

Электростатическое поле сферического сегмента и секционированного закругления конуса

В.А. Резуненко

Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина, Украина

Выделена и обращена сингулярная часть оператора задачи электростатики для сферического сегмента и секционированного проводящего закругления конуса. Преобразования оператора задачи выполняются с помощью техники контурного интегрирования и решения интегрального уравнения типа Абеля. Получено эффективно разрешимое интегральное уравнение Фредгольма II рода с компактным оператором в гильбертовом пространстве $L_2(0, \gamma)$, где γ -угол раскрыва конуса. Рассмотрены некоторые случаи постановки задачи и обобщения.

2000 Mathematics Subject Classification 65N12, 35A25, 78A45.

1. Введение.

В настоящее время имеется немного работ, посвященных решению задач электростатики для сферических сегментов в присутствии бесконечного конуса (см. [1] - [4]). Вместе с тем, актуальность таких задач следует, в частности, из того, что сферический сегмент является хорошей моделью многих устройств: антенн, резонаторов, узлов электронных систем. Секционированное закругление конуса может быть моделью проводящих узлов и устройств техники СВЧ. Заземленный конус можно рассматривать как подстилающую поверхность с углублением. Многочисленные применения сферических и конических поверхностей, имеющих различные геометрические и физические параметры, стимулируют развитие методов решения прямых и обратных задач математической физики, электродинамики и теории дифракции на рассматриваемых поверхностях: (см. [4] - [11]). В данной работе рассмотрена электростатическая задача с небольшим числом параметров, описывающих основные характеристики моделируемых объектов и материальных сред, окружающих объекты. Целью работы является применение метода регуляризации оператора задачи электростатики для сферического сегмента и секционированного проводящего сферического закругления конуса. В результате регуляризации задача отыскания распределения электростатического поля в трехмерном пространстве сведена к решению интегрального уравнения Фредгольма II рода

для вспомогательной функции. Оператор интегрального уравнения является компактным в пространстве $L_2(0, \gamma)$, $0 < \gamma < \pi$. В работе показана, в частности, эффективная разрешимость полученного интегрального уравнения, а также получены решения для ряда предельных случаев задачи. Отметим, что решаемая в работе задача не сводится к ранее рассмотренным задачам [1] - [4].

2. Постановка задачи.

Пусть центр сферического сегмента, вершина бесконечного однополостного кругового конуса и центр секционированного сферического закругления конуса помещены в начало декартовой и сферической систем координат. Полагаем a_1 - радиус сферического сегмента, θ_0 - полярный угол, измеряющий сегмент (на сегменте $0 \leq \theta < \theta_0$), γ - угол раскрытия конуса ($0 < \theta_0 < \gamma < \pi$). Пусть потенциал V_0 сферического сегмента задан и $V_0 \neq 0$. Пусть потенциал конуса V равен нулю (конус заземлён). Пусть диэлектрическая и магнитная проницаемости среды, в которой рассматриваются сферические закругления конуса, есть $\epsilon_1 \neq 1, \mu_1 \neq 1$ и проводимость $\sigma = 0$. Пусть сферический сегмент и секционированное закругление конуса являются идеально проводящими (их проводимость $\sigma = \infty$). Пусть секционированное закругление конуса состоит из 4-х частей, разделенных непроводящими бесконечно тонкими перегородками, ориентированными параллельно плоскости XOY . Полагаем, что заданы полярные углы θ_i перегородок для секций закругления

$$0 < \theta_1 < \theta_2 < \theta_3 < \theta_4 = \gamma < \pi,$$

и пусть каждая (i) - секция имеет свой (независимый) потенциал V_i ($i = 1, 2, 3, 4$). Электростатические поля \vec{E} и вектор электрической индукции \vec{D} всюду вне конуса, вне сегмента и секционированного закругления конуса должны удовлетворять уравнениям Максвелла и материальным уравнениям

$$\operatorname{rot} \vec{E} = 0, \quad \operatorname{div} \vec{D} = \rho, \quad \epsilon_1 \vec{D} = \vec{E}, \quad (1)$$

где ρ - плотность зарядов на поверхности проводников.

Электростатические поля, в силу однородности уравнений Максвелла (1), представим, с точностью до константы, скалярными потенциалами U , для которых $\vec{E} = -\operatorname{grad}(U)$. При этом учитываем, что в данной постановке задачи магнитостатическое поле \vec{H} и магнитная индукция \vec{B} отсутствуют, т. е. $\vec{H} = 0, \vec{B} = 0$. Полные потенциалы U должны удовлетворять граничным условиям: а) быть непрерывными на поверхности сегмента и на поверхности каждой части секционированного закругления конуса; б) нормальные производные потенциалов должны быть непрерывными на дополнении сферического сегмента до замкнутого сегмента. Полные потенциалы должны исчезать на бесконечности $U = O(r^{-1}), r \rightarrow \infty$ и удовлетворять условию конечности интеграла энергии в любой ограниченной области W пространства

$\int_W (\text{grad}(U))^2 dw < \infty$. Требуется найти полные потенциалы вне конуса и вне сферических закруглений конуса. В такой постановке задача электростатики имеет единственное решение [12].

3. Ряды Фурье-Лежандра для потенциалов.

Пусть в пространстве R^3 в сферической системе координат выделены две области: $Q_1 = \{r : a_0 < r < a_1\}$, $Q_2 = \{r : r > a_1\}$; для этих областей $\theta \in [0, \gamma]$, $\varphi \in [0, 2\pi]$. В первой области Q_1 будем искать вторичные потенциалы U_1 , U_2 , а во второй области Q_2 - потенциал U_3 . Для этих областей Q_1, Q_2 на поверхности конуса при $r \in [0, \infty)$, $\theta = \gamma$, $\varphi \in [0, 2\pi]$ вторичные потенциалы по условию должны обращаться в нуль:

$$U_1 = U_2 = U_3 = 0. \quad (2)$$

Разделим переменные в уравнениях Максвелла (1) в сферической системе координат. Вторичные потенциалы представим рядами Фурье - Лежандра, обеспечивающими выполнение условия излучения и условия (2):

$$U_1 = \frac{1}{\varepsilon_1} \sum_{n=1}^{\infty} A_n r^{-\nu_n-1} P_{\nu_n}(\cos \theta), \quad a_0 < r < a_1, \quad (3)$$

$$U_2 = \frac{1}{\varepsilon_1} \sum_{n=1}^{\infty} B_n r^{\nu_n} P_{\nu_n}(\cos \theta), \quad a_0 < r < a_1, \quad (4)$$

$$U_3 = \frac{1}{\varepsilon_1} \sum_{n=1}^{\infty} C_n r^{-\nu_n-1} P_{\nu_n}(\cos \theta), \quad r > a_1. \quad (5)$$

Условия (2) для рядов (3)-(5) будут выполнены, так как для функций Лежандра $P_{\nu}(\cos \theta)$ первого рода аргумента $\cos \theta$ найдутся при фиксированном θ из интервала $0 < \theta < \pi$ положительные индексы ν_n , являющиеся собственными значениями соответствующего самосопряженного оператора Штурма - Лиувилля и являющиеся решениями трансцендентного уравнения [13],[15] - [16]:

$$P_{\nu_n}(\cos \gamma) = 0, \quad 0 < \gamma = \theta < \pi, \quad n = 1, 2, \dots$$

Коэффициенты A_n, D_n, C_n рядов (3)-(5) будем искать в гильбертовом пространстве \tilde{l}^2 с некоторым весом, обеспечивающем выполнение условия конечности интеграла энергии и, кроме (2), граничных условий:

$$U_3 = V_0, \quad 0 \leq \theta < \theta_0, \quad r = a_1, \quad (6)$$

$$\frac{1}{\varepsilon_1} \frac{\partial U_3}{\partial r} = \frac{1}{\varepsilon_1} \frac{\partial [U_2 + U_1]}{\partial r}, \quad r = a_1, \quad \theta_0 < \theta \leq \gamma, \quad (7)$$

$$(U_1 + U_2)|_{r=a_0} = \begin{cases} V_1, & 0 \leq \theta < \theta_1, \\ V_2, & \theta_1 < \theta < \theta_2, \\ V_3, & \theta_2 < \theta < \theta_3, \\ V_4, & \theta_3 < \theta < \theta_4. \end{cases} \quad (8)$$

4. Функциональные уравнения.

Построим парные сумматорные функциональные уравнения относительно неизвестных коэффициентов $C_n, n \geq 1$ потенциала U_3 (см.(5)). Первое вспомогательное функциональное уравнение получим, используя граничное условие (6):

$$\frac{1}{\varepsilon_1} \sum_{n=1}^{\infty} C_n a_1^{-\nu_n-1} P_{\nu_n}(\cos \theta) = V_0, \quad 0 \leq \theta < \theta_0. \quad (9)$$

Второе вспомогательное функциональное уравнение получим из граничного условия (7):

$$\sum_{n=1}^{\infty} [(\nu_n + 1)a_1^{-\nu_n-2}(C_n - A_n) + \nu_n B_n a_1^{\nu_n-1}] P_{\nu_n}(\cos \theta) = 0, \quad \theta_0 < \theta \leq \gamma. \quad (10)$$

Функциональное уравнение (10) содержит три последовательности неизвестных коэффициентов $A_n, B_n, C_n, (n = 1, 2, 3, \dots)$ потенциалов U_1, U_2, U_3 (см.(3)- (5)). Сначала исключим из уравнения (10) коэффициенты A_n, B_n , выразив их через коэффициенты C_n . Для этого в граничных условиях (6) - (8) воспользуемся ортогональностью функций Лежандра $P_{\nu_n}(\cos \theta)$ с весом $\sin \theta$ на интервале $(0, \gamma)$ и выполним интегрирование по θ . В результате получим для каждого $n, (n = 1, 2, 3, \dots)$, систему линейных алгебраических уравнений (относительно неизвестными A_n, B_n):

$$A_n a_1^{-\nu_n-1} + B_n a_1^{\nu_n} = C_n a_1^{-\nu_n-1}, \quad (11)$$

$$\frac{1}{\varepsilon_1} A_n a_0^{-\nu_n-1} + \frac{1}{\varepsilon_1} B_n a_0^{\nu_n} = D_n, \quad (12)$$

где

$$D_n = \int_0^{\gamma} (U_1 + U_2)|_{r=a_0} P_{\nu_n}(\cos \theta) \sin \theta \, d\theta. \quad (13)$$

Решение линейной системы (11), (12) единственно, так как её определитель (для каждого $n \geq 1$) отличен от нуля при выполнении неравенства $a_0 < a_1$, которое задано при постановке исходной задачи электростатики. Решение линейной системы (11), (12), очевидно, зависит от $n \geq 1$:

$$A_n = \frac{C_n a_1^{-\nu_n-1} a_0^\nu - \varepsilon_1 D_n a_1^{\nu_n}}{a_0^{\nu_n} a_1^{-\nu_n-1} - a_0^{-\nu_n-1} a_1^{\nu_n}}, \quad (14)$$

$$B_n = \frac{a_1^{-\nu_n-1} [\varepsilon_1 D_n - C_n a_0^{-\nu_n-1}]}{a_0^{\nu_n} a_1^{-\nu_n-1} - a_0^{-\nu_n-1} a_1^{\nu_n}}. \quad (15)$$

Подставим A_n, B_n (14)-(15) в (10) и приходим к новому вспомогательному функциональному уравнению:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2\nu_n + 1) C_n a_0^{-\nu_n-1} - (2\nu_n + 1) \varepsilon_1 D_n}{[a_0^{\nu_n} a_1^{-\nu_n-1} - a_1^{\nu_n} a_0^{-\nu_n-1}] a_1^2} P_{\nu_n}(\cos \theta) = 0, \quad \theta_0 < \theta \leq \gamma. \quad (16)$$

Этим получили уравнения (9), (16) относительно (только одних) коэффициентов $C_n, n \geq 1$. Теперь в (9), (16) выполним переобозначения:

$$X_n = \frac{C_n}{a_0^{2\nu_n+1} a_1^{-\nu_n} - a_1^{\nu_n+1}} + \frac{D_n \varepsilon_1}{a_0^{\nu_n} a_1^{-\nu_n} - a_1^{\nu_n+1} a_0^{-\nu_n-1}}, \quad (17)$$

$$\tilde{\varepsilon}_n = a_0^{\nu_n+1} a_1^{-\nu_n-1}, \quad \tilde{V} = V_0 * \varepsilon_1. \quad (18)$$

В результате получаем парную систему сумматорных функциональных уравнений, которую далее удобно преобразовывать в интегральные уравнения:

$$\sum_{n=1}^{\infty} [X_n - a_0^{\nu_n+1} a_1^{-\nu_n-1} D_n \varepsilon_1] P_{\nu_n}(\cos \theta) = \tilde{V} P_0(\cos \theta) + \sum_{m=1}^{\infty} X_m \tilde{\varepsilon}_m P_{\nu_m}(\cos \theta), \quad 0 \leq \theta < \theta_0, \quad (19)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (2\nu_n + 1) X_n P_{\nu_n}(\cos \theta) = 0, \quad \theta_0 < \theta \leq \gamma. \quad (20)$$

5. Интегральные уравнения I и II рода.

Система функциональных уравнений (19), (20) является сравнительно сложной: а) в систему входят ряды по функциям Лежандра первого рода с дробными индексами $\nu_n, n \geq 1$; б) коэффициенты в (19), (20) при неизвестных X_n имеют асимптотику при $n \rightarrow \infty$, отличающуюся на порядок. До сих пор общего метода решения таких уравнений не найдено. Прямые численные методы решения таких систем и в настоящее время, время сверх мощных компьютеров, мало пригодны. Сведем задачу отыскания коэффициентов $X_n, n \geq 1$ к решению интегрального уравнения II рода для вспомогательной функции. Для этого в (20) сначала выполним подстановку [1] - [4]

$$X_n = \beta_n \int_0^{\theta_0} \psi(t) \cos\left(\nu_n + \frac{1}{2}\right) t dt, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (21)$$

$$\beta_n = \left\{ \sin^2 \gamma \left(\frac{\partial}{\partial \theta} P_{\nu_n}(\cos \theta) \right) \Big|_{\theta=\gamma} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial \nu} P_{\nu}(\cos \gamma) \right) \Big|_{\nu=\nu_n} \right\}^{-1}. \quad (22)$$

Полагаем, что функция $\psi(t)$ в (21) является непрерывно дифференцируемой функцией на $[0, \gamma]$. В результате подстановки (21), (22) в уравнение (20) убеждаемся, что (20) выполняется тождественно. Чтобы убедиться в этом, сначала следует в (20) поменять порядки интегрирования и суммирования, так как последовательность X_n , $n \geq 1$ принадлежит l^2 . После этого выполним интегрирование по частям и воспользуемся известными суммами разрывных рядов [13]:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \exp\{i(n+0.5)t\} \cdot P_n(\cos \gamma) = 1/\sqrt{2(\cos t - \cos \theta)}, \quad 0 < t < \theta < \pi, \quad (23)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \left[\cos\left(\nu_n + \frac{1}{2}\right) t \right] P_{\nu_n}(\cos \theta) \\ &= I(\theta, t) + (2(\cos t - \cos \theta))^{-\frac{1}{2}}, \quad 0 < t < \theta < \gamma, \end{aligned} \quad (24)$$

$$I(\theta, t) = - \int_0^{\infty} \frac{P_{-\frac{1}{2}+ir}(-\cos \gamma)}{P_{-\frac{1}{2}+ir}(\cos \gamma)} \cdot P_{-\frac{1}{2}+ir}(\cos \theta) \cdot \frac{\cosh(tr)}{\cosh(\pi r)} dr,$$

где $P_{-\frac{1}{2}+ir}(\cos \gamma)$ - функция конуса комплексного индекса $-\frac{1}{2} + ir$ аргумента $\cos \gamma$, а $\cosh(tr)$ - косинус гиперболический аргумента tr . Правые части равенств (23), (24) являются производящими функциями для рядов в левых частях. Для получения, в частности, равенства (24) необходимо рассмотреть функцию комплексного переменного z

$$N(z; t, \theta, \gamma) = 2e^{i(z+\frac{1}{2})t} P_z(\cos \theta) \left[\frac{Q_z(\cos \theta)}{P_z(\cos \gamma)} - (\pi/2) \operatorname{ctg}(z\pi) \right] \quad (25)$$

и параметров t, θ, γ из $(0, \pi)$ [1-5], где $P_z(\cos \theta), Q_z(\cos \theta)$ функции Лежандра соответственно первого и второго рода комплексного индекса z . Затем необходимо выполнить интегрирование функции $N(z; t, \theta, \gamma)$ (25) по замкнутому контуру, содержащему отрезок прямой $z = -1/2 + it$, $|t| < \infty$ и полуокружность, замыкающую контур вправо. Далее необходимо применить, в частности, теорему о вычетах в полюсах $z = \nu_n$ и $z = n, n = 1, 2, 3, \dots$, функции (25) за счет обращения в нуль, в частности, функций $P_z(\cos \gamma)$, а также воспользоваться леммой Жордана [14].

Преобразование функционального уравнения (19) начнем с подстановки вместо функций Лежандра $P_{\nu_n}(\cos\theta)$ их интегрального представления Мелера-Дирихле

$$P_{\nu_n}(\cos\theta) = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \int_0^\theta [\cos(\nu_n + \frac{1}{2})y] / \sqrt{\cos y - \cos\theta} dy. \quad (26)$$

Воспользуемся равномерной сходимостью ряда в (19) и поменяем порядки интегрирования и суммирования. С помощью этой операции преобразуем в итоге сумматорное равенство (19) в однородное интегральное уравнение типа Абеля первого рода $\int_0^\theta f(y) / \sqrt{\cos y - \cos\theta} dy = 0$ с корневой особенностью в ядре, возникшей в связи с применением (26) для функций Лежандра; здесь функция $f(y) \in L_2(0, \gamma)$, $f(0) = 0$ и $f(y)$ содержит тригонометрические ряды и интеграл типа (24). Решим интегральное уравнение типа Абеля, применяя композицию с его ядром, и найдем единственное его решение $f(y) = 0$, $0 \leq y < \gamma$. Теперь запишем полученное решение $f(y) = 0$, $0 \leq y < \theta_0 < \gamma$ в виде нового уравнения, также учтя, что $f(y)$ содержит тригонометрические ряды и интеграл типа (23) - (25). В результате получаем искомое интегральное уравнение II рода относительно функции $\psi(y)$ (21):

$$\psi(y) - \int_0^{\theta_0} K(y, t) \psi(t) dt = \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} T_n \cos\left(\nu_n + \frac{1}{2}\right) y, \quad 0 \leq y < \theta_0. \quad (27)$$

Здесь обозначены

$$K(y, t) = K_1(y, t) - K_2(y, t), \quad (28)$$

$$T_0 = \tilde{V}, \quad \nu_0 = -0.5; \quad T_n = D_n \tilde{\varepsilon}_n \varepsilon_1, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

$$K_1(y, t) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{\varepsilon}_n \beta_n \cos\left(\nu_n + \frac{1}{2}\right) y \cdot \cos\left(\nu_n + \frac{1}{2}\right) t, \quad (29)$$

$$K_2(y, t) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{P_{-\frac{1}{2}+ir}(-\cos\gamma) \cdot \cosh(yr) \cdot \cosh(tr)}{P_{-\frac{1}{2}+ir}(\cos\gamma) \cdot \cosh(\pi r)} dr, \quad (30)$$

где $\tilde{\varepsilon}_n$ введены в (18), D_n - в (13), а β_n - в (22).

Интегральное уравнение (27) имеет единственное решение в $L_2(0, \gamma)$. Действительно, ядро (28) уравнения (27) является непрерывной функцией аргументов y, t , так как ряд (29) и интеграл (30) сходятся равномерно по y, t на сегменте $[0, \gamma]$; правая часть уравнения также непрерывна на $[0, \gamma]$. Для уравнения (27) справедлива альтернатива Фредгольма. Однородное уравнение, соответствующее (27), имеет единственное тривиальное решение.

Уравнение (27) разрешимо как аналитически, так и численно [16], [17]. Действительно, правая часть в (27) и функция $K_1(y, t)$ (29) являются бесконечно-дифференцируемыми функциями по y, t из $[0, \gamma]$, а подынтегральная функция в $K_2(y, t)$ (30) при фиксированных y, t из $[0, \gamma]$ убывает к нулю быстрее экспоненты при $r \rightarrow \infty$.

6. Некоторые случаи решения задачи.

В качестве тестового варианта рассмотрим такой случай задачи, когда для сферического сегмента угол раскрыва θ_0 становится максимальным, равным γ , то есть $\theta_0 = \gamma$. В этом случае коэффициенты A_n, B_n, C_n для потенциалов U_1, U_2, U_3 в (3), (4), (5) вычисляются явно :

$$A_n = \varepsilon_1 a_0^{\nu_n+1} [D_n - (a_0/a_1)^{\nu_n} M_n] / [1 - (a_0/a_1)^{2\nu_n+1}],$$

$$B_n = \varepsilon_1 a_1^{-\nu_n} [M_n - D_n (a_0/a_1)^{\nu_n+1}] / [(a_0/a_1)^{2\nu_n+1} - 1],$$

$$C_n = \varepsilon_1 a_1^{\nu_n+1} M_n, \quad n \geq 1,$$

где D_n введены в (13), а

$$M_n = V_0 \int_0^\gamma P_{\nu_n}(\cos \theta) \sin \theta d\theta.$$

Заметим, что здесь мы рассматриваем область пространства, представляющую замкнутую полость, ограниченную двумя сферическими поверхностями (радиусов $r = a_0, r = a_1$) и конусом. При этом на одной из сферических поверхностей имеются секции, которые можно считать сферическими лентами. Отметим, что полости и ленты различной геометрии представляют самостоятельный интерес [18].

Рассмотрим ещё один предельный вариант, когда сферический сегмент исчезает полностью, то есть $\theta_0 = 0$. Для этого варианта потенциалы U_2, U_3 равны нулю, так как их коэффициенты B_n, C_n равны нулю. Для потенциала U_1 в (3) коэффициенты A_n вычисляются явно и таковы:

$$A_n = \varepsilon_1 a_0^{\nu_n+1} \sum_{i=1}^4 V_i \int_{\alpha_i}^{\alpha_i+1} P_{\nu_n}(\cos \theta) \sin \theta d\theta, \quad (31)$$

где

$$\alpha_1 = 0, \quad \alpha_i = \theta_i, \quad i = 1, 2, 3, \quad \alpha_4 = \gamma, \quad n \geq 1.$$

Отметим вариант, имеющий прикладное значение при конструировании приборов и устройств с заданным законом распределением электростатического поля в фиксированной области пространства, например, вблизи сферических закруглений узлов и приборов электронных систем. Такое распределение поля можно первоначально моделировать с помощью варьирования

- выбором трёх параметров задачи: а) выбором числа N секций закругления, б) выбором значений потенциалов $V_i, i = 1, 2, \dots, N$ для каждой секции, в) выбором азимутальной ширины по θ каждой секции.

ЛИТЕРАТУРА

1. Конторович М.И., Лебедев Н.Н. Об одном методе решения некоторых задач дифракции и родственных ей проблем. // Журн. Тех. Физ. - 1938. - Т.8, 10-11. - С. 1193-1206.
2. Гринберг Г.А. Избранные вопросы математической теории электрических и магнитных явлений. - М.:Изд-во АН СССР,1948. - 727с.
3. Уфлянд Я.С. О решении одного класса задач электростатики методом парных рядов.//Письма в Журн. Тех. Физ. - 1976. - Т.2, 17. - С. 794-798.
4. Резуненко В.А. Интегральное уравнение задачи электростатики для сферического сегмента и диэлектрического закругления конуса.// Вісн. ХНУ ім В.Н.Каразіна, Серія "Матем., прикладна матем. і механіка". - 2006. - Т. 749. - С. 50-56.
5. Шестопалов В.П., Литвиненко Л.Н., Масалов С.А., Сологуб В.Г. Дифракция волн на решетках. - Харьков: Изд. ХГУ, - 1973. - 288 с.
6. Радин А.М., Резуненко В.А., Шестопалов В.П. Излучение волн сферой с отверстием. //Журн. вычисл. матем. и матем. физ. - 1977. -Т.17, 2. - С. 394-406.
7. Дорошенко В.А., Кравченко В.Ф. Возбуждение незамкнутых конических и биконических структур.//Электромагнитные волны и электронные системы. - 2003. - Т.8,6. - С.4-78.
8. Сиренко Ю.К. Моделирование и анализ переходных процессов в открытых периодических, волноводных и компактных резонаторах. - Харьков: ЭДЕНА, - 2003. - 363 с.
9. Свищев Ю.В., Тучкин Ю.А. Векторная задача дифракции электромагнитных волн на двух сферических сегментах.// ДАН УССР, сер. А. - 1987. - Т. 12. - с. 56-60.
10. Резуненко В.А. Рассеяние плоской волны сферой с круговым отверстием. // Электромагнитные волны и электронные явления. - 2005. - Т. 10,8. С. 5-15.
11. Куриляк Д.Б., Назарчук З.Т. Аналітико-числові методи в теорії дифракції хвиль на конічних і клиноподібних поверхнях. - Київ: Наукова Думка, - 2006. - 275 с.

12. Колтон Д., Кресс Р. Методы интегральных уравнений в теории рассеяния. - М.: -Мир, - 1987. - 312 с.
13. Гобсон Е.В. Теория сферических и сфероидальных функций. - М.: - ИЛ, - 1952. - 476 с.
14. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. -М.: Наука, - 1973. - 736 с.
15. Марченко В.А. Операторы Штурма-Лиувилля и их приложения. -Киев: Наукова Думка, - 1977. - 362 с.
16. Садовничий В.А. Теория операторов.- М.: Высшая школа, - 1999. - 368 с.
17. Верлань А.Ф., Сизиков В.С. Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы. - Киев: Наукова Думка, - 1986. - 543 с.
18. Singh B.M., Rokne J.G. and Dhaliwal R.S. Two-Dimensional Electrostatic Problem in a Plane With Earthed Elliptic Cavity due to One or Two Collinear Charged Electrostatic Strips.//International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences. Volume 2007, Article ID 60595, 9 pages.

Про існування максимального нормалізатора у періодичній FC-групі

Т.І. Савочкіна

*Харківський національний педагогічний університет ім.Г.С.Сковороди,
Україна*

У роботі доведено, що в усякій недедекіндовій примарній періодичній FC-групі існує підгрупа, нормалізатор якої є максимальною підгрупою.

2000 Mathematics Subject Classification 20F50.

Група G називається періодичною FC-групою (або локально нормальною), якщо кожна скінченна множина її елементів міститься у скінченній нормальній підгрупі. Відомо [1], що всяка періодична група зі скінченними класами спряжених елементів є періодичною FC-групою і навпаки. Отже примарні FC-групи – це p -групи зі скінченними класами спряжених елементів. Дослідження такого класу груп проводилося в роботах А.П.Діцмана [2], Р.Бера [3] і П.А.Гольберга [4]. Суттєвий вклад у розвиток теорії періодичних FC-груп (зокрема в силівську теорію таких груп) внесли: Ф.Холл [5], С.М.Черніков ([1],[6]), Ю.М.Горчаков [7], М.Томкінсон [8], Б.Хартлі [9]. Слід також відмітити дослідження FC-груп і їх важливі узагальнення у роботах [10], [11], [12], [13], а також низку фундаментальних робіт Л.А.Курдаченко [14], [15] і [16] у цьому напрямку.

У 1971 році Я.Г.Берковичем і Кр.Херінгом ([17], стор.817) було встановлено, що у всякій скінченній недедекіндовій p -групі G існує така підгрупа D , нормалізатор якої є максимальною в G підгрупою. Основною метою автора є встановлення аналогічного факту для довільної недедекіндової примарної FC-групи. Результати цієї роботи доповідались на XI міжнародній науковій конференції ім. акад. М.Кравчука [19].

Всі невизначені поняття і позначення можна знайти у [1], [7] і [18].

Лема 1. *Нехай G – недедекіндова p -група з комутантом G' порядку p . Тоді група G містить таку підгрупу H , що нормалізатор $M = N_G(H)$ – максимальна підгрупа в групі G .*

Доведення. Нехай група G задовольняє умову лемми 1. Оскільки G – недедекіндова група, то існує циклічна підгрупа $H = \langle g \rangle$, яка не є нормальною

в G . Отже існує такий елемент $a \in G$, що комутатор $f = [a, g] \notin \langle g \rangle$. За умовою комутант $G' = \langle f \rangle$, де $|f| = p$, а тому $G' \leq Z(G)$ (див. [1], лема 1.8), отже G – нільпотентна група класу 2.

Розглянемо підгрупу $M = N_G(\langle g \rangle)$ і покажемо, що M – максимальна підгрупа в G . Нехай $A = \langle a, g \rangle$, тоді $A' = G' = \langle f \rangle$ і $A \in 2$ -породженою р-групою з комутантом A' порядку p , а тому маємо рівність $G = A \cdot C_G(A) = A \cdot M$, оскільки $C_G(A) \leq M$. Далі маємо: $G = \langle a \rangle \cdot \langle g \rangle \cdot A' \cdot M = \langle a \rangle \cdot M$, $M \triangleleft G$. Оскільки $a^p \in Z(G) \leq M$, то $[G : M] = p$, тобто M – максимальна в G підгрупа. Лему 1 доведено.

Лема 2. *Нехай G – недедекіндова р-група з комутантом порядку p^2 . Тоді G містить таку підгрупу H , нормалізатор $M = N_G(H)$ якої є максимальною в G підгрупою.*

Доведення. Нехай G – недедекіндова р-група з комутантом G' порядку p^2 . Очевидно $G'' = \{1\}$, G – нільпотентна група і $G' \cap Z(G) \neq \{1\}$. Отже існує елемент $h \in G' \cap Z(G)$, $|h| = p$. Розглянемо фактор-групу $\bar{G} = G/H$, де $H = \langle h \rangle$. Зрозуміло, що комутант $\bar{G}' = G'/H$, а тому $|\bar{G}'| = p$.

Припустимо, що \bar{G} – недедекіндова група. Тоді за лемою 1 \bar{G} містить таку підгрупу \bar{B} , що $\bar{M} = N_{\bar{G}}(\bar{B}) = M/H$ – максимальна підгрупа в \bar{G} , причому індекс $[\bar{G} : \bar{M}] = p$. Нехай B – повний прообраз підгрупи \bar{B} в G . Маємо $H < B \triangleleft M$ і $[G : M] = p$, звідси $N_G(B) \geq M$. Якщо $N_G(B) > M$, то $N_G(B) = G$, а тому $B \triangleleft G$, звідси $\bar{B} \triangleleft \bar{G}$, що неможливо за умовою. Одержали $N_G(B) = M$ – максимальна підгрупа в G .

Нехай тепер \bar{G} – дедекіндова група. Оскільки $|\bar{G}'| = p \neq 1$, то \bar{G} – гамільтована група, а тому $\bar{G} = \bar{R} \times \bar{A}$, де \bar{R} – група кватерніонів 8-го порядку, а \bar{A} – елементарна абелева 2-група, де R (відповідно A) повний прообраз \bar{R} (відповідно \bar{A}) у групі G . Зрозуміло, що $G = R \cdot A$, $A \triangleleft G$, $R \triangleleft G$, $R \cap A = H$, $[R, A] \leq H$, $p = 2$, $|G'| = 4$, $G' \leq R$. Отже підгрупа R є розширенням центральної підгрупи $H = \langle h \rangle$ за допомогою групи кватерніонів 8-го порядку \bar{R} , а тому $|R| = 16$.

Нехай $\bar{R} = \langle \bar{u}, \bar{v} \rangle$, де $\bar{u}^2 = \bar{v}^2 = [\bar{u}, \bar{v}]$, $|\bar{u}| = 4$. Звідси випливає, що $R = \langle u, v, h \rangle$, $u^2 = v^2 \cdot h^k$, $k \in \{0, 1\}$, отже елементи $u^2, v^2 \in Z(R)$. Якщо $x, y \in R$, то $[x, y] = u^2 \cdot h^l$, а тому комутатор $[x, y]$ належить центру групи R , отже на R виконується тотожність $[x, y, z] = 1$. Покажемо, що $R' = \langle d \rangle$, де $d = [u, v]$ і $R' \neq H$. Дійсно, нехай $x, y \in R$, тоді $x = u^i \cdot v^j \cdot f_1$, $y = u^k \cdot v^l \cdot f_2$, де $f_i \in R' \leq G' \leq Z(G)$. Звідси $[x, y] = [u, v]^m = d^m \in \langle d \rangle$. Якщо $R' = H$, то $R' = G'$, що неможливо, оскільки $|G'| = 4$. Таким чином $d \neq h$, а тому $G' = \langle d \rangle \times \langle h \rangle$. Оскільки $d^2 = [u, v]^2 = [u^2, v] = 1$, то $|d| = 2$ і підгрупа $A \neq \langle h \rangle$. Далі із рівності $[\bar{u}, \bar{v}] = \bar{u}^2$ маємо $[u, v] = u^2 \cdot h^i$, для деякого числа $i \geq 0$. Звідси $1 = [u, v]^2 = u^4 \cdot h^{2i} = u^4$. Аналогічно $v^4 = 1$, а тому $|u| = |v| = 4$. Відмітимо, що $u^2 \cdot v^2 \in \langle h \rangle$.

Випадок 1. $v^2 \cdot u^2 = 1$. Маємо $u^2 = v^2$, а тому $1 \neq [u, v] = u^3 \cdot v^3 \cdot u \cdot v = (u \cdot v)^2$. Покладемо: $a = u \cdot v$, $b = v$. Тоді: $a^4 = 1$, $b^4 = 1$, $a \cdot b = uv \cdot v = u^3 = v \cdot v^{-1} \cdot u^{-1} =$

$v \cdot (u \cdot v)^{-1} = b \cdot a^{-1}$, $|a| = |b| = 4$. Розглянемо відому групу 16-го порядку $R_1 = \langle a, b \mid a^4 = b^4 = 1, a \cdot b = b \cdot a^{-1} \rangle$. Оскільки $|R| = 16$, то $R \cong R_1$ і $\langle a \rangle \cap \langle b \rangle = \{1\}$. Група R_1 має лише три інволюції a^2 , b^2 і $a^2 \cdot b^2$, причому вони центральні. Оскільки $R' = R'_1 = \langle a^2 \rangle$, то $a^2 = d = [u, v]$. Фактор-група $R / \langle a^2 \cdot b^2 \rangle$ – група кватерніонів 8-го порядку, а фактор-група $R / \langle b^2 \rangle$ – група дієдра 8-го порядку. Звідси випливає, що $h = a^2 \cdot b^2$. Інволюції a^2 , $h \in Z(G)$, а тому і $b^2 \in Z(G)$.

Розглянемо фактор-групу $G / \langle b^2 \rangle$. Вона містить підгрупу дієдра 8-го порядку $R / \langle b^2 \rangle$. Звідси випливає, що $G / \langle b^2 \rangle$ – недедекіндова група. Оскільки $h, d \in G'$, то і $b^2 \in G'$. Отже b^2 – центральна інволюція із комутанта G' . За попереднім випливає, що в групі G існує така підгрупа, нормалізатор якої є максимальною підгрупою в G .

Випадок 2. $v^2 \cdot u^2 = h$. Звідси $u^2 = v^2 \cdot h$ і $1 \neq [u, v] = u^{-1} \cdot v^{-1} \cdot u \cdot v = u^3 \cdot v^3 \cdot u \cdot v = (u \cdot v)^2 \cdot h$. Оскільки $(u \cdot v)^2 \in v^2 \cdot \langle h \rangle$, то нехай $(u \cdot v)^2 = v^2$, звідси $u \cdot v = v \cdot u^{-1}$. Знову одержали групу $R = R_1 = \langle u, v \mid u^4 = 1, v^4 = 1, u \cdot v = v \cdot u^{-1} \rangle$. Припустимо, що $(u \cdot v)^2 = v^2 \cdot h$, тоді $[u, v] = v^2$, а тому $u \cdot v = v \cdot u^{-1}$. Отже і у цьому випадку одержуємо, що підгрупа R ізоморфна R_1 . Тепер, як і у випадку 1, доводимо, що група G містить підгрупу H , нормалізатор якої $N_G(H)$ є максимальною підгрупою в G . Лему 2 доведено.

Лема 3. *Нехай G – недедекіндова p -група, комутант G' якої є скінченна підгрупа. Тоді G містить таку підгрупу H , нормалізатор якої $N_G(H)$ – максимальна підгрупа в G .*

Доведення. Нехай G – недедекіндова p -група зі скінченним комутантом. Якщо $|G'| \leq p^2$, то за лемами 1 і 2 маємо потрібне твердження.

Припустимо, що для групи G комутант G' має порядок більший p^2 , тобто $|G'| > p^2$. Оскільки комутант скінченний, то G – нільпотентна група і існує така підгрупа D , що $D \triangleleft G$ і $[G' : D] = p^2$. Звідси випливає, що $\overline{G} = G/D$ – недедекіндова група з комутантом $\overline{G}' = G'/D$ порядку p^2 . За лемою 2 існує така підгрупа $\overline{B} < \overline{G}$, що $N_{\overline{G}}(\overline{B}) = \overline{M}$ – максимальна в \overline{G} підгрупа і $[\overline{G} : \overline{M}] = p$. Зрозуміло, що $B \triangleleft M < G$ і $[G : M] = p$, а тому $M \leq N_G(B)$. Припустимо $M < N_G(B)$. Оскільки $[G : M] = p$, то $N_G(B) = GiB \triangleleft G$. Звідси випливає, що $\overline{B} \triangleleft \overline{G}$, що за умовою неможливо. Отже $M = N_G(B)$ – максимальна в G підгрупа. Лему 3 доведено.

Теорема 1. *Нехай G – довільна недедекіндова примарна FC-група. Тоді G містить таку підгрупу M , нормалізатор якої є максимальною в G підгрупою.*

Доведення. Якщо комутант G' групи G скінченний, то за лемою 3 в групі G існує шукана підгрупа M .

Припустимо тепер, що $|G'| = \infty$. Нехай $D = Z(G)$ – центр примарної FC-групи G . Як відомо [7], D є перетином централізаторів скінченних нормальних підгруп, причому централізатори самі нормальні і мають скінченні індекси в групі G .

Для довільного елемента $g \in G$ позначимо $H(g)$ найменшу скінченну нормальну підгрупу із G , що містить елемент g . Нехай $T(g)$ – централізатор підгрупи $H(g)$ в G . Тоді $T(g)$ – нормальна підгрупа скінченного індексу в G , а тому фактор-група $\overline{G}_g = G/T(g)$ – скінченна p -група. Очевидно, центр $D = \bigcap_{g \in G} T(g)$ і фактор-група $\overline{G} = G/D$ – піддекартовий добуток скінченних p -груп \overline{G}_g .

Припустимо, що існує елемент $g \in G$ такий, що \overline{G}_g – недедекіндова група. За лемою 3 в \overline{G}_g існує така підгрупа \overline{M} , що нормалізатор $N(\overline{M})$ є максимальною підгрупою в групі \overline{G}_g . Нехай $\overline{H} = N(\overline{M})$ і H – повний прообраз підгрупи $N(\overline{M})$ в групі G , а M – повний прообраз \overline{M} в групі G , тоді $N_G(M) = H$. Звідси випливає, що H – максимальна в G підгрупа і теорему у цьому випадку доведено.

Нехай тепер для кожного елемента $g \in G$ фактор-група $\overline{G}_g = G/T(g)$ – дедекіндова. На групі \overline{G}_g виконуються тотожності: $x^4 = 1$, $[x, y, z] = 1$, $[x^2, y] = 1$, $[x, y]^2 = 1$, а тому ці тотожності мають місце і на фактор-групі $\overline{G} = G/D$. Звідси випливає, що група \overline{G} має центральний елементарний абелевий комутант $\overline{G}' = (G/D)' = G' \cdot D/D$, а тому на самій групі G виконуються тотожності $[x, y, z, t] = 1$ і $[x^2, y, z] = 1$.

Припустимо, що комутант G' не міститься у центрі $Z(G)$ групи G , тоді G' не міститься в D і $\overline{G} = G/D$ – неабелева група. Покладемо $F = D \cdot G'$. Якщо $F = G$, то $F' = G' = D' \cdot [D, G'] \cdot G'' = G''$, що суперечить нільпотентності групи G , отже $G > F > D$ і $(G/D)' = F/D$ – центральна елементарна абелева p -підгрупа в фактор-групі $\overline{G} = G/D$.

Покажемо, що \overline{G} – недедекіндова група. Дійсно, якщо \overline{G} – дедекіндова, то $\overline{G} = R/D \times E/D$, де R/D – група кватерніонів 8-го порядку, а E/D – елементарна абелева 2-підгрупа. Звідси $\overline{G}' = (R/D)'$, а тому $G' \cdot D = R' \cdot D$. Маємо $|R'| = 2$ і $R' \triangleleft G$, то $R' \leq Z(G) = D$, що неможливо. Отже встановлено, що $\overline{G} = G/D$ – недедекіндова група.

Розглянемо випадок, коли у комутанті F/D існує власна підгрупа L/D скінченного індексу, для якої фактор-група $(G/D)/(L/D) \cong G/L$ – недедекіндова група. Тоді група G/L має скінченний комутант і за лемою 3 в G/L існує така підгрупа B/L , для якої нормалізатор $N(B/L)$ – максимальна підгрупа в G/L . Нехай B – повний прообраз підгрупи B/L в групі G і $N_G(B)$ – нормалізатор підгрупи B в G . Оскільки $N_G(B)/L = N(B/L)$, то $N_G(B)$ – максимальна в G підгрупа і теорему у цьому випадку доведено.

Припустимо тепер, що кожна власна підгрупа L/D із комутанта $F/D = (G/D)'$ скінченного індексу в F/D є такою, що $G/L \cong (G/D)/(L/D)$ – гамільтонова група. Якщо комутант F/D – нескінченний, то це неможливо, оскільки в F/D існує підгрупа L/D індекс якої не менше 4. Таким чином F/D – скінченна підгрупа у групі $\overline{G} = G/D$. Оскільки вона недедекіндова, то за лемою 3 існує підгрупа B/D в G/D така, що нормалізатор $N(B/D)$ – максимальна в G/D підгрупа. Нехай B – повний прообраз в G підгрупи B/D , тоді нормалізатор $N_G(B)$ – максимальна в G підгрупа.

Випадок G' не міститься в $Z(G)$ розглянуто повністю. Нехай тепер комутант $G' \leq Z(G)$.

Для нескінченного комутанта G' можливі випадки:

Випадок 1. Комутант G' містить квазіциклічну підгрупу C .

Випадок 2. G' не містить квазіциклічних підгруп.

Розглянемо випадок 1. Оскільки C – повна група, то $G' = C \times H$ ([20], теорема 21.2). Припустимо, що $G' = C$, тобто $H = \{1\}$. За умовою G – недедекіндова група, а тому існує елемент $g \in G$ такий, що $\langle g \rangle$ не є нормальною в G , $C \cdot \langle g \rangle = C \times \langle t \rangle$ не міститься в $Z(G)$. Якщо підгрупа $\langle t \rangle \triangleleft G$, то $[\langle t \rangle, G] \leq C \cap \langle t \rangle = \{1\}$, а тому $C \times \langle t \rangle \leq Z(G)$, що неможливо. Таким чином встановлено, що $\langle t \rangle$ не є нормальною в G . Очевидно можна вважати, що $t^p \in Z(G)$. Розглянемо підгрупу $T = C \times \langle t \rangle$. Зрозуміло, що $T \triangleleft G$ і існує такий елемент $a \in G$, що $[t, a] = c \neq 1$, $c \in C = G' \leq Z(G)$. Маємо $[t, a^p] = [t^p, a] = c^p$, а тому $|c| = p$. Розглянемо підгрупу $M = C_G(t)$. Тоді $M = N_G(\langle t \rangle)$ і $T \cdot \langle a^p \rangle \leq M$. Оскільки $\langle t \rangle$ не є нормальною в G , то $M < G$ і індекс $[G : M] < \infty$ і маємо рівність $[\langle t \rangle, G] = \langle c \rangle$. Оскільки для довільного елемента $y \in G$ маємо $[t, y^p] = [t^p, y] = 1$, то $y^p \in M$.

Припустимо, що $Ma \neq My$ і $[t, y] = c^i \neq 1$. Покладемо $a^{-i} \cdot y = d$. Маємо: $[t, d] = [t, a^{-i} \cdot y] = [t, a]^{-i} \cdot [t, y] = c^{-i} \cdot c^i = 1$, а тому $d \in M$, звідси випливає, що $yM \in \{M, aM, \dots, a^{p-1} \cdot M\}$, тобто $[G : M] = p$. Отже M – максимальна підгрупа в G .

Припустимо тепер, що $G' = C \times H$ і $H > \{1\}$. Оскільки $G' \leq Z(G)$, то $H \triangleleft G$ і фактор-група $\bar{G} = G/H$ має комутант $\bar{C} \cong C$ і за попереднім G/H містить таку підгрупу B/H , що нормалізатор $N_{\bar{G}}(B/H) = M/H$ – максимальна підгрупа із G/H . Нехай M – повний прообраз M/H у групі G . Тоді M – максимальна підгрупа в G . З іншого боку, нехай B – повний прообраз в G підгрупи B/H . Зрозуміло, що $B < M$ і $M = N_G(B)$. Теорему у випадку 1 доведено.

Розглянемо випадок 2. За умовою G' не містить квазіциклічної підгрупи. Отже G' – нескінченна абелева редукована p -група ([20], стор.120). Селе [21] встановив, що абелева група буде повною тоді і тільки тоді, коли вона співпадає зі своєю підгрупою Фратіні. Звідси випливає, що у редукованій групі підгрупа Фратіні є власною підгрупою, а тому у комутанті G' існує підгрупа T індекса p^2 . Отже комутант фактор-групи $\bar{G} = G/T$ має порядок p^2 , а тому \bar{G} – недедекіндова p -група. За лемою 2 існує така підгрупа $B/T < G/T$, що нормалізатор $N_{\bar{G}}(B/T)$ є максимальною підгрупою в G/T . Нехай B – повний прообраз підгрупи B/T у групі G , тоді $N_G(B)$ – максимальна підгрупа в G .

Теорему 1 доведено повністю.

Безпосередньо із теореми 1 випливає наступне твердження (теорема Кр. Херінга, [17], стор.817).

Наслідок 1. *Всяка скінченна недедекіндова p -група G містить таку підгрупу A , нормалізатор якої $N_G(A)$ є максимальною в G підгрупою.*

ЛІТЕРАТУРА

1. Черников С.Н. Группы с заданными свойствами системы подгрупп. М.:Наука, 1980. – 383 с.
2. Діцман А.П. О р-группах // Докл. АН СССР. – 1937.–15. – С. 71-76.
3. Baer R. Sylow theorems for infinite groups // Duke Math.J. – 1940. – 6. – P. 598-614.
4. Гольберг П.А. Силовские П-подгруппы локально нормальных групп // Матем. сб. – 1946. – 19. – С. 451-460.
5. Hall Ph. Periodic FC-groups // J. London Math.Soc. – 1959. – 34. – P. 289-304.
6. Черников С.Н. О дополняемости силовских π -подгрупп // Матем. сборник – 1955. – 37,79. – С. 557-566.
7. Горчаков Ю.М. Группы с конечными классами сопряженных элементов. – М.: Наука, 1978. – 120 с.
8. Tomkinson M.J. FC-groups. – Boston: Pitman, 1984. – 171 p.
9. Hartley B. Subgroups of locally normal groups // Compositio mathematica. – 1976.– 32,2. – P. 185-201.
10. Черников С.Н. О строении групп с конечными классами сопряженных элементов // Докл. АН СССР – 1957. – 115. – С. 60-63.
11. Половицкий Я.Д. О локально экстремальных и слойно экстремальных группах // Матем. сборник – 1962. – 58,2. – С. 658-694.
12. Robinson D.J. On the theory groups with extremal layers // J.Algebra. – 1970.– 14,2. – P. 182-193.
13. Baer.R. Finiteness properties of groups // Duke Maht.J. – 1948.– 15. – P. 1021-1032.
14. Курдаченко Л.А. FC-группы, периодическая часть которых вкладывается в прямое произведение конечных групп // Мат. заметки – 1977.– 21, №1. – С. 9-20.
15. Курдаченко Л.А. О группах с минимаксными классами сопряженных элементов // Бесконечные группы и примыкающие алгебраические структуры. – К.: Ін-т матем. НАН України, 1993. – С. 160-177.
16. Курдаченко Л.А., Соулес П. Группы с гиперциклическими собственными фактор-группами // Укр. матем. журн. – 2003.– 55, №4. – С. 470-478.

17. Беркович Я.Г. Обобщение теорем Ф.Холла и Н. Блэкберна и их применение к нерегулярным р-группам // Известия АН СССР. Серия математич. – 1971. – №35. – С. 800–830.
18. Rotman J.J. An introduction to the theory of groups. – New York: Springer-Verlag. – 1999. – 513 p.
19. Савочкіна Т.І. Про одну властивість локально-нормальних р-груп // XI міжнародна наукова конф. ім. акад. М. Кравчука. – Київ. – 2006. – С. 582.
20. Фукс Л. Бесконечные абелевы группы. Т.1.– Москва: Мир, 1974. – 335 с.
21. Szele T. Ein Analogon Körpertheorie für Abelsche Gruppen // J.reine und angew.Math. – 1950.– 188. – S. 167-192.

Мультипликативная структура резольвентной матрицы
проблемы моментов на компактном интервале
(случай четного числа моментов)

И.Ю. Серикова

Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина,
Украина

В статье получено разложение на простейшие сомножители Бляшке-Потапова резольвентной матрицы вполне неопределенной проблемы моментов на компактном интервале.

2000 *Mathematics Subject Classification* 47A57, 42A82.

§1. Введение

Степенная проблема моментов на компактном интервале в скалярном случае была исследована М.Г. Крейном (см. [1]). На матричный случай результаты М.Г. Крейна были обобщены в работах [2] - [3]. В этих статьях впервые была получена явная формула для резольвентной матрицы проблемы моментов. Важную роль в изучении проблемы моментов играет разложение резольвентной матрицы в произведение простейших множителей Бляшке-Потапова. Для проблем моментов Гамбургера и Стилтеса такая факторизация была получена в статьях И.В. Ковалишиной [4] и Ю.М. Дюкарева [5]. Однако, мультипликативная структура резольвентной матрицы проблемы моментов на компактном интервале ранее не была исследована. Основным результатом этой статьи является разложение резольвентной матрицы проблемы моментов на компактном интервале в произведение сомножителей Бляшке-Потапова.

Пусть заданы вещественные числа $a < b$ и натуральное число m . Символом $\mathbb{C}^{m \times m}$ обозначим множество комплексных квадратных матриц порядка m . Множество эрмитовых матриц обозначим $\mathbb{C}_H^{m \times m}$. Множество неотрицательных и положительных матриц обозначим $\mathbb{C}_{\geq}^{m \times m}$ и $\mathbb{C}_{>}^{m \times m}$ соответственно. Для неотрицательных (положительных) матриц мы также будем использовать обозначения $A \geq 0$ ($A > 0$). Символами $I_m \in \mathbb{C}^{m \times m}$ и $0_m \in \mathbb{C}^{m \times m}$ будем обозначать единичную и нулевую матрицы.

Изложим, следуя статье [3], необходимые нам факты о матричной проблеме моментов на компактном интервале.

Зафиксируем $l \in \mathbb{N}$ и рассмотрим последовательность комплексных $m \times m$ матриц $\{s_j\}_{j=0}^l$. В проблеме моментов требуется описать все непрерывные слева монотонно возрастающие матрицы-функции (МФ) $\sigma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}_H^{m \times m}$ такие, что

$$\int_a^b t^j d\sigma(t) = s_j, \quad 0 \leq j \leq l. \quad (1)$$

Множество решений σ этой проблемы моментов обозначим символом \mathcal{M}_l . С каждой $\sigma \in \mathcal{M}_l$ свяжем МФ

$$s(z) = \int_a^b \frac{d\sigma(t)}{t-z}. \quad (2)$$

МФ s называется *ассоциированной* с проблемой моментов (1). Множество МФ s , ассоциированных с проблемой (1), обозначим символом \mathcal{F}_l . Из формулы обращения Стильтеса следует, что соответствие, устанавливаемое между \mathcal{F}_l и \mathcal{M}_l формулой (2), является взаимнооднозначным. Поэтому, вместо описания множества \mathcal{M}_l , мы можем ограничиться описанием множества \mathcal{F}_l . Всюду далее будет рассматриваться матричная проблема с четным количеством моментов, т.е. $l = 2n + 1$, $n \in \{\mathbb{N} \cup 0\}$.

С проблемой (1) свяжем следующие объекты (см. [3]).

$$T_{(n)} = \begin{bmatrix} 0_{m \times nm} & 0_m \\ I_{nm} & 0_{nm \times m} \end{bmatrix}, \quad v_{(n)} = \begin{bmatrix} I_m \\ 0_{nm \times m} \end{bmatrix}, \quad u_{(n)} = - \begin{bmatrix} s_0 \\ s_1 \\ \vdots \\ s_n \end{bmatrix},$$

$$R_{T,(n)}(z) = (I_{m(n+1)} - zT_{(n)})^{-1} = \begin{bmatrix} I_m & 0_m & \cdots & 0_m \\ zI_m & I_m & \cdots & 0_m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z^n I_m & z^{n-1} I_m & \cdots & I_m \end{bmatrix}, \quad (3)$$

$$\tilde{H}_{1,(n)} = \begin{bmatrix} s_0 & s_1 & \cdots & s_n \\ s_1 & s_2 & \cdots & s_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_n & s_{n+1} & \cdots & s_{2n} \end{bmatrix}, \quad \tilde{H}_{2,(n)} = \begin{bmatrix} s_1 & s_2 & \cdots & s_{n+1} \\ s_2 & s_3 & \cdots & s_{n+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{n+1} & s_{n+2} & \cdots & s_{2n+1} \end{bmatrix},$$

$$-R_{T,(n)}(b)u_{2,(n)} = R_{T,(n)}(a)u_{1,(n)} = u_{(n)},$$

$$H_{1,(n)} = -a\tilde{H}_{1,(n)} + \tilde{H}_{2,(n)}, \quad H_{2,(n)} = b\tilde{H}_{1,(n)} - \tilde{H}_{2,(n)}.$$

Символом $l_{(n)}$ обозначим матрицу $(0_{m \times nm}, I_m)$.

Легко видеть, что имеет место *тождеством сплетения*

$$(a-b)R_{T,(n)}(a)v_{(n)}u_{1,(n)}^*R_{T,(n)}^*(a) = R_{T,(n)}^{-1}(b)R_{T,(n)}(a)H_{1,(n)} + H_{2,(n)}. \quad (4)$$

Определение 1. Проблема моментов (1) называется вполне неопределенной, если $H_{1,(n)} > 0$, $H_{2,(n)} > 0$.

Определение 2. МФ

$$U_{(n)}(z) = \left[\begin{array}{c|c} \alpha_{(n)}(z) & \beta_{(n)}(z) \\ \gamma_{(n)}(z) & \delta_{(n)}(z) \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} I_m - (z-a)u_2^* R_T^*(\bar{z}) H_2^{-1} R_T(a) v \\ (z-a)(z-b)v^* R_T^*(\bar{z}) H_2^{-1} R_T(a) v \\ \hline u_1^* R_T^*(\bar{z}) H_1^{-1} R_T(a) u_1 \\ I_m + (z-a)v^* R_T^*(\bar{z}) H_1^{-1} R_T(a) u_1 \end{array} \right] \quad (5)$$

называется резольвентной матрицей задачи (1). (Для упрощения записи нижний индекс (n) был опущен.)

§2. Мультипликативная структура резольвентной матрицы.

Пусть дана вполне неопределенная проблема моментов (1). Матрицы $H_{r,(n)}$ имеют следующие блочные представления

$$H_{r,(n)} = \left[\begin{array}{cc} H_{r,(n-1)} & B_{r,(n)} \\ B_{r,(n)}^* & C_{r,(n)} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc} I_{nm} & 0_{nm \times m} \\ B_{r,(n)}^* H_{r,(n-1)}^{-1} & I_m \end{array} \right] \times \left[\begin{array}{cc} H_{r,(n-1)} & 0_{nm \times m} \\ 0_{m \times nm} & \hat{H}_{r,n} \end{array} \right] \left[\begin{array}{cc} I_{nm} & H_{r,(n-1)}^{-1} B_{r,(n)} \\ 0_{m \times nm} & I_m \end{array} \right], \quad (6)$$

где $\hat{H}_{r,n} = C_{r,(n)} - B_{r,(n)}^* H_{r,(n-1)}^{-1} B_{r,(n)}$, $r = 1, 2$.

Из вполне неопределенности задачи (1) следует, что $\hat{H}_{r,n} > 0$ для $r = 1, 2$. Отсюда и из (6) имеем

$$H_{r,(n)}^{-1} = \left[\begin{array}{cc} I_{nm} & -H_{r,(n-1)}^{-1} B_{r,(n)} \\ 0_{m \times nm} & I_m \end{array} \right] \times \left[\begin{array}{cc} H_{r,(n-1)}^{-1} & 0_{nm \times m} \\ 0_{m \times nm} & \hat{H}_{r,n}^{-1} \end{array} \right] \left[\begin{array}{cc} I_{nm} & 0_{nm \times m} \\ -B_{r,(n)}^* H_{r,(n-1)}^{-1} & I_m \end{array} \right]. \quad (7)$$

Пусть МФ $w_{1,n}$ и \hat{v}_n , $n \in \mathbb{N}$ определены формулами

$$w_{1,n} = -s_n - B_{1,(n)}^* H_{1,(n-1)}^{-1} R_{T,(n-1)}(a) u_{1,(n-1)}, \\ \hat{v}_n = a^n I_m - B_{2,(n)}^* H_{2,(n-1)}^{-1} R_{T,(n-1)}(a) v_{(n-1)}.$$

Тогда

$$\left[\begin{array}{c} R_{T,(n-1)}(a) u_{1,(n-1)} \\ w_{1,n} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc} I_{nm} & 0_{nm \times m} \\ -B_{1,(n)}^* H_{1,(n-1)}^{-1} & I_m \end{array} \right] R_{T,(n)}(a) u_{1,(n)}, \\ \left[\begin{array}{c} R_{T,(n-1)}(a) v_{(n-1)} \\ \hat{v}_n \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc} I_{nm} & 0_{nm \times m} \\ -B_{2,(n)}^* H_{2,(n-1)}^{-1} & I_m \end{array} \right] R_{T,(n)}(a) v_{(n)}. \quad (8)$$

Теорема 1. Для вполне неопределенной проблемы моментов (1) имеют место следующие тождества

$$(a - b)R_{T,(n-1)}(a)v_{(n-1)}w_{1,n}^* = -H_{2,(n-1)}H_{1,(n-1)}^{-1}B_{1,(n)} + B_{2,(n)}. \quad (9)$$

$$(a - b)\hat{v}_n w_{1,n}^* = \hat{H}_{1,n} + \hat{H}_{2,n}. \quad (10)$$

$$(a - b)\hat{v}_n u_{1,(n-1)}^* R_{T,(n-1)}^*(a) = (a - b)l_{(n-1)}R_{T,(n-1)}(a)H_{1,(n-1)} + B_{1,(n)}^* - B_{2,(n)}^* H_{2,(n-1)}^{-1} R_{T,(n-1)}^{-1}(b)R_{T,(n-1)}(a)H_{1,(n-1)}. \quad (11)$$

Доказательство. Домножим тождество сплетения (4) слева на $\begin{bmatrix} I_{nm} & 0_{nm \times m} \\ -B_{2,(n)}^* H_{2,(n-1)}^{-1} & I_m \end{bmatrix}$, а справа на $\begin{bmatrix} I_{nm} & -H_{1,(n-1)}^{-1} B_{1,(n)} \\ 0_{m \times nm} & I_m \end{bmatrix}$. Применив тождества (8) к левой части равенства и тождества (6) - к правой, получим

$$(a - b) \begin{bmatrix} R_{T,(n-1)}(a)v_{(n-1)} \\ \hat{v}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{1,(n-1)}^* R_{T,(n-1)}^*(a) & w_{1,n}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{nm} & 0_{nm \times m} \\ -B_{2,(n)}^* H_{2,(n-1)}^{-1} & I_m \end{bmatrix} R_{T,(n-1)}^{-1}(b)R_{T,(n-1)}(a) \begin{bmatrix} H_{1,(n-1)} & 0_{nm \times m} \\ B_{1,(n)}^* & \hat{H}_{1,n} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} H_{2,(n-1)} & B_{2,(n)} \\ 0_{m \times nm} & \hat{H}_{2,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{nm} & -H_{1,(n-1)}^{-1} B_{1,(n)} \\ 0_{m \times nm} & I_m \end{bmatrix}.$$

Отсюда и из

$$R_{T,(n)}^{-1}(b)R_{T,(n)}(a) = \begin{bmatrix} R_{T,(n-1)}^{-1}(b)R_{T,(n-1)}(a) & 0_{nm \times m} \\ (a - b)l_{(n-1)}R_{T,(n-1)}(a) & I_m \end{bmatrix}$$

имеем

$$(a - b) \begin{bmatrix} R_{T,(n-1)}(a)v_{(n-1)} \\ \hat{v}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{1,(n-1)}^* R_{T,(n-1)}^*(a) & w_{1,n}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{T,(n-1)}^{-1}(b)R_{T,(n-1)}(a) & 0_{nm \times m} \\ [-B_{2,(n)}^* H_{2,(n-1)}^{-1} R_{T,(n-1)}^{-1}(b) + (a - b)l_{(n-1)}] R_{T,(n-1)}(a) & I_m \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} H_{1,(n-1)} & 0_{nm \times m} \\ B_{1,(n)}^* & \hat{H}_{1,n} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} H_{2,(n-1)} & -H_{2,(n-1)}H_{1,(n-1)}^{-1}B_{1,(n)} + B_{2,(n)} \\ 0_{m \times nm} & \hat{H}_{2,n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{T,(n-1)}^{-1}(b)R_{T,(n-1)}(a)H_{1,(n-1)} \\ [-B_{2,(n)}^* H_{2,(n-1)}^{-1} R_{T,(n-1)}^{-1}(b) + (a - b)l_{(n-1)}] R_{T,(n-1)}(a)H_{1,(n-1)} + B_{1,(n)}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0_{nm \times m} \\ \hat{H}_{1,n} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} H_{2,(n-1)} & -H_{2,(n-1)}H_{1,(n-1)}^{-1}B_{1,(n)} + B_{2,(n)} \\ 0_{m \times nm} & \hat{H}_{2,n} \end{bmatrix}.$$

Таким образом,

$$(a-b) \begin{bmatrix} R_{T,(n-1)}(a)v_{(n-1)} \\ \hat{v}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{1,(n-1)}^* R_{T,(n-1)}^*(a) & w_{1,n}^* \end{bmatrix} \\ = \left[\frac{R_{T,(n-1)}^{-1}(b)R_{T,(n-1)}(a)H_{1,(n-1)}}{\left[-B_{2,(n)}^* H_{2,(n-1)}^{-1} R_{T,(n-1)}^{-1}(b) + (a-b)l_{(n-1)}\right] R_{T,(n-1)}(a)H_{1,(n-1)} + B_{1,(n)}^*} \right] \\ \left[\frac{0_{nm \times m}}{\hat{H}_{1,n}} \right] + \begin{bmatrix} H_{2,(n-1)} & -H_{2,(n-1)}H_{1,(n-1)}^{-1}B_{1,(n)} + B_{2,(n)} \\ 0_{m \times nm} & \hat{H}_{2,n} \end{bmatrix}.$$

Приравняв блоки этого равенства, получим тождества (9) (см. блок 12), (10) (см. блок 22), (11) (см. блок 21). Теорема доказана.

Пусть $w_{2,n} = -w_{1,n}$. Имеет место тождество

$$u_{2,(n)} = \begin{bmatrix} u_{2,(n-1)} \\ w_{2,n} + (-bl_{(n-1)} + B_{1,(n)}^* H_{1,(n-1)}^{-1})R_{T,(n-1)}(b)u_{2,(n-1)} \end{bmatrix}. \quad (12)$$

Обозначим $w_{1,0} = u_{1,(0)}$ и $\hat{v}_0 = I_m$.

Определение 3. МФ

$$b_n(z) = \begin{bmatrix} \hat{\alpha}_n(z) & \hat{\beta}_n(z) \\ \hat{\gamma}_n(z) & \hat{\delta}_n(z) \end{bmatrix} \\ = \left[\frac{I_m - (z-a)w_{2,n}^* \hat{H}_{2,n}^{-1} \hat{v}_n}{(z-a)(z-b)\hat{v}_n^* \hat{H}_{2,n}^{-1} \hat{v}_n} \mid \frac{w_{1,n}^* \hat{H}_{1,n}^{-1} w_{1,n}}{I_m + (z-a)\hat{v}_n^* \hat{H}_{1,n}^{-1} w_{1,n}} \right] \quad (13)$$

называется множителем Бляшке-Потапова ($n \in \{\mathbb{N} \cup 0\}$).

Теорема 2. Пусть $U_{(n)}(z)$ является резольвентной матрицей n -ой вполне неопределенной проблемы моментов (1), $U_{(n-1)}(z)$ - резольвентной матрицей $(n-1)$ -ой проблемы моментов и $b_n(z)$ определены в (13).

Тогда

$$U_{(n)}(z) = U_{(n-1)}(z)b_n(z). \quad (14)$$

Доказательство. Пусть $X(z) = U_{n-1}(z)b_n(z)$. Тогда, из (5) и (13) имеем

$$U_{n-1}(z)b_n(z) = \begin{bmatrix} X_{11}(z) & X_{12}(z) \\ X_{21}(z) & X_{22}(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{n-1}(z) & \beta_{n-1}(z) \\ \gamma_{n-1}(z) & \delta_{n-1}(z) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\alpha}_n(z) & \hat{\beta}_n(z) \\ \hat{\gamma}_n(z) & \hat{\delta}_n(z) \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} \alpha_{n-1}(z)\hat{\alpha}_n(z) + \beta_{n-1}(z)\hat{\gamma}_n(z) & \alpha_{n-1}(z)\hat{\beta}_n(z) + \beta_{n-1}(z)\hat{\delta}_n(z) \\ \gamma_{n-1}(z)\hat{\alpha}_n(z) + \delta_{n-1}(z)\hat{\gamma}_n(z) & \gamma_{n-1}(z)\hat{\beta}_n(z) + \delta_{n-1}(z)\hat{\delta}_n(z) \end{bmatrix}.$$

Таким образом, для доказательства теоремы достаточно убедиться в справедливости следующих равенств

$$\alpha_n(z) = \alpha_{n-1}(z)\hat{\alpha}(z) + \beta_{n-1}(z)\hat{\gamma}(z), \quad (15)$$

$$\beta_n(z) = \alpha_{n-1}(z)\hat{\beta}(z) + \beta_{n-1}(z)\hat{\delta}(z), \quad (16)$$

$$\gamma_n(z) = \gamma_{n-1}(z)\hat{\alpha}(z) + \delta_{n-1}(z)\hat{\gamma}(z), \quad (17)$$

$$\delta_n(z) = \gamma_{n-1}(z)\hat{\beta}(z) + \delta_{n-1}(z)\hat{\delta}(z). \quad (18)$$

Докажем равенство (15). Имеем

$$\begin{aligned} \alpha_n(z) &= I_m - (z-a)u_{2,(n)}^* R_{T,(n)}^*(\bar{z}) H_{2,(n)}^{-1} R_{T,(n)}(a) v_{(n)} = I_m \\ &- (z-a)u_{2,(n)}^* R_{T,(n)}^*(\bar{z}) H_{2,(n)}^{-1} \begin{bmatrix} I_{nm} & 0_{nm \times m} \\ B_{2,(n)}^* H_{2,(n-1)}^{-1} & I_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_{T,(n-1)}(a) v_{(n-1)} \\ \hat{v}_n \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Из (12) следует

$$\begin{aligned} \alpha_n(z) &= \alpha_{n-1}(z) - (z-a)u_{2,(n-1)}^* \left\{ -R_{T,(n-1)}^*(\bar{z}) H_{2,(n-1)}^{-1} B_{2,(n)} + \begin{pmatrix} z^n I_m \\ \vdots \\ z I_m \end{pmatrix} \right. \\ &\left. + R_{T,(n-1)}^*(b) \begin{pmatrix} 0_m \\ \vdots \\ -b I_m \end{pmatrix} + R_{T,(n-1)}^*(b) H_{1,(n-1)}^{-1} B_{1,(n)} + w_{2,n}^* \right\} \hat{H}_{2,n}^{-1} \hat{v}_n. \end{aligned}$$

Воспользовавшись очевидным тождеством

$$z R_{T,(n-1)}^*(\bar{z}) - b R_{T,(n-1)}^*(b) = (z-b) R_{T,(n-1)}^*(\bar{z}) R_{T,(n-1)}^*(b),$$

получим

$$\begin{aligned} \alpha_n(z) &= \alpha_{n-1}(z) - (z-a)u_{2,(n-1)}^* \left(-R_{T,(n-1)}^*(\bar{z}) H_{2,(n-1)}^{-1} B_{2,(n)} + R_{T,(n-1)}^*(b) \right. \\ &\left. \times H_{1,(n-1)}^{-1} B_{1,(n)} + (z-b) R_{T,(n-1)}^*(\bar{z}) R_{T,(n-1)}^*(b) \begin{pmatrix} 0_m \\ \vdots \\ I_m \end{pmatrix} + w_{2,n}^* \right) \hat{H}_{2,n}^{-1} \hat{v}_n. \end{aligned} \quad (19)$$

Вычислим $X_{11}(z)$. Имеем

$$\begin{aligned} X_{11}(z) &= \alpha_{n-1}(z)\hat{\alpha}(z) + \beta_{n-1}(z)\hat{\gamma}(z) \\ &= \left(I_m - (z-a)u_{2,(n-1)}^* R_{T,(n-1)}^*(\bar{z}) H_{2,(n-1)}^{-1} R_{T,(n-1)}(a) v_{(n-1)} \right) \\ &\times \left(I_m - (z-a)w_{2,n}^* \hat{H}_{2,n}^{-1} \hat{v}_n \right) + (z-a)(z-b)u_{1,(n-1)}^* R_{T,(n-1)}^*(\bar{z}) H_{1,(n-1)}^{-1} \\ &\times R_{T,(n-1)}(a) u_{1,(n-1)} \hat{v}_n \hat{H}_{2,n}^{-1} \hat{v}_n = \alpha_{n-1}(z) - (z-a)w_{2,n}^* \hat{H}_{2,n}^{-1} \hat{v}_n - (z-a)u_{2,(n-1)}^* \\ &\times \left(-(z-a) R_{T,(n-1)}^*(\bar{z}) H_{2,(n-1)}^{-1} R_{T,(n-1)}(a) v_{(n-1)} w_{2,n}^* \hat{H}_{2,n}^{-1} \hat{v}_n \right. \\ &\left. + (z-b) R_{T,(n-1)}^*(b) R_{T,(n-1)}^{-1}(a) R_{T,(n-1)}^*(\bar{z}) H_{1,(n-1)}^{-1} R_{T,(n-1)}(a) u_{1,(n-1)} \hat{v}_n \hat{H}_{2,n}^{-1} \hat{v}_n \right). \end{aligned}$$

Отсюда и из тождеств (9) и (11) следует, что

$$\begin{aligned}
 X_{11}(z) &= \alpha_{n-1}(z) - (z-a)w_{2,n}^* \hat{H}_{2,n}^{-1} \hat{v}_n - \frac{(z-a)}{(a-b)} u_{2,(n-1)}^* \\
 &\times \left(-(z-a)R_{T,(n-1)}^*(\bar{z})H_{1,(n-1)}^{-1}B_{1,(n)} + (z-a)R_{T,(n-1)}^*(\bar{z})H_{2,(n-1)}^{-1}B_{2,(n)} \right. \\
 &+ (z-b)R_{T,(n-1)}^*(b)R_{T,(n-1)}^{-1*}(a)R_{T,(n-1)}^*(\bar{z})H_{1,(n-1)}^{-1}B_{1,(n)} - (z-b)R_{T,(n-1)}^*(\bar{z}) \\
 &\times H_{2,(n-1)}^{-1}B_{2,(n)} + (z-b)R_{T,(n-1)}^*(b)R_{T,(n-1)}^*(\bar{z}) \begin{pmatrix} 0_m \\ \vdots \\ I_m \end{pmatrix} \left. \right) \hat{H}_{2,n}^{-1} \hat{v}_n = \alpha_{n-1}(z) \\
 &- (z-a)w_{2,n}^* \hat{H}_{2,n}^{-1} \hat{v}_n - (z-a)u_{2,(n-1)}^* \left(R_{T,(n-1)}^*(b)H_{1,(n-1)}^{-1}B_{1,(n)} \right. \\
 &\left. - R_{T,(n-1)}^*(\bar{z})H_{2,(n-1)}^{-1}B_{2,(n)} + (z-b)R_{T,(n-1)}^*(b)R_{T,(n-1)}^*(\bar{z}) \begin{pmatrix} 0_m \\ \vdots \\ I_m \end{pmatrix} \right) \hat{H}_{2,n}^{-1} \hat{v}_n.
 \end{aligned}$$

Отсюда и из (19) имеем $\alpha_n(z) = \alpha_{n-1}(z)\hat{\alpha}(z) + \beta_{n-1}(z)\hat{\gamma}(z)$. Равенства (16)-(18) проверяются аналогично. Теорема доказана.

Следствие. Пусть множители Бляшке-Потапова определены формулой (13) для всех $n \in \{\mathbb{N} \cup 0\}$. Тогда, резольвентная матрица вполне неопределенной проблемы моментов (1) может быть представлена произведением множителей Бляшке-Потапова

$$U_{(n)}(z) = b_0(z) \times b_1(z) \times \dots \times b_n(z), \quad n \in \{\mathbb{N} \cup 0\}. \quad (20)$$

Формула (20) получается последовательным применением теоремы 2.

Замечание. В диссертации [6] было получено аддитивное представление резольвентной матрицы в терминах ортогональных матричных многочленов. В этой статье исследована мультипликативная структура резольвентной матрицы, что является существенным дополнением к результатам диссертации [6].

ЛИТЕРАТУРА

1. Крейн М.Г., Нудельман А.А. Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи. -М.: Наука, 1973.
2. Дюкарев Ю.М., Чоке Риверо А.Е. Степенная проблема моментов на компактном интервале // Мат. заметки.- 2001. **69**. №2. С. 200-213.
3. Choque Rivero A.E., Dyukarev Yu.M., Fritzsche B., Kirstein B. A truncated matricial moment problem on finite interval // Operator Theory: Advanced and Application. - 2006. **165**. P. 121-173.

4. Ковалишина И.В. Аналитическая теория одного класса интерполяционных задач. // Изв. АН СССР. Сер.матем.-1983. 47. С. 455-497.
5. Дюкарев Ю.М. О критериях неопределенности матричной проблемы моментов Стильтеса // Мат. заметки. - 2004. 75. №1. С.71-88.
6. Thiele H.C. Beiträge zu matriziellen Potenzmomentenproblemen: Dissertation zur Erlangung des akademischen Grades: Dr. rer. nat. - Leipzig, 2006. P. 112.

Об условиях принадлежности поверхности трехмерной сфере

Я.С. Тандура

ФТИНТ НАН Украины им.Б.И.Веркина

В работе рассматриваются условия при которых двумерная поверхность с вырожденным эллипсом нормальной кривизны не принадлежит никакой трехмерной сфере.

2000 Mathematics Subject Classification 53A05.

Если двумерная поверхность F^2 в четырехмерном евклидовом пространстве E^4 лежит на трехмерной сфере S^3 , то ее локальные геометрические инварианты удовлетворяют некоторым условиям. И наоборот, если эти условия выполняются, то поверхность $F^2 \subset S^3$. Эти условия сформулированы в следующей теореме, доказанной в [1, глава 6, с.159]

Теорема 1 *Если поверхность F^2 принадлежит трехмерной сфере S^3 радиуса R , то в каждой ее точке x , эллипс нормальной кривизны вырожден в отрезок прямой, находящейся на постоянном расстоянии $\beta = \frac{1}{R}$ от точки x . Наоборот, если эллипс нормальной кривизны вырожден в отрезок прямой, расстояние которой от точки x постоянно и равно β , а гауссова кривизна поверхности $K \neq \beta^2$, то F^2 лежит в трехмерной сфере S^3 радиуса $\frac{1}{\beta}$.*

Таким образом, в во второй части теоремы не был рассмотрен случай, когда гауссова кривизна $K = \beta^2$. В этой заметке покажем, что условие $K \neq \beta^2$ в этой теореме существенно. А именно, докажем следующую теорему.

Теорема 2 *В евклидовом пространстве E^4 существует поверхность, в каждой точке которой эллипс нормальной кривизны вырожден в отрезок прямой, находящейся на постоянном расстоянии β от точки x , и с гауссовой кривизной $K = \beta^2$, не принадлежащая никакой сфере S^3 .*

Построение такой поверхности проведем с помощью выбора коэффициентов первой квадратичной формы $ds^2 = Edu^2 + Gdv^2$, коэффициентов вторых квадратичных форм L_{ij}^σ и коэффициентов кручения $\mu_{\alpha\beta/i}$, удовлетворяющих системе уравнений Гаусса-Кодацци-Риччи. Тогда по обобщенной теореме

Бонне [1, глава 4 с.99] им будет соответствовать поверхность F^2 , лежащая в E^4 .

Предположим, что такая поверхность F^2 существует. Пусть координаты на поверхности F^2 и в нормальной плоскости выбраны специальным образом описанном в [2] или [1, глава 6]. При этом нормали n_1 и n_2 параллельны осям эллипса нормальной кривизны. Пусть α и β - координаты центра эллипса относительно данной системы координат, а a и b его полуоси. Тогда коэффициенты второй квадратичной формы имеют вид:

$$\begin{aligned} L_{11}^1 &= (\alpha + a)E, & L_{12}^1 &= 0, & L_{22}^1 &= (\alpha - a)G, \\ L_{11}^2 &= \beta E, & L_{12}^2 &= b\sqrt{EG}, & L_{22}^2 &= \beta G. \end{aligned}$$

Имеют место четыре уравнения Кодацци для двумерной поверхности F^2 в E^4 ,

$$L_{ij,k}^\sigma - L_{ik,j}^\sigma = \mu_{\tau\sigma/k} L_{ij}^\tau - \mu_{\tau\sigma/j} L_{ik}^\tau,$$

где $i, j, k = 1, 2, \tau, \sigma = 1, 2, 3$.

Коэффициенты кручения $\mu_{12/i}$ базиса n_1 и n_2 , обозначим через ν_i . При нашем выборе координат эти уравнения записываются в следующем виде [1, глава 6]

$$-\frac{G_u}{G} b\sqrt{EG} - \sqrt{EG}b_u + \beta_u E - (\alpha + a)E\nu_2 = 0, \tag{1}$$

$$-\frac{E_v}{E} b\sqrt{EG} - \sqrt{EG}b_v + \beta_u G - (\alpha - a)G\nu_1 = 0, \tag{2}$$

$$(aE)_v + \alpha_v E + \beta E\nu_2 - b\sqrt{EG}\nu_1 = 0, \tag{3}$$

$$-(aG)_u + \alpha_u G + \beta G\nu_1 - b\sqrt{EG}\nu_2 = 0. \tag{4}$$

Имеет место формула Картана для гауссовой кривизны [2]

$$K = \alpha^2 + \beta^2 - a^2 - b^2.$$

Когда эллипс нормальной кривизны вырожден в отрезок прямой, можем положить $b = 0$. Так как по условию $K = \beta^2$ из формулы Картана, следует, что $\alpha^2 - a^2 = 0$. Далее, рассмотрим поверхности с условием $\alpha = a$. Пусть $a \neq 0$. Учитывая, $b = 0, \alpha = a, \beta = const$ из (1) выводим, что $\nu_2 = 0$. Уравнение (2) выполнено тождественно. Уравнение (3) дает связь между a и E ,

$$\frac{2a_v}{a} + \frac{E_v}{E} = 0,$$

интегрируя его, находим

$$a^2 E = g(u),$$

где, $g(u)$ - некоторая функция от u . Изменением параметра на базовой координатной u -линии можно добиться, что $g(u) = 1$. Таким образом, можно считать, что

$$a = \frac{1}{\sqrt{E}}.$$

Из уравнения (4), подставив в него выражение для a , получим ν_1 через коэффициенты первой квадратичной формы.

$$\nu_1 = \frac{G_u}{\beta G \sqrt{E}}. \quad (5)$$

Как известно, коэффициенты кручения поверхности F^2 в E^4 удовлетворяют уравнению Риччи,

$$\nu_{2,1} - \nu_{1,2} = 2ab\sqrt{EG}.$$

Здесь запятые обозначают ковариантные производные коэффициентов кручения, но в данном случае их можно заменить на обычные производные. Учитывая, что $\nu_2 = 0, b = 0$ получим:

$$\frac{\partial \nu_1}{\partial v} = 0.$$

Следовательно, ν_1 является некоторой функцией зависящей только от u . Учитывая выражение (5) для ν_1 , имеем:

$$\frac{G_u}{G\sqrt{E}} = f(u). \quad (6)$$

В дальнейшем можем считать, что функция $f(u)$ заданна. Используем также уравнение Гаусса, которое в ортогональных координатах имеет следующий вид:

$$K = -\frac{1}{2\sqrt{EG}} \left\{ \left(\frac{E_v}{\sqrt{EG}} \right)_v + \left(\frac{G_u}{\sqrt{EG}} \right)_u \right\} = \beta^2.$$

Из выражения (6), находим \sqrt{E} и подставляем его в уравнение Гаусса. Получим некоторое уравнение на одну функцию G :

$$4G_{uvv}G^2 - 4G_{vv}G_uG - 10G_{uv}G_vG + 10G_uG_v^2 + 2G^4ff_u + G_uG^3(f^2 + 4\beta^2) = 0. \quad (7)$$

Таким образом, система уравнений на построение поверхностей F^2 в E^4 такой, что эллипс нормальной кривизны вырожден в отрезок прямой и находится на постоянном расстоянии β от точки x , а гауссова кривизна $K = \beta^2$, свелась к дифференциальному уравнению в частных производных третьего порядка на одну функцию G .

Построим некоторое частное решение предполагая, что функция G зависит только от u : $G = G(u)$. Тогда из уравнения (7) имеем:

$$\frac{G_u}{G} = \frac{-2ff_u}{f^2 + 4\beta^2}.$$

Интегрируя это выражение находим что $G = \frac{c}{f^2 + 4\beta^2}$, где можем считать, что $c = 1$.

Замечание: Более общее решение этого уравнения имеет вид $G = G(u)\varphi(v)$, но с помощью параметризации на координатной v -линии можно добиться чтобы $\varphi(v) \equiv 1$.

Из уравнения (6) находим:

$$\sqrt{E} = \frac{-2f_u}{f^2 + 4\beta^2}.$$

Для того, чтобы выполнялось условие положительности \sqrt{E} и регулярности поверхности F^2 , положим $f_u < 0$.

Таким образом, все уравнения Гаусса-Кодацци-Риччи, для данного выбора коэффициентов первой и вторых квадратичных форм и коэффициентов кручения выполнены. И по теореме Бонне существует поверхность $F^2 \subset E^4$, которая им соответствует. Покажем теперь, что эта поверхность при $f(u) \neq 0$ не лежит ни в какой сфере S^3 .

Лемма 1. *Если некоторая поверхность $M^2 \subset E^4$ лежит в сфере S^3 , то нормальный вектор этой поверхности направленный по радиус-вектору сферы, перпендикулярен отрезку – вырожденному эллипсу нормальной кривизны.*

Доказательство в [1, глава 6].

Лемма 2. *Если некоторая поверхность $M^2 \subset E^4$ лежит в сфере S^3 , то нормальный вектор направленный по отрезку – вырожденному эллипсу нормальной кривизны, является параллельно переносимым в нормальном расщелении.*

Действительно, пусть начало координат E^4 выбрано в центре сферы S^3 и $r = r(u^1, u^2)$ – радиус вектор поверхности M^2 . Положим $n_2 = \frac{r}{|r|}$, тогда единичный вектор n_1 , ортогонален к n_2 , r_{u^1} , r_{u^2} . Поэтому его можно записать как векторное произведение в E^4 этих трех векторов.

$$n_1 = \lambda[r, r_{u^1}, r_{u^2}].$$

По определению, коэффициенты кручения $\mu_{\alpha\sigma/i} = (n_{\sigma u^i}, n_\alpha)$. Для доказательства леммы 2 необходимо показать, что коэффициенты кручения при указанном выборе нормалей равны нулю. Запишем

$$\mu_{12/i} = (n_{2u^i}, n_1) = \lambda \left(\left(\frac{r}{|r|} \right)_{u^i}, r, r_{u^1}, r_{u^2} \right) = 0$$

Лемма 2 доказана.

Вернемся теперь к рассматриваемой поверхности F^2 . При ее построении нормаль n_1 была направлена вдоль отрезка – эллипса нормальной кривизны. Если бы поверхность лежала в сфере то соответствующие коэффициенты кручения по лемме 2 были бы равны нулю. Но мы имеем следующее выражение в силу (5) и (6) для $\nu_1 = \frac{f}{\beta} \neq 0$. Поэтому поверхность F^2 не лежит ни в какой сфере, что и доказывает теорему 2.

Замечание. Поверхность с первой квадратичной формой

$$ds^2 = \frac{4f_u^2}{(f^2 + 4\beta^2)^2} du^2 + \frac{c}{f^2 + 4\beta^2} dv^2,$$

можно привести к сферической метрике.

Действительно, произведем замену $\frac{4f_u^2}{(f^2 + 4\beta^2)^2} du^2 = dx^2$, получим $x = \frac{1}{\beta} \arctan\left(\frac{f}{2\beta}\right)$, найдем выражение для f через x , имеем $f = 2\beta \tan(\beta x)$. И пусть $dy^2 = \frac{c}{4\beta^2} dv^2$, тогда метрика поверхности запишется в виде

$$ds^2 = dx^2 + \cos^2(\beta x) dy^2$$

Параметры x и y в сферической метрике изменяются в пределах $(0, 2\pi)$ $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ — соответственно, для любой функции f .

Доказанная выше теорема 2, представляет локальный результат. В связи с вопросом заданным А.А.Борисенко, о возможности погружения "в целом", рассмотрим глобальный случай. Например, существует ли поверхность изометричная некоторой двумерной сфере S^2 с указанными условиями на эллипс нормальной кривизны и на гауссову кривизну, не принадлежащая сфере S^3 ? Ответ на этот вопрос дает следующее замечание.

Замечание. Существует изометрическое погружение двумерной сферы S^2 без двух полюсных точек, кривизны $K = \beta^2$ в E^4 , такое что в каждой точке x эллипс нормальной кривизны вырожден в отрезок прямой, которая находится на постоянном расстоянии β от точки x , и образ погружения не принадлежит никакой сфере S^3 .

Действительно, пусть $f = -u$, и первоначальная метрика этой поверхности запишется в виде:

$$ds^2 = \frac{4u^2}{(u^2 + 4\beta^2)^2} du^2 + \frac{1}{(u^2 + 4\beta^2)} dv^2. \quad (8)$$

Поверхность удовлетворяет всем условиям теоремы 2, а значит она не принадлежит сфере S^3 .

Выясним, будет ли существовать регулярное погружение всей сферы S^2 в E^4 . При нашей метрике параметры u и v изменяются в пределах $u : (-\infty, +\infty)$; $v : (0, 2\pi)$, и полюсы достигаются при $u = \pm\infty$. Так как, длина замкнутой кривой $u = const$ при $u \rightarrow \pm\infty$ стремится к нулю, то построенная поверхность непрерывна в точках, соответствующих $u = \pm\infty$.

Для дальнейшего изучения регулярности поверхности в этих точках запишем разложение Гаусса-Вейнгартена, для поверхности с первой квадратичной формой в виде (8) и второй квадратичной формой в виде:

$$II^1 = \frac{-4du^2}{u^2 + 4\beta^2}, \quad II^2 = \beta ds^2;$$

после подставления этих форм в систему имеем:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 r}{\partial u^2} &= \frac{-2u}{u^2 + 4\beta^2} r_u - \frac{4}{u^2 + 4\beta^2} n_1 + \frac{\beta u}{(u^2 + 4\beta^2)^2} n_2, \\ \frac{\partial^2 r}{\partial u \partial v} &= -\frac{u}{u^2 + 4\beta^2} r_v, \quad \frac{\partial^2 r}{\partial v^2} = \frac{u}{4} r_u + \frac{\beta}{u^2 + 4\beta^2} n_2, \\ \frac{\partial n_1}{\partial u} &= (u^2 + 4\beta^2) r_u - \frac{u}{\beta} n_2, \quad \frac{\partial n_1}{\partial v} = 0, \\ \frac{\partial n_2}{\partial u} &= -\beta r_u - \frac{u}{\beta} n_1, \quad \frac{\partial n_2}{\partial v} = -\beta r_v,\end{aligned}$$

где n_1 и n_2 – нормали поверхности.

Рассмотрим грассманов образ поверхности вдоль некоторой замкнутой кривой $u = \text{const}$, это есть некоторая кривая в пространстве E^6 . Устремим кривую на полученной поверхности к полюсу, то есть, $u \rightarrow \pm\infty$. В пределе получим образы полюсных точек.

Найдем длину грассманова образа [1, глава 8] кривой $u = \text{const}$.

$$l = \int_0^{2\pi} |[n_1, n_2]'_v| dv = \int_0^{2\pi} |[n_{1v}, n_2] + [n_1, n_{2v}]| dv = \int_0^{2\pi} \beta |r'_v| dv.$$

Из пятого и седьмого уравнений в системе Вейнгартена и из уравнения (8) следует

$$l = \frac{2\pi\beta}{\sqrt{u^2 + 4\beta^2}}.$$

В пределе при $u \rightarrow \pm\infty$ длина этой кривой равна нулю. Таким образом, в образе полюсов имеется единственная нормальная плоскость.

Проверим будет ли принадлежать поверхность в данных точках классу C^2 . Для этого найдем вектор средней кривизны поверхности $H = H^1 n_1 + H^2 n_2$. Так как, первая квадратичная форма (8) имеет диагональный вид, то

$$H^\sigma = \frac{1}{2} \left(\frac{L_{11}^\sigma}{g_{11}} + \frac{L_{22}^\sigma}{g_{22}} \right),$$

получаем $H^1 = -\frac{u^2 + 4\beta^2}{2}$, $H^2 = \beta$. Длина этого вектора $l_H = \sqrt{\beta^2 + \frac{(u^2 + 4\beta^2)^2}{4}}$.

При $u \rightarrow \infty$, $l_H \rightarrow \infty$, а значит наша поверхность не принадлежит классу C^2 .

ЛИТЕРАТУРА

1. Аминов Ю.А. Геометрия подмногообразий. – Киев: Наукова думка, 2002. – 468 с.
2. Картан Э. Риманова геометрия в ортогональном репере. М.: Изд-во моск. унив-та, 1960. – 307 с.

Построение конформного отображения кольцевых секторов на единичный круг

Д.И. Анпилогов

Запорожский национальный технический университет
Украина

Построено конформное отображение сечений повреждённой и неповреждённой цилиндрической оболочки на единичный круг. Единообразие построения отображений обеих областей достигается с помощью применения интеграла Кристофеля-Шварца. Результат работы – построение функций, позволяющих получить решения соответствующих задач теории упругости для обеих областей в сопоставимых условиях.

2000 Mathematics Subject Classification 30C20.

1. Введение. При изучении колебаний стержней [1, 2], оболочек [3] и других механических объектов с повреждением используют эмпирическую концепцию "дышащей трещины". В рамках этой концепции полагают, что жёсткость конструкции в момент раскрытия трещины скачкообразно уменьшается, а при смыкании берегов трещины восстанавливается своё первоначальное значение. Соответственно, колебания оказываются нелинейными, и их параметры (например, амплитуды гармоник спектра колебаний) определяются только относительным уменьшением жёсткости. Величина относительного уменьшения жёсткости, в свою очередь, зависит от расположения, формы и размеров трещины. Практически же эту величину определяют косвенно: экспериментально измеряют относительное уменьшение частоты собственных колебаний, обусловленное возникновением трещины. Результаты таких экспериментов для стержней известны [4], однако формальное распространение этих результатов на оболочки не позволяет учесть влияние кривизны срединной поверхности на возникающие нелинейные эффекты.

Альтернативой такому подходу является решение соответствующих задач теории упругости и последующий анализ полей напряжений и перемещений. Один из методов решения таких задач для двумерных областей разработан в [5]. В случае односвязных областей этот метод требует построения функции, конформно отображающей заданную область на единичный круг.

Для оценки уменьшения жёсткости необходимо сравнить решения двух граничных задач для двух различных областей – соответствующих отсут-

ствию и наличию повреждения. Обе эти задачи удобно решать в сопоставимых условиях. Поэтому желательно добиться единообразия при построении функций, конформно отображающих каждую из областей на единичный круг. Представляется целесообразным в качестве инструмента, обеспечивающего такое единообразие, использовать интеграл Кристоффеля-Шварца. Как указывается в [6], отсутствие общего способа определения параметров этого преобразования "...уменьшает практическое значение формулы Кристоффеля-Шварца". Тем не менее, в рассматриваемом случае эту трудность удаётся преодолеть, причём практически одинаковым способом для каждой из областей.

Таким образом, наша задача заключается в использовании интеграла Кристоффеля-Шварца для построения функций, конформно отображающих две различные области на единичный круг. Далее будем считать, что (та или иная) область лежит в плоскости комплексного переменного z , а единичный круг – в плоскости комплексного переменного ζ . Поэтому нахождению подлежат функции $z = \omega(\zeta)$.

2. Постановка задачи. Пусть имеется цилиндрическая оболочка радиуса a и толщины h (рис. 1), изгибаемая моментом, равномерно распределённым вдоль контурных образующих. Для достаточно длинных оболочек, пренебре-

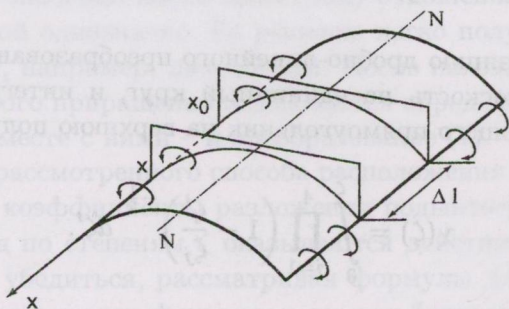


Рис. 1: Возникновение кольцевого сектора

гая краевыми эффектами, можно считать, что напряжённо-деформированное состояние является состоянием плоской деформации (отсутствуют смещения точек вдоль оси x). Тогда изучение этого состояния сводится к решению задачи теории упругости для элемента произвольной малой толщины Δl , вырезаемого из оболочки плоскостями $x = x_0$ и $x = x_0 + \Delta l$. Таким образом, первая область, которую нужно конформно отобразить на единичный круг, является сечением оболочки плоскостью $x = const$ и представляет собой кольцевой сектор с радиусами $R_1 = a - h/2$ и $R_2 = a + h/2$. Центральный угол этого сектора будем считать равным ψ_{max} .

Рассмотрим теперь оболочку с повреждением в виде трещины глубиной h_1 , расположенной на выпуклой поверхности вдоль направления NN (рис. 1). Аналогичные рассуждения приводят нас к выявлению формы второй обла-

сти, требующей построения конформного отображения – кольцевого сектора с вырезом (рис. 2). Вырез представляет собой также кольцевой сектор, но с

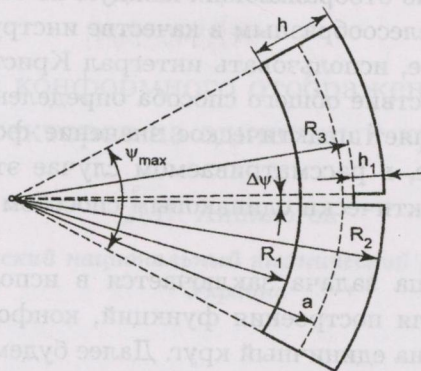


Рис. 2: Кольцевой сектор с вырезом

радиусами $R_3 = R_2 - h_1$ и R_2 и центральным углом $\Delta\psi$.

3. Случай сектора без выреза. Сначала отобразим прямоугольник в плоскости некоторого промежуточного комплексного переменного χ на единичный круг в плоскости ζ , а затем – кольцевой сектор без выреза на этот прямоугольник.

Построим композицию дробно-линейного преобразования, отображающего верхнюю полуплоскость на единичный круг, и интеграла Кристофеля-Шварца, отображающего прямоугольник на верхнюю полуплоскость:

$$\chi(\zeta) = \int_0^{\zeta} \prod_{j=1}^4 \left(1 - \frac{\zeta'}{\zeta_j}\right)^{-\frac{1}{2}} d\zeta'. \quad (1)$$

Здесь ζ' – текущая переменная интегрирования, причём путь интегрирования не должен выводиться за пределы единичного круга $|\zeta| \leq 1$. Значение показателя степени обеспечивает равенство всех внутренних углов величине $\pi/2$. Точки $\zeta_j = \exp(i\theta_j)$ – прообразы будущих вершин прямоугольника. С точностью до линейного преобразования этот прямоугольник обладает одной геометрической степенью свободы – отношением ϵ длин сторон. С другой стороны, как известно из теории интеграла Кристофеля-Шварца [6], прообразы трёх любых вершин (фактически – три любых угла θ_j из четырёх) могут быть выбраны до известной степени произвольно (лишь бы среди них не было одинаковых) и зафиксированы, а требуемого отношения длин всех сторон можно добиться, варьируя остальные углы (в нашем случае – один из углов θ_j). Неудобство такого подхода состоит в том, что при изменении этого угла, наряду с отношением ϵ , изменяется также ориентация прямоугольника на плоскости χ . Более удобным представляется изменять все углы θ_j , положив $\theta_j = \theta_j^{(0)} + (-1)^{j+1} \cdot \Delta\theta$ (рис. 3). Углы $\theta_j^{(0)} = -\pi/4 + j \cdot \pi/2$, $j = 1, 2, 3, 4$, при-

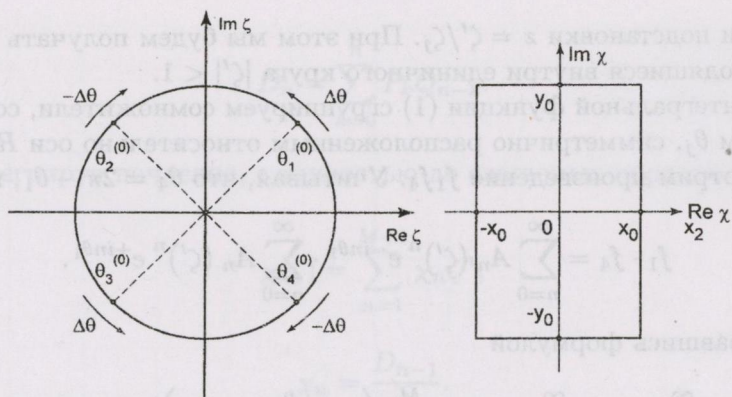


Рис. 3: К отображению прямоугольника на единичный круг

нимаются в качестве начальных приближений. В этом случае независимым снова является единственный параметр $-\Delta\theta$. Будем называть его угловым приращением. На интервале $-\pi/4 < \Delta\theta < \pi/4$ отношение $\epsilon = y_0/x_0$ (величины x_0 и y_0 введены на рис. 3) сторон прямоугольника является, очевидно, монотонной и непрерывной функцией углового приращения, поэтому нахождение требуемого значения $\Delta\theta$ по известному отношению ϵ сторон является задачей, разрешимой однозначно. Её решение легко получить любой итеративной процедурой, например, дихотомией. После нахождения необходимой величины $\Delta\theta$ углового приращения оказываются определёнными также и все четыре угла θ_j , а вместе с ними – и преобразование (1).

Преимущество рассмотренного способа расположения преобразованных вершин состоит в том, что коэффициенты разложения подынтегральной функции в (1) в степенной ряд по степеням ζ оказываются действительными числами. В сказанном легко убедиться, рассматривая формулы для вычисления этих коэффициентов. Получим эти формулы в рамках более подробного описания вычисления интеграла (1).

Обозначим множители в подынтегральной функции интеграла (1) через $f_j(\zeta') = (1 - \zeta'/\zeta_j)^{-1/2}$. Разложение функции $f(z) = (1 - z)^{-1/2}$ в степенной ряд имеет вид

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n z^n, \quad A_0 = 1, \quad A_n = \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{1}{2k}\right), \quad n \in N.$$

Радиус сходимости этого ряда равен

$$\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A_{n+1}}{A_n}\right)^{-1} = 1.$$

Поскольку для точек ζ' единичного круга $|\zeta'/\zeta_j| = |\zeta' e^{-i\theta_j}| = 1$, то приведенное разложение может быть применено к каждому множителю f_j при

выполнении подстановки $z = \zeta'/\zeta_j$. При этом мы будем получать ряды, равномерно сходящиеся внутри единичного круга $|\zeta'| < 1$.

В подынтегральной функции (1) сгруппируем сомножители, соответствующие углам θ_j , симметрично расположенным относительно оси $Re\zeta$. Например, рассмотрим произведение $f_1 f_4$. Учитывая, что $\theta_4 = 2\pi - \theta_1$, имеем

$$f_1 \cdot f_4 = \sum_{n=0}^{\infty} A_n (\zeta')^n e^{-in\theta_1} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} A_n (\zeta')^n e^{+in\theta_1}.$$

Воспользовавшись формулой

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n = \sum_{n=0}^M \left(z^n \cdot \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \right) + o(z^M)$$

перемножения рядов, получим

$$f_1 \cdot f_4 = \sum_{n=0}^M P_n \cdot (\zeta')^n + o((\zeta')^M).$$

Здесь обозначено

$$P_n = \sum_{k=0}^n A_k A_{n-k} e^{i(n-2k)\theta_1}.$$

Несложные преобразования выражения для коэффициентов P_n приводят к следующим результатам. Если $n = 0$, то $P_n \equiv P_0 = A_0^2 = 1$. Если n — чётное положительное, то

$$P_n = 2 \sum_{k=0}^{\frac{n-2}{2}} A_k A_{n-k} \cos(n-2k)\theta_1 + A_{n/2}^2.$$

Если n нечётно, то

$$P_n = 2 \sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}} A_k A_{n-k} \cos(n-2k)\theta_1.$$

Аналогично

$$f_2 \cdot f_3 = \sum_{n=0}^M Q_n \cdot (\zeta')^n + o((\zeta')^M).$$

Коэффициенты Q_n могут быть вычислены по тем же формулам, что и коэффициенты P_n , только вместо угла θ_1 следует использовать угол θ_2 , $\theta_2 = \pi - \theta_1$. При перемножении произведений $f_1 f_4$ и $f_2 f_3$ получаем

$$\prod_{j=1}^4 f_j (\zeta') = \sum_{n=0}^M D_n (\zeta')^n + o((\zeta')^M).$$

Здесь

$$D_n = \sum_{k=0}^n P_k Q_{n-k}.$$

Тогда, интегрируя почленно, с точностью до слагаемых порядка $o((\zeta')^{M+1})$ получаем

$$\chi(\zeta) = \sum_{n=1}^{M+1} \chi_n \zeta^n,$$

где

$$\chi_n = \frac{D_{n-1}}{n}.$$

Смещение нумерации коэффициентов D_n на единицу происходит в процессе нахождения первообразной в интеграле (1). Учитывая пределы интегрирования в (1), в разложении $\chi(\zeta)$ мы положили $\chi_0 = 0$. Коэффициенты χ_n , как видим, оказались действительными числами. Из этого, в частности, следует, что стороны прямоугольника, полученного в плоскости χ , параллельны координатным осям в этой плоскости при любом значении $\Delta\theta$. Центр прямоугольника при этом совпадает с точкой $\chi = 0$. Следовательно, координаты характерных точек равны $x_0 = \operatorname{Re}\chi(\zeta_*)$, $y_0 = \operatorname{Im}\chi(\zeta_{**})$. Здесь $|\zeta_*| = |\zeta_{**}| = 1$, а $\arg \zeta_*$, $\arg \zeta_{**}$ – произвольные углы из интервалов $(-\theta_1; \theta_1)$, $(\theta_1; \theta_2)$ соответственно. Практически удобно взять эти углы равными 0 и $\pi/2$. Тогда отношение длин сторон прямоугольника

$$\varepsilon = \frac{\operatorname{Im} \chi(i)}{\operatorname{Re} \chi(1)}.$$

Это соотношение является конкретизацией функции

$$\varepsilon = \varepsilon(\Delta\theta). \quad (2)$$

Зависимость $\varepsilon(\Delta\theta)$ имеет место, поскольку коэффициенты P_n зависят от угла $\theta_1 = \pi/4 + \Delta\theta$, а коэффициенты Q_n зависят от угла $\theta_2 = 3\pi/4 - \Delta\theta$. График функции (2) представлен на рис. 4 (угловое приращение $\Delta\theta$ выражено в угловых градусах). При расчетах величины ε в разложении подынтегральной функции (1) в степенной ряд удержано 10 слагаемых (точки) и 200 слагаемых (сплошная линия). Дальнейшее увеличение количества удерживаемых слагаемых к визуальным отличиям графиков в интервале $0 < \Delta\theta < 42^\circ$ уже не приводит.

Для отображения кольцевого сектора без выреза на полученный прямоугольник осуществим окончательное преобразование вида

$$z = C e^{\beta\chi}. \quad (3)$$

Здесь C и β – некоторые действительные положительные константы. Преобразование (3) отображает точки $z = R_2$, $z = R_1$, $z = R_2 \cdot e^{i\psi_{max}/2}$ на точки

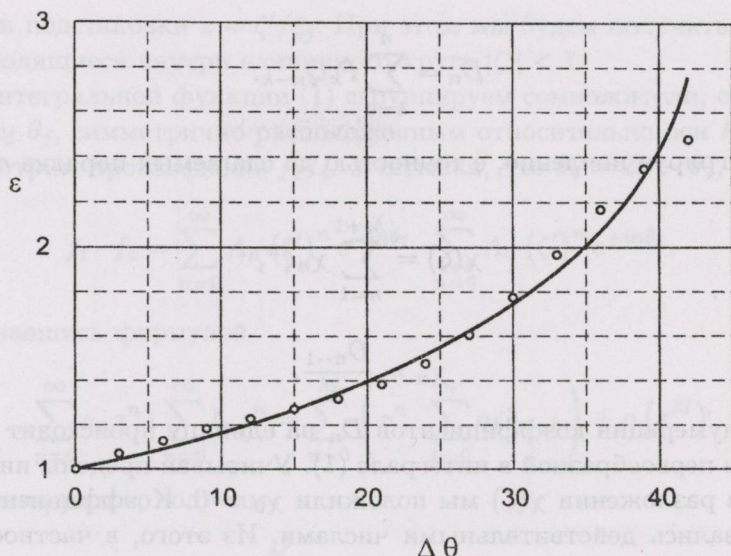


Рис. 4: Зависимость отношения сторон прямоугольника от углового приращения

$\chi = x_0$, $\chi = -x_0$, $\chi = x_0 + iy_0$ соответственно. Эти три условия доставляют нам систему уравнений

$$\begin{cases} Ce^{\beta x_0} = R_2; \\ Ce^{-\beta x_0} = R_1; \\ Ce^{\beta(x_0 + iy_0)} = R_2 e^{i\frac{\psi_{max}}{2}}. \end{cases}$$

Учитывая, что $R_2 - R_1 = h$ и $\frac{1}{2}(R_1 + R_2) = a$, и обозначая относительную толщину через $\alpha = h/a$, из этой системы находим

$$\varepsilon = \frac{\psi_{max}}{\ln\left(\frac{2+\alpha}{2-\alpha}\right)}, \quad (4)$$

а также

$$C = a\sqrt{1 - \alpha^2/4}, \quad \beta = \frac{\psi_{max}}{2y_0}. \quad (5)$$

Таким образом, функция $z = \omega(\zeta)$ для случая кольцевого сектора без выреза построена в виде композиции преобразований (1) и (3), причём выражения для параметров C , β преобразования (3) получены в явном виде (5), а параметр $\Delta\theta$ преобразования (1) может быть определён как решение уравнения (2). Решая это уравнение, в левой части следует использовать значение ε , доставляемое выражением (4). Это позволяет при осуществлении преобразования (1) получить прямоугольник именно с таким отношением сторон, которое гарантирует получение кольцевого сектора с наперёд заданными параметрами a , α , ψ_{max} при осуществлении последующего преобразования (3).

4. **Случай сектора с вырезом.** Сначала отобразим невыпуклый восьмиугольник в плоскости некоторого промежуточного комплексного переменного χ на единичный круг в плоскости ζ , а затем – кольцевой сектор с вырезом на этот восьмиугольник.

Примем теперь композицию дробно-линейного преобразования и интеграла Кристоффеля-Шварца в виде:

$$\chi(\zeta) = \int_0^\zeta \prod_{j=1}^6 \left(1 - \frac{\zeta'}{\zeta_j}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \prod_{j=7}^8 \left(1 - \frac{\zeta'}{\zeta_j}\right)^{+\frac{1}{2}} d\zeta'. \quad (6)$$

Точки $\zeta_j = \exp(i\theta_j)$, $j = 7, 8$ – прообразы вершин с внутренними углами $3\pi/2$, а внутренние углы при остальных шести вершинах, как и прежде, равны $\pi/2$. Первоначально положим

$$\theta_j^{(0)} = \pi/8 + j \cdot \pi/4, \quad j = 1, 2, \dots, 7, \quad \theta_8^{(0)} = \pi/8.$$

Геометрия возникающего при этом восьмиугольника $AB\dots H$ описывается следующими пятью характерными координатами: x_1, x_2, x_3, y_1, y_2 (рис. 5). Восьмиугольник $AB\dots H$ с точностью до линейного преобразования обла-

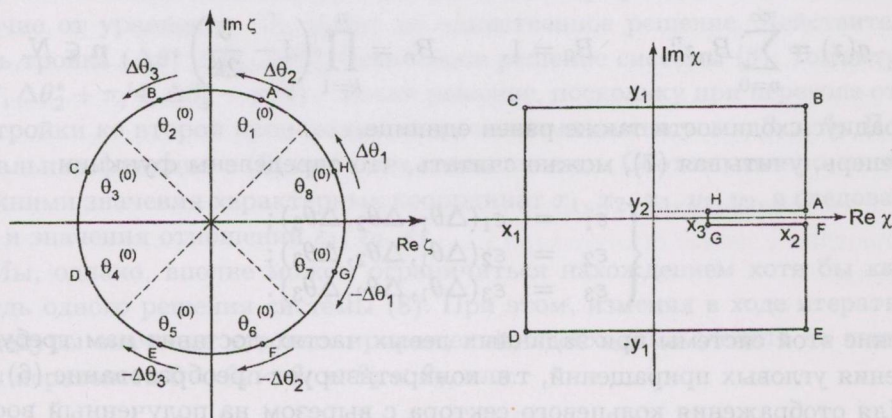


Рис. 5: К отображению восьмиугольника на единичный круг

дает тремя геометрическими степенями свободы. Действительно, отношения любых его линейных размеров полностью определяются тремя величинами

$$\varepsilon_1 = \frac{CD}{BC} = \frac{2y_1}{x_2 - x_1}, \quad \varepsilon_2 = \frac{AH}{BC} = \frac{x_2 - x_3}{x_2 - x_1}, \quad \varepsilon_3 = \frac{GH}{CD} = \frac{y_2}{y_1}. \quad (7)$$

Величина ε_1 аналогична величине ε предыдущего пункта, величина ε_2 описывает относительную глубину, а ε_3 – относительную ширину выреза. Поэтому для управления формой восьмиугольника следует организовать смещение точек θ_j с помощью трёх независимых угловых приращений $\Delta\theta_1, \Delta\theta_2, \Delta\theta_3$.

С целью сохранения вещественности коэффициентов разложения подынтегральной функции в (6) в степенной ряд снова разместим точки θ_j симметрично относительно оси $Re \zeta$ (рис. 5), положив

$$\begin{aligned} \theta_8 &= \theta_8^{(0)} + \Delta\theta_1, & \theta_1 &= \theta_1^{(0)} + \Delta\theta_2, & \theta_2 &= \theta_2^{(0)} + \Delta\theta_3, \\ \theta_7 &= \theta_7^{(0)} - \Delta\theta_1, & \theta_6 &= \theta_6^{(0)} - \Delta\theta_2, & \theta_5 &= \theta_5^{(0)} - \Delta\theta_3. \end{aligned}$$

Углы $\theta_3^{(0)}, \theta_4^{(0)}$ оставим несмещёнными и фиксируем. При таком образом определённых углах $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_8$ характерные координаты могут быть вычислены, например, следующим образом

$$\begin{aligned} x_1 &= Re \chi(-1), & x_2 &= Re \chi\left(e^{i\frac{\theta_1+\theta_2}{2}}\right), & x_3 &= Re \chi(1), \\ y_1 &= Im \chi\left(e^{i\frac{\theta_2+\theta_3}{2}}\right), & y_2 &= Im \chi\left(e^{i\frac{\theta_8+\theta_1}{2}}\right). \end{aligned}$$

Здесь $\chi(\zeta)$ – функция, значения которой можно вычислить, разлагая интеграл (6) в степенной ряд аналогично изложенному в предыдущем пункте. По причине появления прообразов $\exp(i\theta_7), \exp(i\theta_8)$ рассуждения следует дополнить анализом сомножителя $g(z) = (1-z)^{+1/2}$. Соответствующий степенной ряд имеет вид

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n z^n, \quad B_0 = 1, \quad B_n = \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{3}{2k}\right), \quad n \in N.$$

Его радиус сходимости также равен единице.

Теперь, учитывая (7), можно считать, что определены функции

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = \varepsilon_1(\Delta\theta_1, \Delta\theta_2, \Delta\theta_3); \\ \varepsilon_2 = \varepsilon_2(\Delta\theta_1, \Delta\theta_2, \Delta\theta_3); \\ \varepsilon_3 = \varepsilon_3(\Delta\theta_1, \Delta\theta_2, \Delta\theta_3). \end{cases} \quad (8)$$

Решение этой системы при заданных левых частях доставит нам требуемые значения угловых приращений, т.е. конкретизирует преобразование (6).

Для отображения кольцевого сектора с вырезом на полученный восьмиугольник осуществим окончательное преобразование вида

$$z = C' e^{\beta' \chi}. \quad (9)$$

Здесь C' и β' – некоторые действительные положительные константы. Преобразование (9) отображает точки $z = R_1, z = R_3, z = R_2 \cdot e^{i\Delta\psi/2}, z = R_2 \cdot e^{i\psi_{max}/2}$ на точки $\chi = x_1, \chi = x_3, \chi = x_2 + iy_2, \chi = x_2 + iy_1$ соответственно. Эти четыре условия доставляют нам систему уравнений

$$\begin{cases} C' e^{\beta' x_1} = R_1; \\ C' e^{\beta' x_3} = R_3; \\ C' e^{\beta'(x_2 + iy_2)} = R_2 e^{i\frac{\Delta\psi}{2}}; \\ C' e^{\beta'(x_2 + iy_1)} = R_2 e^{i\frac{\psi_{max}}{2}}. \end{cases}$$

Используя (7), и обозначая относительную глубину выреза через $\gamma = h_1/h$, из этой системы находим

$$\varepsilon_1 = \frac{\psi_{max}}{\ln\left(\frac{2+\alpha}{2-\alpha}\right)}, \quad \varepsilon_2 = \frac{\ln\frac{2+\alpha}{2+\alpha(1-2\gamma)}}{\ln\left(\frac{2+\alpha}{2-\alpha}\right)}, \quad \varepsilon_3 = \frac{\Delta\psi}{\psi_{max}}, \quad (10)$$

а также

$$\beta' = \frac{\psi_{max}}{2y_1}, \quad C' = \frac{2a}{e^{\beta'x_1} + e^{\beta'x_2}}. \quad (11)$$

Таким образом, функция $z = \omega(\zeta)$ для случая кольцевого сектора с вырезом построена в виде композиции преобразований (6) и (9), причем выражения для параметров C' , β' преобразования (9) получены в явном виде (11), а параметры $\Delta\theta_1$, $\Delta\theta_2$, $\Delta\theta_3$ преобразования (6) могут быть определены как решение системы (8). Решая эту систему, в левой части следует использовать значения ε_1 , ε_2 , ε_3 , доставляемые выражениями (10). Это позволяет при осуществлении преобразования (6) получить невыпуклый восьмиугольник именно с такими отношениями сторон, которые гарантируют получение кольцевого сектора с наперед заданными параметрами a , α , ψ_{max} , γ , $\Delta\psi$ при осуществлении последующего преобразования (9).

5. Замечание к нахождению угловых приращений. Система (8), в отличие от уравнения (2), имеет не единственное решение. Действительно, пусть тройка $(\Delta\theta_1^*, \Delta\theta_2^*, \Delta\theta_3^*)$ – некоторое решение системы (8). Тогда тройка $(\Delta\theta_1^*, \Delta\theta_2^* + \pi/4, \Delta\theta_3^* - \pi/4)$ – также решение, поскольку при переходе от первой тройки ко второй происходит только взаимозамена углов θ_1 и θ_2 . Подынтегральная функция в (6) при этом не изменяется. Соответственно, остаются прежними значения характерных координат x_1, x_2, x_3, y_1, y_2 , а следовательно – и значения отношений $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$.

Мы, однако, вполне можем ограничиться нахождением хотя бы какого-нибудь одного решения системы (8). При этом, изменяя в ходе итеративной процедуры значения угловых приращений, необходимо следить за выполнением неравенств $0 < \theta_8 < \theta_1 < \theta_2 < \theta_3$, или

$$0 < \theta_8^{(0)} + \Delta\theta_1 < \theta_1^{(0)} + \Delta\theta_2 < \theta_2^{(0)} + \Delta\theta_3 < \theta_3.$$

Выполнение этих неравенств обеспечивает сохранение порядка следования преобразов вершин при обходе контура $|\zeta| = 1$. Поэтому, изменяя угловые приращения с выполнением этих неравенств, мы можем оставаться на той же ветви решения системы (8). Кроме того, нарушение этих неравенств может привести к недопустимому искажению формы восьмиугольника. Пусть, например, оказалось, что при некоторых значениях угловых приращений выполнено неравенство $0 < \theta_1 < \theta_8 < \theta_2 < \theta_3$. Результат такого нарушения – образование невыпуклого восьмиугольника, но уже не с вырезом, а с "нарастом". Формально такая ситуация описывается отрицательным значением относительной глубины γ выреза.

6. Об обратном отображении. Конечной целью построения функций

$$z = \omega(\zeta) \quad (12)$$

является анализ напряжённно-деформированного состояния в произвольной наперёд заданной точке z_* кольцевого сектора. Поэтому необходимо решить уравнение (12) при $z = z_*$ на множестве $|\zeta| < 1$. Очевидно, это решение существует и единственно в силу конформности отображения. Построим итерационный шаг решения этого уравнения.

Пусть ζ_0 – предыдущее, а $\zeta_1 = \zeta_0 + p + iq$ – последующее приближение. Пусть $z_1 = \omega(\zeta_1)$. Рассмотрим функцию $L(p, q) = \frac{1}{2} |z_1 - z_*|^2$. Величины p, q определим из условия $L \rightarrow \min$, приводящего к системе

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial p} = 0; \\ \frac{\partial L}{\partial q} = 0. \end{cases} \quad (13)$$

Эта система оказывается слишком громоздкой, поэтому величину z_1 будем вычислять приближённо, используя только линейный член разложения функции $\omega(\zeta)$ в степенной ряд: $z_1 = \omega(\zeta_0) + \omega'(\zeta_0)(p + iq)$. При этом система (13) оказывается линейной относительно искомым поправок p, q . Поскольку отображения $z = \omega(\zeta)$ конформны, то $\omega'(\zeta) \neq 0$ всюду внутри единичного круга в плоскости ζ . Исходя из этого, легко показать, что система (13) является невырожденной, и поэтому её решение (p, q) существует и единственно.

7. Выводы. Таким образом, в настоящей работе построены функции, конформно отображающие сечение повреждённой и неповреждённой оболочек на единичный круг. Полученные результаты пригодны для построения решений соответствующих задач теории упругости и проведения анализа полей перемещений с целью определения влияния выреза на ослабление жёсткости оболочки.

ЛИТЕРАТУРА

1. Плахтиенко Н.П. К диагностике кусочно-постоянной жёсткости при нелинейных резонансах // Прикладная механика. – 1991. – Т. 27. – № 10. – С. 112 – 120.
2. Матвеев В.В., Бовсуновский А.П. К анализу эффективности метода спектральной вибродиагностики усталостного повреждения элементов конструкций. Сообщение 2. Изгибные колебания, аналитическое решение // Проблемы прочности. – 1998. – № 6. – С. 9 – 22.
3. Ройтман А.Б., Анпилогов Д.И. Вибрационная диагностика повреждённой пологой цилиндрической оболочки // Проблемы прочности. – 2001. – № 6. – С. 116 – 128.

4. Бовсуновский А.П. К вопросу об определении собственной частоты поперечных и продольных колебаний стержня с трещиной. Сообщение 2. Результаты эксперимента и расчёта // Проблемы прочности. – 1999. – № 3. – С. 45 – 53.
5. Мухелишвили Н.И. Некоторые основные граничные задачи математической теории упругости. – М.: Наука, 1966.
6. Голузин Г.М. Геометрическая теория функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1966. – 628 с.

When $\text{Lip}(K)$ on a finite metric space K
satisfies the alternative Daugavet property
or is isometric to l_∞^n

Konstantin Boyko and Yevgen Ivakhno
Kharkiv National University, Ukraine

In this paper we classify those finite metric spaces K which provide the Banach space $\text{Lip}(K)$ of all real functions on K with the alternative Daugavet property or, equivalently, with the property that the numerical index $n(\text{Lip}(K))$ equals 1. Also, we characterize those metric spaces K for which $\text{Lip}(K)$ is isometric to l_∞^n .

2000 Mathematics Subject Classification 46B20.

1. Introduction

It was shown by I.K. Daugavet in 1963 [1] that every compact operator T on $C[0, 1]$ satisfies the equation

$$\|Id + T\| = 1 + \|T\| \quad (1)$$

which has become known as the Daugavet equation. Over the years, (1) has been extended to larger classes of operators on various spaces. Following [6] we say that

Definition 1 *A Banach space X satisfies the Daugavet property ($X \in \text{DP}$) if every 1-dimensional operator $T: X \rightarrow X$ satisfies the Daugavet equation.*

Then all weakly compact operators also satisfy the Daugavet equation. The Daugavet property is present in such spaces as $C(K)$, $L_1(\mu)$, and $L_\infty(\mu)$ for any compact Hausdorff space K without isolated points and for any atomless positive measure μ .

A weaker property was introduced in [7]:

Definition 2 *X satisfies the alternative Daugavet property ($X \in \text{ADP}$) if every 1-dimensional operator $T: X \rightarrow X$ satisfies the alternative Daugavet equation*

$$\max_{\omega \in \mathbb{T}} \|Id + \omega T\| = 1 + \|T\|,$$

where \mathbb{T} stands for the unit sphere of the base field \mathbb{K} (\mathbb{R} or \mathbb{C}).

In this case actually all weakly compact operators on X satisfy the alternative Daugavet equation [7].

While the definitions of these two properties look very similar, the alternative Daugavet property is essentially weaker than the Daugavet property. For example, if X has the Radon-Nikodym property, then it fails to have the Daugavet property [6]; in particular, finite dimensional spaces never enjoy the Daugavet property. On the other hand, the alternative Daugavet property takes place even for the 1-dimensional space \mathbb{R} .

Let us introduce the definition of the Banach space $\text{Lip}(K)$. Throughout, (K, ρ) stands for a metric space. For every pair of distinct points $t_1, t_2 \in K$, the slope of a function $f: K \rightarrow \mathbb{R}$ between t_1 and t_2 is defined as

$$f(t_1; t_2) = \frac{f(t_2) - f(t_1)}{\rho(t_1, t_2)}.$$

The linear space of all real-valued Lipschitz functions on K will be equipped with the seminorm

$$\|f\| = \sup\{|f(t_1; t_2)| : t_1 \neq t_2 \in K\}.$$

If one quotients out the kernel of this seminorm, i.e., the constant functions, one obtains the Banach space $\text{Lip}(K)$, whose norm will also be denoted by $\|\cdot\|$.

The recent result [5] shows that in the case of a compact space K the Daugavet property for $\text{Lip}(K)$ is equivalent to the so-called locality condition on K . In this paper, respectively, we study the question about the form of those metric spaces K for which $\text{Lip}(K)$ satisfies the alternative Daugavet property. The result is obtained for the finite-dimensional case, which is especially interesting because of the principal difference between the Daugavet and the alternative Daugavet properties in this case.

In the finite-dimensional case the alternative Daugavet property is closely related to another widely known concept.

In 1968 G. Lumer introduced the concept of numerical index of a Banach space. It is a parameter relating the norm and the numerical range of operators on the space.

Definition 3 *The numerical range of an operator $T \in L(X)$ is the subset $V(T)$ of the scalar field defined by*

$$V(T) := \{x^*(Tx) : x \in S(X), x^* \in S(X^*), x^*(x) = 1\}.$$

Definition 4 *The numerical radius of T is the seminorm defined on $L(X)$ by*

$$v(T) := \sup\{|\lambda| : \lambda \in V(T)\}$$

for each $T \in L(X)$.

Definition 5 The numerical index of the space X is the constant $n(X)$ defined by

$$n(X) := \inf\{v(T) : T \in L(X), \|T\| = 1\}$$

or, equivalently, the greatest constant $k \geq 0$ such that $k\|T\| \leq v(T)$ for every $T \in L(X)$.

Note that $0 \leq n(X) \leq 1$, and $n(X) > 0$ if and only if v and $\|\cdot\|$ are equivalent norms on $L(X)$ (the numerical radius can be a non-equivalent norm on $L(X)$; see [8, Example 3.b]).

A number of recent papers are dedicated to studying Banach spaces with numerical index 1.

It is a well-known result (see [2, §9]) that

$$v(T) = \max_{\omega \in \mathbb{T}} \lim_{\alpha \downarrow 0} \frac{\|Id + \alpha \omega T\| - 1}{\alpha}.$$

This implies that

$$v(T) = \|T\| \iff \max_{\omega \in \mathbb{T}} \|Id + \omega T\| = 1 + \|T\|$$

(see [7, Lemma 2.3]). Hence we see that $n(X) = 1$ if and only if for every operator $T \in L(X)$ holds

$$\max_{\omega \in \mathbb{T}} \|Id + \omega T\| = 1 + \|T\|.$$

As we can see this property is very similar to ADP and in case of $\dim(X) < \infty$ the property of having numerical index 1 and ADP coincide. Consequently, the results of this paper relating to the ADP also hold for the property of having numerical index 1.

One of the most natural examples of a space with numerical index 1 is the space l_∞^n . In this paper we also give an interesting and simple characterization of all metric spaces K for which $\text{Lip}(K) \cong l_\infty^n$.

This paper consists of 6 sections. The first one is this introduction. In the second section, "ADP in terms of extreme points", we establish a characterization of the alternative Daugavet property which will be used in further considerations. In section 4, "Criteria of the ADP in $\text{Lip}(K)$ ", the main theorem is formulated and proved on the base of necessary notions and their simple properties which are introduced in section 3, "Dividing property and polygons". In section 5, "Constructing finite spaces K with $\text{Lip}(K) \in \text{ADP}$ ", we find a simple algorithm which allows to construct any finite metric space K providing $\text{Lip}(K)$ with the alternative Daugavet property. In the last section, "When $\text{Lip}(K)$ equals l_∞^n ", we characterize those metric spaces K for which $\text{Lip}(K)$ is isometric to l_∞^n .

2. ADP in terms of extreme points

In this section we establish theorem 1 which is a characterization of the ADP in terms of extreme points of the unit ball $B(\text{Lip}(K))$. This theorem will come in useful in further results.

Recall the following characterization of extreme points of $B(\text{Lip}(K))$ [4].

Lemma 1 *Let K be a finite metric space, $f \in B(\text{Lip}(K))$. f is an extreme point of $B(\text{Lip}(K))$ if and only if for every pair of distinct points $t, \tau \in K$, there is a sequence $s_0, \dots, s_n \in K$ with $s_0 = t$, $s_n = \tau$ such that $|f(s_{i-1}; s_i)| = 1$ for all $i = 1, \dots, n$.*

Besides, recall the following geometrical characterization of the alternative Daugavet property [7]:

Proposition 1 *A real Banach space X has the alternative Daugavet property if and only if for every $\varepsilon > 0$ and every $x \in S(X)$*

$$B(X) = \overline{\text{co}}\{y \in B(X) : \|x + y\| > 2 - \varepsilon \vee \|x - y\| > 2 - \varepsilon\}.$$

Let x and y be Lipschitz functions lying in $B(\text{Lip}(K))$. Then the condition

$$\|x + y\| > 2 - \varepsilon \vee \|x - y\| > 2 - \varepsilon \quad (2)$$

obviously implies that K contains a pair of distinct points t_1 and t_2 such that

$$|x(t_1; t_2)| > 1 - \varepsilon \quad \text{and} \quad |y(t_1; t_2)| > 1 - \varepsilon. \quad (3)$$

On the other hand, if (3) holds, then (2) is also true with 2ε instead of ε . Taking this together with proposition 1, we obtain the following lemma to deal with the alternative Daugavet property in spaces $\text{Lip}(K)$.

Lemma 2 *$\text{Lip}(K)$ satisfies the alternative Daugavet property if and only if for every $\varepsilon > 0$, $f \in S(\text{Lip}(K))$, and $g \in B(\text{Lip}(K))$ there is a finite set of elements $x_k \in B(\text{Lip}(K))$ with $\min\{|x_k(t_k; \tau_k)|, |f(t_k; \tau_k)|\} > 1 - \varepsilon$ for some $t_k, \tau_k \in K$, such that their convex combination $\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k$ approximates g :*

$$\left\| g - \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k \right\| < \varepsilon.$$

Theorem 1, as well as the main result of this paper, is formulated also on the base of the following two simple notions:

Definition 6 *We say that a point $s \in K$ lies between two distinct points t and τ in K if*

$$\rho(t, s) + \rho(s, \tau) = \rho(t, \tau).$$

Definition 7 A (not ordered) pair (t, τ) of distinct points in K is said to be a gap in K if K does not contain any other points between t and τ .

Theorem 1 For a finite metric space K , $\text{Lip}(K)$ satisfies the alternative Daugavet property if and only if for every gap (t, τ) in K and for every extreme point h of $B(\text{Lip}(K))$, the slope $|h(t; \tau)| = 1$.

Proof. Define $R = \max_{s_1 \neq s_2} \rho(s_1, s_2)$ and $r = \min_{s_1 \neq s_2} \rho(s_1, s_2)$. Let $\text{Lip}(K)$ be a space with the alternative Daugavet property. Assume that the condition is not satisfied, i.e. there is an extreme point h of $B(\text{Lip}(K))$ with a slope $|h(t; \tau)| < 1$ for some gap (t, τ) in K . Let us show that for a gap (t, τ) in a finite space K , a Lipschitz function f can be defined such that $|f(t; \tau)| = 1$, but $|f(t'; \tau')| < 1$ for any other pair $t' \neq \tau' \in K$. Denote $r(z) = \rho(t, z)$, $s(z) = \rho(z, \tau)$, and $d = \rho(t, \tau)$. Since (t, τ) is a gap, $r(z) + s(z) > d$ for every $z \in K \setminus \{t, \tau\}$. But K is finite, so, the value

$$\varepsilon_0 = \min_{z \notin \{t, \tau\}} \frac{r(z) + s(z) - d}{r(z) + s(z)}$$

is positive. This implies for every $z \notin \{t, \tau\}$, that

$$d \leq (1 - \varepsilon_0)(r(z) + s(z)). \quad (4)$$

Take $\varepsilon > 0$ such that

$$\frac{d}{\varepsilon_0} \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon} < r \quad \text{and} \quad 2\varepsilon < \varepsilon_0.$$

Now, define

$$f(z) = \begin{cases} \max\{d/2 - (1 - \varepsilon)s(z), 0\} & \text{if } r(z) \geq s(z), \\ -\max\{d/2 - (1 - \varepsilon)r(z), 0\} & \text{if } s(z) \geq r(z). \end{cases} \quad (5)$$

For $z \in K$ with $r(z) = s(z)$, z does not lie in $\{t, \tau\}$, so, (4) implies that

$$d/2 - (1 - \varepsilon)s(z) \leq (1 - \varepsilon_0)s(z) - (1 - \varepsilon)s(z) < 0,$$

$$d/2 - (1 - \varepsilon)r(z) \leq (1 - \varepsilon_0)r(z) - (1 - \varepsilon)r(z) < 0.$$

So, both parts of the definition (5) yield 0; f is defined correctly. Let us show that f is a Lipschitz function with $\|f\| = 1$. The only critical case is to estimate $f(z_2) - f(z_1)$ when $f(z_2) > 0$ and $f(z_1) < 0$. In this case $r(z_1) \leq s(z_1)$ and $r(z_2) \geq s(z_2)$. Then for all such elements including t or τ ,

$$d \leq (1 - \varepsilon_0)r(z_1) + s(z_1) \quad \text{and} \quad d \leq r(z_2) + (1 - \varepsilon_0)s(z_2) \quad (6)$$

(for $z \notin \{t, \tau\}$ apply (4); for $z_1 = t$ and $z_2 = \tau$, the inequalities hold directly). Now we can estimate

$$\begin{aligned} f(z_2) - f(z_1) &= (d/2 - (1 - \varepsilon)s(z_2)) + (d/2 - (1 - \varepsilon)r(z_1)) \\ &\leq \frac{r(z_2) + (1 - 2\varepsilon)s(z_2)}{2} - (1 - \varepsilon)s(z_2) \\ &\quad + \frac{(1 - 2\varepsilon)r(z_1) + s(z_1)}{2} - (1 - \varepsilon)r(z_1) \\ &= \frac{r(z_2) - s(z_2)}{2} + \frac{s(z_1) - r(z_1)}{2} \\ &= \frac{r(z_2) - r(z_1)}{2} + \frac{s(z_1) - s(z_2)}{2} \\ &\leq \rho(z_1, z_2). \end{aligned}$$

Also, the norm is attained at t, τ , since $f(\tau) - f(t) = d$.

Let us show that $|f(z_1; z_2)| < 1$ for any $\{z_1, z_2\} \neq \{t, \tau\}$. Assume $f(z_2) - f(z_1) = \rho(z_1, z_2)$. Obviously, it implies that $f(z_1) < 0$ and $f(z_2) > 0$. Then

$$(1 - \varepsilon)\rho(z_1, z_2) < \rho(z_1, z_2) = f(z_2) - f(z_1) = d/2 - (1 - \varepsilon)s(z_2) + d/2 - (1 - \varepsilon)r(z_1),$$

therefore,

$$r(z_1) + \rho(z_1, z_2) + s(z_2) < \frac{d}{1 - \varepsilon}. \quad (7)$$

Let us estimate the value of $r(z_1)$. The inequality (7) implies that

$$r(z_1) + s(z_1) < \frac{d}{1 - \varepsilon}. \quad (8)$$

On the other hand; $r(z_1) \leq s(z_1)$, so, the first inequality (6) hold, which implies that

$$r(z_1) + s(z_1) \geq d + \varepsilon_0 r(z_1).$$

Combining this with (8), we obtain

$$r(z_1) < \frac{d}{\varepsilon_0} \left(\frac{1}{1 - \varepsilon} - 1 \right) = \frac{d}{\varepsilon_0} \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon} < r,$$

which immediately implies that $z_1 = t$. It follows from (7) by the same argument that $z_2 = \tau$.

Return to the extreme point h . Take a $\delta > 0$ small enough to satisfy $|h(t; \tau)| < 1 - \delta$. Besides, by the result on f above, we may also assume that $|f(z_1; z_2)| < 1 - \delta$ for any pair $z_1 \neq z_2$ different from the pair t, τ . By the alternative Daugavet property of $\text{Lip}(K)$, h can be approximated by a convex combination of functions x_k :

$$\left\| h - \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k \right\| < \beta, \quad \text{where } \beta < \frac{\delta \cdot r}{4 \cdot |K| \cdot R},$$

and $\min\{|x_k(t_k; \tau_k)|, |f(t_k; \tau_k)|\} > 1 - \beta > 1 - \delta$. The last condition is possible only when $\{t_k, \tau_k\} = \{t, \tau\}$. So, $|x_k(t; \tau)| > 1 - \beta$.

Let us pass from the set $\{x_1, \dots, x_n\}$ to a pair of functions $\{y_1, y_2\}$ with the same properties. Define for that

$$A_+ = \{k: x_k(t; \tau) > 1 - \beta\}, \quad A_- = \{k: x_k(t; \tau) < -1 + \beta\} = \{1, \dots, n\} \setminus A_+,$$

$$\mu_1 = \sum_{k \in A_+} \lambda_k, \quad \mu_2 = \sum_{k \in A_-} \lambda_k.$$

Take

$$y_1 = \sum_{k \in A_+} \frac{\lambda_k}{\mu_1} x_k, \quad y_2 = \sum_{k \in A_-} \frac{\lambda_k}{\mu_2} x_k.$$

Obviously, $\mu_1 y_1 + \mu_2 y_2$ is a convex combination equal to $\sum_k \lambda_k x_k$, consequently, $\|h - (\mu_1 y_1 + \mu_2 y_2)\| < \beta$. Moreover, each function y_i is a convex combination of the corresponding functions x_k , therefore, it lies in the unit ball $B(\text{Lip}(K))$ and satisfies

$$y_1(t; \tau) > 1 - \beta \quad \text{and} \quad y_2(t; \tau) < -1 + \beta, \quad (9)$$

respectively. By lemma 1, a finite sequence $s_0 = t, s_1, \dots, s_m = \tau$ can be found for h such that $|h(s_{i-1}; s_i)| = 1$ for all $i = 1, \dots, m$. Obviously, we may also assume that $m < |K|$. For all i we have

$$|(h - (\mu_1 y_1 + \mu_2 y_2))(s_{i-1}; s_i)| < \beta. \quad (10)$$

We are going to show that for at least one number $k \in \{1, 2\}$, $|(h - y_k)(s_{i-1}; s_i)|$ is small for all i . Observe that $\mu_k \geq 1/2$ for at least one value $k \in \{1, 2\}$ and denote another one by j . For a fixed value of i , denote s_{i-1} and s_i by s' and s'' in such order that $h(s'; s'') = +1$. Finally, denote $y_1 = y_1(s'; s'')$ and $y_2 = y_2(s'; s'')$. Then by (10), $\mu_1 y_1 + \mu_2 y_2 > 1 - \beta$. Now, two different cases are possible. In the first case, let $y_k \geq y_j$. Then $y_k \geq \mu_1 y_1 + \mu_2 y_2 > 1 - \beta = h(s'; s'') - \beta$. In the second case, $y_k < y_j$. Then $y_k < \mu_1 y_1 + \mu_2 y_2 < y_j$. Since $\mu_k \geq \mu_j$, we have

$$\begin{aligned} \mu_1 y_1 + \mu_2 y_2 - y_k &= (\mu_k - 1)y_k + \mu_j y_j = \mu_j (y_j - y_k) \leq \mu_k (y_j - y_k) \\ &= (1 - \mu_j)y_j - \mu_k y_k = y_j - (\mu_1 y_1 + \mu_2 y_2) < 1 - (1 - \beta) = \beta. \end{aligned}$$

Therefore,

$$y_k = \mu_1 y_1 + \mu_2 y_2 - (\mu_1 y_1 + \mu_2 y_2 - y_k) > 1 - \beta - \beta = h(s'; s'') - 2\beta.$$

So, $|(h - y_k)(s_{i-1}; s_i)| < 2\beta$ for all $i = 1, \dots, m$. But then

$$\begin{aligned} |(h - y_k)(\tau) - (h - y_k)(t)| &\leq \sum_{i=1}^m |(h - y_k)(s_i) - (h - y_k)(s_{i-1})| \\ &= \sum_{i=1}^m |(h - y_k)(s_{i-1}; s_i)| \cdot \rho(s_{i-1}, s_i) \\ &< \sum_{i=1}^m 2\beta R < |K|2\beta R < |K|2 \frac{\delta \cdot r}{4 \cdot |K| \cdot R} R = \frac{\delta}{2} r \\ &\leq \frac{\delta}{2} \rho(t, \tau). \end{aligned}$$

So, $|y_k(t; \tau)| \leq |(h - y_k)(t; \tau)| + |h(t; \tau)| < \delta/2 + 1 - \delta < 1 - \beta$, which contradicts (9).

Let us prove the theorem to the other direction. Consider $f \in S(\text{Lip}(K))$, $g \in B(\text{Lip}(K))$, and $\varepsilon > 0$. Since K is finite, f attains its norm at a gap (t, τ) . The space $\text{Lip}(K)$ is finite dimensional, so, its unit ball is compact and then $B(\text{Lip}(K))$ is the closed convex hull of its extreme points by the Krein-Milman theorem. Applying this to function g , we approximate it by a convex combination $\sum_k \lambda_k h_k$ of extreme points h_k of $B(\text{Lip}(K))$:

$$\left\| g - \sum_{k=1}^n \lambda_k h_k \right\| < \varepsilon.$$

By the condition of the theorem, $|h_k(t; \tau)| = 1 > 1 - \varepsilon$, so, the condition of lemma 2 is satisfied and $\text{Lip}(K)$ has the alternative Daugavet property. \square

For example, consider the space $\{t_1, t_2, t_3\}$ with $\rho(t_i, t_j) = \delta_{ij}$. It does not satisfy the condition of theorem 1 (take $h(s) = \rho(s, t_1)$, $(t, \tau) = (t_2, t_3)$).

Another example is the space $K = \{t_1, t_2, t_3, t_4\}$ with

$$\rho(t_1, t_2) = \rho(t_2, t_3) = \rho(t_3, t_4) = \rho(t_4, t_1) = 1, \quad \rho(t_1, t_3) = \rho(t_2, t_4) = 2.$$

Then $\text{Lip}(K)$ satisfies the alternative Daugavet property. Indeed, let h be an extreme point of $B(\text{Lip}(K))$ and (t, τ) be a gap of K . We may assume that (t, τ) is (t_1, t_4) without loss of generality. Take a sequence $s_0 = t_1, \dots, s_n = t_4$ as in lemma 1. We may assume that the points s_i never repeat, so, $n \leq 3$. Consider the case of $n = 2$. Then s_1 is either t_2 or t_3 . Let $s_1 = t_2$ (the second case is similar). Then t_1 lies between the points s_1 and s_2 . The modulus of the slope of h between them is 1; in particular, the modulus of the slope of h between t_1 and t_4 is also 1. Now, assume that $n = 3$. If $s_2 = t_2$, then the previous argument can be applied. Let $s_2 = t_3$, $s_1 = t_2$. Then

$$h(t_1; t_4) = h(t_1; t_2) + h(t_2; t_3) + h(t_3; t_4) \in \mathbb{Z}. \quad (11)$$

Since $\|h\| \leq 1$, $h(t_1; t_4) \in \{-1, 0, +1\}$. But the number of summands in the sum (11) is odd and each of them equals ± 1 , therefore, $h(t_1; t_4) \neq 0$. So, $h(t_1; t_4) = \pm 1$.

Finally, we remark that this proof just repeats the proof of theorem 3 in the special case of K . Application of the theorem proves the statement immediately.

3. Dividing property and polygons

In this section we establish some notions and their basic properties which are used in the latter theorems to characterize the alternative Daugavet property.

Definition 8 Consider a gap (t, τ) . A point $s \in K$ lies on the side of point t with respect to the gap (t, τ) (s lies on the t -side of (t, τ)) if t lies between s and τ .

Definition 9 We say that K satisfies the dividing property ($K \in DP$) if for any gap (t, τ) in K , every point $s \in K$ lies either on the side of t or on the side of τ .

In the other words, $K \in DP$ if for every gap (t, τ) in K and every point $s \in K$, $|\rho(s, t) - \rho(s, \tau)| = \rho(t, \tau)$.

For example, if K can be isometrically imbedded into \mathbb{R} , then $K \in DP$.

Definition 10 For a pair of gaps (t, τ) and (t', τ') , we say that (t', τ') fronts (t, τ) if the points t' and τ' lie on the different sides of (t, τ) .

More concretely, if t' lies on the t -side of (t, τ) and τ' on the τ -side, respectively, we write $(t', \tau') \rightarrow (t, \tau)$.

Proposition 2 If $(t', \tau') \rightarrow (t, \tau)$, then t does not lie on the τ' -side of (t', τ') and τ does not lie on the t' -side of (t', τ') .

Proof. Assume to the contrary that t lies on the τ' -side of (t', τ') . Then $\rho(t', t) = \rho(t', \tau') + \rho(\tau', t) = \rho(t', \tau') + \rho(\tau', \tau) + \rho(\tau, t) \geq \rho(t', \tau) + \rho(\tau, t)$. On the other hand, $\rho(t', t) \leq \rho(t', \tau) + \rho(\tau, t)$. So, $\rho(t', t) = \rho(t', \tau) + \rho(\tau, t)$. It means that t' lies on the τ -side of (t, τ) , which is a contradiction with the condition $(t', \tau') \rightarrow (t, \tau)$. The τ -part of the statement is proved analogously. \square

Assume that (t', τ') fronts (t, τ) , say, $(t', \tau') \rightarrow (t, \tau)$, and (t, τ) fronts (t', τ') . Then proposition 2 implies that $(t, \tau) \rightarrow (t', \tau')$. In this case write

$$(t, \tau) \leftrightarrow (t', \tau').$$

Proposition 3 The following properties hold:

1. If $(t', \tau') \rightarrow (t, \tau)$, then $\rho(t', \tau') \geq \rho(t, \tau)$.
2. If $K \in DP$, then $(t', \tau') \rightarrow (t, \tau)$ implies that also $(t, \tau) \rightarrow (t', \tau')$, so, $(t, \tau) \leftrightarrow (t', \tau')$.
3. If $(t, \tau) \leftrightarrow (t', \tau')$, then $\rho(t, \tau) = \rho(t', \tau)$ and $\rho(t, t') = \rho(\tau, \tau')$.

Proof. Let us prove statement 1. By the triangle inequality and the condition of the statement,

$$\begin{cases} \rho(t', \tau') + \rho(\tau', \tau) \geq \rho(t', \tau) = \rho(t', t) + \rho(t, \tau), \\ \rho(t, t') + \rho(t', \tau') \geq \rho(t, \tau') = \rho(t, \tau) + \rho(\tau, \tau'). \end{cases} \quad (12)$$

Summing these inequalities, we get $2\rho(t', \tau') \geq 2\rho(t, \tau)$, as needed.

Statement 2. Let us prove that t lies on the t' -side of (t', τ') . By the dividing property of K , t lies on one of the sides of (t', τ') . But it can not lie on the τ' -side because proposition 2 holds. τ lies on the τ' -side of (t', τ') by the same argument.

Statement 3. In this case we can write a system of equations instead of inequalities (12). Summing and subtracting these two equations, we get the announced result. \square

Definition 11 A finite cyclic sequence $T = \{t_1, t_2, \dots, t_n, t_{n+1}=t_1\} \subset K$ is called a polygon if the following conditions hold:

1. all of the n elements of T are different from each other;
2. $n \geq 3$;
3. the successive pairs $(t_1, t_2), (t_2, t_3), \dots, (t_{n-1}, t_n)$, and (t_n, t_1) are gaps in K .

Two polygons are said to be equal if they are equal as sequences under a proper choice of starting elements and directions of movement.

The elements of polygons will be called *vertices* and the gaps formed by successive vertices will be called *edges*. All other pairs of vertices are *diagonals*. $p(T)$ stands for the perimeter of polygon T :

$$p(T) = \sum_{k=1}^n \rho(t_k, t_{k+1}).$$

For a vertex t_{k+1} we will say that it *comes after* the vertex t_k (as well as t_1 comes after t_n). In the other words, t_k *comes before* t_{k+1} (t_1 comes before t_n , respectively).

Fix a pair of distinct points t and τ in a finite space K . Then, obviously,

$$\rho(t, \tau) = \min \left\{ \sum_{i=1}^n \rho(s_{i-1}, s_i) : \right. \\ \left. n \in \mathbb{N}, s_0 = t, s_n = \tau, \text{ and } (s_{i-1}, s_i) \text{ are gaps } \forall i \right\}. \quad (13)$$

Definition 12 If $n \in \mathbb{N}$, $s_0=t$, $s_n=\tau$, and (s_{i-1}, s_i) are gaps for all i , then the sequence $\{s_0, \dots, s_n\}$ (or the sequence of gaps $\{(s_0, s_1), \dots, (s_{n-1}, s_n)\}$) will be called a path connecting t and τ . The length of the pass $\{s_0, \dots, s_n\}$ is $\sum_{i=1}^n \rho(s_{i-1}, s_i)$. Every path connecting t and τ on which the minimum (13) is attained is called a shortest path between t and τ .

Proposition 4 *For a polygon T in a finite space K , the following conditions are equivalent:*

1. *The ends of every diagonal of T can be connected by a shortest path which consists of edges of T .*
2. *The ends of every diagonal of T can be connected by a shortest path which contains a vertex of T .*
3. *Between the ends of every diagonal of T there is a vertex of T .*

Proof. The implications $1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3$ are obvious. Let us prove that 3 implies 1. Consider a diagonal $\{t, \tau\}$. We have to find a shortest path between t and τ which is made of edges of T . Define a sequence $P = \{t, \tau\}$ and apply the following inductive procedure. Assume that P contains a pair of neighboring elements s' and s'' which form a diagonal of T . Then by condition 3, T contains a point s between s' and s'' . Add this point to the sequence P between s' and s'' . Since $\rho(s', s) + \rho(s, s'') = \rho(s', s'')$, the total "length" of P does not change and equals $\rho(t, \tau)$.

This procedure finishes when all pairs of neighboring elements of P are not diagonals of T , i.e. they are gaps. It means that P is a path connecting its ends t and τ ; since the length of P equals $\rho(t, \tau)$, it is a shortest path. \square

Consider the negation of property 3. It means that T receives a diagonal $\{t, \tau\}$ without any other vertices of T between t and τ . Consider paths $P_{t,\tau} = \{t, \dots, \tau\}$, $P_{\tau,t} = \{\tau, \dots, t\}$ (with a fixed direction of movement along T), and a shortest path D between t and τ . By the negation of 3, $D \cap T = \{t, \tau\}$, so, $D \cap P_{t,\tau} = D \cap P_{\tau,t} = \{t, \tau\}$. Consequently, $D \cup P_{t,\tau}$ and $D \cup P_{\tau,t}$ are polygons. Since $P_{t,\tau}$ and $P_{\tau,t}$ contain a number of vertices beside t and τ which do not lie between t and τ , the lengths of $P_{t,\tau}$ and $P_{\tau,t}$ are greater than $\rho(t, \tau)$. Consequently, the perimeters $p(D \cup P_{t,\tau})$ and $p(D \cup P_{\tau,t})$ are less than $p(T)$. In a figurative sense we can say that a polygon T which does not satisfy the conditions of proposition 4 can be divided by a diagonal into two polygons with smaller perimeters.

Definition 13 *A polygon T which satisfies the equivalent conditions of proposition 4 will be called undividable or minimal.*

Now consider the case of spaces with the dividing property. In this case Theorem 2 below gives another criterion of minimality.

Firstly, consider an edge (t, s) of a polygon T . Fix a direction of movement by T such that s comes after t and let $s' \in T$ be a vertex which comes after s . We mark that in this case s' does not lie on the t -side of (t, s) . Indeed, if s' lied on the t -side, then t would lie between s' and s , but (s, s') is a gap. In the case of K satisfying the dividing property it mines that s' lies on the s -side of (t, s) . The same argument shows that a vertex $t' \in T$ which comes before t must lie on the t -side of (t, s) .

This implies that for every edge (t, s) of a polygon T in a space K with the dividing property, T necessarily contains vertices on both t - and s -sides of (t, s) .

Observe that the length of every diagonal $\{t, \tau\}$ of T is not greater than $p(T)/2$. Indeed, the length of a shortest path between t and τ is not greater than the lengths of $P_{t,\tau}$ and $P_{\tau,t}$, therefore, it is not greater than their arithmetic mean $p(T)/2$.

Theorem 2 *Let K be a space with the dividing property. Then a polygon T is minimal if and only if for every vertex $t \in T$ a vertex $\tau \in T$ can be found such that $\rho(t, \tau) = p(T)/2$ (say, from every vertex a main diagonal can be drawn).*

Lemma 3 *A shortest path for a diagonal $\{t, \tau\}$ never contains another diagonal $\{t', \tau'\}$ with $\rho(t', \tau') \geq \rho(t, \tau)$.*

Proof. Assume that it does contain. Consequently, t' and τ' lie on a shortest path between t and τ . Since $\{t', \tau'\}$ is different from $\{t, \tau\}$, at least one of the points t' and τ' does not lie at the end of the path. So, $\rho(t', \tau')$ is less than the length $\rho(t, \tau)$ of the path. \square

Proof of theorem 2. Consider a minimal polygon T and a vertex $t \in T$. Let (t, s) be an edge of T and fix a direction of movement by T such that s comes after t . Since K satisfies the dividing property, the vertex coming after s lies on the s -side of (t, s) and the vertex coming before t lies on the t -side, respectively. Consequently, there is an edge (t', s') of T such that t' comes after s' , t' lies on the t -side, and s' lies on the s -side of (t, s) . Observe that $(t', s') \leftrightarrow (t, s)$.

The vertices t, s, s' , and t' divide the set of all edges of the polygon T into four parts. The first part is just the edge (t, s) , the second is the sequence of edges between s and s' which does not meet vertices t and t' . Denote this set of edges by P_s . The third part is the edge (s', t') . And the last part is the sequence of edges between t' and t which does not meet vertices s and s' . This set of edges is denoted by P_t . Since T is minimal, there is a shortest path between t and t' which equals either P_t or $\{(t, s)\} \cup P_s \cup \{(s', t')\}$. Observe that, by the last statement of proposition 3, the length of the diagonal $\{s, s'\}$ is equal to the length of the diagonal $\{t, t'\}$. Then lemma 3 implies that a shortest path between t and t' is P_t . The same argument shows that a shortest path between s and s' is P_s . Consequently,

$$\rho(t, s) + \rho(s, s') + \rho(s', t') + \rho(t', t) = \rho(t, s) + \rho(P_s) + \rho(s', t') + \rho(P_t) = p(T),$$

where $\rho(P)$ stands for the length of the path P . In this equality $\rho(t, s) + \rho(s, s')$ and $\rho(s', t') + \rho(t', t)$ just equal $\rho(t, s')$, since $(t', s') \leftrightarrow (t, s)$. So, $p(T)$ is just $2 \cdot \rho(t, s')$; $\{t, s'\}$ is the main diagonal.

Let us prove the backward implication. Let $\{t, s\}$ be a diagonal of a polygon T . We have to find a shortest path between t and s which consists of edges of T . By the condition, T contains a vertex τ such that $\rho(t, \tau) = p(T)/2$. It means that t and τ divide T on two paths such that each one of them is a shortest

path between t and τ . In particular, this is true for P_s , the part of T between t and τ which contains vertex s . Obviously, a "subpath" of a shortest path is also a shortest path between its ends, so, in order to construct a shortest path between t and s we have just to take the part of P_s lying between t and s . \square

4. Criteria of the ADP in $\text{Lip}(K)$

Let us call a polygon with an even number of vertices an even polygon for short.

Theorem 3 *For a finite metric space K , the following conditions are equivalent:*

1. $\text{Lip}(K)$ satisfies the alternative Daugavet property.
2. Every polygon in K is equilateral and even.
3. Every minimal polygon in K is equilateral and even.
4. Every minimal polygon in K is equilateral and K satisfies the dividing property.

Proof. Let us prove that 1 implies 4. Assume that $\text{Lip}(K)$ has the alternative Daugavet property. Firstly, we prove that K satisfies the dividing property. For this purpose, assume that it is not true, i.e. K contains a gap (t, τ) and an element s such that $\rho(t, \tau) > |\rho(t, s) - \rho(\tau, s)|$. Consider a metric subspace $K_0 = \{t, \tau, s\}$ and define on it a Lipschitz function h

$$h(s) = 0, \quad h(t) = \rho(t, s), \quad h(\tau) = \rho(\tau, s),$$

which is an extreme point of $B(\text{Lip}(K_0))$. Observe that

$$|h(t; \tau)| = \frac{|\rho(\tau, s) - \rho(t, s)|}{\rho(t, \tau)} < 1. \quad (14)$$

Extend h to an extreme point of $B(\text{Lip}(K))$. It suffices to extend h to one new point repeatedly, where the value of h on the new point is defined as the highest or the lowest possible value with respect to all previously defined values; on each step h is an extreme point on the unit ball of the corresponding Lipschitz space by lemma 1. By theorem 1, inequality (14) implies that $\text{Lip}(K)$ does not satisfy the alternative Daugavet property, which is a contradiction. So, K satisfies the dividing property.

Now, let T be a minimal polygon in K which is not equilateral. Then T contains a pair of neighboring edges with different lengths r and R ($r < R$). Fix the starting element t_1 as the joint element of these two edges, and the direction of movement such that $R = \rho(t_n, t_1)$, $r = \rho(t_1, t_2)$. By theorem 2, minimality of T implies that $p(T)/2 = \rho(t_1, t_k)$ for a vertex $t_k \in T$. Define a Lipschitz function

$$h(t) = \rho(t, t_k) - \chi_{\{t_1\}} \cdot 2r.$$

Let us estimate the slope of h between the vertices of T . For $2 \leq i < i+1 \leq n$,

$$|h(t_i; t_{i+1})| = \frac{|\rho(t_{i+1}, t_k) - \rho(t_i, t_k)|}{\rho(t_i, t_{i+1})} = \frac{\rho(t_i, t_{i+1})}{\rho(t_i, t_{i+1})} = 1$$

because (t_i, t_{i+1}) is a gap in a space with the dividing property. Since $\{t_1, t_k\}$ is the main diagonal of T , all vertices of T lie between t_1 and t_k . In particular,

$$r + \rho(t_2, t_k) = \rho(t_1, t_k) \quad \text{and} \quad R + \rho(t_n, t_k) = \rho(t_1, t_k).$$

Therefore,

$$\begin{aligned} |h(t_1; t_2)| &= \frac{|\rho(t_2, t_k) - \rho(t_1, t_k) + 2r|}{r} = \frac{|\rho(t_2, t_k) - [r + \rho(t_2, t_k)] + 2r|}{r} = 1, \\ |h(t_1; t_n)| &= \frac{|\rho(t_n, t_k) - \rho(t_1, t_k) + 2R|}{R} = \frac{|\rho(t_n, t_k) - [R + \rho(t_n, t_k)] + 2R|}{R} \\ &= \frac{|R - 2r|}{R} < 1, \end{aligned}$$

since $R - 2r < R$ and $2r - R < 2R - R = R$. So, the slope of h is not greater than 1 between the ends of every edge of T . Let us estimate it between the ends of the diagonals. Since T is minimal, a shortest path between the ends of every diagonal $\{t, \tau\}$ can be constructed of edges of T . Denote the lengths of these edges by ρ_1, \dots, ρ_m and the corresponding increments of h by h_1, \dots, h_m . Then

$$|h(t; \tau)| = \frac{|h_1 + \dots + h_m|}{\rho(t, \tau)} \leq \frac{|h_1| + \dots + |h_m|}{\rho(t, \tau)} \leq \frac{\rho_1 + \dots + \rho_m}{\rho(t, \tau)} = \frac{\rho(t, \tau)}{\rho(t, \tau)} = 1.$$

So, $\|h\|_{\text{Lip}(T)} = 1$. Since $|h(t_1; t_2)| = \dots = |h(t_{n-1}; t_n)| = 1$, h is an extreme point in $B(\text{Lip}(T))$. Extend h to an extreme point of $B(\text{Lip}(K))$. Since (t_1, t_2) is a gap in K and $|h(t_1; t_n)| < 1$, $\text{Lip}(K)$ fails the alternative Daugavet property.

In order to prove the implication $4 \Rightarrow 3$ we have to show that every minimal polygon T is even. Consider an edge (t, τ) of T and find another edge (t', τ') such that $(t, \tau) \leftrightarrow (t', \tau')$ (τ comes after t and t' comes after τ'). Observe that for a point $s \in K$ which lies on the τ -side of (t, τ) , every point s' between τ and s also lies on the τ -side of (t, τ) ; the same is obviously true for the t -side of (t, τ) . It implies that the vertices between τ and τ' lie on the τ -side of (t, τ) , and the vertices between t and t' lie on the t -side, respectively. So, the only edge of T which fronts the edge (t, τ) is (t', τ') . Accordingly, the only edge of T which fronts (t', τ') is (t, τ) .

It means that \leftrightarrow defines a relation of equivalence on the set of all edges of T and each equivalence class consists of two edges. Hence, T is even.

Let us prove that 3 implies 2. Consider a polygon T . If T is minimal, then it is even and equilateral by the condition. Assume that T is not minimal. Then T contains a diagonal without any other vertices between its ends. This diagonal divides T into two smaller polygons T_1 and T_2 in the sense that each edge of T

belongs also to one (and only one) of the polygons T_i , all other edges of T_i belong to both of T_1 and T_2 , and the perimeters $p(T_i)$ are less than $p(T)$.

If some of the polygons T_i are not minimal, apply to them the same dividing procedure. Each dividing procedure produces polygons of smaller perimeter. Therefore, since the set of all possible perimeters of polygons in a finite space K is also finite, the process will be finished at some step. We obtain a dyadic tree of polygons with the polygon T being the root and a family of minimal polygons being the leaves of the tree.

If a pair of polygons T'_1 and T'_2 in the tree is made by dividing some other polygon T' in the tree, then, by the construction, T'_1 and T'_2 have common edges, and all the edges of T' belong also to the polygons T'_i . Consequently, if T'_1 and T'_2 are equilateral, the same will be true for T' . By the condition, the leaves of the tree are equilateral polygons, so, applying the argument to every branching in the order inverse to the order of constructing the tree, we deduce that the root polygon T is equilateral.

Let us prove that T is also an even polygon. Observe that for a polygon T' which is divided into polygons T'_1 and T'_2 the number of edges $n(T')$ of a polygon T' differs from the sum $n(T'_1) + n(T'_2)$ by the double number of common edges of T'_1 and T'_2 . So, provided that T'_1 and T'_2 are even, T' is also even. The leaves of the tree are even polygons, so, applying the argument to every branching of the tree, we deduce that the root polygon T is even.

Finally, let us prove the implication $2 \Rightarrow 1$. For an extreme point h of $B(\text{Lip}(K))$ and for a gap (t, τ) , we have to prove that $|h(t; \tau)| = 1$. Take a sequence $s_0 = t, s_1, \dots, s_n = \tau$ such that $|h(s_{i-1}; s_i)| = 1$ for $i = 1, \dots, n$. Obviously, we may assume that all elements s_i are different from each other and that each pair (s_{i-1}, s_i) is a gap (otherwise, add new elements between s_{i-1} and s_i). Moreover, $|h(t; \tau)| < 1$ implies that $n > 1$.

These properties of the elements s_i just mean that the sequence $\{s_0, \dots, s_n\}$ is a polygon in K , which will be denoted as T . By the condition, T is equilateral and even. Denote the length of its edges by r . Then

$$h(\tau) - h(t) = \sum_{i=1}^n (h(s_i) - h(s_{i-1})) = \sum_{i=1}^n \pm r \in r \cdot \mathbb{Z}.$$

The number of summands in these sums is even, so, $h(\tau) - h(t)$ is different from zero. And since $|h(\tau) - h(t)| \leq r$, $|h(\tau) - h(t)| = r = \rho(t, \tau)$, which means that $|h(t; \tau)| = 1$. \square

5. Constructing finite spaces K with $\text{Lip}(K) \in \text{ADP}$

By theorem 3, in order to prove that $\text{Lip}(K) \notin \text{ADP}$ we just have to prove that K contains a minimal polygon which is not equilateral or not even. The proof of $\text{Lip}(K) \in \text{ADP}$ requires verification of the conditions for all minimal polygons in K . In this section we establish a simple algorithm of constructing any

finite space K with $\text{Lip}(K) \in \text{ADP}$. So, the alternative Daugavet property can be indicated by constructing K as a result of applying the algorithm.

Let (K, ρ) be a finite metric space. Denote the set of all its gaps as G . Then (K, G) will denote the positively weighted graph (in the sense that every edge has a positive weight) where the set of vertices is K and the set of edges is G . The weight $w(g)$ of a gap $g = (t, \tau) \in G$ equals $\rho(t, \tau)$.

Define for any pair t, τ in a finite space K ,

$$m_G(t, \tau) = \min \left\{ \sum_{i=1}^n w(s_{i-1}, s_i) : n \in \mathbb{N}, (s_{i-1}, s_i) \in G \forall i, s_0 = t, s_n = \tau \right\}. \quad (15)$$

Obviously, $m_G(t, \tau)$ equals $\rho(t, \tau)$, so, the metric ρ is completely defined by its values on G . The metric space (K, ρ) can be identified with the corresponding graph (K, G) .

Definition 14 A positively weighted graph (K, G) generates a metric on K if for some metric ρ on K ,

1. the set of all gaps in (K, ρ) coincides with the set of all pairs of adjacent vertices, i.e. the set G ,
2. the length of every gap is equal to the weight of the corresponding edge.

The following proposition 5 describes the set of positively weighted graphs which determine metrics.

Firstly, let us fix the following definition for short:

Definition 15 For a pair of vertices t, τ in a weighted graph (K, G) , a shortest path between t and τ is a sequence of edges (or the corresponding sequence of vertices) at which the minimum (15) is attained.

Proposition 5 For a positively weighted graph (K, G) , the following conditions are equivalent:

1. (K, G) generates a metric;
2. (K, G) is connected and for every edge $g = (t, \tau) \in G$, the only shortest path in (K, G) between t and τ is g itself.

Observe that the last condition for an edge $g \in G$ means that either the set $G \setminus \{g\}$ is not connected or $w(g) < m_{G \setminus \{g\}}(g)$.

Proof. Assume that (K, G) generates a metric ρ . It is connected because any two points can be connected by a shortest path in (K, ρ) . If for a gap (t, τ) , a shortest path between t and τ different from the gap (t, τ) could be constructed, then the points lying on the pass would lie between t and τ , which is not possible, since (t, τ) is a gap.

Assume that the second condition holds and let us prove that (K, G) generates a metric. Since G is connected, the function $m_G(t, \tau)$ is defined for any t, τ in K . Take $\rho(t, \tau) = m_G(t, \tau)$. This is a metric due to the triangle inequality

$$\begin{aligned} \rho(t, s) + \rho(s, \tau) &= m_G(t, s) + m_G(s, \tau) \\ &= \min \left\{ \sum_{i=1}^n w(s_{i-1}, s_i) + \sum_{j=1}^m w(s'_{j-1}, s'_j) : n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N}, \right. \\ &\quad \left. (s_{i-1}, s_i) \text{ and } (s'_{j-1}, s'_j) \in G \ \forall i \text{ and } j, \right. \\ &\quad \left. t = s_0, s_n = s = s'_0, s'_m = \tau \right\} \\ &\geq \min \left\{ \sum_{i=1}^n w(s_{i-1}, s_i) : n \in \mathbb{N}, (s_{i-1}, s_i) \in G \ \forall i, s_0 = t, s_n = \tau \right\} \\ &= m_G(t, \tau) = \rho(t, \tau). \end{aligned}$$

Let us prove that edges of (K, G) coincide with gaps of (K, ρ) . Consider an edge $(t, \tau) \in G$ and assume that it is not a gap, i.e. for some $s \in K$, $m_G(t, \tau) = m_G(t, s) + m_G(s, \tau)$. Then the shortest path between t and τ can be constructed as a union of a shortest path between t and s and a shortest path between s and τ . Such shortest path is constructed of at least one additional point s except t and τ , so, it differs from the path (t, τ) , which contradicts the condition. Now, let t and τ be a pair of vertices in (K, G) which are not adjacent. Then there is a shortest path $\{s_0=t, s_1, \dots, s_n=\tau\}$ between t and τ in (K, G) which contains at least one point $s_k \notin \{t, \tau\}$. Then

$$m_G(t, s_k) + m_G(s_k, \tau) \leq \sum_{i=1}^k w(s_{i-1}, s_i) + \sum_{i=k+1}^n w(s_{i-1}, s_i) = m_G(t, \tau).$$

It means that s_k lies between t and τ , which is impossible for the gap (t, τ) in (K, ρ) .

At last, by the condition, the only shortest path between two adjacent vertexes t and τ is the edge (t, τ) . Therefore, $m_G(t, \tau) = w(t, \tau)$, so, the length of every edge is equal to its weight. \square

Now we introduce two classes of basic transformations of graphs (K, G) . These transformations will be used as basic steps for the required algorithm.

Definition 16 P_1 : consider a number $r > 0$, a vertex $s \in K$, and a new element $t \notin K$. Then P_1 transforms K to $K \cup \{t\}$ and G to $G \cup \{(t, s)\}$ with $w(t, s) = r$.

Definition 17 P_2 : consider a number $r > 0$ and a pair of distinct vertexes $t, s \in K$ which are not adjacent. Assume additionally that G contains an odd path with the length of every edge equal to r and the number of edges in the path being at least 3. Then P_2 does not change K and transforms G to $G \cup \{(t, s)\}$ with $w(t, s) = r$.

Naturally, a *path* in the definition of P_2 is understood as a sequence of edges of the form $\{(s_0, s_1), (s_1, s_2), \dots, (s_{n-1}, s_n)\}$ (equivalently, the corresponding sequence of vertices) such that no vertices (and thus no edges) are repeated. *Odd path* is a path constructed of an odd number of edges.

It is easy to see by proposition 5 that a result of applying a transformation P_1 to a graph (K, G) which determines a metric, is again a graph which determines a metric (say, P_1 is always a correct transformation). Generally, this is not the case for the transformations P_2 . For example, consider the set $K = \{s_0, s_1, s_2, s_3, z\}$ with $G = \{(s_0, s_1), (s_1, s_2), (s_2, s_3), (z, s_0), (z, s_3)\}$, $w(s_{i-1}, s_i) = 1 = w(z, s_3)$ ($i = 1, 2, 3$), and, say, $w(z, s_0) = 3$. Obviously, (K, G) determines a metric. Take $r = 1$ and denote (s_0, s_3) as (s, t) . The path $\{s_0, s_1, s_2, s_3\}$ is odd and consists of 3 edges of length r , so, the transformation P_2 can be applied. But for all that $w(s_0, s_3) + w(s_3, z) = 2 < 3 = w(s_0, z)$, so, by proposition 5, the new graph does not determine a metric.

Nevertheless, it will suffice for us to use in the case of P_2 the following statement:

Proposition 6 *Every connected subgraph of a graph which determines a metric, is also a graph which determines a metric.*

The proof of proposition 6 is obvious due to proposition 5.

The metric space determined by a result of applying P_i to a graph (K, G) will be denoted by $P_i(K)$ for short. The corresponding graph will be denoted by $P_i(K, G)$ or $(P_i(K), P_i(G))$.

Theorem 4 *If $\text{Lip}(K)$ satisfies the alternative Daugavet property, then so do $\text{Lip}(P_1(K))$ and $\text{Lip}(P_2(K))$.*

Proof. Further, the alternative Daugavet property will be considered as a property that all polygons are equilateral and even (theorem 3). Consider a space $P_1(K) = K \cup \{t\}$ with $P_1(G) = G \cup \{(s, t)\}$ and a polygon T in $P_1(K)$. The point t is not a vertex of T since $P_1(K)$ contains only one gap which includes point t . Consequently, T is a polygon in the original space K , and then, T is equilateral and even.

Consider a space $P_2(K) = K$ with $P_2(G) = G \cup \{(t, s)\}$ and a polygon T in $P_2(K)$. If (t, s) is not an edge of T , the conditions for T are satisfied because $\text{Lip}(K) \in \text{ADP}$. Let (t, s) be an edge of T . By the definition of P_2 , the space $P_2(K)$ also contains an even equilateral polygon S with an edge (t, s) . Fix point t as the first vertex in T and S and make s the last point by choosing a proper movement directions for the polygons. Observe that if $T = S$, then the required properties of T are already established, so, consider the case when T is different from S . We are going to move from t to s by the edges of T and S simultaneously and to construct of these edges a sequence of polygons depending on intersections of T and S .

In the sequel, for a polygon R with a fixed direction of movement and for a point $p \in R$, we denote the vertex of R which goes after p by $p_{\rightarrow R}$ for short. The symbol $\{p, \dots, q\}_R$ stands for the set $\{p, p_{\rightarrow R}, (p_{\rightarrow R})_{\rightarrow R}, \dots, q\}$, where p and q are two different elements of R .

Let us define a point t^1 . If the points $t_{\rightarrow T}$ and $t_{\rightarrow S}$ are different, take $t^1 = t$. Otherwise, skip a number of common vertices of T and S and let t^1 be the first common vertex such that the next points $t_{\rightarrow T}^1$ and $t_{\rightarrow S}^1$ are different. In the latter case I_1 will stand for the sequence of edges between t and t^1 .

Let s^1 be the first vertex in $\{t_{\rightarrow T}^1, \dots, s\}_T$ which lies also in S . Then t^1 and s^1 are the only common elements of the sets $\{t^1, \dots, s^1\}_T$ and $\{t^1, \dots, s^1\}_S$. It means that the union of these sets is a polygon; denote it by Q_1 .

Apply the following inductive procedure. Let a polygon Q_{k-1} be already constructed on the base of a pair of points t^{k-1} and s^{k-1} . If $s^{k-1} = s$, then the process is finished. Assume that $s^{k-1} \neq s$. If the points $s_{\rightarrow T}^{k-1}$ and $s_{\rightarrow S}^{k-1}$ are different, then take $t^k = s^{k-1}$. Otherwise, skip a number of common vertices of T and S and let t^k be the first common vertex in $\{s_{\rightarrow T}^{k-1}, \dots, s\}_T$ (and in $\{s_{\rightarrow S}^{k-1}, \dots, s\}_S$) such that the next points $t_{\rightarrow T}^k$ and $t_{\rightarrow S}^k$ are different. In the latter case define I_k as the sequence of edges corresponding to $\{s^{k-1}, \dots, t^k\}_T$. If such point t^k does not exist at all, then define I_k as the sequence of edges corresponding to $\{s^{k-1}, \dots, s\}_T$ and finish the process. We assume that t^k exists. The polygons T and S merge at point s or earlier. Define s^k as the first vertex in $\{t_{\rightarrow T}^k, \dots, s\}_T$ which lies also in $\{t_{\rightarrow S}^k, \dots, s\}_S$. Then t^k and s^k are the only common elements of the sets $\{t^k, \dots, s^k\}_T$ and $\{t^k, \dots, s^k\}_S$. It means that the union of these sets is a polygon; denote it by Q_k .

Continue this process until the point s is reached. Observe that the vertexes $t_1, s_1, t_2, s_2, \dots$ (in both polygons T and S) follow under the fixed direction of movement from t to s . It implies that all the edges of T (except (s, t)) are covered within this movement exactly once; the same holds for S .

Let us prove that T is equilateral. Every edge (u, v) of T which does not equal (s, t) belongs also to either Q_k or I_k for some k . If (u, v) lies in a set I_k , then it is also an edge of the equilateral polygon S , so, $\rho(u, v) = \rho(t, s)$. Assume that (u, v) belongs to a polygon Q_k . Since Q_k lies in the original space K , it is equilateral. Besides, Q_k contains a number of edges from the polygon S . Consequently, the length of the edge (u, v) is equal to the length of an edge in the polygon S . So, again $\rho(u, v) = \rho(t, s)$. T is equilateral.

Finally, let us show that T is even. For any polygon R , denote the number of its edges by $n(R)$ for short. Since S is even, it suffices to prove that $n(T) + n(S)$ is an even number. By the construction of sets I_k and polygons Q_k , $n(T) + n(S) = \sum_k n(Q_k) + 2 \sum_k n(I_k)$ (where $n(I_k)$ stands for the number of edges in I_k). This proves the evenness of $n(T)$ because the Q_k 's are even. \square

Theorem 5 *Let K be a finite metric space such that $\text{Lip}(K)$ satisfies the alternative Daugavet property. Then a sequence of metric spaces can be built such that the first element is a single point, each following element is a result of*

applying either P_1 or P_2 to the previous one, and the last element is the space K .

Proof. We start constructing (K, G) from a singleton $K_1 = \{t\}$. Since (K, G) is connected, for every proper subset $M \subset K$, there are $t \in M$ and $s \in K \setminus M$ such that $(t, s) \in G$. In particular, there is an element $s \neq t$ such that $(t, s) \in G$. Define $(K_2, G_2) = P_1(K_1, \emptyset) = (\{t, s\}, \{(t, s)\})$. Again, for $M = K_2$, take a pair of G -adjacent elements $t \in K_2$ and $s \in K \setminus K_2$; define $(K_3, G_3) = P_1(K_2, G_2) = (K_2 \cup \{s\}, G_2 \cup \{(t, s)\})$. Continue the same way until the set K will be reached by the set of vertices of a graph (K_n, G_n) .

Assume that G contains some edges which are absent in G_n , otherwise the theorem is proved. Let us show that for a subgraph $(K, G') \subset (K, G)$ such that $G' \supset G_n$, and for an edge $g \in G \setminus G'$, the graph $(K, G' \cup \{g\})$ is a result of applying P_2 to (K, G') and determines a metric. Then, just apply this statement repeatedly for the rest of the edges.

Indeed, observe at first that (K, G') is connected since $G' \supset G_n$. For the edge $g = (t, \tau)$ find a path P between t and τ constructed of edges of G' , which is possible due to connectivity of G' . The combination of the path P with the edge g forms a polygon in (K, G) . By the alternative Daugavet property of $\text{Lip}(K)$, the polygon is even and equilateral. Consequently, adding g to G' is a P_2 -transformation. Finally, $(K, G' \cup \{g\})$ generates a metric by proposition 6. \square

6. When $\text{Lip}(K)$ equals l_∞^n

Let (K, ρ) be a finite set. Consider the space $X = \text{Lip}(K)$ of Lipschitz functions defined on K . The goal of this section is to find a criterion of X being isometric to l_∞^n . Comparing the dimensions of these spaces we can see that it is sufficient to deal with K consisting of $n + 1$ points. In the sequel $K = \{0, 1, 2, \dots, n\}$ equipped with a metric ρ . Consider \mathbb{R}^{n+1} as the space of all real functions on K , and let $L \subset \mathbb{R}^{n+1}$ be the subspace of constants. Then $X = \mathbb{R}^{n+1}/L$ as a linear space.

Let X be isometric to l_∞^n . It is easy to see that the unit ball of the space X equals

$$B(X) = \{x \in X : |x(k) - x(j)| \leq \rho(k, j) \quad \forall k, j = 0, 1, \dots, n \ (k \neq j)\}$$

If one considers the standard duality between \mathbb{R}^{n+1} and \mathbb{R}^{n+1} , then $X^* = L^\perp$. The coordinate functionals δ_k on \mathbb{R}^{n+1} , $\delta_k(x) = x(k)$, can be considered as canonical basis vectors in \mathbb{R}^{n+1} . Denote

$$U = \left\{ \Delta_{kj} = \frac{\delta_k - \delta_j}{\rho(k, j)} \right\}_{k, j = 0, 1, \dots, n, k \neq j} \subset X^* = L^\perp.$$

Then $B^\circ = U^\circ = \text{aconv}U$. Denote $M = \text{ex aconv}U$. If $X \cong l_\infty^n$ then B is actually an n -dimensional cube, so $\text{aconv}U = B^\circ$ should have only $2n$ extreme points:

$|M| = 2n$. Since U is finite and symmetric, $M \subset U$ and all the $n(n+1)$ points of U should be located inside the absolute convex hull of $M - 2n$ -point subset of U .

Note that all the $n(n+1)$ points of U can be considered as $\frac{n(n+1)}{2}$ pairs of opposite points. Since we deal with absolute convex hull the set M consists of n such pairs. Let $M = \{\pm \xi_i\}_{i=1}^n$, where $\xi_i = \Delta_{k_i j_i}$.

Let Γ be a graph with vertices $\{0, 1, 2, \dots, n\}$. Vertices k and j we connect with an edge if and only if $\Delta_{kj} \in M$. The graph Γ built in such a way has $n+1$ vertices and n edges.

Proposition 7 *The graph Γ is connected.*

Proof. Assume Γ is not connected. Then it has at least two connected components Γ_1 and Γ_2 . Choose any $p \in \Gamma_1$ and $q \in \Gamma_2$. Consider the point Δ_{pq} . We have chosen p and q in such a way that Δ_{pq} doesn't belong to M . So, Δ_{pq} is a convex combination of M elements. So, $\Delta_{pq} = \sum_{k=1}^n \alpha_k \xi_k$ where $\sum_{k=1}^n |\alpha_k| \leq 1$. Since Γ_1 and Γ_2 are connected components of Γ for any $\Delta_{kj} \in M$ there are 3 possibilities:

1. $\{k, j\} \subset \Gamma_1$
2. $\{k, j\} \subset \Gamma_2$
3. $\{k, j\} \subset \Gamma \setminus (\Gamma_1 \cup \Gamma_2) = \Gamma_3$.

Then $M = M_1 \cup M_2 \cup M_3$, where $M_1 = \{\Delta_{kj} \in M : \{k, j\} \subset \Gamma_1\}$, $M_2 = \{\Delta_{kj} \in M : \{k, j\} \subset \Gamma_2\}$, $M_3 = \{\Delta_{kj} \in M : \{k, j\} \subset \Gamma_3\}$. Then $\Delta_{pq} = S_1 + S_2 + S_3$, where $S_i = \sum_{\xi_k \in M_i} \alpha_k \xi_k$ ($i = 1, 2, 3$). For a vector $x = (x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ denote

$\text{supp } x = \{k : x_k \neq 0\}$. Under this notation $\text{supp } S_i \subset \Gamma_i$. So $S_1 \neq 0$ and $S_2 \neq 0$ because $\text{supp } \Delta_{pq}$ has non-empty intersection with both Γ_1 and Γ_2 . Since all the $\Delta_{k,j}$ have zero sum of coordinates then so do S_1 and S_2 . Then each of S_1 and S_2 has at least 2 non-zero coordinates. Therefore $\Delta_{pq} = S_1 + S_2 + S_3$ has at least 4 non-zero coordinates. So we have obtained a contradiction. \square

Proposition 8 *The graph Γ is a tree.*

Proof. We already know from Proposition 7 that Γ is connected. Assume Γ contains cycles. We'll show that the number of edges of Γ in this case is greater than n . If there is at least one cycle we can delete any of the edges in this cycle and the graph will remain connected. After deleting several edges we'll obtain connected graph without cycles i.e. a tree. It is a well-known fact that any tree with $n+1$ vertices contains n edges. Since several edges were deleted then graph Γ contained more than n edges. We have a contradiction, so the graph Γ is a tree itself. \square

Proposition 9 Let $P = \{p_1, p_2, \dots, p_m\}$ be any path in Γ (this means that for any $k = 1, \dots, m-1$ the vertices p_k and p_{k+1} are connected with an edge). Then

$$\rho(p_1, p_m) = \sum_{k=1}^{m-1} \rho(p_k, p_{k+1}). \quad (16)$$

Proof. Consider the point $\Delta p_1 p_m$. It is obvious that it doesn't belong to M , but it is located inside the absolute convex hull of M . So it can be represented as absolute convex combination of M elements, i.e. there exist real numbers $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ such that

$$\sum_{i=1}^n |\alpha_i| \leq 1 \quad (17)$$

and

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i \xi_i = \Delta p_1 p_m$$

By the definition of ξ_i the last equality gives the following:

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i \frac{\delta_{k_i} - \delta_{j_i}}{\rho(k_i, j_i)} = \frac{\delta_{p_1} - \delta_{p_m}}{\rho(p_1, p_m)} \quad (18)$$

Denote $M_0 = \{\xi_i : \alpha_i \neq 0\}$, $G_0 = \cup_{\xi \in M_0} \text{supp } \xi$. Let Γ_0 be the following graph: its vertices are elements of G_0 ; vertices k and j we connect with an edge if and only if $\Delta_{kj} \in M_0$. Γ_0 is a subgraph of Γ , so it does not have circles. Let us say that $k \in G_0$ is a *loose end* of Γ_0 , if it belongs to only one edge of Γ_0 . In the equation (18) the support of left-hand side must contain all the loose ends of Γ_0 , but the support of the right-hand side consists of $\{p_1, p_m\}$. So the only loose ends of Γ_0 are p_1 and p_m . This means that $G_0 = P$ and the graph Γ_0 is just the path p_1, p_2, \dots, p_m . So, erasing the zero summands in the left-hand side of the equation (18) we get an equation of the following form:

$$\sum_{i=1}^{m-1} \beta_i \frac{\delta_{p_i} - \delta_{p_{i+1}}}{\rho(p_i, p_{i+1})} = \frac{\delta_{p_1} - \delta_{p_m}}{\rho(p_1, p_m)} \quad (19)$$

with

$$\sum_{i=1}^{m-1} |\beta_i| \leq 1. \quad (20)$$

If we compare the coefficients near δ_{p_i} , $i = 1, \dots, m$ in the equation (19) we obtain easily that $\beta_i = \rho(p_i, p_{i+1}) / \rho(p_1, p_m)$, $i = 1, 2, \dots, m-1$. So, (20) can be rewritten as

$$\sum_{k=1}^{m-1} \frac{\rho(p_k, p_{k+1})}{\rho(p_1, p_m)} \leq 1$$

or equivalently

$$\sum_{k=1}^{m-1} \rho(p_k, p_{k+1}) \leq \rho(p_1, p_m).$$

By the triangle inequality

$$\sum_{k=1}^{m-1} \rho(p_k, p_{k+1}) \geq \rho(p_1, p_m).$$

These two inequalities imply (16). \square

Let us introduce the following notion.

Definition 18 A finite metric space (K, ρ) is called tree based if there exists a tree Γ whose set of vertices equals K , and such that for every path p_1, p_2, \dots, p_n the condition (16) holds.

Thus we obtain the following

Theorem 6 If $\text{Lip}(K, \rho)$ is isometric to l_∞^n then (K, ρ) is tree based.

Now we will prove the converse statement.

Theorem 7 Let (K, ρ) be a tree based metric space, $|K| = n + 1$. Then $\text{Lip}(K, \rho)$ is isometric to l_∞^n .

Proof. Let Γ be the tree from definition of tree based metric space. Consider any function f in $\text{Lip}(K)$. The definition of norm in $\text{Lip}(K)$ gives us

$$\|f\| = \max_{k, j \in K, k \neq j} \left| \frac{f(k) - f(j)}{\rho(k, j)} \right|.$$

For any pair $k, j \in K, k \neq j$ find the path $P = \{p_1, p_2, \dots, p_m\}$ ($p_1 = k, p_m = j$) connecting corresponding vertices in Γ . If we restrict our metric space to its subspace corresponding to vertices of path P this metric space will be isometric to a finite subset $t_1 < t_2 < \dots < t_m$ on real line with euclidian metric. For such an interpretation it's easy to see that

$$\left| \frac{f(t_1) - f(t_m)}{\rho(t_1, t_m)} \right| \leq \max_{i=1, \dots, m-1} \left| \frac{f(t_i) - f(t_{i+1})}{\rho(t_i, t_{i+1})} \right|. \quad (21)$$

Let E be a set of edges of the tree Γ . Thus (21) follows

$$\|f\| = \max_{(k, j) \in E} \left| \frac{f(k) - f(j)}{\rho(k, j)} \right|.$$

Obviously, $|E| = n$. Now it is straightforward to obtain that $\text{Lip}(K) \cong l_\infty^n$ by choosing correct basis. \square

REFERENCES

1. Даугавет И. Об одном свойстве вполне непрерывных операторов в пространстве C // Успехи математических наук. – 1963. – Т 18, № 5. – С. 157–161.
2. F. F. Bonsall and J. Duncan. Numerical Ranges of Operators on Normed Spaces and of Elements of Normed Algebras // London Math. Soc. Lecture Note Series 2, Cambridge. – 1971.
3. B. W. Glickfeld. On an inequality of Banach algebra geometry and semi-inner-product space theory // Illinois J. Math. – 1970. – Vol. 14. – P. 76–81.
4. Ivakhno Y. Big slice property in the spaces of Lipschitz functions // Вісник Харківського національного університету. – 2006. – № 749. – P. 109–118.
5. Ivakhno Y., Kadets V.M., Werner D. The Daugavet property for spaces of Lipschitz functions. // To appear in Math. Scand.
6. V.M. Kadets, R.V. Shvidkoy, G.G. Sirotkin, and D.Werner. Banach spaces with the Daugavet property // Trans. Amer. Math. Soc. – 2000. – Vol. 352. – P. 855–873.
7. M. Martín and T. Oikhberg. An alternative Daugavet property // J. Math. Anal. Appl. – 2004. – Vol. 294. – P. 158–180.
8. M. Martín and R. Payá. Numerical index of vector-valued function spaces // Studia Math. – 2000. – Vol. 142. – P. 269–280.