \right|^2}{\sin^2 \frac{\alpha}{2}}. \quad (5)$$

Заметим также, что в силу (3) (см. [1])

$$\cos \omega = \frac{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\theta}{2}} \quad (6)$$

и

$$d\omega = \frac{\sin \frac{\alpha}{2} d\theta}{2 \sin \frac{\theta}{2} \sqrt{\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \cos^2 \frac{\theta}{2}}}.$$

Существенную роль в рассматриваемых вопросах играет особая факторизация веса. В нашем случае она достигается с помощью функции $D(z) = D(z; l)$, которая в разрезанной вдоль l z -плоскости регулярна,

отлична от нуля, нормирована неравенством $D(\infty) > 0$ и почти всюду на дуге l удовлетворяет равенству

$$|D(e^{i\theta})|^2 = \lim_{r \rightarrow 1} |D(re^{i\theta})|^2 = \frac{1}{t(\theta)}.$$

Эта функция строится с помощью интеграла Пуассона, и нетрудно доказать, что

$$D_{\pm}(e^{i\theta}; t) = \frac{1}{\sqrt{t(\theta)}} \exp \left\{ \frac{i}{4\pi} \int_{\alpha}^{2\pi-\alpha} \ln \frac{1}{t(x)} \frac{\cos \frac{x}{2} dx}{\sqrt{\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \cos^2 \frac{x}{2}}} \pm \right. \\ \left. \pm \frac{i}{4\pi} \int_{\alpha}^{2\pi-\alpha} \ln \frac{1}{t(x)} \cdot \frac{1}{\sin \frac{\theta-x}{2}} \sqrt{\frac{\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \cos^2 \frac{\theta}{2}}{\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \cos^2 \frac{x}{2}}} dx \right\}. \quad (a)$$

При этом штрих у знака интеграла указывает, что речь идет о главном значении в смысле Коши, которое существует почти всюду на l и во всяком случае в тех точках, где функция $t(\theta)$ удовлетворяет условию Липшица.

3. Основным нашим результатом является.

Теорема 1. Пусть в каждой точке дуги (1) выполняются неравенства

$$0 < m \leq t(\theta) \leq M < \infty.$$

Если во внутренней точке θ_0 ($\alpha < \theta_0 < 2\pi - \alpha$) дуги l имеет место соотношение

$$t(\theta) - t(\theta_0) = O(|\theta - \theta_0|),$$

то в точке $z = e^{i\theta_0}$ справедлива асимптотическая формула

$$\Phi_n(e^{i\theta_0}) = \Phi_n(e^{i\theta_0}; t) = \frac{e^{in\frac{\theta_0}{2}}}{i \sin \frac{\theta_0}{2} \sqrt{t(\theta_0)}} \left\{ \cos \frac{\alpha}{2} \cos \left[(n+1)\lambda_0 + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{4\pi} \int_{\alpha}^{2\pi-\alpha} \ln \frac{1}{t(x)} \frac{1}{\sin \frac{\theta_0-x}{2}} \sqrt{\frac{\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \cos^2 \frac{\theta_0}{2}}{\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \cos^2 \frac{x}{2}}} dx \right] - \left(1 + \sin \frac{\alpha}{2} \right) e^{-i\frac{\theta_0}{2}} \cos \left(n\lambda_0 + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{4\pi} \int_{\alpha}^{2\pi-\alpha} \ln \frac{1}{t(x)} \frac{1}{\sin \frac{\theta_0-x}{2}} \sqrt{\frac{\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \cos^2 \frac{\theta_0}{2}}{\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \cos^2 \frac{x}{2}}} dx \right) \right\} \exp \frac{i}{4\pi} \times \\ \times \int_{\alpha}^{2\pi-\alpha} \ln \frac{1}{t(x)} \frac{\cos \frac{x}{2} dx}{\sqrt{\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \cos^2 \frac{x}{2}}} + O(1)$$

$$\text{где } \cos \lambda_0 = \cos \frac{\theta_0}{2} / \cos \frac{\alpha}{2}.$$

Метод, которым мы воспользуемся, состоит в аппроксимации при каждом n функции $t(\theta)$ некоторой другой функцией $t_n(\theta)$, для которой явное выражение ортогональных полиномов известно для всех n , начиная с не-

которого. Построение этого приближения и является основной частью заметки.

4. Начнем с одного вспомогательного построения, необходимого для дальнейшего.

Пусть на дуге (1) задана измеримая ограниченная функция $t(\theta) \gg m > 0$.

Рассмотрим функцию

$$f(\theta) = \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{2 \sin^2 \frac{\theta}{2} t(\theta)}$$

С помощью преобразования (3) $f(\theta)$ становится функцией $F(\omega)$ ($v = e^{i\omega}$) и притом такой, что

$$f(\theta) = F(\pm \omega) \quad (0 \leq \omega \leq \pi).$$

По ω определим φ с помощью соотношения

$$e^{i\varphi} = \frac{1}{i} \frac{e^{i\omega} + \beta}{1 - \beta e^{i\omega}}. \quad (7)$$

Это взаимно однозначное отображение интервала $[0, 2\pi]$ на себя позволяет определить функцию

$$G(\varphi) = f(\theta) > 0.$$

Займемся аппроксимацией положительной периодической функции

$$\sqrt{G(\varphi)} = g(\varphi)$$

с помощью тригонометрической суммы

$$S_q(\varphi) = \sum_{k=-q}^q A_k e^{ik\varphi}.$$

Для этого воспользуемся интегралом Джексона

$$I_n(\varphi) = \frac{3}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g\left(\varphi + \frac{2t}{n}\right) \frac{\sin^4 t}{t^4} dt,$$

который, как известно, представляет тригонометрическую сумму порядка $\leq 2n - 1$, если $g(\varphi)$ 2π периодична. Значения $I_n(\varphi)$ заключены между vgrain и vgrmax функции $g(\varphi)$. Известно также, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} |g(\varphi) - I_n(\varphi)|^2 d\varphi = 0, \quad (8)$$

если $g(\varphi) \in L^2(-\pi, \pi)$.

Нам понадобится еще одно свойство интеграла Джексона, которое было использовано Г. Фрейдом в его работе [4], посвященной асимптотике ортогональных полиномов на окружности. Это свойство состоит в следующем:

Лемма Г. Фрейда. * Если для всех φ при заданном μ

$$g(\varphi) - g(\mu) = O(|\varphi - \mu|),$$

то

$$g(\varphi) - I_n(\varphi) = O\left(|\varphi - \mu| + \frac{1}{n}\right).$$

В качестве искомой тригонометрической суммы $S_q(\varphi)$ мы примем

$$S_q(\varphi) = I_n(\varphi) = I_n(\varphi; g) \quad (q \leq 2n - 1).$$

После этого введем рациональную функцию

$$\sum_{k=-q}^q A_k \left(\frac{1}{i} \cdot \frac{v + \beta}{1 - \beta v} \right)^k = \frac{P_{2q}(v)}{(v + \beta)^q (1 - \beta v)^q}.$$

Из построения следует, что $P_{2q}(v)$ — многочлен степени $2q$ и на окружности $v = e^{i\omega}$ функция $\frac{1}{v^q} P_{2q}(v)$ принимает вещественные значения. Поэтому

$$\frac{1}{v^q} P_{2q}(v) = N^2 \prod_{k=1}^q (v - c_k) \left(\frac{1}{v} - c_k \right),$$

где $N > 0$ и $|c_k| < 1$.

Полагая

$$\prod (v) = N \frac{\prod_{k=1}^q (v - c_k)}{(v + \beta)^q},$$

получаем

$$S_q(v) = \Pi(v) \bar{\Pi}\left(\frac{1}{v}\right) \quad (v = e^{i\omega}).$$

Теперь положим

$$\Omega(v) = \Pi(v) \bar{\Pi}(v).$$

Свойства этой функции таковы:

- 1) На вещественной оси v она положительна.
- 2) Имеет место оценка

$$f(\theta) - \Omega(e^{i\omega}) \Omega(e^{-i\omega}) = O\left(|\theta - \theta_0| + \frac{1}{n}\right), \quad (9)$$

* Для удобства читателя приведем простое доказательство этого факта. Так как из условия следует, что

$$\frac{1}{2} [g(\varphi + 2x) + g(\varphi - 2x)] - g(\varphi) = O(|\varphi - \mu|) + O(|x|),$$

и так как имеет место тождество

$$I_n(\varphi) - g(\varphi) = \frac{3}{\pi} \int_0^\infty \left\{ \frac{1}{2} [g(\varphi + 2x) + g(\varphi - 2x)] - g(\varphi) \right\} \frac{\sin^4 nx}{n^3 x^4} dx,$$

то

$$\begin{aligned} |I_n(\varphi) - g(\varphi)| &\leq O(|\varphi - \mu|) \int_0^\infty \frac{\sin^4 nx}{n^3 x^4} dx + O(1) \int_0^\infty \frac{\sin^4 nx}{n^3 x^3} dx = \\ &= O(|\varphi - \mu|) \int_0^\infty \frac{\sin^4 x}{x^4} dx + O(1) \frac{1}{n} \int_0^\infty \frac{\sin^4 x}{x^3} dx. \end{aligned}$$

если в окрестности внутренней точки θ_0 ($\alpha < \theta_0 < 2\pi - \alpha$) справедливо соотношение

$$f(\theta) - f(\theta_0) = O(|\theta - \theta_0|). \quad (10)$$

При этом ω связано с θ равенством (3), где $z = e^{i\theta}$, $v = e^{i\omega}$. На основании (6) и (7) в окрестности точки θ , отличной от концов,

$$0 < A < \left| \frac{d\theta}{d\omega} \right| < B, \quad 0 < A_1 < \left| \frac{d\theta}{d\varphi} \right| < B_1.$$

Поэтому из (10) следует

$$|g(\varphi) - g(\mu)| = O(|\varphi - \mu|).$$

Отсюда в силу леммы Г. Фрейда

$$\sqrt{f(\theta)} - \Pi(e^{i\omega}) \overline{\Pi}(e^{-i\omega}) = O\left(|\theta - \theta_0| + \frac{1}{n}\right).$$

Каждой точке θ отвечают два значения $\varphi: \varphi_+$ и φ_- такие, что

$$e^{i\varphi_+} = \zeta_+ = \frac{1}{i} \frac{1 + \beta e^{i\omega}}{e^{i\omega} - \beta}, \quad e^{i\varphi_-} = \zeta_- = \frac{1}{i} \frac{e^{i\omega} + \beta}{1 - \beta e^{i\omega}}.$$

Так как $g(\varphi_+) = g(\varphi_-) = g(\varphi)$, то

$$\begin{aligned} f(\theta) - \Omega(e^{i\omega}) \Omega(e^{-i\omega}) &= g^2(\varphi) - S_q(\varphi_+) S_q(\varphi_-) = \\ &= g(\varphi_+) [g(\varphi_-) - S_q(\varphi_-)] + S_q(\varphi_-) [g(\varphi_+) - S_q(\varphi_+)] = \\ &= O(1) O\left(|\varphi_- - \mu_-| + \frac{1}{n}\right) + O(1) O\left(|\varphi_+ - \mu_+| + \frac{1}{n}\right) = O\left(|\theta - \theta_0| + \frac{1}{n}\right), \end{aligned}$$

т. е. свойство 2) доказано.

Из [1] известен явный вид ортогональных полиномов $\Psi_n(z)$, соответствующих весовой функции

$$\begin{aligned} w_0(\theta) d\theta &= \frac{dv}{iv \Omega(v) \Omega\left(\frac{1}{v}\right)} \quad (v = e^{i\omega}) \\ \Omega(e^{i\omega}) \Omega(e^{-i\omega}) &= f_n(\theta) = \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{2 \sin^2 \frac{\theta}{2} t_n(\theta)}. \end{aligned}$$

Таким образом, мы вводим здесь функции $f_n(\theta)$ и $t_n(\theta)$ и из полученной оценки заключаем, что

$$t(\theta) - t_n(\theta) = O\left(|\theta - \theta_0| + \frac{1}{n}\right).$$

Кроме того, замечая, что

$$\frac{d\varphi}{d\theta} = \frac{1}{2} \left[1 - \frac{\sqrt{\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \cos^2 \frac{\theta}{2}}}{2} \right] \frac{\sin \frac{\theta}{2}}{\sqrt{\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \cos^2 \frac{\theta}{2}}},$$

можем написать неравенство

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{2\pi-\alpha} |f(\theta) - f_n(\theta)|^2 \frac{\sin \frac{\theta}{2} d\theta}{\sqrt{\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \cos^2 \frac{\theta}{2}}} &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} |g(\varphi_+) [g(\varphi_-) - I_n(\varphi_-)] + \\ &+ I_n(\varphi_-) [g(\varphi_+) - I_n(\varphi_+)]|^2 \frac{d\varphi_+}{\sqrt{\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \cos^2 \frac{\theta}{2}}} \leq \\ &\leq \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\sqrt{\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \cos^2 \frac{\theta}{2}}}{2} \right) \\ &\leq 0(1) \left(\left\{ \int_{-\pi}^{\pi} |g(\varphi_-) - I_n(\varphi_-)|^2 d\varphi_- \right\}^{1/2} + \left\{ \int_{-\pi}^{\pi} |g(\varphi_+) - I_n(\varphi_+)|^2 d\varphi_+ \right\}^{1/2} \right)^2 \end{aligned}$$

(мы воспользовались здесь ограниченностью $I_n(\varphi)$).

Из нашего результата в силу (8) следует, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\alpha}^{2\pi-\alpha} |t(\theta) - t_n(\theta)|^2 \frac{\sin \frac{\theta}{2} d\theta}{\sqrt{\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \cos^2 \frac{\theta}{2}}} = 0. \quad (11)$$

Возьмем разность ортогональных полиномов, соответствующих данному весу $t(\theta)$ и аппроксимирующему весу $t_n(\theta)$. При этом положим

$$\Psi_n(z) = \Phi_n(z; t_n) = b_{nn}z^n + b_{n, n-1}z^{n-1} + \dots + b_{n0}.$$

Используя известные факты классической теории Г. Сеге, можно представить разность этих полиномов в точке θ_0 в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{b_{nn}}{a_{nn}} \Psi_n(e^{i\theta_0}) - \Phi_n(e^{i\theta_0}) = \\ = \frac{1}{2\pi} \int_{\alpha}^{2\pi-\alpha} \Phi_n(e^{i\theta}) K_n(t_n, e^{i\theta}, e^{i\theta_0}) \frac{\{t(\theta) - t_n(\theta)\} \sin \frac{\theta}{2} d\theta}{\sqrt{\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \cos^2 \frac{\theta}{2}}}, \end{aligned} \quad (12)$$

где

$$K_n(t_n, z_1, z_2) = \sum_{k=0}^n \overline{\Psi_k(z_1)} \Psi_k(z_2).$$

Используя связь билинейной формы с задачей о минимуме интеграла*

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{P_n(e^{i\theta})}{P_n(z_0)} \right|^2 d\sigma(\theta),$$

а также формулу Кристоффеля (см. Я. Л. Геронимус [2], стр. 13), нетрудно показать, что

$$K_n(t_n, e^{i\theta}, e^{i\theta_0}) = \frac{0(1)}{|\theta - \theta_0|}, \quad K_n(t_n, z_1, z_2) = 0(n),$$

так что

$$K_n(t_n, e^{i\theta}, e^{i\theta_0}) = 0(1) \min \left(n, \frac{1}{|\theta - \theta_0|} \right).$$

* Для спектральной функции, соответствующей тригонометрическому весу $t_n(\theta)$.

Оценим интеграл, стоящий в правой части (12), разбив его на два интеграла

$$\begin{aligned}
 & \left| \int_{\theta_0 - \delta}^{\theta_0 + \delta} \Phi_n(e^{i\theta}) K_n(t_n, e^{i\theta}, e^{i\theta_0}) \{t(\theta) - t_n(\theta)\} \frac{\sin \frac{\theta}{2} d\theta}{\sqrt{\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \cos^2 \frac{\theta}{2}}} \right| \leq \\
 & \leq O(1) \int_{\theta_0 - \delta}^{\theta_0 + \delta} \Phi_n(e^{i\theta}) \frac{\sin \frac{\theta}{2} d\theta}{\sqrt{\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \cos^2 \frac{\theta}{2}}} \leq \\
 & \leq O(1) \frac{1}{\min |t(\theta)|^{1/2}} \int_{\theta_0 - \delta}^{\theta_0 + \delta} |\Phi_n(e^{i\theta})| |t(\theta)|^{1/2} \frac{\sin \frac{\theta}{2} d\theta}{\sqrt{\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \cos^2 \frac{\theta}{2}}} \leq \\
 & \leq O(1) \left(\int_{\alpha}^{2\pi - \alpha} |\Phi_n(e^{i\theta})|^2 t(\theta) \frac{\sin \frac{\theta}{2} d\theta}{\sqrt{\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \cos^2 \frac{\theta}{2}}} \right)^{1/2} \left(\int_{\theta_0 - \delta}^{\theta_0 + \delta} \frac{\sin \frac{\theta}{2} d\theta}{\sqrt{\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \cos^2 \frac{\theta}{2}}} \right)^{1/2} = \\
 & = O(1) \cdot \delta^{1/2}.
 \end{aligned}$$

Обозначим через l' дополнение к дуге $(\theta_0 - \delta, \theta_0 + \delta)$ дуги l . Тогда

$$\begin{aligned}
 & \left| \int_{l'} \Phi_n(e^{i\theta}) K_n(t_n, e^{i\theta}, e^{i\theta_0}) \{t(\theta) - t_n(\theta)\} \frac{\sin \frac{\theta}{2} d\theta}{\sqrt{\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \cos^2 \frac{\theta}{2}}} \right| \leq \\
 & \leq \frac{O(1)}{\delta} \int_{\alpha}^{2\pi - \alpha} |\Phi_n(e^{i\theta})| \frac{\sin \frac{\theta}{2} d\theta}{\sqrt{\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \cos^2 \frac{\theta}{2}}} |t(\theta) - t_n(\theta)| d\theta \leq \\
 & \leq \frac{O(1)}{\delta} \frac{1}{\min |t(\theta)|^{1/2}} \left\{ \int_{\alpha}^{2\pi - \alpha} |\Phi_n(e^{i\theta})|^2 \frac{t(\theta) \sin \frac{\theta}{2} d\theta}{\sqrt{\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \cos^2 \frac{\theta}{2}}} \right\}^{1/2} \times \\
 & \times \left\{ \int_{\alpha}^{2\pi - \alpha} |t(\theta) - t_n(\theta)|^2 \frac{\sin \frac{\theta}{2} d\theta}{\sqrt{\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \cos^2 \frac{\theta}{2}}} \right\}^{1/2} \leq \\
 & \leq \frac{O(1)}{\delta} \left\{ \int_{\alpha}^{2\pi - \alpha} |t(\theta) - t_n(\theta)|^2 \frac{\sin \frac{\theta}{2} d\theta}{\sqrt{\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \cos^2 \frac{\theta}{2}}} \right\}^{1/2}.
 \end{aligned}$$

Из полученных оценок следует, что правая часть (12) стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$.

Покажем еще, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_{nn}}{a_{nn}} = \sqrt{1 + \sin \frac{\alpha}{2}}.$$

Для этого воспользуемся, с одной стороны, предельным соотношением (2), и, с другой стороны, выведенной в [1] формулой

$$\begin{aligned} \gamma^n b_{nn} &= \frac{1 + \sin \frac{\alpha}{2}}{2 \sin \frac{\alpha}{2}} C_n \Omega(-1/\beta) = \left| \exp \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \frac{1 - \beta^2}{1 - 2\beta \cos \omega + \beta^2} \ln \frac{1}{t_n(\theta)} d\omega \right\} \right| = \\ &= \exp \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\cos^2 \omega \cos^2 \frac{\alpha}{2} + \sin^2 \frac{\alpha}{2}} \ln \frac{1}{t_n(\theta)} d\omega \right\} = \\ &= \exp \left\{ \frac{1}{4\pi} \int_\alpha^{2\pi-\alpha} \ln \frac{1}{t_n(\theta)} \frac{\sin \frac{\theta}{2} d\theta}{\sqrt{\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \cos^2 \frac{\theta}{2}}} \right\}. \end{aligned}$$

Эти формулы показывают, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_{nn}}{a_{nn}} = \sqrt{1 + \sin \frac{\alpha}{2}} \lim_{n \rightarrow \infty} \exp \left\{ \frac{1}{4\pi} \int_\alpha^{2\pi-\alpha} \ln \frac{t(\theta)}{t_n(\theta)} \frac{\sin \frac{\theta}{2} d\theta}{\sqrt{\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \cos^2 \frac{\theta}{2}}} \right\},$$

и остается учесть, что в силу (11) предел справа равен единице.

Итак, мы доказали, что при $n \rightarrow \infty$

$$\Phi_n(e^{i\theta_0}) = \sqrt{1 + \sin \frac{\alpha}{2}} \Psi_n(e^{i\theta_0}) + o(1).$$

Теперь мы должны выразить правую часть через заданный вес $t(\theta)$. Из явного выражения полиномов $\Psi_n(z)$ следует, что

$$\begin{aligned} \Psi_n(e^{i\theta_0}) &= \frac{\sqrt{1 - \sin \frac{\alpha}{2}} e^{i\lambda_0} - \sqrt{1 + \sin \frac{\alpha}{2}} e^{-i\frac{\theta_0}{2}}}{2i \sin \frac{\theta_0}{2}} e^{in(\frac{\theta_0}{2} + \lambda_0)} D_+(e^{i\theta_0}, t_n) + \\ &+ \frac{\sqrt{1 - \sin \frac{\alpha}{2}} e^{-i\lambda_0} - \sqrt{1 + \sin \frac{\alpha}{2}} e^{-i\frac{\theta_0}{2}}}{2i \sin \frac{\theta_0}{2}} e^{in(\frac{\theta_0}{2} - \lambda_0)} D_-(e^{i\theta_0}, t_n), \end{aligned}$$

где

$$\cos \lambda_0 = \frac{\cos \frac{\theta_0}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}}.$$

Мы покажем, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} D_\pm(e^{i\theta_0}, t_n) = D_\pm(e^{i\theta_0}, t),$$

чем и будет закончено доказательство

Из формулы (а) замечаем, что подлежит доказательству лишь следующий факт:

$$\begin{aligned} & \int_{\alpha}^{2\pi-\alpha} \ln \frac{1}{t_n(x)} \frac{1}{\sin \frac{\theta_0 - x}{2}} \sqrt{\frac{\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \cos^2 \frac{\theta_0}{2}}{\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \cos^2 \frac{x}{2}}} dx \rightarrow \\ & \rightarrow \int_{\alpha}^{2\pi-\alpha} \ln \frac{1}{t(x)} \frac{1}{\sin \frac{\theta_0 - x}{2}} \sqrt{\frac{\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \cos^2 \frac{\theta_0}{2}}{\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \cos^2 \frac{x}{2}}} dx, \end{aligned} \quad (13)$$

так как во всех остальных выражениях возможность предельного перехода очевидна.

Вместо (13) достаточно доказать, что

$$\begin{aligned} & \int_{\alpha}^{2\pi-\alpha} \ln \frac{t_n(\theta_0)}{t_n(x)} \frac{1}{\sin \frac{\theta_0 - x}{2}} \sqrt{\frac{\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \cos^2 \frac{\theta_0}{2}}{\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \cos^2 \frac{x}{2}}} dx \rightarrow \\ & \rightarrow \int_{\alpha}^{2\pi-\alpha} \ln \frac{t(\theta_0)}{t(x)} \frac{1}{\sin \frac{\theta_0 - x}{2}} \sqrt{\frac{\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \cos^2 \frac{\theta_0}{2}}{\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \cos^2 \frac{x}{2}}} dx \end{aligned}$$

или, что

$$\int_{\alpha}^{2\pi-\alpha} \{ \ln t_n(\theta_0) - \ln t(\theta_0) + \ln t(x) - \ln t_n(x) \} \frac{1}{\sin \frac{\theta_0 - x}{2}} \sqrt{\frac{\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \cos^2 \frac{\theta_0}{2}}{\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \cos^2 \frac{x}{2}}} dx \rightarrow 0.$$

Пользуясь обобщенным на дугу окружности неравенством А. А. Маркова, находим, что

$$\ln t_n(x) - \ln t_n(\theta_0) = O(n^2) (|x - \theta_0|).$$

Поэтому

$$\begin{aligned} & \int_{\theta_0 - \frac{1}{n-3}}^{\theta_0 + \frac{1}{n-3}} \{ \ln t_n(\theta_0) - \ln t(\theta_0) + \ln t(x) - \\ & - \ln t_n(x) \} \frac{1}{\sin \frac{\theta_0 - x}{2}} \sqrt{\frac{\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \cos^2 \frac{\theta_0}{2}}{\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \cos^2 \frac{x}{2}}} dx = O\left(\frac{1}{n}\right). \end{aligned}$$

Из (9)

$$\begin{aligned} & \int_{\theta_0 - \frac{1}{n-3}}^{\theta_0 + \frac{1}{n-3}} \{ \ln t_n(\theta_0) - \ln t(\theta_0) + \ln t(x) - \\ & - \ln t_n(x) \} \frac{1}{\sin \frac{\theta_0 - x}{2}} \sqrt{\frac{\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \cos^2 \frac{\theta_0}{2}}{\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \cos^2 \frac{x}{2}}} dx = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\theta_0 + n^{-3}}^{\theta_0 + \delta} \{\ln t_n(\theta_0) - \ln t(\theta_0)\} \frac{1}{\sin \frac{\theta_0 - x}{2}} \sqrt{\frac{\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \cos^2 \frac{\theta_0}{2}}{\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \cos^2 \frac{x}{2}}} dx + \\
&+ \int_{\theta_0 + n^{-3}}^{\theta_0 + \delta} \{\ln t(x) - \ln t_n(x)\} \frac{1}{\sin \frac{\theta_0 - x}{2}} \sqrt{\frac{\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \cos^2 \frac{\theta_0}{2}}{\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \cos^2 \frac{x}{2}}} dx = \\
&= o(1) + o\left(\frac{\ln n}{n}\right) \\
&\int_{\theta_0 + \delta}^{2\pi - \alpha} \{\ln t_n(\theta_0) - \ln t(\theta_0) + \ln t(x) - \\
&- \ln t_n(x)\} \frac{1}{\sin \frac{\theta_0 - x}{2}} \sqrt{\frac{\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \cos^2 \frac{\theta_0}{2}}{\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \cos^2 \frac{x}{2}}} dx = o(1).
\end{aligned}$$

Аналогичные оценки получаются для дуг $(\theta_0 - \delta, \theta_0 - n^{-3})$ и $(\alpha, \theta_0 - \delta)$.

5. Г. Фрейду принадлежит один критерий локальной ограниченности последовательности ортогональных полиномов на окружности. Этот критерий также переносится на случай дуги.

Приведем результат без доказательства.

Теорема 2. Пусть $t(\theta) \geq 0$ и

$$\int_{\alpha}^{2\pi - \alpha} t(\theta) \frac{\sin \frac{\theta}{2} d\theta}{\sqrt{\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \cos^2 \frac{\theta}{2}}} < \infty, \quad \int_{\alpha}^{2\pi - \alpha} \frac{1}{t(\theta)} \frac{\sin \frac{\theta}{2} d\theta}{\sqrt{\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \cos^2 \frac{\theta}{2}}} < \infty.$$

Пусть $t(\theta_0) > 0$ и в некоторой окрестности точки θ_0

$$t(\theta_0) - t(\theta) = O(|\theta - \theta_0|).$$

Тогда последовательность ортогональных полиномов с весом $t(\theta)$ в точке θ_0 ограничена.

Автор благодарит Н. И. Ахиезера за внимание к работе и советы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. И. Ахиезер. О полиномах, ортогональных на дуге окружности. ДАН СССР, т. 130, № 2, 1960.
2. Я. Л. Геронимус. Многочлены, ортогональные на окружности и на отрезке. Физматгиз, М., 1958.
3. Г. Сеге. Ортогональные многочлены. Физматгиз, М., 1962.
4. G. Freud. Über die Asymptotik orthogonaler Polynome, Publ. de l'Institut Math., t. XI, Beograd, 1957.

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА НА ПОЛУОСИ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Г. В. Щербина

§ 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ФОРМУЛИРОВКА ОСНОВНОЙ ТЕОРЕМЫ

Рассмотрим краевую задачу

$$y(0) = d, \quad y(+\infty) = 0 \quad (1)$$

для уравнения

$$y'' = F(x, y, y'), \quad (1^*)$$

Такие краевые задачи встречаются, в частности, в теории пограничного слоя. Из физических соображений часто можно указать те неравенства, которым должно удовлетворять искомое решение. Например, исследование «автономных» решений уравнения пограничного слоя приводит к задаче

$$\begin{aligned} x''' + xx'' + 2\beta(1 - x'^2) &= 0, \\ x(0) = x'(0) &= 0, \quad x'(+\infty) = 1, \\ 0 \leq x'(t) \leq 1 \quad (t \geq 0). \end{aligned}$$

Легко видеть, что после замены $x'(t) = y(x)$ для $y(x)$ получится задача вида (1), (1*), причем нужно найти решение, удовлетворяющее условию $0 \leq y(x) \leq 1$. Решения краевой задачи (1), (1*) при различных ограничениях на вид функции F изучались в работах [1] — [9]. В настоящей заметке будет доказана теорема существования решения, включающая в себя, в частности, теоремы существования в упомянутых выше работах и охватывающая более широкий класс правых частей уравнения (1*).

Отметим, что краевая задача (1) для уравнения n -го порядка рассматривалась Г. Я. Любарским, М. А. Красносельским и другими авторами.

Предположим, что найдутся непрерывные функции $f_+(x)$ и $f_-(x)$ такие, что функция $F(x, y, z)$ определена в полосе $\pi: \{x \geq 0, f_-(x) \leq y \leq f_+(x), |z| < \infty\}$, непрерывна в π по x и удовлетворяет условию Липшица по y и z . Пусть, кроме того, выполнены неравенства «А»:

$$f_-(0) \leq d \leq f_+(0), \quad \overline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} f_-(x) \leq 0 \leq \lim_{x \rightarrow +\infty} f_+(x),$$

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} \{|f_+(x)| + |f_-(x)|\} < \infty,$$

$$|F(x, y, z)| \leq C(x, y) \varphi(z),$$

где $C(x, y)$ непрерывна,

$$\int_0^\infty z [\varphi(z)]^{-1} dz = \infty, \quad f'_+(x-0) \geq f'_+(x+0), \quad f'_-(x-0) \leq f'_-(x+0),$$

$$f''_+(x) \leq F(x, f_+(x), f'_+(x)), \quad f''_-(x) \geq F(x, f_-(x), f'_-(x))$$

при всех $x \geq 0$. Для простоты мы считаем, что разрывы производной $f'_+(x)$ и $f'_-(x)$ первого рода, изолированы и там, где существует $f'_+(x)$ ($f'_-(x)$), существует и $f''_+(x)$ ($f''_-(x)$).

Допустим, что для любого $\gamma (P \leq \gamma \leq Q)$ существуют две неубывающие по y функции $F_{\gamma}^{+}(x, y, z)$, $F_{\gamma}^{-}(x, y, z)$ такие, что $F_{\gamma}^{+} \geq F \geq F_{\gamma}^{-}$ в некоторой полосе $\pi_{\gamma} : \{x \geq A_{\gamma}, |y - \gamma| \leq \varepsilon_{\gamma}, q_{\gamma} \leq z \leq p_{\gamma}, (x, y, z) \subset \pi\}$. Здесь $P = \lim_{x \rightarrow \infty} f_{-}(x)$, $Q = \lim_{x \rightarrow \infty} f_{+}(x)$.

Рассмотрим решения уравнения $y'' = F_{\gamma}^{-}$ ($y'' = F_{\gamma}^{+}$), удовлетворяющие условиям $y(x_0) = \gamma - \delta$ ($y(x_0) = \gamma + \delta$), $y'(x_0) = \alpha$. Точную нижнюю (верхнюю) грань тех α , при которых из выполнения в интервале $x_0 < t < x$ неравенства $y(t) \leq \gamma + \varepsilon$ ($y(t) \geq \gamma - \varepsilon$), $(t, y, y') \subset \pi_{\gamma \varepsilon}$, где $\pi_{\gamma \varepsilon} : \{|y - \gamma| \leq \varepsilon, (t, y, z) \subset \pi_{\gamma}\}$, вытекает неравенство $y(x) \geq \gamma - \varepsilon$ ($y(x) \leq \gamma + \varepsilon$), назовем $m^{-}(x_0, \gamma, \varepsilon, \delta)$ ($m^{+}(x_0, \gamma, \varepsilon, \delta)$). Если таких α нет, положим $m^{-}(x_0, \gamma, \varepsilon, \delta) = +\infty$, ($m^{+}(x_0, \gamma, \varepsilon, \delta) = -\infty$). Функции m^{-} и m^{+} определены при $x_0 > A_{\gamma}$, $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_{\gamma}$, $0 < \delta \leq \varepsilon$. Решение уравнения $y'' = F_{\gamma}^{-}$ ($y'' = F_{\gamma}^{+}$) удовлетворяющее условиям $y(x_0) = \gamma - \delta$, ($y(x_0) = \gamma + \delta$), $y'(x_0) = m^{-}$ ($y'(x_0) = m^{+}$), обозначим $M^{-}(x, x_0, \gamma, \varepsilon, \delta)$ ($M^{+}(x, x_0, \gamma, \varepsilon, \delta)$).

Теорема 1. Если для любых γ_1, γ_2 и любого достаточно малого $\varepsilon (P \leq \gamma_1 < 0 < \gamma_2 \leq Q, 0 < \varepsilon < \varepsilon_{\gamma})$ найдутся $A > A_{\gamma}$, $\delta > 0$ ($\delta < \varepsilon$) такие, что $m^{-}(x_0, \gamma_2, \varepsilon, \delta) \leq 0$, $\int m^{-}(x_0, \gamma_2, \varepsilon, \delta) dx_0 = -\infty$, $m^{+}(x_0, \gamma_1, \varepsilon, \delta) \geq 0$, $\int m^{+}(x_0, \gamma_1, \varepsilon, \delta) dx_0 = +\infty$, то краевая задача (1) имеет решение, удовлетворяющее неравенству

$$f_{-}(x) \leq y(x) \leq f_{+}(x) \quad (x \geq 0). \quad (2)$$

Вопрос о существовании решения краевой задачи (1) сводится теоремой 1 к построению функций $f_{+}(x)$, $f_{-}(x)$, F_{γ}^{+} , F_{γ}^{-} и к изучению m^{+} , m^{-} . В некоторых случаях, как будет показано в § 4, это нетрудно сделать.

Параллельно рассмотрим краевую задачу

$$y(-\infty) = d, \quad y(+\infty) = 0. \quad (1'')$$

В этом случае будем считать, что $f_{+}(x)$ и $f_{-}(x)$ определены, удовлетворяют условиям «А» при всех x и, кроме того, условиям

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f_{+}(x) \geq d \geq \lim_{x \rightarrow -\infty} f_{-}(x), \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \{|f_{-}(x)| + |f_{+}(x)|\} < \infty.$$

Мы не будем здесь формулировать теорему существования решения задачи (1''). Заметим лишь, что нужно добавить условия на $-\infty$. Чтобы сформулировать эти условия, можно, например, сделать сначала замену $x = -t$, сформулировать теорему о предельном переходе при $t \rightarrow +\infty$ и сделать обратную замену.

§ 2. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ПОСТРОЕНИЯ

Определим функцию $F^{*}(x, y, z)$ следующим образом:

$$F^{*} \equiv F, \text{ если } (x, y, z) \subset \pi,$$

$$F^{*} = [F(x, f_{+}(x), z) + y - f_{+}(x)], \quad \Phi(x, y, z), \text{ если } y > f_{+}(x),$$

$$F^{*} = [F(x, f_{-}(x), z) + f_{-}(x) - y], \quad \Phi(x, y, z), \text{ если } y < f_{-}(x).$$

Здесь

$$\Phi = \begin{cases} 1, & \text{когда } |y| \leq A(x) \text{ или } |z| \leq A(x), \\ 0, & \text{когда } |y| \geq 2A(x) \text{ и } |z| \geq 2A(x), \\ \{2A(x) - \max(x, |y|)\} A^{-1}(x), & \text{когда } A(x) \leq |y|, \quad x \leq 2A(x), \\ A(x) = \max_{0 \leq t < x} [|f_{+}(t)| + |f_{-}(t)| + |f'_{+}(t)| + |f'_{-}(t)| + 1]. \end{cases}$$

Определенная выше функция F^* непрерывна и удовлетворяет условию Липшица (по y и z в каждом) конечной части полупространства $x \geq 0$ и условию

$$|F^*| \leq C_1(x, y) \varphi(z), \quad (3)$$

где C_1 непрерывна.

Нас интересуют решения краевой задачи (1), удовлетворяющие неравенству (2). Но в полосе π имеем $F^* \equiv F$. Поэтому без ограничения общности можно считать, что $F \equiv F^*$ при всех x, y, z .

Лемма 1. Пусть $y(x)$ — некоторое решение уравнения (1*). Тогда функция $y(x)$ определена при $x \geq 0$ и разность $y(x) - f_+(x)$ не может иметь положительного максимума, а $f_-(x)$ — отрицательного минимума.

Докажем сначала вторую часть леммы 1.

Доказывать будем от противного. Пусть в точке $\xi > 0$ выполнены соотношения $\rho(\xi) = y(\xi) - f_+(\xi) > 0$, и $\rho(\xi + \Delta\xi) \leq \rho(\xi)$ при $|\Delta\xi| < \varepsilon$. Если $f'_+(\xi - 0) = f'_+(\xi + 0)$, то $y'(\xi) = f'_+(\xi)$, $\rho''(\xi) = F(\xi, f_+(\xi), f'_+(\xi)) - f''_+(\xi) > 0$, и мы получаем противоречие. Если же $f'_+(\xi - 0) > f'_+(\xi + 0)$, то $\rho'(\xi - 0) < \rho'(\xi + 0)$, т. е. опять получаем противоречие. Для доказательства первой части леммы воспользуемся следующим фактом. Если F удовлетворяет условию (3), то неравенство

$$|y_\alpha(x)| \leq B \quad (c \leq x \leq d)$$

влечет за собой неравенство

$$|y'_\alpha(x)| \leq D \quad (c \leq x \leq d)$$

для любого семейства решений уравнения (1*). Здесь D зависит от c, d, B и от $\max C_1(x, y)$.

Доказательство этого можно найти в работе [8]. Для завершения доказательства леммы 1 достаточно заметить, что при $|y| > 2A(x)$, по определению $F(x, y, z) \equiv 0$. В [1] на стр. 107 доказана.

Лемма 2. Пусть $F_1 \geq F_2$, если $x \geq A$, $|y| \leq B$ и $p \leq z \leq q$. Пусть хотя бы одна из функций F_1 и F_2 не убывает по y .

Тогда из неравенств $y_1(x_0) \geq y_2(x_0)$, $y'_1(x_0) \geq y'_2(x_0)$ при $x_0 \geq A$, $|y_i(x_0)| \leq B$, $p \leq y'_i(x_0) \leq q$, $y''_i(x) = F_i$ ($i = 1, 2$) следует, что $y'_1(x) \geq y'_2(x)$ до тех пор, пока $x \geq x_0$, $|y_i(x)| \leq B$, $p \leq y'_i(x) \leq q$ ($i = 1, 2$).

Рассмотрим теперь однопараметрическое семейство $y(x, \alpha)$ решений уравнения (1*), удовлетворяющих условиям $y(0, \alpha) = d$, $y'(0, \alpha) = \alpha$.

Из лемм 1 и 2 следует существование $\alpha^+(n)$ и $\alpha^-(n)$ таких, что при $\alpha > \alpha^+(n)$ справедливо неравенство $y(n, \alpha) > f_+(n)$, а при $\alpha < \alpha^-(n)$ — неравенство $y(n, \alpha) < f_-(n)$.

Докажем, например, существование $\alpha^-(n)$. Для этого положим в лемме 2 $F_1 = F$, $F_2 = C_n \cdot \varphi(y')$, где $C_n = \max_{0 \leq x \leq n, f_-(x) \leq y \leq f_+(x)} C_1(x, y)$. Урав-

нение $y'' = C_n \varphi(y')$ легко интегрируется. Непосредственно из вида решения следует, что для этого уравнения существует такое $\alpha^-(n)$, что при $y'(0) < \alpha^-(n)$ любое решение этого уравнения пересекает кривую $y = f_-(x)$. Но тогда по лемме 2 при $\alpha < \alpha^-(n)$ любое решение уравнения (1*) также пересекает кривую $y = f_-(x)$, а по лемме 1 разность $f_-(x) - y(x)$ продолжает убывать, то есть $y(n, \alpha) < f_-(n)$.

Из сказанного можно сделать вывод, что краевая задача

$$y(0) = d, \quad y(n) = b_n \quad (f_-(n) \leq b_n \leq f_+(n)) \quad y'' = F(x, y, y')$$

всегда имеет решение $y_n(x)$, удовлетворяющее неравенству $f_-(x) \leq y_n(x) \leq f_+(x)$ при $0 \leq x \leq n$. Действительно, так как функция $y(n, \alpha)$ непрерывна по α и $y(n, \alpha) > f_+(n)$ при $\alpha > \alpha^+(n)$ и $y(n, \alpha) < f_-(n)$ при $\alpha < \alpha^-(n)$, то найдется α_n такое, что $y(n, \alpha_n) = b_n$.

Если бы, например, при некотором $\xi (0 \leq \xi \leq n)$ имело место неравенство $y_n(\xi) > f_+(\xi)$, то тогда функция $y_n(x) - f_+(x)$ имела бы положительный максимум, что противоречит лемме 1.

Возьмем теперь последовательность $b_i \rightarrow 0$. Так как для соответствующих α_i выполняется неравенство $\alpha^-(1) \leq \alpha_i \leq \alpha^+(1)$, то мы можем выделить из $\{\alpha_i\}$ сходящуюся подпоследовательность $\alpha_{i_k} \rightarrow \alpha^0$. Очевидно, что

$$f_-(x) \leq y(x, \alpha^0) \leq f_+(x) \quad (x \geq 0).$$

В дальнейшем мы будем считать, что $\alpha_i \rightarrow \alpha^0$.

Лемма 3. Если $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_-(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f_+(x)$, то из каждой точки $(x_0, y_0) : x_0 \geq 0, f_-(x_0) \leq y_0 \leq f_+(x_0)$ выходит хотя бы одно решение уравнения (1*), стремящееся к нулю и лежащее в π . Если $f_+(x)$ и $f_-(x)$ определены и удовлетворяют условиям «А» при всех x и если $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_+(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f_-(x)$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_+(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f_-(x)$, то краевая задача (1'') имеет решение, лежащее в π .

Следствие из леммы 3. Пусть $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_-(x) = 0$ и пусть при $x \leq A$ в полосе π выполняется неравенство $F \geq F_1$, и краевая задача $y'' = F_1(x, y, y')$, $y(A) = f_+(A)$, $y(+\infty) = 0$ имеет решение, лежащее в π , тогда краевая задача (1) разрешима. Если же в области π справедливо обратное неравенство $F \leq F_1$ и краевая задача (1) для уравнения $y'' = F_1$ не имеет решения, то краевая задача (1), (1*) не имеет решения.

Пример. Рассмотрим краевую задачу

$$x(-\infty) = d, \quad y(+\infty) = 0 \quad (4)$$

$$y'' + y' \cdot f(x, y, y') = 0 \quad (4^*)$$

где $f(x, y, z)$ — гладкая функция. Допустим, что в любой конечной части D плоскости (y, z) выполнены условия а) $x \cdot f(x, y, z) \geq 1 + \sigma(D)$, $\sigma(D) > 0$ при $|x| > A(D)$; $(y, z) \in D$, б) $|f(x, y, z)| \leq C(D)(1 + z^2)$. Тогда краевая задача (4), (4*) имеет решение.

Заметим сначала, что здесь всегда можно считать $d > 0$. Условия «А» здесь выполнены. Обозначим

$$D_0 : \{0 \leq y \leq d, \quad 0 \geq z \geq -1\}, \quad x_0 = x(D_0), \quad \sigma_0 = \sigma(D_0), \quad x_1 > \max(d\sigma_0, x_0).$$

Положим $f_+(x) \equiv d$, если $x \leq x_1$, $f_+(x) \equiv dx_1^{\sigma_0} x^{-\sigma_0}$, если $x \geq x_1$; $f_-(x) \equiv 0$ если $x \geq x_1$, $f_-(x) \equiv d - dx_1^{\sigma_0} x^{-\sigma_0}$, если $x \leq -x_1$. Таким образом, условия леммы 3 выполнены. Значит решение существует. Существование решения краевой задачи (4), (4*) было доказано Ю. А. Клоковым в работе [9].

§ 3. МАЖОРИРОВАНИЕ В УЗКИХ ПОЛОСКАХ

Как показывает следствие из леммы 3, при наличии «хороших» мажорирующих функций в областях, мало отличающихся при больших x от π мы можем доказать существование решения. Часто, однако, трудно подобрать достаточно простые мажоранты с нужными свойствами, в то время как в каждой узкой полоске существует своя мажоранта, поддающаяся исследованию. В некоторых таких случаях помогает теорема 1, сформулированная в § 1. Приведем ее доказательство. Для этого нам понадобится лемма 4.

Лемма 4. Если для любого числа $\gamma (P \leq q_0 < \gamma \leq Q)$ найдутся сколь угодно малые ε и $\delta (0 < \delta \leq \varepsilon)$ такие, что при $x_0 > A(\gamma, \varepsilon, \delta)$ выполняется неравенство $t^-(x_0, \gamma, \varepsilon, \delta) \leq 0$, то все решения уравнения (1*), лежащие

при $x > A$ в π , либо имеют предел при $x \rightarrow +\infty$, либо удовлетворяют неравенству $\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) \leq q_0$.

Доказательство. Обозначим $\overline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} y(x) = \gamma_2$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = \gamma_1$, и пусть

$\gamma_2 > \gamma_1$, $\gamma_2 > q_0$. По условию найдутся $\varepsilon < \frac{\gamma_2 - \gamma_1}{2}$ и $\delta < \varepsilon$ такие, что для достаточно больших x_0 справедливо $m^-(x_0, \gamma_2, \varepsilon, \delta) \leq 0$. Но так как $\gamma_2 > \gamma_1$, то найдется последовательность точек $x_i \rightarrow +\infty$ такая, что $y(x_i) = \gamma_2 - \delta$, $y'(x_i) \geq 0$. Возьмем x_{i_0} столь большим, что при $x \geq x_{i_0}$ выполнялось неравенство $y(x) < \gamma_2 + \varepsilon$. Тогда, применяя теорему сравнения, получим при $x \geq x_{i_0}$

$$y(x) \geq M^-(x, x_{i_0}, \gamma_2, \varepsilon, \delta) \geq \gamma_2 - \frac{\gamma_2 - \gamma_1}{2} \geq \gamma_1 + \varepsilon,$$

что противоречит определению γ_1 .

Лемма 4*. Если для любого числа γ ($P \leq \gamma < h \leq Q$) найдутся сколь угодно малые $\varepsilon > 0$ и $0 < \delta < \varepsilon$ такие, что при $x_0 > A(\gamma, \varepsilon, \delta)$ выполняется неравенство $m^+(x_0, \gamma, \varepsilon, \delta) \geq 0$, то все решения уравнения (1*), лежащие при $x > A$ в π , либо имеют предел при $x \rightarrow +\infty$, либо $\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) \geq h$.

Доказательство леммы 4* аналогично доказательству леммы 4. Из лемм 4 и 4* следует, что при выполнении условий теоремы 1 существуют $\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x, \alpha^0)$.

Лемма 5. Пусть для любого числа γ ($P \leq q_0 < \gamma \leq Q$) найдутся сколь угодно малые $\varepsilon > 0$ и $0 < \delta < \varepsilon$, такие, что при $x_0 > A(\gamma, \varepsilon, \delta)$

выполняется неравенство $m^-(x_0, \gamma, \varepsilon, \delta) \leq 0$ и $\int_{x_0}^{\infty} m^-(x_0, \gamma, \varepsilon, \delta) dx = -\infty$. Тогда если $y_n(0) \rightarrow d$, $y_n(x) \rightarrow y(x)$, $\lim_{x_n \rightarrow +\infty} y_n(x_n) \leq q_0$, то $\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) \leq q_0$.

Доказательство. Из леммы 5 следует, что $\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) \leq q_0$ или $\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) > q_0$. В первом случае лемма 5 доказана; рассмотрим второй случай. Пусть $\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = \gamma_0$. По условию теоремы 1 по γ_0 и $0 < \varepsilon < \frac{\gamma_0 - q_0}{2}$

найдутся A и δ такие, что $m^- \leq 0$ при $x_0 > A$; $\int_{x_0}^{\infty} m^- dx = -\infty$. Так как неравенство $y'(x) \leq m^-(x, \gamma_0, \varepsilon, \delta)$ для всех больших x противоречит тому, что $\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) > -\infty$, то найдутся точки $\xi_i \rightarrow \infty$ такие, что $y'(\xi_i) > m^-(\xi_i, \gamma_0, \varepsilon, \delta)$. Из того, что $y_i(x) \rightarrow y(x)$ следует, что для $n_i > N_i$ имеем $y'_{n_i}(\xi_i) > m^-(\xi_i, \gamma_0, \varepsilon, \delta)$, $y_{n_i}(\xi_i) > \gamma_0 - \delta$. Но $y_{n_i}(x_{n_i}) \leq q_0 + \varepsilon$, поэтому в некоторой точке $\xi_{n_i} < x_{n_i}$ функция $y_{n_i}(x)$ достигает максимума γ_{n_i} ($\gamma_{n_i} > \gamma_0 - \delta > q_0$). Обозначим $\lim_{x_i \rightarrow +\infty} \gamma_{n_i} = \gamma_2 > q_0$. Дальнейшее доказательство проводится так же, как в лемме 4.

Лемма 5*. Пусть для любого числа γ ($P \leq \gamma < h \leq Q$) найдутся сколь угодно малые $\varepsilon > 0$ и $0 < \delta < \varepsilon$ такие, что при $x_0 > A$ выполняется

неравенство $m^+(x_0, \gamma, \varepsilon, \delta) \geq 0$, $\int_{x_0}^{\infty} m^+(x_0, \gamma, \varepsilon, \delta) dx = +\infty$. Тогда, если $y_n(x) \rightarrow y(x)$, $\lim_{x_n \rightarrow +\infty} y_n(x_n) \geq h$, то $\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) \geq h$.

Из лемм 4 и 4* следует, что $\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x, \alpha^0)$ существует, из лемм 5 и 5* — что $\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x, \alpha^0) = 0$. Теорема 1 полностью доказана.

§ 4. ПРИМЕНЕНИЯ ТЕОРЕМЫ 1

Введем обозначение $Q^- = \lim_{x \rightarrow +\infty} \max_{x \geq x_0} \{\gamma - \delta - M^-(x, x_0, \gamma, \varepsilon, \delta)\}$.

Аналогично определяется $Q^+(\gamma, \varepsilon, \delta)$.

Лемма 6. Пусть $m^-(x_0, \gamma, \varepsilon, \delta) \leq 0$ при $x > A$, $Q^-(\gamma, \varepsilon, \delta) > 0$. Тогда

$$\int_A^\infty m^- dx_0 = -\infty.$$

Доказательство. Предположим, что $\int_A^\infty m^- dx_0 > -\infty$. Но $m^-(x, \gamma, \varepsilon, \delta) \leq M^-(x, x_0, \gamma, \varepsilon, \delta)$ при $x > x_0$, $|\gamma - M^-| < \varepsilon$. Значит, $\int_A^\infty m^- dx_0 \leq -\frac{Q^-}{2}$, когда $x_0 \rightarrow +\infty$, что противоречит сходимости интеграла.

Лемма 6*. Пусть $m^+(x_0, \gamma, \varepsilon, \delta) \geq 0$ при $x > A$, $Q^+(\gamma, \varepsilon, \delta) < 0$. Тогда $\int_A^\infty m^+ dx_0 = +\infty$.

Лемма 7. Рассмотрим уравнения

а) $y'' = a(x)y'$;

б) $y'' = \Psi(x)$.

Предположим, что для этих уравнений выполнены условия

а) $\int_A^x \exp\left[-\int_A^t a(t) dt\right] dx < \infty$;

б) $\int_A^\infty x\Psi(x) dx = +\infty$;

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} \inf_{x \geq A} \int_A^x dt \int_A^t \Psi(s) ds \geq 0.$$

В этих случаях $m^- \leq 0$, $\int_A^\infty m^- dx_0 = +\infty$ для всех γ .

Доказательство. а) Имеем $y = y_0 + c \int_{x_0}^x \exp\left[-\int_A^t a(t) dt\right] dx$. Мы видим, что при любом x_0 $M^-(x, x_0, \gamma, \varepsilon, \delta) \rightarrow \gamma - \varepsilon$, т.е. применима лемма 6.

б) Рассмотрим семейство $y(x, \alpha, x_0) = \gamma - \delta + \alpha(x - x_0) + \int_{x_0}^x dt \int_{x_0}^t \Psi(s) ds$ решений уравнения (б). Пусть $\{\alpha_\omega\}$ — множество таких α , что $y(x, \alpha, x_0) \geq \gamma - \varepsilon$ при всех $x \geq x_0$; $y'(\xi, \alpha, x_0) \geq 0$ при некотором $\xi > x_0$, и пусть $\omega = \inf \{\alpha_\omega\}$.

Возможен случай $\min_{x \geq x_0} y(x, \omega, x_0) = \gamma - \varepsilon$, либо $y(x, \omega, x_0) > \gamma - \varepsilon + \varepsilon_1$, где $\varepsilon_1 > 0$. Рассмотрим второй случай. Если функция $y(x, \omega, x_0)$ имеет в точке $\xi(\alpha)$ экстремум, меньший γ , то

$$\int_{x_0}^{\xi(\alpha)} (s - x_0) \Psi(s) ds \leq \gamma + \varepsilon, \quad \int_{x_0}^{\xi(\alpha)} \Psi(s) ds = -\alpha.$$

Отсюда и из условия (б) можно заключить, что если $|\alpha - \omega| < 1$, то $|\xi(\alpha)| < \infty$. Если бы при всех $x \geq x_0$ имело место неравенство $y'(x, \omega, x_0) \leq 0$, то мы сразу получили бы $\xi(\alpha_k)_{\alpha_k \rightarrow \omega} \rightarrow +\infty$, что, как мы

видели, невозможно. Значит, в некоторой точке $\xi_0 > x_0$ имеем $y'(\xi_0, \omega, x_0) > 0$. Увеличим ξ_0 так, чтобы при $x_2 > x_1 > \xi_0$ выполнялось $\int_{x_1}^{x_2} dt \int_{x_1}^t \Psi(s) ds > -\frac{\varepsilon_1}{2}$. Из всего сказанного заключаем, что $\{\alpha_\omega\}$ содержит и некоторые α , меньшие ω , что противоречит определению ω . Значит $\min_{x > x_0} y(x, \omega, x_0) = \gamma - \varepsilon$, $Q^- = \varepsilon - \delta$, и можно применить лемму 6.

Следствия из теоремы 1 и леммы 7.

1. Пусть $F(x, 0, 0) \leq 0$, $F(x, y, 0) \geq 0$ при всех $y > 0$, и пусть для любых ε, d, b ($\varepsilon > 0$, $0 < b < d$) найдется A такое, что если $x > A$, $b \leq y \leq d$, $-\varepsilon \leq z \leq 0$, выполняются неравенства $F(x, y, z) \geq \Psi_{\varepsilon, d, b}(x) \geq 0$, $\int_{-\infty}^{\infty} x \Psi(x) dx = +\infty$. Тогда краевая задача (1) разрешима. Этот результат был получен другим методом в работе [2]. Приведем некоторое обобщение этого результата.

Пусть $F(x, 0, 0) \leq 0$, $F(x, y, 0) \geq 0$ при всех $y > 0$, и пусть для любых ε и b ($\varepsilon > 0$, $0 < b \leq d$) найдется A такое, что при $x > A$, $|y - b| < \varepsilon$, $0 \geq z \geq \varepsilon -$ выполнено неравенство $F(x, y, z) \geq \Psi_{\varepsilon b}(x)$, $\lim_{x_0 \rightarrow +\infty} \int_{x_0}^x dt \int_{x_0}^t \Psi_{\varepsilon b}(s) ds \geq 0$, то краевая задача (1) разрешима.

2. Пусть $F(x, y, y') = y' \Psi(y, y') + \varphi(y)$, $\varphi(y) > 0$ при $y > 0$, $\varphi(0) = 0$. Тогда краевая задача (1) разрешима. Имеем $F_+(x) \equiv d$, $F_-(x) \equiv 0$, $F_1^- = \min \varphi(y) - \varepsilon = c_0(\gamma) > 0$, $m^- = -c_1(\gamma) < 0$.

$$|y - \gamma| > \frac{\gamma}{2}$$

Таким образом, условия теоремы 1 выполнены. Этот результат получен Ю. Д. Клоковым в работе [3]. Здесь дается другое доказательство этого результата.

3. Пусть $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} F(x, 0, 0) = 0$, $F_y \geq \alpha > 0$, $|F_z| \leq k$, $|F(x, 0, 0)| \leq M$.

Существование решения, удовлетворяющего неравенству $|y| \leq \frac{M}{\alpha}$ и стремящегося при $x \rightarrow \pm\infty$ к нулю, было доказано в работе [7]. Здесь дается другое доказательство этого результата.

$$\text{Имеем } f_+(x) \equiv \frac{M}{\alpha}, \quad f_-(x) \equiv -\frac{M}{\alpha}.$$

Для $\gamma > 0$ $F_1^- = \frac{\alpha\gamma}{2}$, $F_1^+ = 2\alpha\gamma$, для $\gamma < 0$ $F_1^- = 2\alpha\gamma$, $F_1^+ = \frac{\alpha\gamma}{2}$. Как и ранее, построим последовательность решений краевой задачи $y_n(x_n) = 0$, $y_n(-x_n) = 0$, $x_n \rightarrow \infty$ и сделаем предельный переход по подпоследовательности $y_{n_i}(x) \rightarrow y(x)$.

Из теоремы 1 следует, что $\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} y(x) = 0$ (во втором случае надо сделать замену $x = -t$, а затем применить лемму 5, 5*, 4, 4*).

Комбинируя теорему 1 и лемму 7, можно получить некоторые обобщения приведенных результатов.

Пример 1. Рассмотрим для уравнения

$$y'' = \Psi(x) \varphi(y) \quad (5)$$

краевую задачу (1).

Пусть выполнены условия $\psi = \psi_+ + \psi_-$, $\varphi(0) = 0$, $\varphi(y) > 0$ при $y > 0$,
 $\int_0^\infty x\psi(x)dx = +\infty$.

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} I_q(A) \geq 0, \text{ где } I_q(A) = \min_{x \geq A} \int_A^x dt \int_A^t [(1+q)\psi_- + \psi_+] ds, \psi_- \leq 0, \psi_+ \geq 0. \quad (6)$$

При этих предположениях существует решение уравнения (5), положительное при больших x и стремящееся к нулю. Если существует функция $M(y) > 0$ такая, что для больших y справедливо неравенство

$$\begin{aligned} \Phi_M(y) \int_a^x dt \int_a^t \psi_-(s) ds + \varphi_M(y) \int_a^x dt \int_a^t \psi_+(s) ds \geq M(y) - y \\ \Phi_M(y) = \max_{M(y) < t < y} \varphi(t), \quad \varphi_M(y) = \min_{M(y) < t < y} \varphi(t), \end{aligned} \quad (7)$$

то краевая задача (1) имеет положительное решение при всех $d > 0$.
 Для доказательства этого нам понадобится.

Лемма 8. Если выполнено условие (7) и если некоторое решение уравнения (5) удовлетворяет условиям $y(\xi) = A_0$, $y'(\xi) \geq 0$, A_0 велико, то $y(x) > 0$ при $x > \xi$.

Доказательство. Оценим Δy на интервале (ξ, x)

$$\Delta y = \Phi_M(y) \int_\xi^x dt \int_\xi^t \psi_-(s) ds + \varphi_M(y) \int_\xi^x dt \int_\xi^t \psi_+(s) ds \geq M(A_0) - A_0.$$

Эта оценка верна до тех пор, пока $M(A_0) \leq y \leq A_0$, т. е. до тех пор, пока $y \leq A_0$. Пусть теперь $y(\xi_0) = 0$ при некотором $\xi_0 > \xi$. Возьмем наименьшее такое ξ_0 и ближайшую к ξ_0 справа точку ξ_1 максимума $y(\xi)$, в которой $y(\xi_1) > A_0$. Оценка, аналогичная приведенной, дает $y(\xi_0) > 0$. Лемма доказана.

Рассмотрим семейство решений уравнения (5), удовлетворяющих условию $y(0) = d + A_0$ и $y(x) > A_0$, $y'(x) > 0$ хотя бы при одном $x > 0$. Точную нижнюю грань таких решений обозначим $f_+(x)$. Из леммы 7 и определения $f_+(x)$ следует, что $f_+(x) > 0$, $|f_+(x)| \leq B$. Положим $f_-(x) \equiv 0$. Очевидно, что $f_+(x)$ и $f_-(x)$ удовлетворяют условиям «А». Существование положительного решения следует из леммы 7 и теоремы 1.

Отметим, что если $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(y)$ конечен, то существование решения следует из условия (6). Если же $\varphi(y) \equiv y$, то (7) можно заменить условием

$$\int_a^x dt \int_a^t \Psi_-(s) ds + q \int_a^x dt \int_a^t \Psi_+(s) ds \geq q - 1 \quad (q < 1). \quad (8)$$

Если выполнено только условие (6), то рассмотрим вспомогательное уравнение $y'' = \varphi^*(y) \Psi(x)$, где $\varphi^*(y) = \varphi(y)$ при $y \leq 1$, $\varphi^*(y) = \varphi(1)$ при $y < 1$. Это уравнение имеет, по доказанному, решение, стремящееся к нулю. Значит, такое решение есть и у исходного уравнения.

Условие (7) понадобилось лишь для того, чтобы обеспечить разрешимость конечной краевой задачи, его можно заменить требованием существования ограниченного положительного решения, удовлетворяющего условию $y(0) \geq d$.

Как показывают простые примеры, его нельзя отбросить, так как условия (6) не обеспечивают существования положительного решения краевой задачи (1).

В заключение приношу благодарность М. А. Красносельскому, А. Ю. Левину, Г. Я. Любарскому и А. И. Перову, сделавшим ряд ценных замечаний.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дж. Сансоне. Обыкновенные дифференциальные уравнения, т. II, Изд-во иностр. лит. стр. 376—380, 1954.
 2. B. Hartman, A. Wintner. On the non increasing solutions of $y'' = f(x, y, y')$. Amer. j. Math., 73. 1951.
 3. Ю. А. Клоков. Одна продольная задача для уравнения $\ddot{x} + \dot{x}f(x, \dot{x}) + \varphi(x) = 0$. «Известия высших учебных заведений», 1959, № 6 (13).
 4. R. Inglisch. Elementarer Existenzbeweis für die Strömung in der laminaren Grenzschicht ZAMM, 33 (1953).
 5. Г. В. Щербина. Об одной краевой задаче для квазилинейных дифференциальных уравнений. Записки мех-матем. факультета ХГУ, г. Харьков, т. XXVIII, серия 4.
 6. Г. В. Щербина. Об одной краевой задаче для уравнения Блазиуса. ДАН СССР, 1961, № 2, т. 140.
 7. М. Белова. Об ограниченных решениях нелинейного дифференциального уравнения 2-го порядка. Матем. сб.» т. 56,4 1962).
 8. Г. В. Щербина. Сингулярная краевая задача для нелинейного дифференциального уравнения второго порядка на полуоси и оси. Автореф. канд. дисс. 1963
 9. Ю. А. Клоков. Краевые задачи на $\pm\infty$. ДАН СССР, 1961, т. 139, № 4.
-

О ПРЕОБРАЗОВАНИИ КРОККО В ТЕОРИИ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

А. Г. Боев

В теории пограничного слоя известен ряд преобразований, которые позволяют либо найти точное решение задачи (автомодельные преобразования), либо привести задачу к более простой. К последнему типу относится и преобразование Л. Крокко [1]. Это преобразование заменяет задачу отыскания скорости $\mathbf{v}$, температуры T (функций переменных x, y), задачей отыскания величины $\tau = \mu \frac{\partial v_1}{\partial y}$, температуры T , (функций переменной x и продольной составляющей скорости v_1). Уравнения, в которые переходит система пограничного слоя в результате преобразования, носят название уравнений Крокко. Уравнения Крокко применяются в приближенных методах теории пограничного слоя: на обобщенных интегральных соотношениях, использующих эти уравнения, основан метод машинного счета, предложенный А. А. Дородницыным [2]. Применение уравнений Крокко позволяет упростить решение задачи пограничного слоя с поверхностями раздела или под поверхностью ударной волны, вид которой не задан, а является одним из неизвестных задачи.

В предлагаемой работе содержится обобщение преобразования Крокко на пространственные нестационарные уравнения пограничного слоя в обычной и магнитной гидродинамике. Для уравнений магнитогидродинамического пограничного слоя найдены интегралы, аналогичные интегралу Крокко; решена задача о магнитогидродинамическом пограничном слое на полубесконечной пластине под поверхностью раздела.

1. Пусть некоторое твердое тело S обтекается потоком вязкой электропроводящей жидкости газа так, что при этом число Рейнольдса $R \gg 1$, а магнитное число $R_m \ll 1$. Пусть ось y направлена по нормали к поверхности тела, оси x и z взаимно-ортогональны и лежат в соприкасающейся плоскости. В этих координатах поверхности тела соответствует значение $y = 0$, внешнему потоку $-y \rightarrow \infty$, пограничному течению — область $0 \leq y < \infty$.

Рассмотрим преобразование

$$\xi = x, \quad \eta = \int_0^y \frac{dy}{w}, \quad \zeta = z, \quad t = t, \quad (1.1)$$

где $w(x, y, z, t)$ — пока произвольная функция. Уравнения пограничного слоя в координатах (1.1) при условии $R_m \ll R$, $\vec{H}(0, H_0, 0)$ будут иметь вид [3]

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial v_\alpha}{\partial t} + \rho v^k \frac{\partial v_\alpha}{\partial \xi^k} &= - \frac{\partial p}{\partial \xi^\alpha} + \frac{1}{Vq} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\mu V \bar{q} q^{22} \frac{\partial v_\alpha}{\partial \eta} \right] - \frac{\sigma (H_2)^2}{c^2 g} v_\alpha \\ \frac{\partial}{\partial t} (\rho \sqrt{g}) + \frac{\partial}{\partial \xi^k} (\rho \sqrt{g} v^k) &= 0, \quad (\alpha = 1, 3; k = 1, 2, 3), \\ \rho \frac{\partial h}{\partial t} + \rho v^k \frac{\partial h}{\partial \xi^k} &= \frac{dp}{dt} + \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\frac{\mu}{P} g^{22} \sqrt{g} \frac{\partial h}{\partial \eta} \right] + \mu g^{22} \left[\left(\frac{\partial v_1}{\partial \eta} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_3}{\partial \eta} \right)^2 \right] + \\ &+ \frac{\sigma (H_2)^2}{c^2 g} (v_1^2 + v_3^2). \end{aligned} \quad (1.2)$$

Здесь ρ — плотность, p — давление, h — энтальпия, μ , σ — соответственно вязкость и проводимость жидкости, g^{ik} — компоненты метрического тензора

$$g^{ik} = \begin{pmatrix} 1 & -\omega^{-1} \partial y / \partial \xi & 0 \\ -\omega^{-1} \partial y / \partial \xi & \omega^{-2} & -\omega^{-1} \partial y / \partial \zeta \\ 0 & -\omega^{-1} \partial y / \partial \zeta & 1 \end{pmatrix}.$$

Якобиан преобразования определяется формулой $\sqrt{g} = \omega$. Верхним индексом обозначены контравариантные составляющие векторов, нижним — ковариантные.

Выберем ω в виде

$$1/\omega = \frac{\partial v_1}{\partial y} = \frac{\tau}{\mu}, \quad \left(\tau \equiv \mu \frac{\partial v_1}{\partial y} \right). \quad (1.3)$$

Преобразование (1.1) при этом выглядит так (преобразование Крокко)

$$\xi = x, \quad \eta = v_1, \quad \zeta = z, \quad t = t.$$

Система (1.2) переходит при этом в следующую

$$\rho v^2 = -\frac{\partial p}{\partial \xi} + \frac{\tau}{\mu} \frac{\partial \tau}{\partial \eta} - m^2 \eta \frac{\tau^2}{\mu} \frac{\mu_0}{\mu} \quad \left(m^2 = \frac{(H_0)^2 \sigma}{c^2 \mu_0} \right), \quad (1.4)$$

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial v_3}{\partial t} + \rho \eta \frac{\partial v_3}{\partial \xi} + \rho v^2 \frac{\partial v_3}{\partial \eta} + \rho v^3 \frac{\partial v_3}{\partial \zeta} = & -\frac{\partial p}{\partial \zeta} + \frac{\tau}{\mu} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\tau \frac{\partial v_3}{\partial \eta} \right) - \mu_0 m^2 \left(\frac{\tau}{\mu} \right)^2 v_3 \\ & - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho \mu}{\tau} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi^k} \left(\frac{\rho \mu}{\tau} v^k \right) = 0, \end{aligned} \quad (1.5)$$

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial h}{\partial t} + \rho \eta \frac{\partial h}{\partial \xi} + \rho v^2 \frac{\partial h}{\partial \eta} + \rho v^3 \frac{\partial h}{\partial \zeta} = & \frac{dp}{d\zeta} + \frac{\tau}{\mu} \frac{\partial h}{\partial \eta} \left(\frac{\tau}{p} \frac{\partial h}{\partial \eta} \right) + \frac{\tau^2}{\mu} \left[1 + \left(\frac{\partial v_3}{\partial \eta} \right)^2 \right] + \\ & + m^2 \left(\frac{\tau}{\mu} \right)^2 [\eta^2 + v_3^2] \mu_0. \end{aligned}$$

Исключая v^2 , получим окончательно систему

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \tau}{\partial \eta^2} - \frac{\partial p}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\mu}{\tau} \right) + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho \mu}{\tau} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\rho \mu}{\tau} \eta \right) + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{\rho \mu}{\tau} v^3 \right) - \mu_0 m^2 \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\eta \tau \frac{\mu_0}{\mu} \right) = 0, \\ \frac{\partial^2 v_3}{\partial \eta^2} - \frac{\mu \rho}{\tau^2} \left(\frac{\partial v_3}{\partial t} + \eta \frac{\partial v_3}{\partial \xi} + v_3 \frac{\partial v_3}{\partial \zeta} \right) + \frac{\mu}{\tau} \left(\frac{\partial v_3}{\partial \eta} \frac{\partial p}{\partial \xi} - \frac{\partial p}{\partial \zeta} \right) + m^2 \frac{\mu_0}{\mu} \eta^2 \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{v_3}{\eta} \right) = 0 \\ P^{-1} \frac{\partial^2 h}{\partial \eta^2} + (P^{-1} - 1) \frac{\partial h}{\partial \eta} \frac{\partial \tau}{\partial \eta} \frac{1}{\tau} + \frac{\mu}{\tau^2} \left(\frac{dp}{dt} + \frac{\partial p}{\partial \xi} \frac{\partial h}{\partial \eta} \right) \frac{\mu}{\tau^2} + 1 + \left(\frac{\partial v_3}{\partial \eta} \right)^2 - \\ - \frac{\rho \mu}{\tau^2} \left(\frac{\partial h}{\partial t} + \eta \frac{\partial h}{\partial \xi} + v_3 \frac{\partial h}{\partial \zeta} \right) + m^2 \frac{\mu_0}{\mu} \left(\eta \frac{\partial h}{\partial \eta} + \eta^2 + v_3^2 \right) = 0 \end{aligned} \quad (1.6)$$

с граничными условиями

$$\left. \begin{aligned} h = h_s, \quad \frac{\tau}{\mu} \frac{\partial \tau}{\partial \eta} = \frac{\partial p}{\partial \xi}, \quad v_3 = 0 \quad \text{при} \quad v_1 = 0 \\ h \rightarrow h_e, \quad \tau \rightarrow 0, \quad v_3 \rightarrow U_3 \quad \text{при} \quad v_1 \rightarrow U_1 \end{aligned} \right\} t > 0. \quad (1.7)$$

В случае плоского стационарного течения $\left(\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \zeta} = v_3 = 0 \right)$ непроводящей жидкости уравнения (1.6) переходят в известные уравнения Крокко. Воспользовавшись связью между параметрами адиабатически заторможенного, внешнего и пограничных потоков [4]

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{h_0}{h} B^{1/\gamma-1}, \quad \frac{\rho_e}{\rho} = B, \quad B \equiv 1 - \frac{U^2 + \partial \tau / \partial t}{\gamma + 1/\gamma - 1 a_*^2} \quad (1.8)$$

(ρ_0 , h_0 — параметры адиабатически заторможенного потока ρ_e , U — плотность и скорость внешнего потока, γ — показатель изэнтропы), можно легко исключить плотность из уравнений (1.6). В частности, уравнения

описывающее плоское стационарное течение электропроводящего газа, будут иметь вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \tau}{\partial \eta^2} - \rho_0 \mu_0 B \left(\frac{1}{\rho_e} \frac{\partial p}{\partial \xi} \right) \frac{\partial}{\partial \eta} (a \tau^{-1}) + \rho_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{h_0}{h} \frac{a}{\tau} B^{1/\gamma-1} \right] - m^2 \frac{\partial}{\partial \eta} [\eta \tau a^{-1}] = 0, \\ P^{-1} \frac{\partial^2 h}{\partial \eta^2} + \frac{1}{\tau} \frac{\partial \tau}{\partial \eta} \frac{\partial h}{\partial \eta} (P^{-1} - 1) + \rho_0 \mu_0 \frac{aB}{\tau} \left(\eta + \frac{\partial h}{\partial \eta} \right) \left(\frac{1}{\rho_e} \frac{\partial p}{\partial \xi} \right) + 1 - \\ - \frac{\rho_0 \mu_0}{\tau^2} \frac{h_0}{h} B^{1/\gamma-1} \eta a \frac{\partial h}{\partial \xi} + m^2 a^{-1} \eta \left(\eta + \frac{\partial h}{\partial \eta} \right) = 0 \\ \left(a(h) \equiv \frac{\mu \rho}{\mu_0 \rho_0} = \left(\frac{h}{h_0} \right)^{n-1} \right). \end{aligned} \quad (1.9)$$

Для пограничного течения на пластине $\partial p / \partial \xi = 0$ при числе Прандтля $P = 1$ система (1.9) допускает решение вида

$$\tau = \tau(\xi, \eta), \quad h = h(\eta).$$

При этом второе уравнение приводится к следующему (штрих означает дифференцирование по η):

$$h'' + 1 + m^2 \eta a \left(\frac{h}{h_0} \right) (\eta + h') = 0. \quad (1.10)$$

Для течения непроводящей жидкости оно имеет решение (интеграл Крокко)

$$h = -\frac{1}{2} v_1^2 + A_1 v_1 + A_2, \quad (1.11)$$

при этом зависимость вязкости от температуры может быть любой. При $m \neq 0$ и $a \left(\frac{h}{h_0} \right) = 1$, что соответствует предположению о линейной зависимости вязкости от температуры, решение уравнения (1.10) имеет вид

$$h = A_1 \int_0^\eta \exp \left[-\frac{m^2 \tau^2}{2} \right] d\eta - \int_0^\eta dx \int_0^x (1 + m^2 t^2) \exp \left[\frac{m^2}{2} (t^2 - x^2) \right] dt + A_2 \quad (1.12)$$

(A_1, A_2 — постоянные интегрирования. При $m \rightarrow 0$ (1.12) переходит в (1.11))

2. В качестве примера применения полученных выше уравнений рассмотрим задачу о магнитогидродинамическом пограничном слое на пластине под поверхностью раздела между двумя жидкостями.

Полубесконечная пористая пластина ($x \geq 0, y = 0$) обтекается плоским однородным потоком ($U = \text{const}$) электропроводящей жидкости I постоянной плотности ρ_1 , вязкости μ_1 , электропроводности (I). Сквозь поры пластины подается другая жидкость II с физическими свойствами (плотностью ρ_2 , вязкостью μ_2 и т. д.), сильно отличающимися от свойств основного потока жидкости I, так что при этом выполняется условие

$$\frac{\mu_2}{\rho_2} \gg \frac{\mu_1}{\rho_1}. \quad (2.1)$$

Задача состоит в нахождении пограничного течения жидкости I в области, ограниченной стенкой $y = 0$, и поверхностью раздела $y = \delta(x)$, вид которой неизвестен; пограничного течения жидкости II в области $\delta(x) \leq y < \infty$. Решения обеих задач должны сопрягаться на поверхности раздела $y = \delta(x)$. Условиями сопряжения будут служить [5]

$$v_1^I = v_1^{II}, \quad \mu_1 \frac{\partial v_1^I}{\partial y} = \mu_2 \frac{\partial v_1^{II}}{\partial y}, \quad p_I = p_{II}. \quad (2.2)$$

Ввиду условия (2.1) «толщины» пограничных слоев будут величинами разных порядков

$$\Delta_1/\Delta_2 \sim \frac{\sqrt{R_2}}{\sqrt{R_1}} = \sqrt{\frac{\nu_1}{\nu_2}} \ll 1 \quad \left(\nu = \frac{\mu}{\rho}\right), \quad (2.3)$$

и поэтому задача может быть сведена к рассмотрению пограничного слоя жидкости II, отделенного от внешнего потока поверхностью раздела $y = \delta(x)$. Условия (2.2) при этом имеют вид

$$v_1^{\text{II}} = U, \quad \mu_2 \frac{\partial v_1^{\text{II}}}{\partial y} = 0, \quad p_{\text{II}} = \text{const.}$$

В обычной постановке задача нахождения пограничного течения сводится к решению двух связанных между собой систем

$$\begin{aligned} v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x} + v_2 \frac{\partial v_1}{\partial y} &= \nu \frac{\partial^2 v_1}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} = 0 \\ v_1 &= 0, \quad \rho v_2 = A(x) \quad \text{при } y = 0 \\ \text{и } v_1 &= U \quad \text{при } y = \delta(x), \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$v_1 \frac{\partial \delta}{\partial x} + v_2 = 0.$$

Рассмотрим теперь постановку этой задачи в переменных Крокко. Уравнения движения и граничные условия запишутся в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \tau}{\partial \eta^2} + \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\rho \mu}{\tau} \eta \right) - m^2 \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\eta \frac{\tau}{\mu} \right) &= 0, \\ \tau|_{\eta=0} &= 0, \quad \frac{\partial \tau}{\partial \eta}|_{v_1=0} = A(x). \end{aligned} \quad (2.5)$$

Поверхность $y = \delta(x)$ в формулировку задачи явно не входит, и это избавляет нас от необходимости решать дополнительную задачу, связанную с определением вида поверхности. Вводя новую переменную

$$\eta_1 = \frac{v_1}{U} = \frac{\eta}{U} \quad (2.6)$$

и отыскивая решение (2.5) в виде [6]

$$\tau = x^{-1} g(\eta_1) \sqrt{\mu \rho U^3}, \quad (2.7)$$

придем при условии $A(x) \sim x^{-1/2}$ к обыкновенному дифференциальному уравнению (штрих означает дифференцирование по η_1)

$$g'' + \eta_1/2g - m^2(\eta_1 g)' = 0, \quad (2.8)$$

$$g(1) = 0, \quad g'(0) = b, \quad \left(b \equiv \frac{A_0}{\sqrt{\mu \rho U^3}}\right). \quad (2.9)$$

Решение (2.8) будем искать методом итераций Г. Вейля [7]. Для решения уравнения Блазиуса Вейль рассматривал последовательность функций, удовлетворяющих уравнению

$$f_n''' + f_{n-1} f_n'' = 0.$$

Он показал, что последовательность $\{f_n\}$ сходится, и любые два последовательных ее члена образуют верхнюю и нижнюю границы для предельной функции. Кроме того,

$$f_1' = f''(0) \exp \left[-\frac{\eta_1^3}{6} f_1''(0) \right]$$

оказывается приемлемым приближением к пределу (отклонение от точного решения, найденного численными методами, составляет 3%). Рассмотрим последовательность функций $\{g_n\}$, удовлетворяющих уравнению

$$g_n'' + \eta_1/2 g_{n-1} - m^2 (\eta_1^2 g_n)' = 0 \quad (2.10)$$

и условиям

$$g_n(1) = 0, \quad g_n'(0) = b.$$

При этом g_1 удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned} g_1'' + \eta_1 (2g_0)^{-1} - m^2 (g_1 \eta_1)' &= 0 \\ g_1(1) &= 0, \quad g_1'(0) = b. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Выберем теперь g_0 в виде

$$g_0 = a_0, \quad (2.12)$$

где a_0 — пока произвольная постоянная. Уравнение (2.11) переходит в следующее:

$$g_1'' + \eta_1 (2a_0)^{-1} - m^2 (\eta_1 g_1)' = 0.$$

Решение его, удовлетворяющее граничным условиям, имеет вид

$$\begin{aligned} g_1(\eta_1) = & -b \int_{\eta_1}^1 \exp \left[-\frac{m^2}{2} (x^2 - \eta_1^2) \right] dx - \frac{1}{4a_0 m} \left\{ \exp \left[-\frac{m^2}{2} (1 - \eta_1^2) \right] - \right. \\ & \left. - \eta_1 - \int_{\eta_1}^1 \exp \left[-\frac{m^2}{2} (x^2 - \eta_1^2) \right] dx \right\}. \end{aligned} \quad (2.13)$$

При $m \rightarrow 0$ (течение непроводящей жидкости) (2.13) переходит в

$$g_1(\eta_1) = b \left(1 - \frac{v_1}{U} \right) + \frac{1}{12a_0} \left[1 - \left(\frac{v_1}{U} \right)^3 \right].$$

Трение на стенке дается выражением

$$\begin{aligned} g_1(0; m; b) = & -bm^{-1} \left(\frac{\pi}{2} \right)^{1/2} \operatorname{erf} \left(\frac{\sqrt{2}}{m} \right) - \frac{1}{4a_0 m} \left[\exp \left(-\frac{m^2}{2} \right) - \right. \\ & \left. - m^{-1} \left(\frac{\pi}{2} \right)^{1/2} \operatorname{erf} \left(\frac{\sqrt{2}}{m} \right) \right] \\ & \left(\operatorname{erf} x = (2/\pi)^{1/2} \int_0^x \exp(-t^2) dt \right). \end{aligned} \quad (2.14)$$

При $m = 0$

$$g_1(0; 0; b) = -b + \frac{1}{12a_0}. \quad (2.15)$$

При $A = 0$ выражение (2.15) должно совпадать со значением задачи Блазиуса [6], т. е.

$$\varphi''(0) = 0,332 = 1/12a_0,$$

отсюда

$$a_0 \cong 0,25. \quad (2.16)$$

Коэффициент полного сопротивления трения пластины длины L равен

$$\begin{aligned} c_f(m; b) = & 4R_L^{1/2} \left\{ -bm^{-1} \left(\frac{\pi}{2} \right)^{1/2} \operatorname{erf} \left(\frac{\sqrt{2}}{m} \right) - m^2 \left[\exp \left(-\frac{m^2}{2} \right) - \right. \right. \\ & \left. \left. - m^{-1} \left(\frac{\pi}{2} \right)^{1/2} \operatorname{erf} \left(\frac{\sqrt{2}}{m} \right) \right] \right\}. \end{aligned}$$

Видно, что он уменьшается при увеличении напряженности магнитного поля H_0 . При $m = m_*$, удовлетворяющем уравнению

$$(b - m_*^{-2}) \left(\frac{\pi}{2} \right)^{1/2} \operatorname{erf} \left(\frac{\sqrt{2}}{m_*} \right) + m_*^{-1} \exp \left(-\frac{m_*^2}{2} \right) = 0,$$

произойдет магнитное отжатие потока от стенки.

Аналогичным образом может быть решена и более общая задача (без предположения (2.1) о свойствах жидкостей) о пограничном слое газов произвольной плотности с поверхностями разрыва и о пограничном слое под ударной волной.

Автор очень благодарен Г. Я. Любарскому, любезно согласившемуся просмотреть работу и сделавшего ряд критических замечаний.

ЛИТЕРАТУРА

1. L. Crocco. Atti di Gidonia, vol 17, № 7, 1939.
2. А. А. Дородницын. Об одном методе решения уравнений ламинарного пограничного слоя. «Ж. прикл. мех. и техн. физ.», т. 1, № 3, 1960.
3. А. Г. Боев, В. Л. Герман. Криволинейные координаты в теории пограничного слоя. «Изв. АН СССР, Механика», № 6, 1966.
4. Н. Е. Кочин, И. А. Кибель, Н. В. Розе. Теоретическая гидромеханика, т. 2. Физматгиз, 1962.
5. Г. Г. Черный. Пограничный слой с поверхностью разрыва. Обтекание пластины с просачиванием жидкости сквозь ее поверхность. ДАН СССР, № 5, т. 100, 1955.
6. Л. Г. Лойцянский. Ламинарный пограничный слой. Физматгиз, 1961.
7. H. Weyl. Concerning the differential equations of some boundary layer problems, Proc. Nath. Acad. Sci. USA, v. 27, № 12, 1941.

ПОГРАНИЧНОЕ ТЕЧЕНИЕ ВЯЗКОГО СЖИМАЕМОГО ГАЗА НА ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЙ ПЛАСТИНЕ С УЧЕТОМ ВЛИЯНИЯ ВЕДУЩЕГО КРАЯ

А. Г. Боев

Решение Блазиуса задачи о пограничном слое на плоской пластине [1] и аналогичной магнитогидродинамической задачи [2] дает выражения для искомых величин, пригодные лишь вдали от ведущего края пластины ($x = y = 0$). Вблизи же края и даже на линии $x = 0$ они имеют особенность. Появление ее вызвано тем, что обычное приближение пограничного слоя не может описать специфики течения вблизи края, где по-видимому преобладают градиенты в радиальном направлении, а $\frac{\partial}{\partial x} \sim \frac{\partial}{\partial y}$. Рассматривая течение вблизи края, Куо [3, 4] отказался от пограничного приближения и рассматривал приближение более высокого порядка (до R^{-1}). Другой путь решения этой задачи связан с именами Н. Е. Кочина [5], Карриера и Лина [6]. Кочин рассматривал пластину как вырожденный параболический цилиндр и интегрировал уравнения Навье-Стокса в параболических координатах; Карриер и Лин построили приближение пограничного слоя в параболических координатах и рассмотрели стационарное течение несжимаемой жидкости. Стационарное течение электропроводящей несжимаемой жидкости изучалось в работе [7]. Преимущества постановки задачи в параболических координатах обсуждались Голдстейном [8] и Темплом [9].

В предлагаемой работе с помощью приближения пограничного слоя в параболических координатах рассматривается аналогичная задача для сжимаемого газа в обычной и магнитной гидродинамике. В работе получены следующие результаты: указано обобщение преобразования А. А. Дороницына на уравнения пограничного слоя в параболических координатах, найдены режимы течения, при которых система пограничного слоя в параболических координатах, найдены режимы течения, при которых система пограничного слоя приводится к системе обыкновенных уравнений, и рассмотрены возможные упрощения ее, связанные с некоторыми предположениями относительно свойств газа.

1. Рассмотрим плоский поток сжимаемого газа плотности ρ , вязкости μ , электропроводности σ , обтекающего полубесконечную пластину $x \geq 0$, $y = 0$, расположенную параллельно основному потоку, в присутствии внешнего магнитного поля $\mathbf{H}_0$. Течение описывается уравнениями магнитной гидродинамики [10]

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \rho v_k \frac{\partial v_i}{\partial x^k} &= - \frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x^k} (p_{ik}') + \frac{1}{4\pi} [\mathbf{H} \operatorname{rot} \mathbf{H}]_i, \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \mathbf{v} &= 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{H} = 0, \\ \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} &= \operatorname{rot} [\mathbf{v} \mathbf{H}] + \frac{c^2}{4\pi\sigma} \Delta \mathbf{H}, \quad p = p(\rho, s), \\ \rho T \frac{ds}{dt} &= \operatorname{div} \left[\frac{\mu c_p}{P} \vec{\nabla} T \right] + \mu (v_{ik})^2 + \frac{c^2}{16\pi^2\sigma} (\operatorname{rot} \mathbf{H})^2. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Здесь p'_{ik} — тензор вязких напряжений, v_{ik} — тензор скоростей деформаций, T — температура, s — энтропия. Граничные условия для течения формулируются так:

для поля скоростей

$$\left. \begin{aligned} v_1 = v_2 = 0, \text{ при } y = 0, \quad x \geq 0 \\ v_1 \rightarrow U(x, t) \text{ при } x^2 + y^2 \rightarrow \infty \end{aligned} \right\} t > 0, \quad (1.2)$$

для поля температур

$$\left. \begin{aligned} T = T_s(x, t) \text{ или } \lambda \frac{\partial T}{\partial y} = q_s(x, t) \text{ при } y = 0, \quad x \geq 0, \\ T \rightarrow T_e(x, t) \text{ при } x^2 + y^2 \rightarrow \infty, \quad t > 0, \end{aligned} \right\} \quad (1.3)$$

для магнитного поля

а) $\sigma_s \ll \sigma$ (непроводящая пластина)

$$H_2 = H_2^{(s)}(x, t), \quad H_1 = H_1^{(s)}(x, t) \text{ при } y = 0, \quad t > 0, \quad (1.4)$$

в) $\sigma_s \gg \sigma$ (идеально проводящая пластина)

$$\frac{\partial H_2}{\partial x} - \frac{\partial H_1}{\partial y} = 0, \quad H_2 = H_2^{(s)} \text{ при } y = 0, \quad t > 0 \quad (1.5)$$

(знак s относится к величинам, заданным на стенке, знак e — к величинам основного потока). Следуя работам [5, 6], будем рассматривать задачу в параболических координатах ξ, τ

$$\left. \begin{aligned} \xi = r^{1/2} \cos \frac{\theta}{2}, \quad \tau = r^{1/2} \sin \frac{\theta}{2}, \\ x = \xi^2 - \tau^2, \quad y = 2\xi\tau, \\ r = (x^2 + y^2)^{1/2}, \quad \theta = \arctg \frac{y}{x}. \end{aligned} \right\} \quad (1.6)$$

Координатные линии $\xi = c$ представляют собой параболы

$$x = c^2 - y^2/4c^2,$$

причем линия $\xi = 0$ вырождается в дважды проходимый отрезок оси x от $-\infty$ до 0. Линии $\tau = c$ также представляют собой параболы

$$x = y^2/4c^2 - c^2;$$

линия $\tau = 0$ вырождается в дважды проходимый отрезок оси x от 0 до $+\infty$. Точкам пластины соответствует линия $\tau = 0$; газ занимает область $\tau > 0$.

Введем новые переменные

$$\xi = \xi, \quad \eta = \int_0^\tau \frac{d\tau}{w(\xi, \tau, t)}, \quad t = t, \quad (1.7)$$

где $w(\xi, \tau, t)$ — пока произвольная функция. Приближение пограничного слоя в этих координатах получим, если запишем в них уравнения (1.1) и будем отыскивать решение в виде [9]

$$\left. \begin{aligned} \xi = \xi^*, \quad \eta = \varepsilon \eta^*, \quad (\varepsilon = R^{-1/2}) \\ v_1 = v_1^*, \quad v_2 = \varepsilon v_2^* \end{aligned} \right\} \quad (1.8)$$

с точностью до ε^2 . Для базисных векторов a_i , метрических тензоров g^{ik} , g_{ik} получим в этом приближении [11]

$$g_{ik} = \begin{pmatrix} 4\xi^2 & 2\xi\omega\tau & 0 \\ 2\xi\omega\tau & 4\xi^2\omega & \omega \frac{\partial \tau}{\partial t} \\ 0 & \omega \frac{\partial \tau}{\partial t} & 1 \end{pmatrix}; \quad g^{ik} = \begin{pmatrix} 1/4\xi^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4\xi^2\omega^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (1.9)$$

$$\bar{a}_1 = 2\xi\bar{e}_1 + 2\tau\bar{e}_2, \quad \bar{a}_2 = 2\xi\omega\bar{e}_2 \quad (1.10)$$

($\bar{e}_i$ — орты декартовых осей). При этом

$$v_1 = 2\xi v_x, \quad v_2 = 2\xi \omega v_y, \quad H_2 = 2\xi \omega H_s.$$

Уравнения пограничного слоя при малых магнитных числах Рейнольдса $R_m \ll 1$ и $H_s(0, H, 0)$ имеют вид

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial v^1}{\partial t} + \rho v^1 \left(\frac{\partial v^1}{\partial \xi} + \frac{v^1}{\xi} \right) + \rho v^2 \frac{\partial v^1}{\partial \eta} = -\rho_e \left[\frac{\partial U^1}{\partial t} + U^1 \left(\frac{\partial U^1}{\partial \xi} + \frac{U^1}{\xi} \right) \right] + \\ + \frac{\mu_0}{4\xi^2 \omega} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\frac{\mu}{\rho_0} \frac{1}{\omega} \frac{\partial v^1}{\partial \eta} \right] + \frac{\sigma (H_2)^2}{c^2} \frac{U^1 - v^1}{16\xi^4 \omega^2}, \\ \frac{\partial}{\partial t} (4\xi^2 \omega \rho) + \frac{\partial}{\partial \xi} (4\xi^2 \omega \rho v^1) + \frac{\partial}{\partial \eta} (4\xi^2 \omega \rho v^2) = 0, \\ \rho \frac{\partial h}{\partial t} + \rho v^1 \frac{\partial h}{\partial \xi} + \rho v^2 \frac{\partial h}{\partial \eta} = \rho_e \left[\frac{\partial h_e}{\partial t} + U^1 \frac{\partial h_e}{\partial \xi} \right] + \frac{\mu}{\omega^2} \left(\frac{\partial v^1}{\partial \eta} \right)^2 + \frac{1}{4\xi^2 \omega} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\frac{\mu}{\omega} \frac{1}{\omega} \frac{\partial h}{\partial \eta} \right] - \\ - \frac{\sigma (H_2)^2}{c^2 \omega^2} (U^1 - v^1) v^1. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Здесь h — энтальпия, P — число Прандтля, U — скорость основного потока; верхним индексом обозначены контравариантные составляющие векторов, нижним — ковариантные.

2. Для исключения плотности из уравнений (1.11) выберем ω в виде

$$\omega = \frac{\rho_0}{\rho}, \quad (2.1)$$

где ρ_0 — плотность адиабатически заторможенного потока. Уравнения (1.11) переходят при этом в такие

$$\begin{aligned} \frac{\partial v^1}{\partial t} + v^1 \left(\frac{\partial v^1}{\partial \xi} + \frac{v^1}{\xi} \right) + v^2 \frac{\partial v^1}{\partial \eta} = \frac{\rho_e}{\rho} \left[\frac{\partial U^1}{\partial t} + U^1 \left(\frac{\partial U^1}{\partial \xi} + \frac{U^1}{\xi} \right) \right] + \\ + \frac{\nu_0}{4\xi^2} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\frac{\rho \mu}{\rho_0 \mu_0} \frac{\partial v^1}{\partial \eta} \right] + \frac{\sigma (H_2)^2}{c^2 4\xi^2} \frac{U^1 - v^1}{\rho_0} \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right), \\ \frac{\partial h}{\partial t} + v^1 \frac{\partial h}{\partial \xi} + v^2 \frac{\partial h}{\partial \eta} = \frac{\rho_e}{\rho} \left[\frac{\partial h_e}{\partial t} + U^1 \frac{\partial h_e}{\partial \xi} \right] + \frac{\nu_0}{4\xi^2} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[P^{-1} \frac{\mu \rho}{\mu_0 \rho_0} \frac{\partial h}{\partial \eta} \right] + \\ + \nu_0 \frac{\mu \rho}{\mu_0 \rho_0} \left(\frac{\partial v^1}{\partial \eta} \right)^2 - \frac{\sigma (H_2)^2}{c^2 \rho_0} \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right) (U^1 - v^1) v^1, \\ \frac{\partial}{\partial \xi} (4\xi^2 \rho_0 v^1) + \frac{\partial}{\partial \eta} (4\xi^2 \rho_0 v^2) = 0. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Воспользовавшись связью между параметрами адиабатически заторможенного, основного и пограничного потоков [12]

$$\frac{\rho}{\rho_e} \frac{h_e}{h}, \quad \frac{\rho}{\rho_0} = \frac{h_0}{h} B^{1/\gamma-1}, \quad B \equiv 1 - \frac{U^2 + \partial \varphi / \partial t}{\gamma + 1/\gamma - 1 a_*^2} \quad (2.3)$$

(φ — потенциал скорости внешнего потока, γ — показатель изэнтропии), получим окончательно

$$\begin{aligned} \frac{\partial v^1}{\partial t} + v^1 \left(\frac{\partial v^1}{\partial \xi} + \frac{v^1}{\xi} \right) + v^2 \frac{\partial v^1}{\partial \eta} = \frac{h}{h_e} \left[\frac{\partial U^1}{\partial t} + U^1 \left(\frac{\partial U^1}{\partial \xi} + \frac{U^1}{\xi} \right) \right] + \frac{\nu_0}{4\xi^2} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[a \left(\frac{h}{h_e} \right) \frac{\partial v^1}{\partial \eta} \right] + \\ + \frac{\sigma (H_2)^2}{4c^2 \xi^2} \frac{U^1 - v^1}{\rho_0} \frac{h_0}{h} B^{1/\gamma-1}, \\ \frac{\partial}{\partial \xi} (4\xi^2 v^1) + \frac{\partial}{\partial \eta} (4\xi^2 v^2) = 0, \quad \left(a \left(\frac{h}{h_0} \right) = \frac{\mu \rho}{\mu_0 \rho_0} \right), \\ \frac{\partial h}{\partial t} + v^1 \frac{\partial h}{\partial \xi} + v^2 \frac{\partial h}{\partial \eta} = \frac{h}{h_e} \left[\frac{\partial h_e}{\partial t} + U^1 \frac{\partial h_e}{\partial \xi} \right] + \frac{\nu_0}{4\xi^2} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[a \left(\frac{h}{h_0} \right) P^{-1} \frac{\partial h}{\partial \eta} \right] + \\ + \nu_0 a \left(\frac{h}{h_0} \right) \left(\frac{\partial v^1}{\partial \eta} \right)^2 - \frac{\sigma (H_2)^2}{c^2 \rho_0} \frac{h_0}{h} (U^1 - v^1) v^1 B^{1/\gamma-1}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Переменные (1.7) имеют вид

$$\xi = \xi; \quad \eta = \int_0^{\tau} \frac{\rho}{\rho_0} d\tau, \quad t = t.$$

Решение системы (2.4) при произвольном виде функций U^1 , H_2 и т. д. входящих в уравнения и граничные условия (задача общего типа), возможно только с помощью численных методов, основанных на интегральных соотношениях. Здесь не будет рассматриваться вопрос решения задачи такого типа, а будут отыскиваться те виды U^1 , h_e , H_2 , при которых система (2.4) приводится к системе обыкновенных уравнений, и необходимость применения интегральных методов отпадает. Задачи такого типа носят название автомодельных.

3. Для приведения системы (2.4) к системе обыкновенных уравнений выберем ω из условия

$$\omega = \frac{\rho_0}{\rho} \psi(\xi), \quad (3.1)$$

где $\psi(\xi)$ — пока произвольная функция только от ξ . Уравнения (1.11) переходят при этом в такие:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v^1}{\partial t} + v^1 \left(\frac{\partial v^1}{\partial \xi} + \frac{v^1}{\xi} \right) + v^2 \frac{\partial v^1}{\partial \eta} &= \frac{\rho_e}{\rho} \left[\frac{\partial U^1}{\partial t} + U^1 \left(\frac{\partial U^1}{\partial \xi} + \frac{U^1}{\xi} \right) \right] + \frac{\gamma_0}{4\xi^2 \psi^2} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\frac{\rho \mu}{\rho_0 \mu_0} \frac{\partial v^1}{\partial \eta} \right] + \\ &\quad \frac{\sigma (H_2)^2}{4c^2 \psi^2 \xi^2} \frac{U^1 - v^1}{\rho_0} \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right), \\ \frac{\partial}{\partial \xi} (4\xi^2 \psi \rho_0 v^1) + \frac{\partial}{\partial \eta} (4\xi^2 \psi \rho_0 v^2) &= 0, \\ \frac{\partial h}{\partial t} + v^1 \frac{\partial h}{\partial \xi} + v^2 \frac{\partial h}{\partial \eta} &= \frac{\rho_e}{\rho} \left(\frac{\partial h_e}{\partial t} + U^1 \frac{\partial h_e}{\partial \xi} \right) + \frac{\gamma_0}{4\xi^2 \psi^2} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[P^{-1} \frac{\mu \rho}{\mu_0 \rho_0} \frac{\partial h}{\partial \eta} \right] + \\ &\quad + \frac{\gamma_0}{\psi^2} \frac{\mu \rho}{\mu_0 \rho_0} \left(\frac{\partial v^1}{\partial \eta} \right)^2 - \frac{\sigma (H_2)^2}{c^2 \rho_0 \psi^2} \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right) (U^1 - v^1) v^1. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Уравнение непрерывности тождественно удовлетворяется введением функции тока Φ

$$v^1 = (4\xi^2 \psi)^{-1} \frac{\partial \Phi}{\partial \eta}, \quad v^2 = - (4\xi^2 \psi)^{-1} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi}. \quad (3.3)$$

Будем отыскивать решение (3.2) в виде

$$\Phi = \varphi(\xi, t) f(\eta), \quad h = h_e(\xi, t) \Theta(\eta). \quad (3.4)$$

Из (3.3)–(3.4) найдем

$$v^1 = U^1(\xi, t) f'(\eta), \quad v^2 = - \left(\frac{\partial U^1}{\partial \xi} + \frac{U^1}{\psi} + \frac{2U^1}{\xi} \right) f(\eta). \quad (3.5)$$

Уравнения (3.2) переходят при этом в следующие:

$$\begin{aligned} c_1(\Theta - f') + c_2(\Theta - f'^2) + (c_2 + c_4)ff'' + [a(\Theta)f'']' + m^2(1-f')\Theta^{-1}B &= 0, \\ -2c_2(1-f')\Theta - (c_2 + c_4)f\Theta' &= P^{-1}[a(\Theta)\Theta']' + M^2a(\Theta)f''^2 - \\ &\quad - m^2M^2f'(1-f')\Theta^{-1}B, \end{aligned} \quad (3.6)$$

где

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{4\xi^2 \psi^2}{\gamma_0 U^1} \frac{dU^1}{dt}, \quad c_2 = \frac{4\xi^2 \psi^2}{\gamma_0} \left(\frac{\partial U^1}{\partial \xi} + \frac{U^1}{\xi} \right), \quad a(\Theta) \equiv \frac{\mu \rho}{\mu_0 \rho_0}, \\ c_4 &= \frac{4\xi^2 \psi^2}{\gamma_0} \left(\frac{U^1}{\xi} + \frac{U^1}{\psi} \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \right), \quad M^2 = \frac{(U^1)^2}{4\xi^2 h_e}, \quad m^2 = \frac{\sigma (H_2)^2}{c^2 \rho_0 \gamma_0}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Если потребовать теперь, чтобы c_i , m , M были постоянными, то (3.6) станут обыкновенными уравнениями; условия же (3.7) дадут систему для

определения функций U^1 , Ψ , h_e , H_2 . Уравнения (3.7) допускают решение ($c_4 = 1$, $c_1 = c_2 = 0$)

$$\psi = 1, U^1 = U_e (2\xi)^{-1}, h \sim \xi^4, H_2 \sim \xi^{-1}; \quad (3.8)$$

(3.6) при этом имеет вид

$$[a(\theta)f'']' + ff'' + m^2(1-f')\theta^{-1}B = 0, \quad (3.9)$$

$$P^{-1}[a(\theta)\theta']' + f\theta' + M^2[a(\theta)f'^2 - m^2f'(1-f')\theta^{-1}B] = 0.$$

Они описывают стационарное течение на пластине, обтекаемой потоком со скоростью $U = \text{const}$, в присутствии внешнего магнитного поля, меняющегося по закону $H_s \sim x^{-1/2}$. Граничные условия для системы (3.9) имеют вид

$$\begin{aligned} f'(0) = f(0) = 0, \quad f'(\infty) = 1, \\ \theta = \text{const} \text{ или } \theta' = \text{const} \text{ при } \eta = 0, \\ \theta \rightarrow 1 \quad \text{при } \eta \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

4. Дальнейшее упрощение системы (3.9) связано с предположениями относительно свойств газа. Для непроводящего газа ($m = 0$) предположение о линейной зависимости вязкости от температуры $a(\theta) = 1$ приводит систему (3.9) к виду

$$f''' + ff'' = 0, \quad P^{-1}\theta'' + f\theta' + M^2f'^2 = 0,$$

т. е. задача определения скорости потока становится независимой от задачи определения температуры. При $m \neq 0$ этой возможности нет.

Другая возможность упрощения системы (3.9) связана с наличием решения $\theta = \theta(f')$, т. е. с наличием зависимости вязкости от скорости. Из второго уравнения (3.9) получим (штрих означает дифференцирование по η)

$$(P-1)ff''\theta' + f'^2[\theta''a(\theta) + M^2Pa(\theta)] + m^2(1-f')\theta^{-1}B(\theta' + M^2f'P) = 0.$$

Так как это уравнение не должно накладывать никаких условий на f , то должно быть тождественно

$$P = 1, \quad \theta'' + M^2P = 0, \quad \theta' + M^2Pf' = 0, \quad (4.1)$$

откуда следует

$$\theta = -\frac{\gamma-1}{2} M_e^2 f'^2 + A, \quad \left(M_e^2 = \frac{2}{\gamma-1} M^2 \right).$$

Если выбрать A из условия $\theta(1) = 1$, то получим

$$\theta = 1 + \frac{\gamma-1}{2} M_e^2 (1 - f'^2). \quad (4.2)$$

Поскольку $\theta'(0) = 0$, то (4.2) описывает распределение температуры в пограничном слое на теплоизолированной пластине. Задача в этом случае сводится к решению одного уравнения

$$[a(f')f'']' + m^2(1-f') \left[1 + \frac{\gamma-1}{2} M_e^2 \right]^{-1} \left[1 + \frac{\gamma-1}{2} M_e^2 (1 - f'^2) \right]^{-1} + ff'' = 0. \quad (4.3)$$

Если выбрать A из условия $\theta(0) = \theta_s$, то

$$\theta = \theta_s - M_e^2 \frac{\gamma-1}{2} f'^2, \quad (\theta_s = \text{const}). \quad (4.4)$$

Выражение (4.4) описывает распределение температур при граничных условиях $\theta(0) = \theta_s$, $\theta_e = \theta_s - M^2$. Скорость в этом случае находится из уравнения

$$[a(f')f'']' + ff'' + m^2 \left[\theta_s - \frac{\gamma-1}{2} M_e^2 f'^2 \right]^{-1} \left[1 + \frac{\gamma-1}{2} M_e^2 \right]^{-1} (1 - f') = 0. \quad (4.5)$$

При $m = 0$ условия (4.1) допускают решение с двумя произвольными постоянными A, B :

$$\Theta = -\frac{\gamma-1}{2} M_e^2 f'^2 + Bf' + A. \quad (4.6)$$

При граничных условиях $\Theta(\infty) = 1$, $\Theta(0) = \Theta_s$ (4.6) выглядит так:

$$\Theta = (1 - f'^2) \frac{\gamma-1}{2} M_e^2 + \Theta_s (1 - f') + f'.$$

Скорость при этом находится из уравнения

$$[a(f')f'']' + ff'' + m^2(1-f') \left[1 + \frac{\gamma-1}{2} M_e^2 \right]^{-1} \left[\frac{\gamma-1}{2} M_e^2 (1-f'^2) + \Theta_s (1-f') + f' \right]^{-1} = 0. \quad (4.7)$$

Решение уравнений (3.9), (4.3), (4.7) может быть найдено каким-либо численным методом.

Уравнения (3.9) по виду не отличаются от обычных, однако переменной в них является не переменная Блазиуса

$$y/\sqrt{x} = \frac{r^{1/2} \sin \theta}{\sqrt{\cos \theta}},$$

а переменная

$$\eta = r^{1/2} \sin \frac{\theta}{2}. \quad (4.8)$$

Переменная Блазиуса позволяет рассматривать течение лишь в первом и четвертом квадранте $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$, переменная (4.8) — во всей плоскости.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. Г. Лойцянский. Ламинарный пограничный слой. Физматгиз, 1962.
2. В. Н. Жигулев. Теория магнитного пограничного слоя. ДАН СССР, т. 124, № 5, 1959.
3. Y. H. Kuo. On the flow of an incompressible viscous fluid past a flat plate at moderate Reynolds number, I. Math. Phys., v. 32 (1953), 83—101.
4. Y. H. Kuo. Viscous flow along a flat plate moving at high supersonic speeds, I. of the Astro. Sciences, v. 32, № 16, (1956). (рус. перевод в сб. «Механика», № 6, изд-во иностр. лит., 1956).
5. Н. Е. Кочин. Задача об обтекании вязкой жидкостью полубесконечной пластинки, Собр. соч. т. 2. Изд-во АН СССР, 1949.
6. G. F. Carrier. Lin C. C., On the nature of the boundary layer near the leading edge of a flat plate, Quart. Appl. Math., v. 6, (1948), 63.
7. G. F. Carrier. Greenspan H. P., Magnetodynamic flow past a flat plate, The magneto hydrodynamics of conducting fluids, Stanford Univ. Press (1959).
8. С. Голдстейн. О некоторых методах аппроксимации в газовой механике. Международный математический конгресс в Амстердаме. Физматгиз, 1961.
9. Д. Ж. Темплъ. Линеаризация и делинеаризация. Международный математический конгресс в Эдинбурге. Физматгиз, 1962.
10. Л. Д. Ландау, Е. М. Лившиц. Электродинамика сплошных сред. Физматгиз, 1959.
11. Н. Е. Кочин. Векторное и начало тензорного исчисления. Изд-во АН СССР, 1962.
12. Н. Е. Кочин, И. А. Кибель, Н. В. Розе. Теоретическая гидромеханика, т. 2. Физматгиз, 1963.

ОБ ОДНОЙ ПАРЕ СУММАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ С ФУНКЦИЯМИ БЕССЕЛЯ

Ю. В. Гандель

1. Речь идет об уравнениях

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n}{\sqrt{\lambda_n^2 - k^2}} J_0(\lambda_n r) = f(r) \quad (0 \leq r < c), \quad (1)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n J_0(\lambda_n r) = 0 \quad (c < r \leq 1), \quad (2)$$

где $f(r)$ — заданная функция, k — заданное положительное число, λ_n — неотрицательные нули функции $J_1(\lambda)$, корень $\sqrt{\lambda_n^2 - k^2}$ при $\lambda_n > k$ арифметический, а при $\lambda_n < k$ имеет отрицательную мнимую часть; A_n — подлежащие определению неизвестные, которые должны удовлетворять условию

$$\sum_{n=0}^{\infty} |A_n|^2 < \infty,$$

что налагает определенные ограничения на функцию $f(r)$.

Заметим, что система уравнений

$$A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \lambda_n^{-1} J_0(\lambda_n r) = f(r) \quad (0 \leq r < c),$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0(\lambda_n r) = 0 \quad (c < r \leq 1),$$

которая может рассматриваться как предельный случай при $k \rightarrow 0$ системы (1), (2), была изучена в работе Сривастава [1].

Континуальный аналог системы (1), (2) еще ранее изучен в связи с одной задачей акустических колебаний в работе Н. И. Ахизера [2].

Как в этом континуальном случае и случае Сривастава целью наших рассмотрений будет сведение системы (1), (2) к уравнению Фредгольма второго рода.

2. Предположим, что система (1), (2) имеет требуемое решение, тогда найдется функция $h(r)$ такая, что

$$\int_0^1 r |h(r)|^2 dr < \infty$$

и

$$A_j = \frac{2}{J_0^2(\lambda_j)} \int_0^1 r h(r) J_0(\lambda_j r) dr \quad (j = 0, 1, 2, \dots).$$

При этом в силу уравнения (2) $h(r) = 0$, если $r > c$.

Следовательно,

$$A_j = \frac{2}{J_0^2(\lambda_j)} \int_0^c r h(r) J_0(\lambda_j r) dr \quad (j = 0, 1, 2, \dots).$$

С помощью соотношения [3]

$$J_0(\lambda r) = \frac{2}{\pi} \int_0^c \cos(s \sqrt{\lambda^2 - k^2}) \cos(k \sqrt{r^2 - s^2}) \frac{ds}{\sqrt{r^2 - s^2}}$$

закключаем, что

$$\int_0^c r h(r) J_0(\lambda r) dr = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^c g(s) \cos(s \sqrt{\lambda^2 - k^2}) ds,$$

где

$$g(s) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_s^c h(r) \cos(k \sqrt{r^2 - s^2}) \frac{r dr}{\sqrt{r^2 - s^2}}.$$

Функция $g(s)$, очевидно, принадлежит $L^2(0, c)$. Однако можно утверждать и больше. Действительно, из представления

$$\frac{1}{2} A_j J_0^2(\lambda_j) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^c g(s) \cos(s \sqrt{\lambda_j^2 - k^2}) ds \equiv \Phi(\lambda_j)$$

следует, что

$$\sum_{j=0}^{\infty} \lambda_j^2 |\Phi(\lambda_j)|^2 < \infty.$$

Поэтому функция $g(s)$ абсолютно непрерывна, ее производная $\omega(s)$ принадлежит $L^2(0, c)$ и $g(c) = 0$. Отсюда мы заключаем, что допустимо интегрирование по частям, которое приводит к представлению

$$A_j = -\frac{2}{J_0^2(\lambda_j)} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^c \omega(s) \frac{\sin(s \sqrt{\lambda_j^2 - k^2})}{\sqrt{\lambda_j^2 - k^2}} ds. \quad (j = 0, 1, 2, \dots) \quad (3)$$

Подставим выражения (3) в уравнение (1) и применим к обеим частям оператор Сонина

$$C_t[\varphi] \equiv \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^t \varphi(r) \operatorname{ch}(k \sqrt{t^2 - r^2}) \frac{r dr}{\sqrt{t^2 - r^2}}.$$

Так как

$$C_t[J_0(\lambda_j r)] = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin(t \sqrt{\lambda_j^2 - k^2})}{\sqrt{\lambda_j^2 - k^2}},$$

то мы получим для $\omega(s)$ следующее уравнение:

$$\int_0^c \Phi(t, s) \omega(s) ds = -F(t) \quad (0 \leq t < c), \quad (4)$$

где

$$\Phi(t, s) = \frac{4}{\pi} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{J_0^2(\lambda_j)} \frac{\sin(s \sqrt{\lambda_j^2 - k^2}) \sin(t \sqrt{\lambda_j^2 - k^2})}{(V \lambda_j^2 - k^2)^3} \quad (5)$$

и

$$F(t) = C_t[f].$$

3. Займемся теперь исследованием ряда (5). Нашей целью будет выделение в (5) функции скачка при $t = s$ и непрерывной части, что после дифференцирования уравнения (4) и приведет к уравнению Фредгольма второго рода.

Примем, что

$$\lambda_m < k < \lambda_{m+1}$$

при некотором фиксированном неотрицательном m и рассмотрим криволинейный интеграл

$$\oint_C \frac{K_1(z)}{I_1(z)} z e^{\sqrt{z^2+k^2}(t-i\delta)} dz,$$

где $0 < t < 2$, $\delta > 0$, $K_1(z)$ — функция Макдональда, $I_1(z)$ — функция Бесселя чисто мнимого аргумента и, наконец, C — контур, представленный на рис. 1.

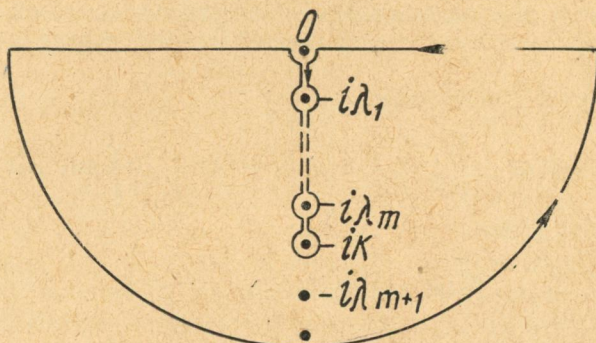


Рис. 1.

С помощью теоремы о вычетах находим, что

$$\frac{1}{\pi^2} \oint_C \frac{K_1(z)}{I_1(z)} z e^{\sqrt{z^2+k^2}(t-i\delta)} dz = \frac{2i}{\pi} \sum_{j=m+1}^{\infty} \frac{1}{J_0^2(\lambda_j)} e^{-it\sqrt{\lambda_j^2-k^2}} e^{-\delta\sqrt{\lambda_j^2-k^2}}.$$

Отделяя в обеих частях вещественную часть и переходя к пределу, когда $R \rightarrow \infty$, а малые полуокружности стягиваются в точки, получаем

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi} \sum_{j=m+1}^{\infty} \frac{2}{J_0^2(\lambda_j)} \sin(t\sqrt{\lambda_j^2-k^2}) e^{-\delta\sqrt{\lambda_j^2-k^2}} = \\ &= -\frac{1}{\pi^2} \int_0^k \left\{ 2 \frac{K_1(x)}{I_1(x)} x \operatorname{sh}(t\sqrt{x^2+k^2}) + \pi \frac{Y_1(x)}{J_1(x)} x \operatorname{sh}(t\sqrt{k^2-x^2}) \right\} dx + \\ &+ \frac{2}{\pi^2} \int_0^k \frac{K_1(x)}{I_1(x)} x \operatorname{sh}(t\sqrt{x^2+k^2}) dx + \frac{1}{\pi} \frac{2\delta t}{(\delta^2+t^2)^2} + \Omega(t) O(\delta), \end{aligned}$$

где $\Omega(t)$ — непрерывная функция от t , равномерно по δ . Это тождество проинтегрируем дважды по t . Затем заменим t сначала на $t+s$, потом на $t-s$ и сложим полученные два равенства. В результате придем к соотношению, в котором члены, порождаемые последними двумя слагаемыми написанного тождества будут иметь вид

$$\frac{1}{\pi} \left\{ \operatorname{arctg} \frac{t-s}{\delta} + \operatorname{arctg} \frac{t+s}{\delta} \right\} + M(\delta) + At + B,$$

где A и B — константы, а величина $M(\delta)$ есть $O(\delta)$ равномерно по t и s .

После предельного перехода $\delta \rightarrow 0$ эти члены дадут функцию

$$\frac{1}{2} [\text{sign}(t-s) + 1] + At + B.$$

Интеграл от нее по s (от 0 до s) содержит слагаемое

$$\frac{1}{2} \int_0^s [1 + \text{sign}(t-s)] ds = G(t, s) = \begin{cases} s & (s \leq t) \\ t & (s > t), \end{cases}$$

а все ядро

$$\frac{4}{\pi} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{J_0^2(\lambda_j)} \frac{\sin(\sqrt{\lambda_j^2 - k^2}) \sin(t\sqrt{\lambda_j^2 - k^2})}{(\sqrt{\lambda_j^2 - k^2})^3}$$

будем иметь вид

$$G(t, s) + (At + B)s + L(t, s),$$

где $L(t, s)$ легко выражается в виде интегралов и конечной суммы отрезка ряда (5) от $j=0$ до m и представляет функцию дифференцируемую по t два раза.

Уравнение (4) примет вид

$$\int_0^t G(t, s) \omega(s) ds + \int_0^t L(t, s) \omega(s) ds + (At + B) \int_0^t s \omega(s) ds = -F(t).$$

Первое слагаемое равно

$$\Psi(t) = \int_0^t s \omega(s) ds + \int_t^t t \omega(s) ds.$$

Мы видим, что

$$\Psi'(t) = t \omega(t) - t \omega(t) + \int_t^t \omega(s) ds$$

и

$$\Psi''(t) = -\omega(t).$$

Итак, получаем уравнение

$$\omega(t) - \int_0^t L_{tt}(t, s) \omega(s) ds = F''(t),$$

где ядро выражается следующей формулой:

$$\begin{aligned} L_{tt}(t, s) = & \frac{2i}{\pi} \sum_{n=0}^m \frac{2}{[J_0(\lambda_n)]^2} \frac{\text{sh}(t\sqrt{k^2 - \lambda_n^2}) \text{sh}(s\sqrt{k^2 - \lambda_n^2})}{\sqrt{k^2 - \lambda_n^2}} + \\ & + \frac{4}{\pi^2} \int_0^k \left\{ \frac{K_1(x)}{I_1(x)} x \frac{\text{sh}(t\sqrt{x^2 + k^2}) \text{sh}(s\sqrt{x^2 + k^2})}{\sqrt{x^2 + k^2}} + \right. \\ & + \frac{\pi}{2} \frac{Y_1(x)}{I_1(x)} x \frac{\text{sh}(t\sqrt{k^2 - x^2}) \text{sh}(s\sqrt{k^2 - x^2})}{\sqrt{k^2 - x^2}} \Big\} dx + \\ & + \frac{4}{\pi^2} \int_k^\infty \frac{K_1(x)}{I_1(x)} x \frac{\text{sh}(t\sqrt{k^2 + x^2}) \text{sh}(s\sqrt{k^2 + x^2})}{\sqrt{k^2 + x^2}} dx, \end{aligned}$$

причем первый из двух написанных интегралов следует понимать как главное значение в смысле Коши, поскольку подынтегральная функция имеет в точках $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ простые полюса.

Чтобы упростить это ядро, применим теорему о вычетах к интегралу

$$\frac{4}{\pi^2} \int_{\Gamma} \frac{K_1(z)}{I_1(z)} z \frac{\operatorname{sh}(t \sqrt{k^2 + z^2}) \operatorname{sh}(s \sqrt{k^2 + z^2})}{\sqrt{k^2 + z^2}} dz,$$

(контур Γ изображен на рис. 2).

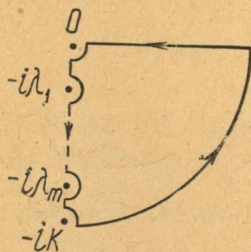


Рис. 2.

После ряда преобразований и перехода к пределу, когда дуги малых окружностей стягиваются к своим центрам, получим равенство

$$L_{tt}(t, s) = \frac{2i}{\pi} \int_0^k \operatorname{sh} tx \operatorname{sh} sx dx + \frac{4}{\pi^2} \int_{\Gamma} \frac{K_1(z)}{I_1(z)} z \frac{\operatorname{sh}(t \sqrt{k^2 + z^2}) \operatorname{sh}(s \sqrt{k^2 + z^2})}{\sqrt{k^2 + z^2}} dz + \\ + \frac{4}{\pi^2} \int_k^{\infty} \frac{K_1(z)}{I_1(z)} z \frac{\operatorname{sh}(t \sqrt{k^2 + z^2}) \operatorname{sh}(s \sqrt{k^2 + z^2})}{\sqrt{k^2 + z^2}} dz,$$

где γ часть контура, Γ — дуга окружности с центром в O и радиуса k от точки $(-ik)$ до точки k . Первый интеграл непосредственно вычисляется.

4. Окончательный результат можно сформулировать следующим образом:

Если функция $F(t)$ дважды непрерывно дифференцируема, то спаренные уравнения (1), (2) сводятся к одному уравнению Фредгольма второго рода

$$\omega(t) - \int_0^t K(t, s) \omega(s) ds = F''(t),$$

где ядро есть сумма двух ядер

$$K(t, s) = K_1(t, s) + K_2(t, s),$$

причем

$$K_1(t, s) = \frac{i}{\pi} \left\{ \frac{\operatorname{sh} k(t+s)}{t+s} - \frac{\operatorname{sh} k(t-s)}{t-s} \right\}, \\ K_2(t, s) = \frac{4}{\pi^2} \int_C \frac{K_1(z)}{I_1(z)} z \frac{\operatorname{sh}(t \sqrt{k^2 + z^2}) \operatorname{sh}(s \sqrt{k^2 + z^2})}{\sqrt{k^2 + z^2}} dz,$$

а контур s состоит из дуги окружности $z = ke^{i\varphi}$, $-\frac{\pi}{2} < \varphi \leq 0$ и луча $z = x$, $k \leq x < \infty$.

Неизвестные коэффициенты A_j выражаются через $\omega(s)$ по формулам (3).

Автор искренне благодарен Н. И. Ахиезеру за внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. R. P. Srivastav. Dual relations involving Dini series. Proc. Roy. Soc. Edinburgh, 66, № 3, 1962—63 (1964).
2. Н. И. Ахиезер. К теории спаренных интегральных уравнений. «Зап. физ.-матем. ф-та ХГУ и ХМО», т. XXV, серия 4 (1957).
3. Ватсон. Теория бесселевых функций. ИЛ, 1949.

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В ПУАЗЕЙЛЕВСКОМ ПОТОКЕ ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

А. А. Янцевич

В работе [1] рассматривалась макроскопическая теория двойного лучепреломления в потоках вязкой несжимаемой жидкости. Известно, что под действием вязких напряжений жидкость становится оптически неоднородной и анизотропной [2], и поэтому принципиально возможно исследование потоков вязкой жидкости оптическим методом. Так как при распространении электромагнитной волны в потоке гидродинамическая картина не нарушается, то эффект двойного лучепреломления может быть использован для изучения гидродинамической устойчивости.

В работе [1] изучалась поляризация электромагнитной волны, распространяющейся в куэттовском потоке жидкости между коаксиальными цилиндрами. В первом приближении были получены явные выражения для поляризации и угла ориентации осей эллипса поляризации до и после потери устойчивости. Сопоставление с экспериментальными данными позволяет сделать заключение о качественном согласии теории с экспериментом.

В данной работе рассматривается задача о распространении электромагнитных волн в плоском пуазейлевском течении между двумя бесконечными параллельными пластинами при ламинарном режиме движения и при режиме, который наступил после потери устойчивости.

Оптическая анизотропия в потоке вязкой жидкости характеризуется следующей зависимостью тензора диэлектрической проницаемости ϵ от тензора скоростей деформации $\dot{V}$ [1]:

$$\check{\epsilon}(\dot{V}) = \epsilon_1 I + \lambda_1 \dot{V}. \quad (1)$$

Для плоского пуазейлевского потока при ламинарном режиме движения $\check{\epsilon}$ в приближении (1) имеет вид

$$\check{\epsilon} = \begin{pmatrix} \epsilon_1 & -\Lambda y & 0 \\ -\Lambda y & \epsilon_1 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_1 \end{pmatrix} \quad (2)$$

где $\Lambda = -\frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \lambda_1$ — безразмерный малый параметр.

Пусть на поток падает волна

$$E_x = e^{-i\frac{\omega}{c} V \bar{\epsilon}_0 z + i\omega t}, \quad E_y = E_z = 0. \quad (3)$$

Так как $\check{\epsilon}$ медленно меняется на расстояниях порядка длины волны, то зависимость $\check{\epsilon}$ от y можно считать параметрической, т. е. фиксировать

точку падения электромагнитной волны. Тогда из уравнений Максвелла имеем

$$\begin{aligned}\frac{d^2 E_x}{dz^2} + \frac{\omega^2}{c^2} [\varepsilon_1 E_x - \Lambda_{y0} E_y] &= 0, \\ \frac{d^2 E_y}{dz^2} + \frac{\omega^2}{c^2} [\varepsilon_1 E_y - \Lambda_{x0} E_x] &= 0, \\ E_z &= 0.\end{aligned}\quad (4)$$

Из уравнений (4) следует, что нормальными волнами в потоке являются две линейно поляризованные волны, каждая из которых характеризуется определенной фазовой скоростью. Поле в потоке эллиптически поляризовано. Относительный угол поворота осей эллипса поляризации электромагнитной волны в потоке на глубине l в первом приближении по Λ имеет вид (с учетом отраженной и прошедшей поток электромагнитных волн):

$$\Psi = \rho y_0 \Lambda, \quad (5)$$

где явное выражение для коэффициента ρ , не зависящего от гидродинамических параметров, опущено ввиду его громоздкости. Отметим, что, как следует из (5), при ламинарном режиме движения Ψ линейно зависит от Λ , а значит, и от числа Рейнольдса R . Если при решении электродинамической задачи поток считать неограниченным вдоль оси z , то, как видно из (4), поле E в потоке можно представить в виде

$$E = E^1 + E^2, \quad (*)$$

где

$$\begin{aligned}E^1 &= \operatorname{Re} \{A e^{-ik_1 z + i\omega t}\}, \quad E^2 = \operatorname{Re} \{B e^{-ik_2 z + i\omega t}\}; \\ k_1 &= \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_1 - \Lambda_{y0}}; \quad k_2 = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_1 + \Lambda_{y0}}; \\ A &= (A, A); \quad B = (B, -B),\end{aligned}$$

а A и B — произвольные комплексные постоянные.

Выражение для поля E можно переписать иначе

$$E = E^1 + E^2 = E^+ \cos \vartheta + E^- \sin \vartheta, \quad (**)$$

где

$$\begin{aligned}E^+ &= (A^1 + B^1) \cos \vartheta - (A^2 - B^2) \sin \vartheta, \\ E^- &= (A^2 + B^2) \cos \vartheta + (A^1 - B^1) \sin \vartheta, \\ A &= A^1 + iA^2, \quad B = B^1 + iB^2,\end{aligned}\quad (***)$$

причем

$$\vartheta = -\frac{k_1 - k_2}{2} z, \quad \varphi = \frac{k_1 + k_2}{2} z - \omega t.$$

Уравнения (**), (***) описывают эллиптически поляризованную в плоскости (x, y) волну, причем при распространении волны вдоль оси z эллипс поляризации поворачивается на угол $\vartheta = \frac{k_1 - k_2}{2}$ при прохождении волной единицы длины вдоль оси z . При малых Λ выражение для ϑ с точностью до постоянного множителя совпадает с (5).

При нарушении устойчивости исходного ламинарного течения меняется гидродинамическая картина потока и, следовательно, в силу зависимости (1) изменяется оптическая картина потока в поляризованном свете. Выражение для $\hat{\varepsilon}(\vec{V})$ в случае вторичного потока имеет вид [3]

$$\hat{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & -\Lambda_{y0} & 0 \\ -\Lambda_{y0} & \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Lambda \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_0 \partial y_0} & \frac{\Lambda}{2} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial y_0^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_0^2} \right) & 0 \\ \frac{\Lambda}{2} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial y_0^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_0^2} \right) & -\Lambda \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_0 \partial y_0} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (6)$$

где

$$\begin{aligned}\psi(x, y, t) &= [\varphi_1(y) \cos(\alpha x + \delta_1 t) - R \alpha \varphi_2(y) \sin(\alpha x + \delta_1 t)] e^{-\delta_2 t}; \\ \varphi_1(y) &= \frac{\operatorname{ch} \alpha y}{\operatorname{ch} \alpha} - \frac{\cos k_n y}{\cos k_n}; \\ \varphi_2(y) &= \frac{\chi}{k_n} \operatorname{ath} \alpha \left(y \frac{\sin k_n y}{\sin k_n} - \frac{\operatorname{ch} \alpha y}{\operatorname{ch} \alpha} \right) - \frac{\operatorname{th} \alpha}{\alpha} \left[\frac{\alpha^2}{k_n^2} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4k_n^2} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{3k_n^2 - \alpha^2}{(\alpha^2 + k_n^2)^2} \right) \frac{\operatorname{ch} \alpha y}{\operatorname{ch} \alpha} + \frac{1}{\alpha^2 + k_n^2} \left(\frac{\operatorname{ch} \alpha y}{\operatorname{ch} \alpha} - y \frac{\operatorname{sh} \alpha y}{\operatorname{sh} \alpha} \right) \right] + \\ &\quad + \frac{1}{2k_n^2} \left\{ \operatorname{ath} \alpha \left[y - \frac{y^3}{3} + 2 \left(\frac{2}{4k_n^2} + \frac{3k_n^2 - \alpha^2}{(\alpha^2 + k_n^2)^2} \right) y \right] \frac{\sin k_n y}{\sin k_n} - \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{1}{2} + \frac{2k_n^2}{k_n^2 + \alpha^2} \right) (1 - y^2) \frac{\cos k_n y}{\cos k_n} \right\}; \\ k_n &= n\pi - \frac{\alpha \operatorname{th} \alpha}{n\pi} - \frac{\alpha^2 \operatorname{th}^2 \alpha}{n^2 \pi^2} - 2 \frac{\alpha^3 \operatorname{th}^3 \alpha}{n^3 \pi^3}; \\ \delta_1 &= 2\nu R \alpha \chi k_n; \quad \delta_2 = \nu (\alpha^2 + k_n^2); \\ \chi &= -\frac{1}{k_n} \left[\frac{1}{3} + \frac{1}{4k_n^2} + \frac{3k_n^2 - \alpha^2}{(\alpha^2 + k_n^2)^2} \right] + \frac{k_n^3 \left[3 + \frac{\operatorname{th} \alpha}{\alpha} (1 - \alpha \operatorname{th} \alpha) \right] + (\alpha^2 + k_n^2) \left(\frac{\alpha \operatorname{th} \alpha}{3} - \frac{1}{2} \right)}{(\alpha^2 + k_n^2) k_n [k_n^2 - \alpha \operatorname{th} \alpha (1 - \alpha \operatorname{th} \alpha)]}.\end{aligned}\quad (7)$$

Время t , от которого явно зависят компоненты ξ , можно считать фиксированным, т. е. оптическую картину можно рассчитывать как статическую.

Из уравнений Максвелла в рассматриваемом случае имеем

$$\begin{aligned}\frac{d^2 E_x}{dz^2} + \frac{\omega^2}{c^2} \left[\left(\varepsilon_1 + \Lambda \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_0 \partial y_0} \right) E_x + \Lambda \left(-y_0 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y_0^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_0^2} \right) E_y \right] &= 0, \\ \frac{d^2 E_y}{dz^2} + \frac{\omega^2}{c^2} \left[\left(\varepsilon_1 - \Lambda \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_0 \partial y_0} \right) E_y + \Lambda \left(-y_0 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y_0^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_0^2} \right) E_x \right] &= 0, \\ E_z &= 0.\end{aligned}\quad (8)$$

Опуская громоздкие выкладки, приведем сразу выражение для Ψ (с точностью до постоянного множителя, не зависящего от гидродинамических параметров):

$$\Psi \sim R \sqrt{\Phi_1(x_0, y_0) + R \Phi_2(x_0, y_0) + R^2 \Phi_3(x_0, y_0)}, \quad (9)$$

где

$$\begin{aligned}\Phi_1(x, y) &= e^{-2\delta_2 t} [\varphi_2'^2(y) \alpha^2 \sin^2(\alpha x + \delta_1 t)] + \\ &\quad + \frac{1}{4} [2y - e^{-\delta_2 t} \{\varphi_1(y) \alpha^2 + \varphi_1''(y)\} \cos(\alpha x + \delta_1 t)]^2; \\ \Phi_2(x, y) &= 2\alpha^2 e^{-2\delta_2 t} [\varphi_1'(y) \varphi_2'(y) \sin(\alpha x + \delta_1 t) \cos(\alpha x + \delta_1 t)] + \\ &\quad + \frac{1}{2} [2y - e^{-2\delta_2 t} \{\varphi_1(y) \alpha^2 + \varphi_1''(y)\} \cos(\alpha x + \delta_1 t)] \times \\ &\quad \times \alpha [\varphi_2(y) \alpha^2 - \varphi_2''(y)] \sin(\alpha x + \delta_1 t); \\ \Phi_3(x, y) &= \alpha^2 \varphi_2'^2(y) e^{-2\delta_2 t} \cos^2(\alpha x + \delta_1 t) + \\ &\quad + \frac{1}{4} \alpha^2 [\varphi_2(y) \alpha^2 - \varphi_2''(y)]^2 \sin^2(\alpha x + \delta_1 t) e^{-2\delta_2 t},\end{aligned}\quad (9')$$

а $\varphi_1(y)$ и $\varphi_2(y)$ определяются выражениями (7).

Используя (9), можно проследить за «динамикой» Ψ при различных значениях α , y и R аналогично тому, как это осуществляется в теории гидродинамической устойчивости [3]. Численные результаты приведены в табл. 1 и 2. Из данных табл. 1 видно, что при малых α зависимость

Ψ от R при фиксированных y и x носит такой же характер, как и для ламинарного режима движения жидкости. Это показывает, что малые гидродинамические возмущения фактически не влияют на оптическую картину потока, что полностью согласуется с фактом затухания малых гидродинамических возмущений в потоке при числах Рейнольдса значительно ниже критического. Однако с ростом α зависимость Ψ от R постепенно теряет свой линейный характер. Такая потеря «линейности» свидетельствует о развитии гидродинамического возмущения в потоке. Зависимость Ψ от y , приведенная в табл. 2, дает основание полагать, что «эволюция» Ψ при разных α и y также характеризует динамику возмущений в потоке жидкости.

Пусть теперь на поток падает линейно поляризованная плоская электромагнитная волна, которая распространяется вдоль оси y :

$$E_x = Ae^{-i\frac{\omega}{c}V\epsilon_0 y + i\omega t}, \quad E_z = Be^{-i\frac{\omega}{c}V\epsilon_0 y + i\omega t}, \quad E_y = 0. \quad (10)$$

Тогда из уравнений Максвелла получаем

$$\begin{aligned} \frac{d^2 E_x}{dy^2} + \frac{\omega^2}{c^2} \left[\epsilon_1 - \frac{1}{\epsilon_1} \Lambda^2 y^2 \right] E_x &= 0, \\ \frac{d^2 E_z}{dy^2} + \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_1 E_z &= 0, \\ E_y &= \frac{1}{\epsilon_1} \Lambda y E_x. \end{aligned} \quad (11)$$

Таблица 1

$R \backslash \alpha$	0,01	0,05	0,1	1	10
0,01	$0,0475 \cdot 10^{-5}$	$0,0470 \cdot 10^{-5}$	$0,0455 \cdot 10^{-5}$	$0,0241 \cdot 10^{-5}$	$0,7 \cdot 10^{-5}$
0,05	$0,237 \cdot 10^{-5}$	$0,235 \cdot 10^{-5}$	$0,227 \cdot 10^{-5}$	$0,12 \cdot 10^{-5}$	$3,45 \cdot 10^{-5}$
0,1	$0,475 \cdot 10^{-5}$	$0,470 \cdot 10^{-5}$	$0,455 \cdot 10^{-5}$	$0,241 \cdot 10^{-5}$	$6,9 \cdot 10^{-5}$
0,3	$1,42 \cdot 10^{-5}$	$1,41 \cdot 10^{-5}$	$1,36 \cdot 10^{-5}$	$0,724 \cdot 10^{-5}$	$20,7 \cdot 10^{-5}$
0,7	$3,32 \cdot 10^{-5}$	$3,29 \cdot 10^{-5}$	$3,18 \cdot 10^{-5}$	$1,69 \cdot 10^{-5}$	$48,7 \cdot 10^{-5}$
1	$4,75 \cdot 10^{-5}$	$4,70 \cdot 10^{-5}$	$4,54 \cdot 10^{-5}$	$2,41 \cdot 10^{-5}$	$70,1 \cdot 10^{-5}$
3	$14,2 \cdot 10^{-5}$	$14,1 \cdot 10^{-5}$	$13,6 \cdot 10^{-5}$	$7,25 \cdot 10^{-5}$	$234 \cdot 10^{-5}$
7	$33,2 \cdot 10^{-5}$	$32,8 \cdot 10^{-5}$	$31,7 \cdot 10^{-5}$	$17,0 \cdot 10^{-5}$	$8,26 \cdot 10^{-3}$
10	$47,5 \cdot 10^{-5}$	$46,9 \cdot 10^{-5}$	$45,2 \cdot 10^{-5}$	$24,5 \cdot 10^{-5}$	$16,76 \cdot 10^{-3}$
15	$71,2 \cdot 10^{-5}$	$70,3 \cdot 10^{-5}$	$67,6 \cdot 10^{-5}$	$37,4 \cdot 10^{-5}$	$43,16 \cdot 10^{-3}$
20	$95,0 \cdot 10^{-5}$	$93,7 \cdot 10^{-5}$	$89,8 \cdot 10^{-5}$	$51,2 \cdot 10^{-5}$	$90,95 \cdot 10^{-3}$
40	$190 \cdot 10^{-5}$	$187 \cdot 10^{-5}$	$177 \cdot 10^{-5}$	$119 \cdot 10^{-5}$	$634,3 \cdot 10^{-3}$
60	$285 \cdot 10^{-5}$	$279 \cdot 10^{-5}$	$263 \cdot 10^{-5}$	$216 \cdot 10^{-5}$	$2056,1 \cdot 10^{-3}$
100	$474,8 \cdot 10^{-5}$	$463 \cdot 10^{-5}$	$427 \cdot 10^{-5}$	$543 \cdot 10^{-5}$	$8962,3 \cdot 10^{-3}$

$$n = 1; \quad t = 0,1; \quad x = 3,14; \quad y = -0,8$$

Таблица 2

$y \backslash \alpha$	0,01	0,1	1	10
-1	$0,058 \cdot 10^{-5}$	$0,056 \cdot 10^{-5}$	$0,034 \cdot 10^{-5}$	$1,3 \cdot 10^{-5}$
-0,8	$0,047 \cdot 10^{-5}$	$0,045 \cdot 10^{-5}$	$0,024 \cdot 10^{-5}$	$0,69 \cdot 10^{-5}$
-0,6	$0,021 \cdot 10^{-5}$	$0,020 \cdot 10^{-5}$	$0,0064 \cdot 10^{-5}$	$0,095 \cdot 10^{-5}$
-0,4	$0,011 \cdot 10^{-5}$	$0,01 \cdot 10^{-5}$	$0,012 \cdot 10^{-5}$	$1,02 \cdot 10^{-5}$
-0,2	$0,037 \cdot 10^{-5}$	$0,035 \cdot 10^{-5}$	$0,026 \cdot 10^{-5}$	$1,11 \cdot 10^{-5}$
0	$0,048 \cdot 10^{-5}$	$0,46 \cdot 10^{-5}$	$0,03 \cdot 10^{-5}$	$1,13 \cdot 10^{-5}$
0,2	$0,041 \cdot 10^{-5}$	$0,039 \cdot 10^{-5}$	$0,023 \cdot 10^{-5}$	$1,11 \cdot 10^{-5}$
0,4	$0,019 \cdot 10^{-5}$	$0,018 \cdot 10^{-5}$	$0,0045 \cdot 10^{-5}$	$1,04 \cdot 10^{-5}$
0,6	$0,009 \cdot 10^{-5}$	$0,0083 \cdot 10^{-5}$	$0,018 \cdot 10^{-5}$	$0,93 \cdot 10^{-5}$
0,8	$0,031 \cdot 10^{-5}$	$0,029 \cdot 10^{-5}$	$0,04 \cdot 10^{-5}$	$0,76 \cdot 10^{-5}$
1	$0,038 \cdot 10^{-5}$	$0,036 \cdot 10^{-5}$	$0,054 \cdot 10^{-5}$	$1,28 \cdot 10^{-5}$

$$R = 0,01; \quad n = 1; \quad t = 0,1; \quad x = 3,14$$

Из (11) видно, что нормальными волнами в потоке в этом случае являются две линейно поляризованные волны $E_x \neq 0$, $E_z = 0$ и $E_z \neq 0$, $E_x = 0$.

При малых Λ решение (11), удовлетворяющее требованию непрерывности E_τ и $(\text{rot } E)_\tau$ при $y = 1$ и $y = -1$, имеет вид

$$\begin{aligned} E_x &= (A_1^\circ + \Lambda^2 A_1'') e^{-i \frac{\omega}{c} V_{\varepsilon_1} y} + (A_2^\circ + \Lambda^2 A_2'') e^{-i \frac{\omega}{c} V_{\varepsilon_1} y} + \Lambda^2 G(y); \\ E_z &= B_1 e^{-i \frac{\omega}{c} V_{\varepsilon_1} y} + B_2 e^{-i \frac{\omega}{c} V_{\varepsilon_1} y}; \\ E_y &= \Lambda \frac{y}{\varepsilon_1} (A_1^\circ e^{-i \frac{\omega}{c} V_{\varepsilon_1} y} + A_2^\circ e^{-i \frac{\omega}{c} V_{\varepsilon_1} y}); \end{aligned} \quad (12)$$

где явные выражения для A_1° , A_1'' , A_2° , A_2'' , B_1 , B_2 , $G(y)$ опущены ввиду их громоздкости.

После потери устойчивости для E получаем следующие уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 E_x}{dy^2} + \frac{\omega^2}{c^2} [\langle \varepsilon_1 + \Lambda g(y) \rangle E_x + \Lambda \langle f(y) - y \rangle E_y] &= 0, \\ \frac{d^2 E_z}{dy^2} + \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_1 E_z &= 0, \end{aligned} \quad (13)$$

$$\Lambda \langle f(y) - y \rangle E_x + \langle \varepsilon_1 - \Lambda g(y) \rangle E_y = 0,$$

где

$$\begin{aligned} g(y) &= \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \bigg|_{\substack{x=x_0 \\ t=t_0}}; \\ f(y) &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right) \bigg|_{\substack{x=x_0 \\ t=t_0}}. \end{aligned}$$

Решение системы (13) ищем в виде

$$E_x = E_x^\circ + \Lambda E_x' + \Lambda^2 E_x''; \quad E_y = \Lambda E_y' + \Lambda^2 E_y''. \quad (14)$$

Тогда для E_x' , E_x'' , E_y' , E_y'' получаем уравнения

$$\begin{aligned} \frac{d^2 E_x'}{dy^2} + \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_1 E_x' &= -\frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_1 g(y) E_x^\circ(y), \\ \frac{d^2 E_x''}{dy^2} + \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_1 E_x'' &= -\frac{\omega^2}{c^2 \varepsilon_1} [f(y) - y]^2 E_x^\circ(y), \\ E_y' &= -\frac{1}{\varepsilon_1} [f(y) - y] E_x^\circ(y), \\ E_y'' &= \frac{y - f(y)}{\varepsilon_1} \left[E_x'(y) + \frac{1}{\varepsilon_1} g(y) E_x^\circ(y) \right]. \end{aligned} \quad (15)$$

Уравнения (15) выписаны для сопоставления с уравнениями (11), когда гидродинамическое возмущение отсутствует. Отметим также, что гидродинамическое возмущение меняет порядок величины компоненты поля E_x . Дальнейший анализ этого случая опущен, так как он не отличается существенно от предыдущего.

Таким образом, при изучении устойчивости плоского пуазейлевского потока оптическим методом принципиально возможна электромагнитная диагностика потока в двух взаимно-перпендикулярных направлениях.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Л. Герман и А. А. Лазебный. «Уч. зап. ХМО», т. 32. Изд-во ХГУ, Харьков, 1966, стр. 17.
2. Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшиц. Электродинамика сплошных сред. ГИФМЛ, М., стр. 416, 1959.
3. W. Szablewski. ZAMM, bd. 42, № 4/5, s. 194, 1962.

ДВОЙНОЕ ЛУЧЕПРЕЛОМЛЕНИЕ В ТУРБУЛЕНТНЫХ ПОТОКАХ ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

Ж. С. Ажажа и А. А. Янцевич

Эффект двойного лучепреломления в потоках вязкой несжимаемой жидкости характеризуется зависимостью тензора диэлектрической проницаемости ϵ от тензора скоростей деформации $\check{V}$. Эта зависимость при некоторых достаточно общих предположениях имеет вид [1]:

$$\check{\epsilon}(\check{V}) = [\epsilon_1 + f_1(I_k)]I + f_2(I_k)\check{V} + f_3(I_k)\check{V}^2, \quad (1)$$

где $f_i(I_k)$ — аналитические функции инвариантов тензора $\check{V}$.

Будем рассматривать сначала установившиеся турбулентные потоки жидкости. Тогда $\check{V}$ является случайным тензорным полем, вероятностные характеристики которого предполагаются известными. Следовательно, электромагнитное поле в потоке, отраженная и прошедшая поток электромагнитные волны также носят случайный характер.

Так как взаимодействие электромагнитного поля с потоком слабое, то желательно (1) представить в форме, удобной для применения теории возмущений:

$$\check{\epsilon}(\check{V}) = \epsilon_1 [I + \check{\epsilon}'(\mathbf{r})], \quad (2)$$

где $\check{\epsilon}'(\mathbf{r})$ — принципиально известное тензорное поле случайных возмущений

$$\check{\epsilon}'(\mathbf{r}) = \frac{1}{\epsilon_1} [f_1 \cdot I + f_2 \cdot \check{V} + f_3 \cdot \check{V}^2].$$

Очевидно, что все компоненты $\check{\epsilon}'(\mathbf{r})$ безразмерны и их можно считать малыми, так как изменение ϵ под действием вязких напряжений обычно мало.

Как и в случае ламинарного и вторичного потоков при изучении распространения электромагнитных волн в турбулентных потоках возможны два подхода [1]: первый — при решении электродинамической задачи учитываются изменения ϵ только в направлении распространения электромагнитной волны (фиксированная точка падения), второй — турбулентный поток рассматривается как волновод со случайным анизотропным заполнением. (В случае уширения пучка света). При электродинамическом исследовании турбулентных потоков можно интересоваться средними значениями соответствующих оптических характеристик, корреляционными функциями и другими вероятностными характеристиками электродинамических величин.

Рассмотрим случай фиксированной точки падения. Пусть на турбулентный поток жидкости, расположенный между двумя бесконечными параллельными плоскостями $z = 0$ и $z = l$ нормально падает плоская линейно поляризованная вдоль оси x волна:

$$E_x = e^{-i\frac{\omega}{c}\sqrt{\epsilon_0}z + i\omega t}, \quad E_y = E_z = 0.$$

Сведем задачу о нахождении поля в потоке к системе интегральных уравнений Фредгольма. Для поля в потоке из уравнений Максвелла имеем:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 E_x}{dz^2} + \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_1 E_x &= \frac{\omega^2}{c^2} \left[\frac{\epsilon_{13}^{'2}}{\epsilon_1 + \epsilon_{33}'} - \epsilon_{11}' \right] E_x + \frac{\omega^2}{c^2} \left[\frac{\epsilon_{13} \epsilon_{23}'}{\epsilon_1 + \epsilon_{33}'} - \epsilon_{12}' \right] E_y, \\ \frac{d^2 E_y}{dz^2} + \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_1 E_y &= \frac{\omega^2}{c^2} \left[\frac{\epsilon_{12} \epsilon_{23}'}{\epsilon_1 + \epsilon_{33}'} - \epsilon_{12}' \right] E_x + \frac{\omega^2}{c^2} \left[\frac{\epsilon_{23}^{'2}}{\epsilon_1 + \epsilon_{33}'} - \epsilon_{22}' \right] E_y, \\ E_z &= -\frac{\epsilon_{13}'}{\epsilon_1 + \epsilon_{33}'} E_x - \frac{\epsilon_{23}'}{\epsilon_1 + \epsilon_{33}'} E_y. \end{aligned} \quad (3)$$

Системе (3) вместе с граничными условиями, учитывающими отраженную и прошедшую поток электромагнитные волны, эквивалентна следующая система интегральных уравнений Фредгольма со случайными ядрами (переход к интегральным уравнениям удобен для реализации методов теории возмущений):

$$\begin{aligned} E_x(z) &= E_x^o(z) + \int_0^l [K(z, s) E_x(s) + L(z, s) E_y(s)] ds, \\ E_y(z) &= E_y^o(z) + \int_0^l [M(z, s) E_x(s) + N(z, s) E_y(s)] ds, \end{aligned} \quad (4)$$

где ядра $K(z, s)$, $L(z, s)$, $M(z, s)$ и $N(z, s)$ определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} K(z, s) &= \begin{cases} \left[\frac{\epsilon_{13}^{'2}(s)}{\epsilon_1 + \epsilon_{33}'} - \epsilon_{11}'(s) \right] g(z, s) & 0 \leq s \leq z \\ \left[\frac{\epsilon_{13}^{'2}(s)}{\epsilon_1 + \epsilon_{33}'} - \epsilon_{11}'(s) \right] f(z, s) & z \leq s \leq l \end{cases}; \\ L(z, s) &= \begin{cases} \left[\frac{\epsilon_{12}(s) \epsilon_{23}'}{\epsilon_1 + \epsilon_{33}'} - \epsilon_{12}'(s) \right] g(z, s) & 0 \leq s \leq z \\ \left[\frac{\epsilon_{12}(s) \epsilon_{23}'}{\epsilon_1 + \epsilon_{33}'} - \epsilon_{12}'(s) \right] f(z, s) & z \leq s \leq l \end{cases}; \\ M(z, s) &= \begin{cases} \left[\frac{\epsilon_{13}(s) \epsilon_{23}'}{\epsilon_1 + \epsilon_{33}'} - \epsilon_{12}'(s) \right] g(z, s) & 0 \leq s \leq z \\ \left[\frac{\epsilon_{13}(s) \epsilon_{23}'}{\epsilon_1 + \epsilon_{33}'} - \epsilon_{12}'(s) \right] f(z, s) & z \leq s \leq l \end{cases}; \\ N(z, s) &= \begin{cases} \left[\frac{\epsilon_{23}^{'2}(s)}{\epsilon_1 + \epsilon_{33}'} - \epsilon_{22}'(s) \right] g(z, s) & 0 \leq s \leq z \\ \left[\frac{\epsilon_{23}^{'2}(s)}{\epsilon_1 + \epsilon_{33}'} - \epsilon_{22}'(s) \right] f(z, s) & z \leq s \leq l \end{cases}; \\ g(z, s) &= h(z, s) + \frac{\omega}{2ic\sqrt{\epsilon_1}} e^{-i\frac{\omega}{c}\sqrt{\epsilon_1}(z-s)}; \\ f(z, s) &= h(z, s) + \frac{\omega}{2ic\sqrt{\epsilon_1}} e^{i\frac{\omega}{c}\sqrt{\epsilon_1}(z-s)}; \\ h(z, s) &= \frac{i\frac{\omega}{2c} \left(1 - \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\epsilon_1}} \right) \left[(\sqrt{\epsilon_0} - \sqrt{\epsilon_1}) e^{i\frac{\omega}{c}\sqrt{\epsilon_1}(z-s) - i\frac{\omega}{c}\sqrt{\epsilon_1}l} + \right. \\ &\quad \left. + (\sqrt{\epsilon_0} + \sqrt{\epsilon_1}) e^{-i\frac{\omega}{c}\sqrt{\epsilon_1}(z-s) + i\frac{\omega}{c}\sqrt{\epsilon_1}l} \right]}{(\sqrt{\epsilon_0} + \sqrt{\epsilon_1})^2 e^{-i\frac{\omega}{c}\sqrt{\epsilon_1}l} - (\sqrt{\epsilon_0} - \sqrt{\epsilon_1})^2 e^{i\frac{\omega}{c}\sqrt{\epsilon_1}l}}; \end{aligned} \quad (5)$$

а $E_x^\circ(z)$ и $E_y^\circ(z)$ решение невозмущенной электродинамической задачи (при $\epsilon'(z) \equiv 0$). Так как поле скоростей случайно, то ядра в интегральных уравнениях (4) являются случайными функциями переменной z и переменных x_0 и y_0 , которые входят в $\epsilon(z)$ параметрически.

Предположим, что поле E в потоке и $\epsilon(z)$ некоррелированы. Тогда из (4) после усреднения получаем систему интегральных уравнений для среднего поля в потоке

$$\begin{aligned} \overline{E_x(z)} &= E_x^\circ(z) + \int_0^l [\overline{K(z, s)} \overline{E_x(s)} + \overline{L(z, s)} \overline{E_y(s)}] ds, \\ \overline{E_y(z)} &= E_y^\circ(z) - \int_0^l [\overline{M(z, s)} \overline{E_x(s)} + \overline{N(z, s)} \overline{E_y(s)}] ds \end{aligned} \quad (6)$$

(черта сверху означает операцию усреднения).

Решение системы интегральных уравнений (6) может быть найдено методом последовательных приближений, так как ядра этих интегральных уравнений являются малыми (в силу малости компонент ϵ' на каждой реализации случайного тензорного поля $\check{V}$). Кроме того, стандартным способом (перемножая и усредняя уравнения (4)) можно получить следующую систему интегральных уравнений для корреляционных моментов второго порядка поля E :

$$\begin{aligned} R(z_1, z_2) &= E_x^\circ(z_1) E_x^{\circ*}(z_2) + E_x^{\circ*}(z_2) \int_0^l [\overline{K(z_1, s_1)} \overline{E_x(s_1)} + \\ &+ \overline{L(z_1, s_1)} \overline{E_y(s_1)}] ds_1 + E_x^\circ(z_1) \int_0^l [\overline{K^*(z_2, s_2)} \overline{E_x^*(s_2)} + \overline{L^*(z_2, s_2)} \overline{E_y^*(s_2)}] ds_2 + \\ &+ \int_0^l \int_0^l [\overline{K(z_1, s_1) K^*(z_2, s_2)} R(s_1, s_2) + \overline{L(z_1, s_1) K^*(z_2, s_2)} + \overline{T(s_1, s_2)} + \\ &+ \overline{K(z_1, s_1) L^*(z_2, s_2)} U(s_1, s_2) + \overline{L(z_1, s_1) L^*(z_2, s_2)} W(s_1, s_2)] ds_1 ds_2; \\ W(z_1, z_2) &= E_y^\circ(z_1) E_y^{\circ*}(z_2) + E_y^{\circ*}(z_2) \int_0^l [\overline{M(z_1, s_1)} \overline{E_x(s_1)} + \\ &+ \overline{N(z_1, s_1)} \overline{E_y(s_1)}] ds_1 + E_y^\circ(z_1) \int_0^l [\overline{M^*(z_2, s_2)} \overline{E_x^*(s_2)} + \\ &+ \overline{N^*(z_2, s_2)} \overline{E_y^*(s_2)}] ds_2 + \int_0^l \int_0^l [\overline{M(z_1, s_1) M^*(z_2, s_2)} R(s_1, s_2) + \\ &+ \overline{M(z_1, s_1) N^*(z_2, s_2)} U(s_1, s_2) + \overline{N(z_1, s_1) M^*(z_2, s_2)} T(s_1, s_2) + \\ &+ \overline{N(z_1, s_1) N^*(z_2, s_2)} W(s_1, s_2)] ds_1 ds_2; \quad (6') \\ T(z_1, z_2) &= E_y^\circ(z_1) E_x^{\circ*}(z_2) + E_y^\circ(z_1) \int_0^l [\overline{K^*(z_2, s_2)} \overline{E_x^*(s_2)} + \\ &+ \overline{L^*(z_2, s_2)} \overline{E_y^*(s_2)}] ds_2 + E_x^{\circ*}(z_2) \int_0^l [\overline{M(z_1, s_1)} \overline{E_x(s_1)} + \\ &+ \overline{N(z_1, s_1)} \overline{E_y(s_1)}] ds_1 + \int_0^l \int_0^l [\overline{M(z_1, s_1) K^*(z_2, s_2)} R(s_1, s_2) + \\ &+ \overline{M(z_1, s_1) L^*(z_2, s_2)} U(s_1, s_2) + \overline{N(z_1, s_1) K^*(z_2, s_2)} T(s_1, s_2) + \\ &+ \overline{N(z_1, s_1) L^*(z_2, s_2)} W(s_1, s_2)] ds_1 ds_2; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 U(z_1, z_2) = & E_x^{\circ}(z_1) E_y^{\circ*}(z_2) + E_x^{\circ}(z_1) \int_0^t [\overline{M^*(z_2, s_2)} \overline{E_x^*(s_2)} + \\
 & + \overline{N^*(z_2, s_2)} \overline{E_y^*(s_2)}] ds_2 + E_y^{\circ*}(z_2) \int_0^t [\overline{K(z_1, s_1)} \overline{E_x(s_1)} + \\
 & + \overline{L(z_1, s_1)} \overline{E_y(s_1)}] ds_1 + \int_0^t \int_0^t [\overline{K(z_1, s_1)} \overline{M^*(z_2, s_2)} R(s_1, s_2) + \\
 & + \overline{K(z_1, s_1)} \overline{N^*(z_2, s_2)} U(s_1, s_2) + \overline{L(z_1, s_1)} \overline{M^*(z_2, s_2)} T(s_1, s_2) + \\
 & + \overline{L(z_1, s_1)} \overline{N^*(z_2, s_2)} W(s_1, s_2)] ds_1 ds_2,
 \end{aligned}$$

где

$$\overline{E_x(s_1) E^*(s_2)} = R(s_1, s_2),$$

$$\overline{E_y(s_1) E^*(s_2)} = T(s_1, s_2),$$

$$\overline{E_x(s_1) E_y^*(s_2)} = U(s_1, s_2),$$

$$\overline{E_y(s_1) E_y^*(s_2)} = W(s_1, s_2).$$

Система (6') может быть решена также методом последовательных приближений.

Вернемся теперь к системе (4). Если корреляционные и взаимные корреляционные моменты любого порядка ядер K , L , M и N ограничены в своей совокупности или если вещественные и мнимые части этих ядер являются гауссовскими полями, то можно показать, что формально построенные ряды Неймана для системы (4) сходятся в среднем квадратичном к решению системы (4) [3].

Выразим теперь средние значения поляризации и тангенса угла ориентации осей эллипса поляризации через вероятностные характеристики поля E . По определению

$$\xi(z) = \frac{E_y}{E_x}, \quad \operatorname{tg} 2\varphi(z) = \frac{2\operatorname{Re}\xi(z)}{1 - |\xi(z)|^2}. \quad (7)$$

Удобно ввести «пульсации» компонент поля

$$E_x = \bar{E}_x + E'_x, \quad E_y = \bar{E}_y + E'_y,$$

причем в силу малости оптической анизотропии

$$\left| \frac{E'_x}{\bar{E}_x} \right| \ll 1, \quad \left| \frac{E'_y}{\bar{E}_y} \right| \ll 1, \quad \left| \frac{E'_x}{\bar{E}_x} \right| \ll 1$$

на каждой реализации случайного тензорного поля $\check{V}$.

Усредняя соотношения (7) и оставляя члены второго порядка по $\frac{E'_x}{\bar{E}_x}$ и $\frac{E'_y}{\bar{E}_y}$, получаем

$$\begin{aligned}
 \overline{\xi(z)} = & \frac{\bar{E}_y}{\bar{E}_x} + \frac{1}{\bar{E}_x^2} \left(\bar{E}_y \overline{E_x'^2} - \overline{E'_x E_y'} \right), \\
 \overline{\operatorname{tg} 2\varphi(z)} = & \frac{2\operatorname{Re} \frac{\bar{E}_y}{\bar{E}_x}}{1 - \left| \frac{\bar{E}_y}{\bar{E}_x} \right|^2} + \frac{2\operatorname{Re} \left[\frac{1}{\bar{E}_x^2} \left(\bar{E}_y \overline{E_x'^2} - \overline{E'_x E_y'} \right) \right]}{1 - \left| \frac{\bar{E}_y}{\bar{E}_x} \right|^2} +
 \end{aligned} \quad (8)$$

$$+ \frac{\left| \frac{\bar{E}_y}{\bar{E}_x} \right|^2}{\left(1 - \left| \frac{\bar{E}_y}{\bar{E}_x} \right|^2 \right)^2} \cdot \operatorname{Re} \left[\frac{\bar{E}_y'^2}{\bar{E}_x \bar{E}_y} + \frac{E_y' E_y'^*}{\bar{E}_y E_x^*} - 2 \frac{\bar{E}_x' \bar{E}_y'}{\bar{E}_x^2} - \right. \\ \left. - \frac{\bar{E}_y}{\bar{E}_x^2 \bar{E}_y^*} \bar{E}_y'^* E_x' - \frac{1}{\bar{E}_x \bar{E}_x^*} \bar{E}_y' E_x'^* + \frac{\bar{E}_y}{\bar{E}_x^3} E_x'^2 + \frac{\bar{E}_y}{\bar{E}_x^2 \bar{E}_x^*} E_x' E_x'^* \right].$$

Рассмотрим теперь турбулентный в общем случае неустановившийся цилиндрический поток вязкой несжимаемой жидкости произвольного поперечного сечения. Поле E в потоке в первом приближении удовлетворяет следующему неоднородному векторному волновому уравнению:

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} E + \frac{1}{c^2} \varepsilon_1 \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = G(r, t), \quad (9)$$

$$E|_{t=0} = S(r), \quad \frac{\partial E}{\partial t} \Big|_{t=0} = R(r),$$

где

$$G(r, t) = -\frac{1}{c^2} \varepsilon_1 \frac{\partial^2}{\partial t^2} [\check{\varepsilon}'(r, t) E^0(r, t)]. \quad (10)$$

Граничные условия для E заключаются в равенстве нулю тангенциальной составляющей E_τ на цилиндрической поверхности, ограничивающей турбулентный поток.

Будем искать поле в виде разложения по векторным собственным функциям соответствующей невозмущенной задачи:

$$E = \sum_n [f_n(t) \vec{\varphi}^{(n)}(r) + g_n(t) \vec{\psi}^{(n)}(r)], \quad (11)$$

где $\vec{\varphi}^{(n)}(r)$ и $\vec{\psi}^{(n)}(r)$ соответственно соленоидальные и потенциальные вещественные собственные векторные функции, удовлетворяющие уравнению

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} A^{(n)} - k_n^2 A^{(n)} = 0 \quad (12)$$

и соответствующим условиям [2]. (В случае потока неограниченного в одном из направлений метод разложения по собственным функциям комбинируется с соответствующим интегральным преобразованием).

После подстановки разложения (11) в уравнение (9) имеем

$$\sum_n [f_n(t) \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{\varphi}^{(n)}(r) + g_n(t) \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{\psi}^{(n)}(r)] + \\ + \frac{1}{c^2} \varepsilon_1 \sum_n \left[\frac{d^2 f_n}{dt^2} \vec{\varphi}^{(n)}(r) + \frac{d^2 g_n}{dt^2} \vec{\psi}^{(n)}(r) \right] = G(r, t). \quad (13)$$

Умножив (13) скалярно на $\vec{\varphi}^{(m)}(r)$, затем на $\vec{\psi}^{(m)}(r)$ и воспользовавшись ортогональностью соответствующих собственных функций и уравнением (12), получим следующую систему дифференциальных уравнений для амплитуд $f_n(t)$ и $g_n(t)$:

$$\frac{1}{c^2} \varepsilon_1 \frac{d^2 f_m}{dt^2} + K_m^2 f_m = \eta_m(t), \\ m = 1, 2, \dots \quad (14)$$

$$\frac{1}{c^2} \varepsilon_1 \frac{d^2 g_m}{dt^2} + K_m^2 g_m = \zeta_m(t),$$

где

$$\eta_m(t) = \int G(r, t) \vec{\varphi}^{(m)}(r) dr, \\ \zeta_m(t) = \int G(r, t) \vec{\psi}^{(m)}(r) dr. \quad (15)$$

Таким образом, $f_n(t)$ и $g_n(t)$ удовлетворяют уравнениям вынужденных колебаний осциллятора, причем случайные силы определяются соотношениями (15).

Составляя произведения компонент поля E и усредняя, получаем

$$\begin{aligned} S_{ik}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t, t') = \overline{E_i(\mathbf{r}, t) E_k^*(\mathbf{r}', t')} = \sum_{n, m} [\overline{f_n(t) f_m^*(t')} \varphi_i^{(n)}(\mathbf{r}) \varphi_k^{(m)}(\mathbf{r}') + \\ + \overline{g_n(t) f_m^*(t')} \varphi_i^{(n)}(\mathbf{r}) \varphi_k^{(m)}(\mathbf{r}') + \overline{f_n(t) g_m^*(t')} \varphi_i^{(n)}(\mathbf{r}) \varphi_k^{(m)}(\mathbf{r}') + \\ + \overline{g_n(t) g_m^*(t')} \varphi_i^{(n)}(\mathbf{r}) \varphi_k^{(m)}(\mathbf{r}')]. \end{aligned} \quad (16)$$

Предположим, что $\eta_m(t)$ и $\zeta_m(t)$, определяемые формулами (15), представляют собой независимые, вещественные, δ -коррелированные случайные процессы. Тогда для соответствующих корреляций процессов $f_n(t)$ и $g_n(t)$, определяемых как решения стохастических дифференциальных уравнений (14) со случайными δ -коррелированными правыми частями, имеем [4]—[5]:

$$\begin{aligned} \overline{f_n(t) f_m^*(t')} &= \frac{c^2}{\varepsilon_1 k_n k_m} \left(f_n^{\circ} \frac{c}{V_{\varepsilon_1}} k_n \cos \frac{c}{V_{\varepsilon_1}} k_n t - \frac{df_n^{\circ}}{dt} \sin \frac{c}{V_{\varepsilon_1}} k_n t \right) \times \\ &\times \left(f_m^{\circ} \frac{c}{V_{\varepsilon_1}} k_m \cos \frac{c}{V_{\varepsilon_1}} k_m t' - \frac{df_m^{\circ}}{dt} \sin \frac{c}{V_{\varepsilon_1}} k_m t' \right); \\ \overline{f_n(t) g_m^*(t')} &= \frac{c^2}{\varepsilon_1 k_n k_m} \left(f_n^{\circ} \frac{c^2}{V_{\varepsilon_1}} k_n \cos \frac{c}{V_{\varepsilon_1}} k_n t - \frac{df_n^{\circ}}{dt} \sin \frac{c}{V_{\varepsilon_1}} k_n t \right) \times \\ &\times \left(g_m^{\circ} \frac{c}{V_{\varepsilon_1}} k_m \cos \frac{c}{V_{\varepsilon_1}} k_m t' - \frac{dg_m^{\circ}}{dt} \sin \frac{c}{V_{\varepsilon_1}} k_m t' \right); \\ \overline{g_n(t) f_m^*(t')} &= \frac{c^2}{\varepsilon_1 k_n k_m} \left(g_n^{\circ} \frac{c}{V_{\varepsilon_1}} k_n \cos \frac{c}{V_{\varepsilon_1}} k_n t - \frac{dg_n^{\circ}}{dt} \sin \frac{c}{V_{\varepsilon_1}} k_n t \right) \times \\ &\times \left(f_m^{\circ} \frac{c}{V_{\varepsilon_1}} k_m \cos \frac{c}{V_{\varepsilon_1}} k_m t' - \frac{df_m^{\circ}}{dt} \sin \frac{c}{V_{\varepsilon_1}} k_m t' \right); \\ \overline{g_n(t) g_m^*(t')} &= \frac{c^2}{\varepsilon_1 k_n k_m} \left(g_n^{\circ} \frac{c}{V_{\varepsilon_1}} k_n \cos \frac{c}{V_{\varepsilon_1}} k_n t - \frac{dg_n^{\circ}}{dt} \sin \frac{c}{V_{\varepsilon_1}} k_n t \right) \times \\ &\times \left(g_m^{\circ} \frac{c}{V_{\varepsilon_1}} k_m \cos \frac{c}{V_{\varepsilon_1}} k_m t' - \frac{dg_m^{\circ}}{dt} \sin \frac{c}{V_{\varepsilon_1}} k_m t' \right). \end{aligned} \quad (17)$$

Тогда для $S_{ik}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; t, t')$ окончательно получаем

$$\begin{aligned} S_{ik}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; t, t') &= \frac{c^2}{\varepsilon_1} \sum_{n, m} \frac{1}{k_n k_m} \left[\left(f_n^{\circ} \frac{c}{V_{\varepsilon_1}} k_n \cos \frac{c}{V_{\varepsilon_1}} k_n t - \frac{df_n^{\circ}}{dt} \sin \frac{c}{V_{\varepsilon_1}} k_n t \right) \times \right. \\ &\times \left(f_m^{\circ} \frac{c}{V_{\varepsilon_1}} k_m \cos \frac{c}{V_{\varepsilon_1}} k_m t' - \frac{df_m^{\circ}}{dt} \sin \frac{c}{V_{\varepsilon_1}} k_m t' \right) \cdot \varphi_i^{(n)}(\mathbf{r}) \varphi_k^{(m)}(\mathbf{r}') + \\ &+ \left(f_n^{\circ} \frac{c}{V_{\varepsilon_1}} k_n \cos \frac{c}{V_{\varepsilon_1}} k_n t - \frac{df_n^{\circ}}{dt} \sin \frac{c}{V_{\varepsilon_1}} k_n t \right) \times \\ &\times \left(g_m^{\circ} \frac{c}{V_{\varepsilon_1}} k_m \cos \frac{c}{V_{\varepsilon_1}} k_m t' - \frac{dg_m^{\circ}}{dt} \sin \frac{c}{V_{\varepsilon_1}} k_m t' \right) \cdot \varphi_i^{(n)}(\mathbf{r}) \varphi_k^{(m)}(\mathbf{r}') + \\ &+ \left(g_n^{\circ} \frac{c}{V_{\varepsilon_1}} k_n \cos \frac{c}{V_{\varepsilon_1}} k_n t - \frac{dg_n^{\circ}}{dt} \sin \frac{c}{V_{\varepsilon_1}} k_n t \right) \times \\ &\times \left(f_m^{\circ} \frac{c}{V_{\varepsilon_1}} k_m \cos \frac{c}{V_{\varepsilon_1}} k_m t' - \frac{df_m^{\circ}}{dt} \sin \frac{c}{V_{\varepsilon_1}} k_m t' \right) \cdot \varphi_i^{(n)}(\mathbf{r}) \varphi_k^{(m)}(\mathbf{r}') + \\ &+ \left. \left(g_n^{\circ} \frac{c}{V_{\varepsilon_1}} k_n \cos \frac{c}{V_{\varepsilon_1}} k_n t - \frac{dg_n^{\circ}}{dt} \sin \frac{c}{V_{\varepsilon_1}} k_n t \right) \times \right. \\ &\times \left. \left(g_m^{\circ} \frac{c}{V_{\varepsilon_1}} k_m \cos \frac{c}{V_{\varepsilon_1}} k_m t' - \frac{dg_m^{\circ}}{dt} \sin \frac{c}{V_{\varepsilon_1}} k_m t' \right) \cdot \varphi_i^{(n)}(\mathbf{r}) \varphi_k^{(m)}(\mathbf{r}') \right] \end{aligned} \quad (18)$$

$$+ \left(g_n^{\circ} \frac{c}{V_{\varepsilon_1}} k_n \cdot \cos \frac{c}{V_{\varepsilon_1}} k_n t - \frac{dg_n^{\circ}}{dt} \sin \frac{c}{V_{\varepsilon_1}} k_n t \right) \times \\ \times \left(g_m^{\circ} \frac{c}{V_{\varepsilon_1}} k_m \cos \frac{c}{V_{\varepsilon_1}} k_m t' - \frac{dg_m^{\circ}}{dt} \sin \frac{c}{V_{\varepsilon_1}} k_m t' \right) \psi_i^{(n)}(\mathbf{r}) \psi_k^{(m)}(\mathbf{r}').$$

По известному тензору S_{ik} можно найти оптические характеристики потока, так как поляризационные свойства электромагнитной волны можно описать при помощи этого тензора [7].

Найдем теперь абсолютный закон распределения для

$$E_k^1(\mathbf{r}, t) = \sum_n f_n(t) \varphi_k^{(n)}(\mathbf{r}) \quad (19)$$

(для $E_k^2 = \sum_n g_n(t) \psi_k^{(n)}(\mathbf{r})$ процедура совершенно аналогичная). Закон распределения для каждого из $f_n(t)$, которые предполагаются независимыми, известен [5]:

$$W_n(f_n, t; f_n^{\circ}, t_0).$$

Рассмотрим абсолютный закон распределения для $f_n(t)$

$$W_n(f_n, t) = \int_0^{\infty} W_n(f_n, t; f_n^{\circ}, t_0) df_n^{\circ}. \quad (20)$$

Тогда распределение величины $\alpha_k^n(\mathbf{r}, t) = \varphi_k^{(n)}(\mathbf{r}) f_n(t)$ в произвольной фиксированной точке $\mathbf{r}$ определится по известному $W_n(f_n, t)$ следующим образом:

$$\dot{W}_n(\alpha_k^n, t) = \frac{1}{\varphi_k^{(n)}(\mathbf{r})} W_n\left(\frac{\alpha_k^n}{\varphi_k^{(n)}(\mathbf{r})}, t\right). \quad (21)$$

Введем характеристическую функцию

$$h_n^k(\theta, t) = \frac{1}{\varphi_k^{(n)}(\mathbf{r})} \int_0^{\infty} e^{i\theta \alpha_k^n} d\tilde{W}(\alpha_k^n, t). \quad (22)$$

Тогда характеристическая функция E_k^1 в силу независимости $f_n(t)$ имеет вид

$$h^k(\theta, t) = \prod_n h_n^k(\theta, t) = \prod_n \frac{1}{\varphi_k^{(n)}(\mathbf{r})} \int_0^{\infty} e^{i\theta \alpha_k^n} d\tilde{W}(\alpha_k^n, t). \quad (23)$$

Следовательно, искомый закон распределения $W_k(E_k^1, t)$ определится как обращение преобразования Стильтьеса:

$$W_k(E_k^1, t) = \frac{1}{2\pi} \lim_{y \rightarrow -\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\theta y} - e^{i\theta E_k^1}}{i\theta} h^k(\theta, t) d\theta. \quad (24)$$

Отметим, что описанный выше способ является достаточно общим, и процесс распространения электромагнитных волн в турбулентных потоках в первом приближении может быть рассмотрен с единой точки зрения, если представлять поле в виде разложения по собственным функциям соответствующей невозмущенной задачи, причем коэффициенты разложения, зависящие от времени, определяются как решения статистической задачи колебаний гармонического осциллятора. Эта задача в настоящее время подробно изучена [4]—[6], и поэтому представление поля в виде суперпозиции «осцилляторов» дает эффективный метод решения электродинамической задачи в первом приближении.

В общем случае для поля в потоке имеем следующее векторное волновое уравнение:

$$\text{rot rot } \mathbf{E} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\epsilon(\mathbf{r}, t) \mathbf{E}) = 0. \quad (25)$$

Будем искать поле $\mathbf{E}$ снова в виде разложения

$$\mathbf{E} = \sum_n [f_n(t) \vec{\varphi}^{(n)}(\mathbf{r}) + g_n(t) \vec{\psi}^{(n)}(\mathbf{r}')] \quad (26)$$

(функции $\vec{\varphi}^{(n)}(\mathbf{r})$ и $\vec{\psi}^{(n)}(\mathbf{r})$ были определены выше.

Повторяя процедуру вывода уравнений (14), получаем следующую бесконечную систему стохастических дифференциальных уравнений для амплитуд $f_n(t)$ и $g_n(t)$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{c^2} \frac{d^2}{dt^2} \sum_m [A_{nm}(t) f_m(t) + B_{nm}(t) g_m(t)] + k_n^2 f_n(t) &= 0, \\ \frac{1}{c^2} \frac{d^2}{dt^2} \sum_m [C_{nm}(t) f_m(t) + D_{nm}(t) g_m(t)] + k_n^2 g_n(t) &= 0, \end{aligned} \quad (27)$$

где

$$\begin{aligned} A_{nm}(t) &= \int \epsilon_{\alpha\beta}(\mathbf{r}, t) \varphi_\alpha^{(n)}(\mathbf{r}) \varphi_\beta^{(m)}(\mathbf{r}) d\mathbf{r}, \\ B_{nm}(t) &= \int \epsilon_{\alpha\beta}(\mathbf{r}, t) \psi_\alpha^{(n)}(\mathbf{r}) \varphi_\beta^{(m)}(\mathbf{r}) d\mathbf{r}, \\ C_{nm}(t) &= \int \epsilon_{\alpha\beta}(\mathbf{r}, t) \varphi_\alpha^{(n)}(\mathbf{r}) \psi_\beta^{(m)}(\mathbf{r}) d\mathbf{r}, \\ D_{nm}(t) &= \int \epsilon_{\alpha\beta}(\mathbf{r}, t) \psi_\alpha^{(n)}(\mathbf{r}) \psi_\beta^{(m)}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} \end{aligned} \quad (28)$$

являются элементами случайных бесконечномерных матриц-функций.

Следовательно, и в общем случае принципиально возможно представить в виде суперпозиции бесконечного числа связанных случайных осцилляторов.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Л. Герман и А. А. Лазебный. Уч. зап. ХМО, т. 32, Изд-во, ХГУ, Харьков, 1966, стр. 17.
2. W. Hauser. The quart. journ. mech. and Ap. math., v. XI, p. I. Febr. 1958.
3. IRE Trans. AP-7, Special Suppl, s301—s306, 1959.
4. М. С. Бартлетт. Введение в теорию случайных процессов, стр. 186, ИЛ, 1958.
5. Д. Миддлтон. Введение в статистическую теорию связи. т. I. Изд-во «Советское радио», 1961.
6. Proceedings of Symposia in Applied mathematics, v. XVI, 1964.
7. М. Born, E. Wolf. Principles of Optics, 1959.

