

Розділ 5. Лінії і поверхні

5.1. Рівняння лінії і поверхні.

Визначення рівняння лінії.

Рівняння $f(x, y) = 0$ називають рівнянням лінії, якщо йому задовольняють координати всіх точок цієї лінії і не задовольняють координати точок, що не належать цій лінії.

Визначення алгебраїчних ліній. Алгебраїчна лінія порядку N – це лінія, рівняння якої має вигляд полінома N -го порядку:

$$\sum_{i+j \leq N} a_{ij} x^i y^j = 0.$$

Теорема про інваріантності порядку алгебраїчної лінії.

Під час лінійних перетворень координат порядок алгебраїчної лінії не змінюється.

Визначення циліндра.

Циліндр – це поверхня, утворена рівнобіжними прямими. Рівняння циліндра можна записати у вигляді рівняння $f(x, y) = 0$, у якому відсутня одна з координат.

Визначення конуса. Конус – це поверхня, утворена прямими, що проходять через одну точку – *вершину* конуса. Рівняння конуса можна записати у вигляді $f(x, y, z) = 0$, де $f(x, y, z)$ – однорідна функція.

Визначення поверхні обертання.

Поверхня обертання – це поверхня, утворена лінією в просторі під час її обертання навколо заданої осі.

Якщо віссю обертання є вісь OZ , то рівняння поверхні обертання можна записати у вигляді $f(x^2 + y^2, z) = 0$.

5.2. Короткі відомості про лінії і поверхні.

1. Рівняння лінії на площині:

$$f(x, y) = 0.$$

2. Рівняння поверхні в просторі:

$$f(x, y, z) = 0.$$

3. Рівняння лінії в просторі:

$$\begin{cases} f(x, y, z) = 0 \\ g(x, y, z) = 0 \end{cases}.$$

4. Параметричне рівняння лінії:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t).$$

5. Параметричне рівняння поверхні:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v).$$

6. Рівняння циліндра:

$$f(x, y) = 0.$$

7. Рівняння конуса:

$$f(x, y, z) = 0, \text{ якщо } f(kx, ky, kz) = k^n f(x, y, z).$$

8. Рівняння поверхні обертання:

$$f(\sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0.$$

Завдання до розділу 5

Усні питання для повторення матеріалу

1. Що таке рівняння лінії?
2. Чому рівняння лінії на площині відрізняється від рівняння лінії в просторі?
3. Які види рівняння поверхні ви знаєте?
4. Чи обов'язково циліндр або конус є фігурами обертання?
5. Наведіть приклади відомих вам лінійчатих поверхонь.

Контрольні задачі

1. До якого з видів поверхонь: а) циліндр, б) конус, в) поверхня обертання – належать поверхні, рівняння яких мають вигляд:

1) $x^2 + y^2 = 4$;

2) $x^2 - y^2 = 9$;

3) $x^3 - 2y^3 = 5z^3$;

4) $x^2 = 2y$.

2. Який вигляд буде мати рівняння лінії в новій системі координат, що повернена щодо старої системи координат на кут 45° , якщо у вихідній системі рівняння лінії має вигляд $x^2 - y^2 = 2$?

3. Запропонуйте параметричний опис еліпса, спіралі й гвинтової лінії.

Теми для індивідуальних науково-дослідних задач

1. Дослідіть перетворення координат, під час яких змінюється порядок алгебраїчної лінії. Чому може дорівнювати визначник матриці таких перетворень? Чи можливі зворотні їм перетворення?
2. Дослідіть можливі лінійчаті поверхні, відмінні від площин, конусів і циліндрів. Окремо розгляньте гіперболоїд з однією порожниною і гіперболічний параболоїд.

Розділ 6. Основні лінії другого порядку

6.1. Парабола.

Визначення параболі. Парабола – це множина точок, які перебувають на однакових відстанях від заданої точки (фокуса) і заданої прямої (директриси).

Задача 6.1. Доведіть, що в параболі є тільки одна вісь симетрії.

6.2. Еліпс

Визначення еліпса. Еліпс – це множина точок, сума відстаней від яких до заданих точок (фокусів) є сталою величиною.

Визначення еліпса через директрису й ексцентриситет. Еліпс – це множина точок, для кожної з яких відношення відстані до заданої точки (фокуса) до відстані до заданої прямої (директриси) є сталою величиною і дорівнює ексцентриситету.

Задача 6.2. Знайдіть закон руху точки, максимально вилученої в обраному напрямку від фокуса еліпса за рівномірного його обертання навколо цього фокуса.

6.3. Гіпербола.

Визначення гіперболи. Гіпербола – це множина точок, різниця відстаней від яких до двох заданих точок (фокусів) є сталою величиною.

Визначення гіперболи через директрису й ексцентриситет. Гіпербола – це множина точок, для кожної з яких відношення відстані до заданої точки (фокуса) до відстані до заданої прямої (директриси) є сталою величиною і дорівнює ексцентриситету.

Теорема про визначення еліпса, параболі й гіперболи за допомогою директриси й ексцентриситету. Множина точок, для кожної з яких відношення відстані до заданої точки (фокуса) до відстані до заданої прямої (директриси) є сталою величиною і дорівнює ексцентриситету, являє собою

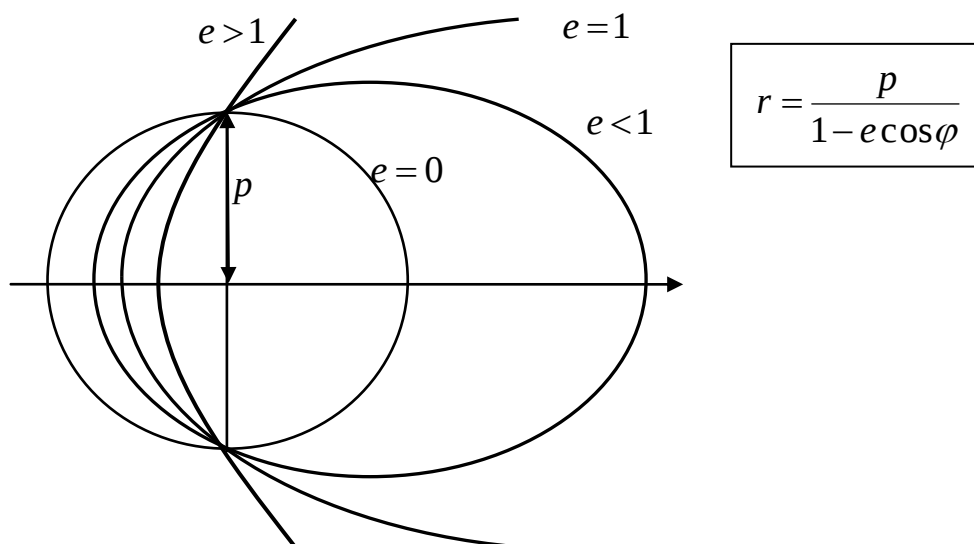
- а) еліпс, якщо $e < 1$;
- б) параболу, якщо $e = 1$;
- в) гіперболу, якщо $e > 1$.

Окремому випадку $e = 0$ відповідає окружність, $e = \sqrt{2}$ – рівнобічна гіпербола.

Задача 6.3. Яка лінія утворюється з гіперболи, якщо припустити, що фокуси гіперболи збіглися.

6.4. Загальні властивості еліпса, параболи й гіперболи

Полярне рівняння.



Рівняння при вершині. Така назва має на увазі, що це рівняння задане в системі відліку, центр якої збігається з вершиною лінії.

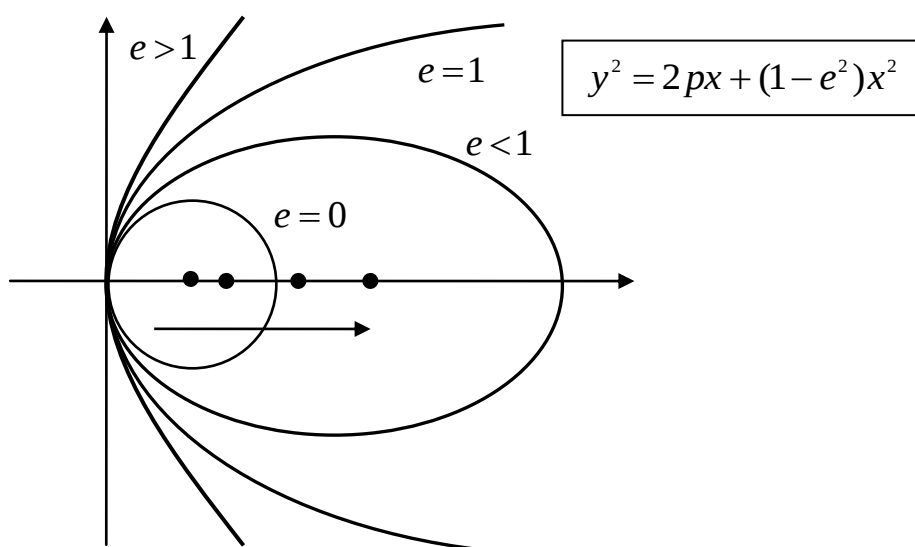


Рис. 6.1. Сімейство ліній другого порядку, які відповідають рівнянню при вершині для різних значень ексцентриситету. Стрілкою показано зсув одного з фокусів

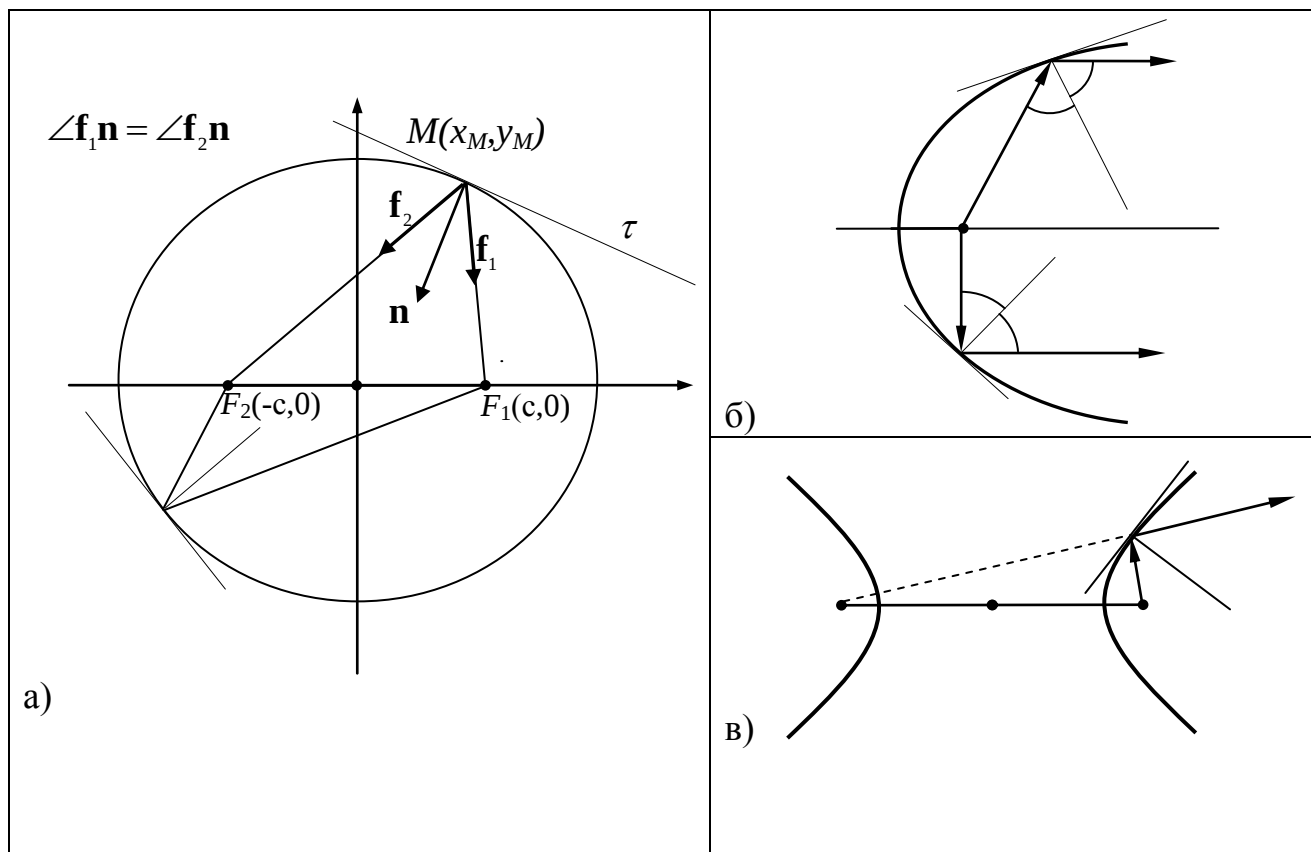


Рис. 6.2. Оптичні властивості а) еліпса, б) параболи та в) гіперболи

Конічні перетини.

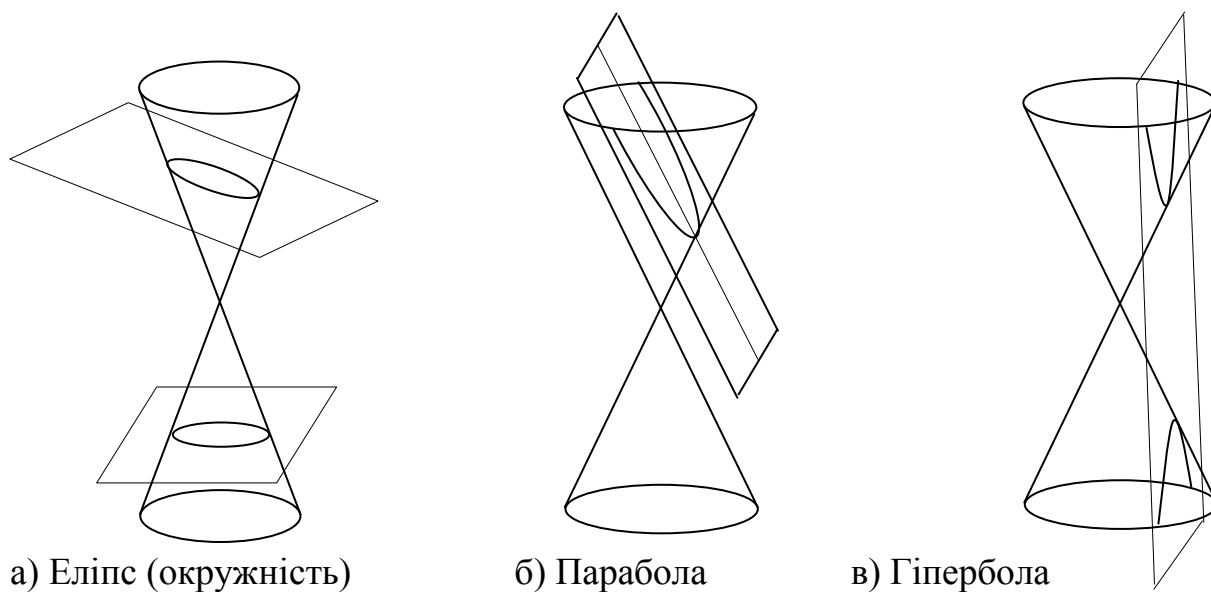
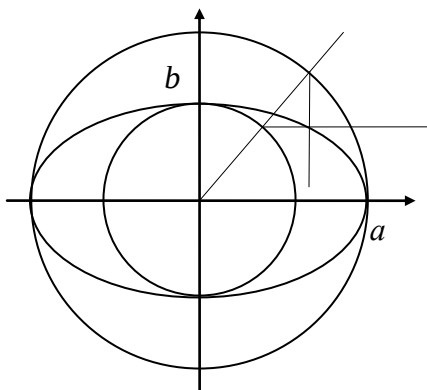


Рис. 6.3 Перетини конуса

Задача 6.1. Рівняння кола в полярній системі відліку можна задати в параметричному вигляді

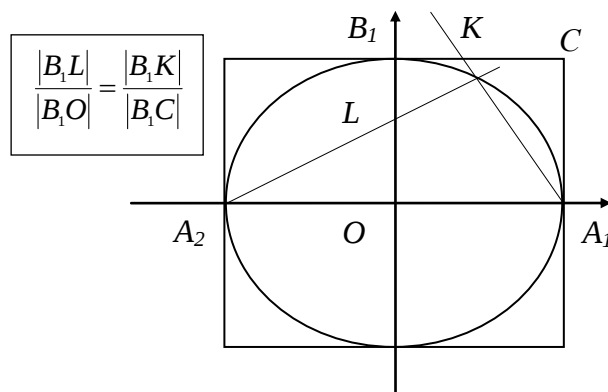
$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{cases},$$

де величина кута відіграє роль параметра. Узагальніть такий опис на випадок еліпса. Поясніть за допомогою отриманої формули наступний метод побудови еліпса.



Для побудови еліпса з півосями a і b , будуємо два концентричні кола з центром у початку координат і радіусами, що дорівнюють рівним a і b відповідно. Потім з початків координат проводимо промінь. Далі з точки перетину променя з меншим колом проводимо горизонтальну пряму. А через точку перетину променя з більшим колом проводимо вертикальну пряму. Точка перетину цих прямих лежить на еліпсі.

Задача 6.2. Розгляньте ще один зі способів побудови еліпса в нарисній геометрії. Переконайтеся самостійно в його справедливості.



Проведемо з точки A_2 пряму так, щоб вона поділяла відрізок OB_1 у заданому відношенні. З точки A_1 проведемо пряму, що поділяє в цьому ж відношенні відрізок CB_1 . Тоді точка перетину цих прямих виявиться на еліпсі з півосями OA_1 і OB_1 .

Задача 6.3. Покажіть, що рівняння при вершині можна одержати прямо з визначення еліпса, параболи й гіперболи через директрису й ексцентриситет.

Задача 6.4. Виведіть полярне рівняння для другої гілки гіперболи.

Задача 6.5. Чи можна за допомогою куль Данделена (або аналогічним способом) довести, що парабола є конічним перетином.

Завдання до розділу 6

Усні питання для повторення матеріалу

1. Що таке півосі еліпса?
2. Яке геометричне значення має ексцентриситет еліпса?
3. Чому дорівнює відстань між гілками гіперболи?
4. Чому говорять, що парабола росте повільніше за будь-яку пряму?
5. Яка з ліній другого порядку: а) замкнута, б) незамкнута, в) має дві гілки?
6. Під час обертання якої з ліній другого порядку виходить поверхня, що використовують в антенах і телескопах?
7. Чи може пряма лінія тричі перетинати гіперболу?

Контрольні задачі

1. Дано лінію другого порядку

а) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1;$

б) $x^2 = 8y;$

в) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{1} = 1.$

Визначить величину ексцентриситету цих ліній і координати їхніх фокусів.

2. Визначить радіус і координати центра окружності $x^2 + 2x + y^2 - 6y = 9$.
3. Визначить півосі і координати фокусів еліпса $x^2 - 4x + 2y^2 + 12y = 18$.
3. Складіть рівняння лінії другого порядку, осі якої збігаються з осями координат, знаючи, що вона проходить через точки $A = (a_x, a_y)$, $B = (b_x, b_y)$.
4. Знайдіть найбільший радіус кола, що лежить усередині параболи і торкається параболи в її вершині. Запропонуйте принаймні два різних розв'язки.
5. Побудуйте за допомогою олівця, лінійки, ниток і катушок (і т. п.) еліпс, параболу й гіперболу.

Теми для індивідуальних науково-дослідних задач

1. Дослідіть рух масивного тіла в гравітаційному полі. Виведіть рівняння можливих траєкторій руху в канонічному вигляді.
2. Запропонуйте параметричні рівняння для ліній другого порядку. Розгляньте різні види параметризації.
3. У домашніх умовах дзеркало для телескопа-рефлектора можна одержати, обертаючи судину, у який повільно застигає епоксидний клей. Яким чином при цьому одержати дзеркало із заданою фокусною відстанню?
4. Іноді говорять, що ковзанярі заточують ковзани «по параболі». Чи правда це і яка можлива причина цього?

Розділ 7. Загальна теорія ліній другого порядку

7.1. Загальне рівняння ліній другого порядку.

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0.$$

Рівнобіжний перенос не змінює старших членів рівняння другого порядку.

Під час повороту старші члени виражаються через старші члени у вихідній системі, а молодші – через молодші члени. Неоднорідність, або вільний член, під час повороту не змінюється.

7.2. «Стандартне» спрощення рівняння лінії другого порядку. Поворот системи координат.

$$\text{Кут повороту до приведеної системи координат } \operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2a_{12}}{a_{11} - a_{22}}.$$

Рівняння для координат центру лінії центрального типу

$$\begin{cases} a_{11}X_0 + a_{12}Y_0 + a_{13} = 0 \\ a_{12}X_0 + a_{22}Y_0 + a_{23} = 0 \end{cases}.$$

Наведені рівняння ліній другого порядку

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33} = 0 \quad \text{Еліптичний і гіперболічний тип.}$$

$$a_{22}y^2 + 2a_{13}x = 0 \quad \text{Параболічний тип (парабола).}$$

$$a_{22}y^2 + a_{33} = 0 \quad \text{Параболічний тип (дві паралельні прямі).}$$

7.3. Інваріанти ліній другого порядку.

Теорема про інваріанти лінії другого порядку. Під час поворотів і (або) паралельних перенесень не змінюється значення таких функцій коефіцієнтів загального рівняння заданої лінії другого порядку.

$$I_1 = Sp \|a_{ij}\|, \text{ де } i, j = 1, 2;$$

$$I_2 = \det \|a_{ij}\|, \text{ де } i, j = 1, 2;$$

$$I_3 = \det \|a_{ij}\|, \text{ де } i, j = 1, 2, 3.$$

Теорема про напівінваріант лінії другого порядку. Функція K коефіцієнтів загального рівняння заданої лінії другого порядку

$$K = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{13} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$$

є інваріантом під час поворотів, а для ліній, у яких другий і третій інваріанти дорівнюють нулю $I_2 = 0$ и $I_3 = 0$, функція K інваріантна й під час паралельних перенесень.

Таблиця 7.1. Класифікація ліній гіперболічного типу

Гіперболічний тип: $I_2 < 0$	
$I_3 \neq 0$	$I_3 = 0$
Гіпербола	Пари перетин них прямих
$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$

Таблиця 7.2 Класифікація ліній еліптичного типу.

Еліптичний тип: $I_2 > 0$		
$I_1 I_3 < 0$	$I_1 I_3 = 0$	$I_1 I_3 > 0$
Еліпс	Точка (пари уявних перетин них прямих)	Уявний еліпс
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$

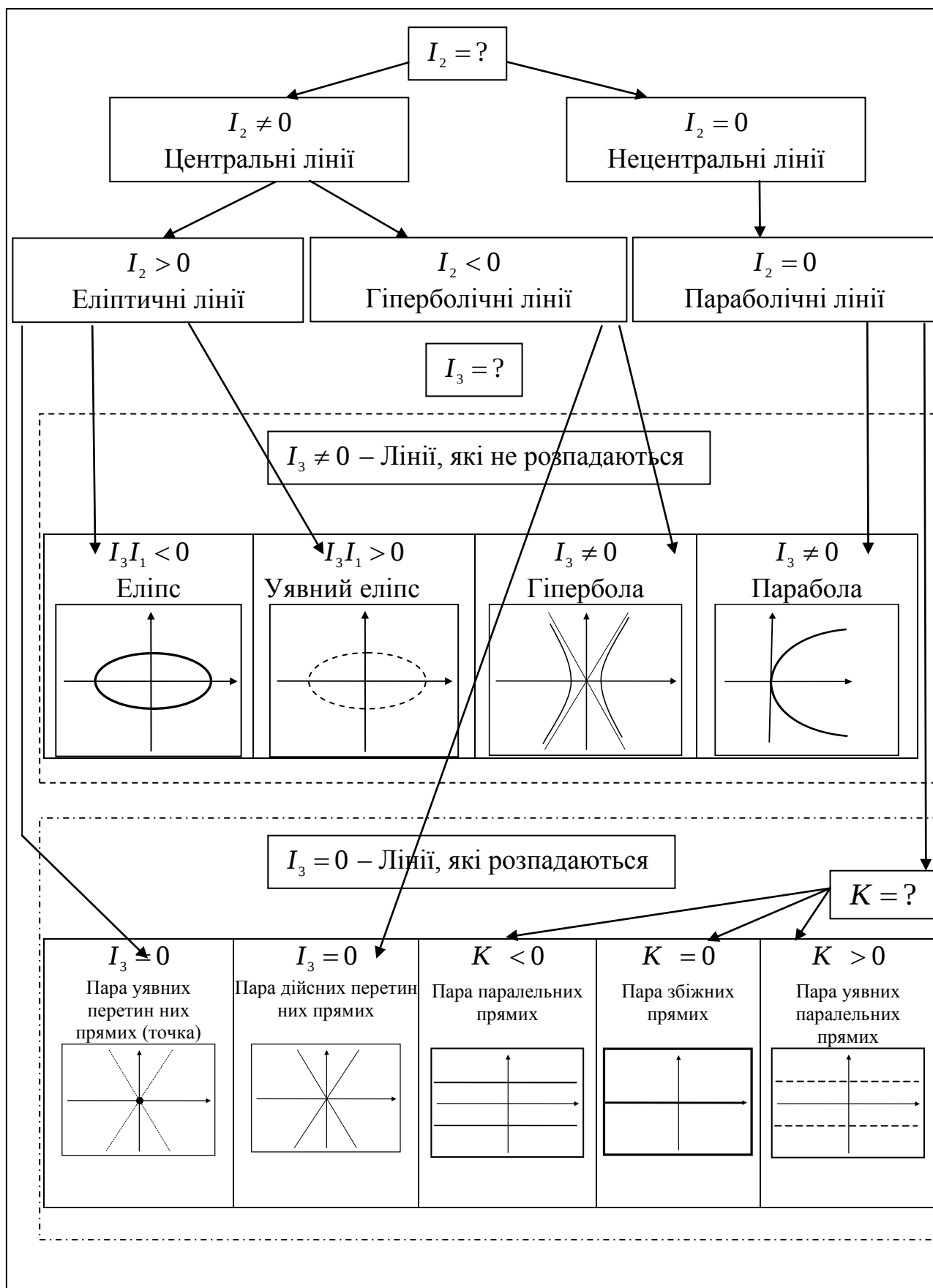
Таблиця 7.3. Класифікація ліній параболічного типу.

Параболічний тип: $I_2 = 0$			
$I_3 \neq 0$	$I_3 = 0$		
Парабола	Рівнобіжні прямі		
$y^2 = 2px$	$K < 0$	$K = 0$	$K > 0$
	Дійсні	Збіжні	Уявні
	$y^2 = h^2$	$y^2 = 0$	$y^2 = -h^2$

7.3. Підсумкова класифікація ліній другого порядку.

N			Тип			Назва лінії	Рівняння
1	Центральні $I_2 \neq 0$	$I_2 > 0$	Еліптичний	$I_3 I_1 < 0$		Еліпс	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$
2				$I_3 = 0$		Точка (пара уявних прямих, які перетинаються)	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$
3				$I_3 I_1 > 0$		Уявний еліпс	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$
4		$I_2 < 0$	Гіперболічний	$I_3 \neq 0$		Гіпербола	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$
5				$I_3 = 0$		Пара перетинних прямих	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$
6	Нецентральні	$I_2 = 0$	Параболічний	$I_3 \neq 0$		Парабола	$y^2 = 2px$
7				$I_3 = 0$	K<0	Пара паралельних прямих	$y^2 = h^2$
8					K=0	Пара збіжних прямих	$y^2 = 0$
9					K>0	Пара паралельних уявних прямих	$y^2 = -h^2$

7.4. Алгоритм визначення виду лінії другого порядку за допомогою інваріантів



7.5. Визначення параметрів лінії другого порядку.

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0.$$

1. Еліпс й гіпербола.

Координати центра:
$$\begin{cases} a_{11}X_0 + a_{12}Y_0 + a_{13} = 0 \\ a_{12}X_0 + a_{22}Y_0 + a_{23} = 0 \end{cases}$$

Корені характеристичного рівняння: $\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}(I_1 \pm \sqrt{D})$.

Дискримінант $D = (a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2 = I_1^2 - 4I_2$.

Кут повороту ($S = \pm 1$): $\cos 2\varphi = \frac{a_{11} - a_{22}}{\sqrt{D}} S$, $\sin 2\varphi = \frac{2a_{12}}{\sqrt{D}} S$,

$$\cos \varphi = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos 2\varphi}{2}} \operatorname{sign}(\sin 2\varphi), \quad \sin \varphi = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos 2\varphi}{2}}.$$

Дійсний та уявний еліпс: $S = -\operatorname{sign} I_1$.

Півосі: $a^2, b^2 = \frac{|I_3|}{2I_2^2} (|I_1| \pm \sqrt{I_1^2 - 4I_2})$.

Гіпербола: $S = \operatorname{sign} I_3$.

Півосі: $a^2, b^2 = \mp \frac{I_3}{I_2^2} \lambda^{(\mp)}$, де $\operatorname{sign}(\lambda^{(\pm)} I_3) > 0$.

2. Перетинні прямі (діагоналі основного прямокутника).

$$(a_{12} \pm \sqrt{-I_2})(x - X_0) + a_{22}(y - Y_0) = 0 \quad \text{або} \quad a_{11}(x - X_0) + (a_{12} \pm \sqrt{-I_2})(y - Y_0) = 0.$$

3. Паралельні прямі.

$$\frac{a_{11}x + a_{12}y + a_{13}}{\sqrt{a_{11}^2 + a_{12}^2}} \pm \sqrt{-\frac{K}{I_1}} = 0 \quad \text{або} \quad \frac{a_{12}x + a_{22}y + a_{23}}{\sqrt{a_{12}^2 + a_{22}^2}} \pm \sqrt{-\frac{K}{I_1}} = 0.$$

4. Парабола.

Параметр: $p = \sqrt{-\frac{I_3}{I_1^3}}$.

Кут повороту:

$$\cos \varphi = \sqrt{\frac{a_{22}}{a_{11} + a_{22}}} \operatorname{sign}(a_{23}a_{12} - a_{13}a_{22}); \quad \sin \varphi = \sqrt{\frac{a_{11}}{a_{11} + a_{22}}} \operatorname{sign}(a_{23}a_{11} - a_{13}a_{12}).$$

Вісь параболы

$$a_{11}x + a_{12}y = \frac{a_{13}a_{11} + a_{23}a_{12}}{I_1}, \quad \text{або} \quad a_{12}x + a_{22}y = \frac{a_{13}a_{12} + a_{23}a_{22}}{I_1}.$$

Вершину визначають як точку перетину параболы з її віссю.

5. Осі координат канонічної системи відліку

Вісь абсцис: $(x - X_0)\sin \varphi - (y - Y_0)\cos \varphi = 0$.

Вісь ординат: $(x - X_0)\cos \varphi + (y - Y_0)\sin \varphi = 0$.

У рівнобіжних прямих визначена тільки вісь абсцис одним з рівнянь:

$$a_{11}x + a_{12}y + a_{13} = 0 \quad \text{або} \quad a_{12}x + a_{22}y + a_{23} = 0.$$

Задача 7.1. Виведіть цей інваріантний вираз для ексцентриситету лінії другого порядку:

$$e = \frac{2\sqrt{D}}{I_1 + \sqrt{D}} = 1 - \frac{I_1 - \sqrt{I_1^2 - 4I_2}}{I_1 - \sqrt{I_1^2 + 4I_2}}.$$

Задача 7.2. Виведіть цей інваріантний вираз для площини еліпса:

$$S = \pi \sqrt{\frac{I_3^2}{I_2^3}}.$$

Завдання до розділу 7.

Усні питання для повторення матеріалу

1. Що таке приведені рівняння лінії?
2. Що таке характеристичне рівняння?
3. Скільки існує видів ліній другого порядку?
4. Що таке лінії, які розпадаються?
5. Що таке центр лінії другого порядку?

Контрольні задачі

1. Використовуючи тільки паралельне перенесення, визначить тип лінії другого порядку і її розташування щодо вихідної системи координат

$$5x^2 + 7y^2 - 30x + 14y - 35 = 0.$$

2. Визначить тип лінії і напишіть її канонічне рівняння

$$x^2 + 2y^2 - 3x + 4y - 5 = 0.$$

3. За яких значень інваріантів лінія другого порядку є

а) колом; б) дійсним еліпсом; в) двома перпендикулярними прямими?

4. Лінію другого порядку визначають рівнянням

$$x^2 + y^2 + \lambda(x + y) - 1 = 0.$$

Визначте тип лінії за зміною параметра λ від $-\infty$ до $+\infty$ і знайдіть її розташування щодо даної системи координат.

5. Визначить зв'язок між інваріантами двох сполучених гіпербол.

Теми для індивідуальних науково-дослідних задач.

1. Побудова лінії другого порядку.

– Виходячи з заданого рівняння лінії другого порядку, обчисліть інваріанти лінії, визначте її тип і всі параметри.

– Побудуйте лінію другого порядку виходячи з заданого рівняння другого порядку. Проведіть, за необхідністю, стандартне перетворення, рівнобіжне перенесення в канонічну систему відліку. Побудуйте канонічну систему координат, саму лінію. Укажіть фокуси, директриси, вершини, основний прямокутник й асимптоти.

2. Випадково в інтервалі від $-L$ до L вибирають кожний з коефіцієнтів рівняння лінії другого порядку. З якою відносною частотою таке рівняння буде описувати ту або іншу лінію другого порядку?

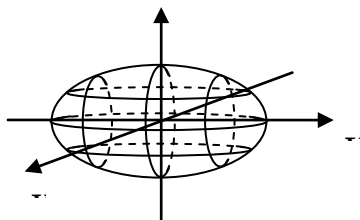
3. Визначить можливість одержання простого рівняння для визначення координат вершини параболу.

Розділ 8. Поверхні другого порядку

Короткі відомості про поверхні другого порядку.

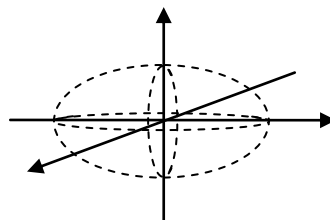
Дійсний еліпсоїд

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$



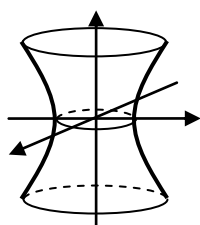
Уявний еліпсоїд

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1$$



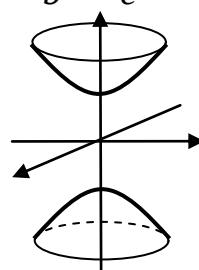
Гіперболоїд з однією порожниною

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$



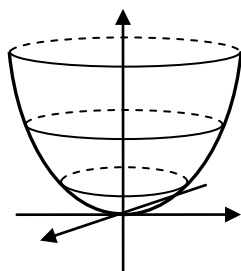
Гіперболоїд з двома порожнинами

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$$



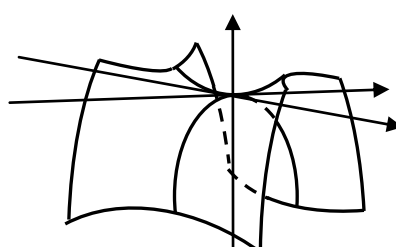
Еліптичний параболоїд

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z$$



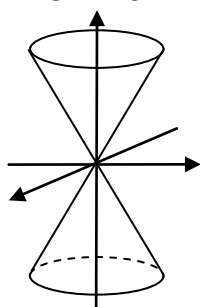
Гіперболічний параболоїд

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z$$



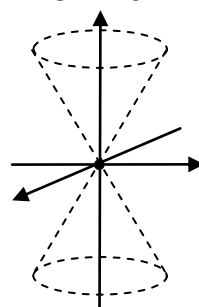
Дійсний конус

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$



Уявний конус (точка)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0$$



Дев'ять циліндрів, що відповідають дев'ятьом лініям другого порядку.

Задача. 8.1. Покажіть, що еліпсоїд можна одержати, стискаючи в одному з напрямків *еліпсоїд обертання* – фігуру обертання, отриману з еліпса.

Задача. 8.2. Покажіть, що гіперболоїд з однією порожниною є лінійчатою поверхнею.

Задача. 8.3. Запропонуйте практичний спосіб, що дозволяє визначити положення фокуса колової параболічної антени.

Завдання до розділу 8.

Усні питання для повторення матеріалу

1. Перелічіть циліндричні поверхні другого порядку.
2. Назвіть обмежені речовинні поверхні другого порядку.
3. Які конічні поверхні другого порядку ви знаєте?
4. Яким чином зі сфери можна одержати еліпсоїд?
5. Перелічіть поверхні другого порядку, які розпадаються.
6. Які з поверхонь другого порядку не можуть бути фігурами обертання?
7. Наведіть приклад поверхні другого порядку, що виродилася в пряму лінію, у точку.

Контрольні задачі

1. Визначте координати центра і знайдіть радіус сфери

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 8y + 12z - 8 = 0.$$

2. Використовуючи паралельне перенесення, визначте тип і місце розташування поверхні другого порядку

$$2x^2 + y^2 + 8z^2 + 16x - 8y + 64z - 32 = 0.$$

3. Визначте можливі перетини колового параболоїда

$$x^2 + y^2 = z$$

і сфери

$$x^2 + y^2 + (z - H)^2 = R^2,$$

залежно від радіуса сфери R і висоти її центра H .

Теми для індивідуальних науково-дослідних задач.

1. Дослідить оптичні властивості поверхонь другого порядку. Якими вони будуть, наприклад, в еліптичного параболоїда?
2. За аналогією до ліній другого порядку побудуйте алгоритм визначення типу поверхні другого порядку за допомогою інваріантів.