

РЕШЕНИЕ ЦЕНТРАЛЬНОЙ И БОКОВОЙ ЗАДАЧ СВЯЗИ
ДЛЯ ОДНОГО УРАВНЕНИЯ n -ГО ПОРЯДКА. II

Ниже следует доказательство результатов, изложенных ранее (см. настоящей сб., вып. 52. с. 126—129) применительно к уравнению

$$\sum_{v=0}^n P_v(z) y^{(v)}(z) = 0; \quad P_v(z) = \sum_{\mu=v}^n a_{v,\mu} z^\mu; \quad a_{nn} = 1,$$

где $a_{v,\mu}$ — постоянные из (6), (7).

Анонсированные результаты доказаны в работе [6]. Поэтому ниже будем ссылаться на соответствующие выражения из [6].

Теорема 3. Для уравнения (1) с коэффициентами (6), (7) уравнением, определяющим функцию $v_k(\xi)$ в выражении (3) («трансформанту Лапласа»), является следующее уравнение Жордана — Похгаммера:

$$\sum_{v=0}^n (-1)^v C_{\xi+n-v-1}^{n-v} Q^{(n-v)}(\xi) v^{(v)} + \sum_{v=0}^{n-1} (-1)^v C_{\xi+n-v-1}^{n-v-1} K^{(n-v-1)}(\xi) v^{(v)} = 0. \quad (23)$$

Лемма 1. Для уравнения (1) с произвольными $a_{v,\mu}$ уравнение, определяющее трансформанту Лапласа, может быть приведено к виду

$$\sum_{v=0}^n v^{(v)} \left(\sum_{k=0}^v b_{v,k} \xi^k \right) = 0; \quad b_{v,k} = \sum_{\mu=v}^n (-1)^\mu C_\mu^v \gamma_{(\mu-v+k), (k+1)} a_{\mu-v+k, \mu}. \quad (24)$$

Доказательство леммы 1. Согласно [3, с. 120; 4, гл. VII] дифференциальный оператор $M_\xi^*(v)$ уравнения, определяющего трансформанту Лапласа для уравнения (1), имеет вид

$$M_\xi^*(v) = \sum_{\mu=0}^n (-1)^\mu (v C_\mu^{(\mu)}) = \sum_{\mu=0}^n (-1)^\mu \sum_{v=0}^\mu C_\mu^v v^{(v)} C_\mu^{(\mu-v)}; \quad (25)$$

$$G_\mu = \sum_{v=0}^\mu a_{v,\mu} \xi^v. \quad (26)$$

Меняя в (25) порядок суммирования, получаем

$$M_\xi^*(v) = \sum_{v=0}^n v^{(v)} \sum_{\mu=v}^n (-1)^\mu C_\mu^v G_\mu^{(\mu-v)}. \quad (27)$$

С другой стороны, $G_\mu^{(\mu-v)} = \sum_{k=0}^v \gamma_{(\mu-v+k), (k+1)} a_{\mu-v+k, \mu} \xi^k. \quad (28)$

Подставляя (28) в (27), а затем, меняя порядок суммирования, последовательно получаем

$$\begin{aligned} M_\xi^*(v) &= \sum_{v=0}^n v^{(v)} \sum_{\mu=v}^n (-1)^\mu C_\mu^v \sum_{k=0}^v \gamma_{(\mu-v+k), (k+1)} a_{\mu-v+k, \mu} \xi^k = \\ &= \sum_{v=0}^n v^{(v)} \sum_{k=0}^v \xi^k \left(\sum_{\mu=v}^n (-1)^\mu C_\mu^v \gamma_{(\mu-v+k), (k+1)} a_{\mu-v+k, \mu} \right). \end{aligned} \quad (29)$$

Из последнего в (29) выражения следует уравнение (24).

Лемма 2. $C_{(\xi+m)}^\delta = \sum_{\varphi=0}^{\delta} (-1)^\varphi C_{n-(m+1)+\varphi}^\varphi C_{(\xi+n)}^{\delta-\varphi} \quad (30)$

Доказательство леммы 2. Введем символ Похгаммера $(a)_\delta = a(a+1)(a+2) \dots (a+\delta-1)$, где a — произвольное комплексное число. В этом обозначении $\delta! = (1)_\delta$; $\left(\frac{a}{\delta}\right) = \frac{(a-\delta+1)_\delta}{(1)_\delta}$. (31)

Как известно ([5], с. 7, 8),

$$(a-b)_\delta = \sum_{\varphi=0}^{\delta} (-1)^{\varphi} \binom{\delta}{\varphi} (a+\varphi)_{(\delta-\varphi)} (b)_{\varphi}, \quad (32)$$

где b — также произвольное комплексное число. Согласно формулам (31)

$$C_{(\xi+m)}^{\delta} = \frac{(\xi+m-\delta+1)_{\delta}}{(1)_{\delta}} \equiv \frac{[(\xi+n-\delta+1) - (n-m)]_{\delta}}{(1)_{\delta}}. \quad (33)$$

Преобразуя последнее выражение в правой части равенства (33) с помощью выражений (32), (31) получаем

$$C_{(\xi+m)}^{\delta} = \frac{1}{(1)_{\delta}} \sum_{\varphi=0}^{\delta} (-1)^{\varphi} \frac{(\delta-\varphi+1)_{\varphi}}{(1)_{\varphi}} (\xi+n-\delta+\varphi+1)_{(\delta-\varphi)} (n-m)_{\varphi}. \quad (34)$$

Легко проверить, что $(\delta-\varphi+1)_{\varphi} | (1)_{\delta} = 1 | (1)_{(\delta-\varphi)}$. Поэтому

$$C_{(\xi+m)}^{\delta} = \sum_{\varphi=0}^{\delta} (-1)^{\varphi} \frac{(\xi+n-\delta+\varphi-1)_{(\delta-\varphi)}}{(1)_{(\delta-\varphi)}} \frac{(n-m)_{\varphi}}{(1)_{\varphi}}, \quad (35)$$

откуда в силу выражений (31) следует соотношение (30).

Доказательство теоремы 3. Подставим в уравнение (23) полиномы $Q(\xi)$ и $K(\xi)$ в явном виде. Так как

$$Q^{(n-v)}(\xi) = \sum_{k=0}^v \gamma_{(n-v+k), (k+1)} q_{(n-v+k)} \xi^k, \quad (36)$$

$$K^{(n-v-1)}(\xi) = \sum_{k=0}^v \gamma_{(n-1-v+k), (k+1)} p_{(n-1-v+k)} \xi^k,$$

уравнение (23) можно записать

$$v^{(n)} (-1)^n \sum_{k=0}^n q_k \xi^k + \sum_{v=0}^{n-1} v^{(v)} (-1)^v \sum_{k=0}^v \xi^k (C_{\xi+n-1-v}^{n-v} \gamma_{(n-v+k), (k+1)} q_{(n-v+k)} + C_{\xi+n-1-v}^{n-1-v} \gamma_{(n-1-v+k), (k+1)} p_{(n-1-v+k)}) = 0. \quad (37)$$

Приравнявая коэффициенты при $v^{(v)}$ в уравнениях (24) и (37), получаем равенство (6) и следующую систему уравнений (из которой можно найти остальные $a_{k, n-m}$):

$$b_{v, k} \equiv \sum_{\mu=v}^n (-1)^{\mu} C_{\mu}^v \gamma_{(\mu-v+k), (k+1)} a_{\mu-v+k, \mu} = \\ = (-1)^v (C_{\xi+n-1-v}^{n-v} \gamma_{(n-v+k), (k+1)} q_{(n-v+k)} + C_{\xi+n-1-v}^{n-1-v} \gamma_{(n-1-v+k), (k+1)} \times \\ \times p_{(n-1-v+k)}), \quad k=0, 1, 2, \dots, v \quad v=0, 1, 2, \dots, n-1. \quad (38)$$

Последовательно полагая в выражении (38) $v = n-1, n-2, n-3$, можно прямым вычислением убедиться в справедливости соотношения (7) для $m = 1, 2, 3$. Пусть (7) справедливо для $v = n-1, n-2, \dots, n-m$ в уравнениях (38). Полагая в (38) $v = n-m-1$ и затем подставляя в (38) выражения (6), (7) (соответствующие $v = n-1, n-2, \dots, n-m$), получаем для левой части (38)

$$b_{n-m-1, k} = (-1)^{n-m-1} a_{k, n-m-1} + \sum_{\mu=n-m}^{n-1} (-1)^{\mu} C_{\mu}^{n-m-1} \times \\ \times \gamma_{(k+1+m-n+\mu), (k+1)} [q_{(k+1+m)} \gamma_{(k+1+m), (k+2+m-n+\mu)} C_{(s+n)}^{n-\mu} + \\ + p_{(k+m)} \gamma_{(k+m), (k+2+m-n+\mu)} C_{(s+n)}^{n-\mu-1}] + \\ + (-1)^n C_n^{n-m-1} \gamma_{(k+1+m), (k+1)} q_{(k+1+m)}. \quad (39)$$

Так как $\gamma_{(k+m), (k+\omega)} \gamma_{(k+\omega-1), (k+1)} = \gamma_{(k+m), (k+1)}$, выражение (39) можно записать в виде

$$b_{n-m-1, k} = (-1)^{n-m-1} a_{k, n-m-1} + q_{(k+1+m)} \gamma_{(k+1+m), (k+1)} \times \\ \times \sum_{\varphi=1}^{m+1} (-1)^{n-m-1+\varphi} C_{(n-m-1+\varphi)}^{n-m-1} C_{(s+n)}^{m+1-\varphi} + \\ + p_{(k+m)} \gamma_{(k+m), (k+1)} \sum_{\varphi=1}^m (-1)^{n-m-1+\varphi} C_{(n-m-1+\varphi)}^{n-m-1} C_{(s+n)}^{m-\varphi}. \quad (41)$$

Приравнявая правую часть выражения (41) к последней правой части выражения (38), взятой при $v = n-m-1$, находим

$$a_{k, n-m-1} = q_{(k+1+m)} \gamma_{(k+1+m), (k+1)} [C_{(s+m)}^{m+1} - \\ - \sum_{\varphi=1}^{m+1} (-1)^{\varphi} C_{(n-m-1+\varphi)}^{\varphi} C_{(s+n)}^{m+1-\varphi}] + p_{(k+m)} \gamma_{(k+m), (k+1)} \times \\ \times [C_{(s+m)}^m - \sum_{\varphi=1}^m (-1)^{\varphi} C_{(n-m-1+\varphi)}^{\varphi} C_{(s+n)}^{m-\varphi}]. \quad (42)$$

Теорема будет доказана, если выражение (42) может быть преобразовано к виду

$$a_{k, n-m-1} = q_{(k+1+m)} \gamma_{(k+1+m), (k+1)} C_{(s+n)}^{m+1} + p_{(k+m)} \gamma_{(k+m), (k+1)} C_{(s+n)}^m. \quad (43)$$

Очевидно, что выражения (42), (43) совпадают, если выполняется

$$C_{(s+m)}^m = \sum_{\varphi=0}^m (-1)^{\varphi} C_{(n-m-1+\varphi)}^{\varphi} C_{(s+n)}^{m-\varphi}; \quad (44)$$

$$C_{(s+m)}^{m+1} = \sum_{\varphi=0}^{m+1} (-1)^{\varphi} C_{(n-m-1+\varphi)}^{\varphi} C_{(s+n)}^{m+1-\varphi}. \quad (45)$$

Полагая в выражении (30) $\delta = m, m+1$, находим, что соотношения (44), (45) действительно имеют место.

Замечание. В [1] предполагается, что X_{∞} каноническая ф. м. при $\xi = \infty$. Введем ф. м. $X'_{\infty}(\xi) = X_{\infty}(\xi)P$, где P — постоянная неособая матрица. Соответственно $X'_{\infty}(\xi) = X_k(\xi)H'_k$, где $H'_k = H_kP$. По аналогии с выражением (6) в [1] введем $\psi'(z) = \int_{\Omega_n} X'_{\infty}(\xi) e^{z\xi} d\xi = \psi(z)P$, где $\psi(z)$ — каноническая ф. м. системы (1) в [1] в окрест-

ности $z = 0$. Следовательно, $\psi'(z)$ — произвольная ф. м. в окрестности $z = 0$. Теорема 1 в [1] полностью справедлива для произвольной ф. м. $X_\infty(\xi)$, а значит и для соответствующей ф. м. $\psi'(z)$. Доказательство этого утверждения дословно повторяет доказательство теоремы 1 (с заменой H_k на H'_k). Под $X_\infty(\xi)$ в выражении (13) подразумевается не каноническая ф. м.

Далее под функцией $v_k(\xi)$ в выражении (3) понимается единственное не голоморфное в точке $\xi = \lambda_k$ решение уравнения (23), соответствующее показателю $-(r_k + 1) = \xi + n - 1 + \alpha_k$. Отсюда следует выражение для r_k в формулах (10). Как известно, $v_k(\xi) = (\xi - \lambda_k)^{-(r_k+1)} v'_k(\xi)$, где функция $v'_k(\xi)$ голоморфна в точке $\xi = \lambda_k$.

Ф. м. $\Phi_1(z)$ для уравнения (1) с коэффициентами (6), (7) выбираем в виде $\Phi_1(z) = \{y_1(z), \dots, y_n(z)\}$, где $y_k(z)$ задается выражением (3), в котором $v_k(\xi) = W_{k\xi}$ ($W_{k\xi}$ — решение уравнения (23), рассмотренное в работе [6, см. там выражение (4)]). Ф. м. X_k ($k = 1, n$) выбираем в виде выражений (17) — (27) в работе [6].

Предложение. Для выбранной выше ф. м. $\Phi_1(z)$ коэффициенты $C_{j0} (\equiv g_j)$ в разложении (2) имеют вид (18), (19).

Доказательство. Как известно ([4], гл. 18), первый член асимптотического представления (2) решения уравнения (3) имеет вид

$$z^r j e^{\lambda_j z} C_{j0} = e^{\lambda_j z} \int_{\Sigma_j} e^{z(\xi - \lambda_j)} (\xi - \lambda_j)^{-(r_j+1)} v'_j(\lambda_j) d\xi \quad (46)$$

$v'_j(\lambda_j) \equiv v'_j(\xi)_{\xi=\lambda_j}$. Производя в (46) замену $(\xi - \lambda_j) = u$, находим

$$\int_{\Sigma_j} e^{z(\xi - \lambda_j)} (\xi - \lambda_j)^{-(r_j+1)} d\xi = z^r j e^{-i\pi r_j} (e^{-i2\pi r_j} - 1) \Gamma(-r_j), \quad (47)$$

где $\Gamma(-r_j)$ — гамма-функция. (Формула (47) получается с использованием формулы (5) на с. 29 в [7], если предварительно в (5) сделать замену $t = e^{-i\pi \tau}$.) Подставляя в формулу (46) выражение для $v'_j(\lambda_j)$ из работы [6, формула (30) и выражение (47)], получаем (18), (19).

Доказательство выражений (14) — (16). Подставляем выражения (28), (29) из работы [6] в соотношение (13) настоящей статьи. Получается интеграл, по структуре совпадающий с интегралом в левой части равенства (47) (если положить в последнем $\lambda_j = 0$).

Доказательство теоремы 2. А. Выражение (17) следует из равенств

$$\begin{aligned} \psi'(z) &= \psi^*(z) \operatorname{diag} \{u_{11}, \dots, u_{1n}\} = \Phi_1(z) T'_1 = \\ &= Z_1(z) \operatorname{diag} \{g_1, \dots, g_n\} T'_1. \end{aligned}$$

Б. Рассмотрим случай $v = 4, n = 3; n \geq 7$. Пусть у ф. м. X_∞ исходное положение точки ξ в окрестности точки $\xi = \infty$, слева (или на) от луча f_n (если смотреть из точки $\xi = \lambda_n$) см. [1]. Произведем аналитическое продолжение ф. м. X_∞ по указанной на рис. 1 кривой до точки, которая находится в окрестности точки $\xi = \lambda_v$, слева (или на) от луча f_v (если смотреть из точки $\xi = \lambda_v$). В результате $X_\infty = X_v L_v$, где L_v — постоянная неособая матрица. Как показано в [1], $[T'_1]_{vk} = [L_v]_{1k}$. Предположим, что аргумент левой сторо-

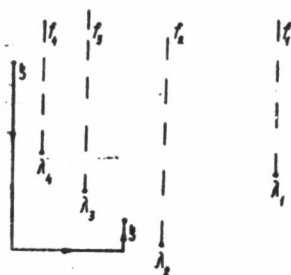


Рис. 1

ны луча τ_k в t -плоскости в [6] совпадает с аргументом левой стороны луча f_k ($k = \overline{1, n}$) в ξ -плоскости в [1], т. е. лучи τ_k расположены в t -плоскости по отношению к проведенным из начала координат векторам λ_k точно также, как расположены в ξ -плоскости по отношению к проведенным из начала координат векторам λ_k лучи f_k . Поэтому при указанном аналитическом продолжении ф. м. X_∞ соответственно в t -плоскости точка ξ перемещается по такой же кривой от исходного положения в окрестности точки $t = \infty$

слева (или на) от луча τ_n (если смотреть из точки $t = \lambda_n$) в окрестность точки $t = \lambda_n$ слева от луча τ_n (если смотреть из точки $t = \lambda_n$) см. [6]. При этом петля $A_{\xi\infty}$ переходит в петлю $\sqrt{A_{\xi\infty}}$ (рис. 2), а петли A_l ($l = \overline{1, n}$) не деформируются, т. е. $\sqrt{A_l} = A_l$. Для того чтобы после аналитического продолжения выразить решение W_∞ через элементы ф. м. X_v , стянем петлю A_∞ вокруг конечных особых точек подинтегрального выражения λ_l ($l = \overline{1, n}$) и ξ . Обозначим такую петлю через $\sqrt{A_\infty}$. Деформируем петли $\sqrt{A_{\xi\infty}}$, $\sqrt{A_\infty}$ так, чтобы представить их в виде совокупности петель A_l , $A_{\xi v}$, A_l^{-1} , $A_{\xi v}^{-1}$. Это дает (см. рис. 2)

$$\sqrt{A_{\xi\infty}} = A_n A_{n-1} \dots A_{v+1} A_{\xi v} A_{v+1}^{-1} A_{v+2}^{-1} \dots A_n^{-1}; \quad (48)$$

$$\sqrt{A_\infty} = A_1^{-1} A_2^{-1} \dots A_v^{-1} A_{\xi v}^{-1} A_{v+1}^{-1} A_{v+2}^{-1} \dots A_n^{-1}. \quad (49)$$

Подчеркнем, что и для $\sqrt{A_\infty}$ выражение зависит от положения точки ξ , т. е. от v . Обозначим через W_∞ , $W_l^{[\infty]}$, $W_\xi^{[\infty]}$ значения интеграла (3) в [6], взятого соответственно по петлям A_∞ , A_l , $A_{\xi\infty}$ при исходном положении точки ξ в окрестности точки $t = \infty$. Тогда элементы ф. м. X_∞ по определению имеют вид

$$W_{\infty\xi} = \delta W_\infty - (1 - e^{i2\pi x}) W_\xi^{[\infty]}, \quad \delta = (1 - e^{i2\pi y}); \quad (50)$$

$$W_{l-1, l} = \delta_l W_{l-1}^{[\infty]} - \delta_{l-1} W_l^{[\infty]}, \quad l = \overline{2, n}. \quad (51)$$

Обозначим результат аналитического продолжения интегралов W_∞ , $W_l^{[\infty]}$, $W_\xi^{[\infty]}$ по кривой рис. 1 (т. е. интеграл (3) в [6], взятый соответственно по петлям $\sqrt{A_\infty}$, $\sqrt{A_l}$, $\sqrt{A_{\xi\infty}}$), через $\sqrt{W_\infty}$, $\sqrt{W_l^{[\infty]}}$, $\sqrt{W_\xi^{[\infty]}}$, а результат аналогичного продолжения элементов $W_{\infty\xi}$, $W_{l-1, l}$ ф. м. X_∞ соответственно через $\sqrt{W_{\infty\xi}}$, $\sqrt{W_{l-1, l}}$. Тогда по определению $\sqrt{W_{\infty\xi}} = \sqrt{W_\infty} \delta - \sqrt{W_\xi^{[\infty]}} (1 - e^{i2\pi x}); \quad (52)$

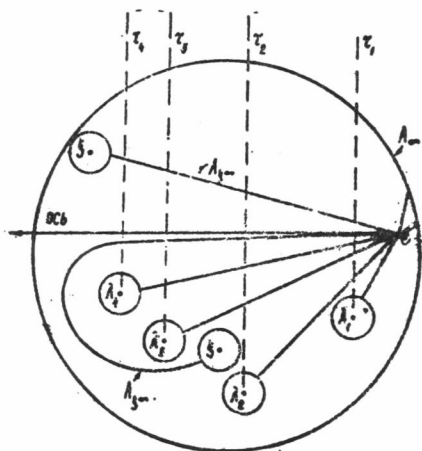


Рис. 2

$$\sqrt{W}_{l-1, l} = \sqrt{W}_{l-1}^{[\infty]} \delta_l - \sqrt{W}_l^{[\infty]} \delta_{l-1}, \quad l = \overline{2, n}. \quad (53)$$

Рассмотрим ф. м. X_k . Обозначим через $W_v, W_{\xi}^{[k]}$ значения интеграла (3) в [6], взятого соответственно по петлям $A_v, A_{\xi k}$, при исходном положении точки ξ в окрестности точки $t = \lambda_k$, вблизи (или на) левой стороны луча τ_k . Тогда по определению для элементов ф. м. X_k :

$$W_{lv} = \delta_v W_l - \delta_l W_v; \quad W_{k\xi} = \delta W_k - \delta_k W_{\xi}^{[k]}. \quad (53a)$$

Так как $\sqrt{A}_l = A_l$, то $\sqrt{W}_l^{[\infty]} = W_l$, а значит $\sqrt{W}_{l-1, l} = W_{l-1, l}$ ($l = \overline{2, n}$). Следовательно (см. (6) в [6]), $[L_v]_{lk} = \delta_{lk}$ ($k = \overline{2, v-1}; k = v+2, n$), где δ_{lk} — символ Кронекера. Отсюда следует, что ненулевыми могут быть только те элементы $[T_1]_{vk} = [L_v]_{lk}$, которые фигурируют в выражениях (20) — (22). Следовательно, остается найти только $[L_v]_{11}, [L_v]_{1v}, [L_v]_{1, v+1}$. Из соотношений (48), (49) следует

$$\begin{aligned} \sqrt{W}_{\xi}^{[\infty]} &= \delta [W_n^{\#} + W_{n-1} e^{i2\pi\alpha_n} + W_{n-2} e^{i2\pi(\alpha_n + \alpha_{n-1})} + \dots + \\ &+ W_{v+1} e^{i2\pi(\alpha_n + \dots + \alpha_{v+2})}] + W_{\xi}^{[k]} e^{i2\pi(\alpha_n + \dots + \alpha_{v+1})}; \end{aligned} \quad (54)$$

$$\begin{aligned} \sqrt{W}_{\infty} &= - \sum_{l=1}^v W_l e^{-i2\pi(\alpha_1 + \dots + \alpha_l)} - \sum_{l=v+1}^n W_l e^{-i2\pi(\alpha_1 + \dots + \alpha_l + \xi)} - \\ &- W_{\xi}^{[k]} e^{-i2\pi(\alpha_1 + \dots + \alpha_v + \xi)}. \end{aligned} \quad (55)$$

Подставляя соотношения (54), (55) в выражении (52), получаем

$$\begin{aligned} \sqrt{W}_{\infty\xi} &= -\delta \sum_{l=1}^v W_l e^{-i2\pi(\alpha_1 + \dots + \alpha_l)} - \delta \sum_{l=v+1}^{n-1} W_l e^{i2\pi(\alpha_{l+1} + \dots + \alpha_n)} - \\ &- \delta W_n - W_{\xi}^{[k]} e^{i2\pi(\alpha_{v+1} + \dots + \alpha_n)} (1 - e^{-i2\pi(\alpha_1 + \dots + \alpha_n)}). \end{aligned} \quad (56)$$

Выражая из соотношения $X_{\infty} = X_v L_v$ элемент $[X_{\infty}]_{1k}$ через элементы ф. м. X_v , а сами эти элементы — через интегралы $W_j, W_{\xi}^{[v]}$ (см. выражения (9), (10) в [6]), получаем ($[L_v]_{lk} \equiv \theta_l$):

$$\begin{aligned} [X_{\infty}]_{1k} &= \theta_2 \delta_2 W_1 + \sum_{l=2}^{v-2} (\theta_{l+1} \delta_{l+1} - \theta_l \delta_{l-1}) W_l + \\ &+ (\theta_v \delta_{v+1} - \theta_{v-1} \delta_{v-2}) W_{v-1} + [\theta_1 \delta + (\beta_v \delta - \delta_{v+1}) \theta_{v+1}] W_v + \\ &+ (\theta_{v+2} \delta_{v+2} - \theta_v \delta_{v-1} + \theta_{v+1} \delta_v) W_{v+1} + \sum_{l=v+2}^{n-1} (\theta_{l+1} \delta_{l+1} - \theta_l \delta_{l-1}) W_l - \\ &- \theta_n \delta_{n-1} W_n - (\theta_1 \delta_v + \theta_{v+1} \beta_v \delta_v) W_{\xi}^{[v]}; \quad \beta_v = \frac{\delta_{v+1}}{v} \quad (v \neq n). \end{aligned} \quad (57)$$

Приравнивая коэффициенты при $W_l, W_{\xi}^{[v]}$ в выражениях (56), (57), имеем систему уравнений для $[L_v]_{1l}$ ($[L_v]_{1l} \equiv \theta_l$), из которой можно выделить следующую подсистему:

$$\begin{aligned} \delta_v \theta_1 + \delta_v \beta_v \theta_{v+1} &= e^{i2\pi(\alpha_{v+1} + \dots + \alpha_n)} (1 - e^{-i2\pi(\alpha_1 + \dots + \alpha_n)}) \\ \delta \theta_1 + (\beta_v \delta - \delta_{v+1}) \theta_{v+1} &= -\delta e^{-i2\pi(\alpha_1 + \dots + \alpha_v)}. \end{aligned} \quad (58)$$

Из подсистемы (58) следует выражение (20) ($[L_v]_{11} = [T_1]_{v1}$). Из изложенного выше следует: $\sqrt{W}_{v-1, v} = \delta_v W_{v-1} - \delta_{v-1} W_v \equiv W_{v-1, v}$.

Приравнивая коэффициенты при W_l , $W_l^{[v]}$ в этом выражении и в (57) ($[L_v]_{lv} \equiv 1$), можно выделить следующую подсистему:

$$\theta_1 + \beta_v \theta_{v+1} = 0; \quad \delta \theta_1 + (\beta_v \delta - \delta_{v+1}) \theta_{v+1} = -\delta_{v-1}, \quad (59)$$

из которой следует выражение (21). Аналогично из выражений $\sqrt{W}_{v, v+1} = W_{v, v+1} = \delta_{v+1} W_v - \delta_v W_{v+1}$ и (57) ($\theta_l \equiv [L_v]_{l, v+1}$) получаем подсистему

$$\theta_1 + \beta_v \theta_{v+1} = 0; \quad \delta \theta_1 + (\beta_v \delta - \delta_{v+1}) \theta_{v+1} = \delta_{v+1}, \quad (60)$$

из которой следует выражение (22). Прочие случаи $v=1, 2, 3, n-2, n-1, n$; $n=2, 6$) доказываются совершенно аналогично.

Схема доказательства теоремы 1. Существуют соотношения: 1) $\Phi_1(z e^{i2\pi}) = \Phi_1(z) Y$, где Y — постоянная неособая («циклическая») матрица; 2) $Y = T_1 e^{i2\pi \Delta} T_1^{-1}$ ([1], формула (35)); 3) $F_2 F_1 = e^{-i2\pi k} Y$, где $R = \text{diag}\{r_1, \dots, r_n\}$ и матрицы F_1, F_2 относятся к ф. м. $\Phi_1(z)$ (см. [1] по списку литературы работы [1], теоремы 1.2, 1.7). По известным матрицам Y и R матрицы F_1, F_2 могут быть однозначно определены по теореме о разложении матрицы в произведение треугольных матриц. Именно таким образом они были найдены для ф. м. $\Phi_1(z)$, поскольку матрица T_1 дана в п. Б теоремы 2. Из соотношений $\Phi_1(z) = \Phi_{L+1}(z) F_1$, $\Phi_{L+1}(z) = \Phi_{2L+1}(z) F_2$ и определения ф. м. $Z_1(z)$ легко следует, что матрицы $\text{diag}\{g_1, \dots, g_n\} F_k \text{diag}\{g_1^{-1}, \dots, g_n^{-1}\}$ ($k=1, 2$; величины g_j задаются формулами (18), (19)) — это соответственно матрицы F_k для ф. м. $Z_1(z)$. Так были получены выражения (10) — (12).

Список литературы: 3. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М., 1961. 703 с. 4. Айнс Э. Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Х., 1939. 719 с. 5. Кратцер А., Франц В. Трансцендентные функции. М., 1963. 466 с. 6. Смилянский В. Р. Матрицы перехода для фундаментальных систем решений уравнения Жордана-Похгаммера. // Мат. анализ и диф. уравнения. Новосибирск, 1987. С. 131—148. 7. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция. Функция Лежандра. М., 1965. 294 с.

Поступила в редколлегию 22.11.87