

ОСРЕДНЕНИЕ ГУСТОПЕРФОРИРОВАННЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК

Хорошо известно, что расчет деформаций тонких упругих оболочек, содержащих различного рода микронеоднородности, является весьма сложной задачей. Когда же число микронеоднородностей велико, непосредственное применение стандартных численных методов становится невозможным. Оболочки такого сорта естественно заменять однородными телами со специально подобранными эффективными упругими характеристиками.

В заметке предлагается метод осреднения краевых задач для круговых цилиндрических оболочек, ослабленных большим числом мелких отверстий. В основе доказательств теорем осреднения лежат вариационные методы, развитые в [1].

Аналогичная задача об осреднении перфорированной пластины решена в работе [2]. В [3, 4] проведено осреднение краевых задач для эллиптических систем дифференциальных уравнений в областях с пустотами. Поскольку система уравнений теории тонких оболочек является эллиптической [5], настоящую заметку следует рассматривать как продолжение [3, 4]. При этом будут использованы обозначения, введенные в этих работах [3, 4].

Итак, рассмотрим круговую цилиндрическую оболочку длины a , радиуса R . Параметризуем точки ее срединной поверхности с помощью переменных $x = (x_1, x_2)$, где x_1 — длина дуги меридиана, x_2 — параллели. Малую толщину оболочки обозначим через 2σ . Пусть $U(x) = (u^{(1)}(x), u^{(2)}(x), u^{(3)}(x))$ — вектор смещения точек срединной поверхности, причем $u^{(i)}(x)$ ($i = 1, 2$) — тангенциальные, $u^{(3)}(x)$ — нормальное смещения.

Связь между деформациями оболочки и смещениями дается формулами

$$\begin{aligned} \varepsilon_1(U) &= \frac{\partial u^{(1)}}{\partial x_1}, \quad \varepsilon_2(U) = \frac{\partial u^{(2)}}{\partial x_2} - \frac{u^{(3)}}{R}, \quad \omega(U) = \frac{\partial u^{(1)}}{\partial x_2} + \frac{\partial u^{(2)}}{\partial x_1}, \\ \kappa_1(U) &= \frac{\partial^2 u^{(3)}}{\partial x_1^2}, \quad \kappa_2(U) = \frac{\partial^2 u^{(3)}}{\partial x_2^2}, \quad \tau(U) = \frac{\partial^2 u^{(3)}}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{1}{R} \frac{\partial u^{(2)}}{\partial x_1}. \end{aligned} \quad (1)$$

Введем область изменения параметров $\Omega = \{(x_1, x_2) : 0 < x_1 < a, 0 < x_2 < l\}$ и в ней билинейную форму $L_2(U, V) = \int_{\Omega} W(U, V) dx$,

$$\begin{aligned} W(U, V) &= \frac{2E\sigma}{1-\nu^2} \{ \varepsilon_1(U) \varepsilon_1(V) + \varepsilon_2(U) \varepsilon_2(V) + \\ &+ \nu [\varepsilon_1(U) \varepsilon_2(V) + \varepsilon_2(U) \varepsilon_1(V)] + \frac{1-\nu}{2} \omega(U) \omega(V) + \\ &+ \frac{\sigma^2}{3} [\kappa_1(U) \kappa_1(V) + \kappa_2(U) \kappa_2(V) + \nu (\kappa_1(U) \kappa_2(V) + \\ &+ \kappa_2(U) \kappa_1(V)) + 2(1-\nu) \tau(U) \tau(V)] \}. \end{aligned} \quad (2)$$

В (2) E — модуль Юнга, ν — коэффициент Пуассона материала, из которого изготовлена оболочка. Нетрудно видеть [5], что $L_2(U, U)$ представляет удвоенную потенциальную энергию деформации оболочки на смещении $U(x)$. Подставив в (2) компоненты деформации (1), получим

$$W(U, V) = \frac{2E\sigma}{1-\nu^2} \sum_{p, q=1}^3 \sum_{\substack{|\alpha_p| \leq n_p \\ |\beta_q| \leq n_q}} a_{\alpha_p \beta_q} (D^{\alpha_p} u^{(p)})(x) \cdot (D^{\beta_q} v^{(q)})(x),$$

где α_p, β_q — двухкомпонентные мультииндексы; $n = (n_1, n_2, n_3) = (1, 1, 2)$ — фиксированный мультииндекс.

Далее, пусть $F(x) = (f^{(1)}(x), f^{(2)}(x), f^{(3)}(x))$ — фиксированная вектор-функция с компонентами $f^{(k)}(x) \in C(\bar{\Omega})$ ($k = 1, 2, 3$). Назовем задачей равновесия для оболочки, защемленной по краю, под действием заданной нагрузки $F(x)$ задачу об отыскании решения $U \in \dot{H}^n(\Omega)$ вариационного уравнения $L_2(U, V) = (F, V)_{0,2} \forall V \in \dot{H}^n(\Omega)$. Напомним, что используются обозначения, введенные в [3, 4]. Рассмотрим теперь области Ω_s , полученные из Ω удалением большого числа s непересекающихся замкнутых множеств F_{is} ($i = 1, \dots, s$), итак, $\Omega_s = \Omega \setminus F_s$, $F_s = \bigcup_{(i)} F_{is}$. Считаем все F_{is} кругами радиуса

$r_s = s^{-\frac{1}{2}}$. В результате получаем перфорированную оболочку с s отверстиями. Задача равновесия для перфорированной оболочки при нагрузке $F(x)$ принимает вид

$$L_s(U_s, V_s) = (F, V_s)_{0,s} \forall V_s \in H_s^n \quad (3)$$

см. [3]. Примем, что расположение отверстий оболочки регулярно [3]. Нашей задачей является отыскание асимптотики решений $U_s(x)$ уравнений (3) при $s \rightarrow \infty$.

Оказывается, при некоторых предположениях (см. [3]) $U_s(x)$ сходятся при $s \rightarrow \infty$ к решению осредненного уравнения

$$\tilde{L}_2(U, V) = \sum_{k=1}^3 (f^{(k)}, v^{(k)})_{L^2_b(\Omega)} \quad \forall V \in \dot{H}^n(\Omega)$$

в следующем смысле: $\lim_{s \rightarrow \infty} \|U_s - U\|_{\dot{H}_s^{(0,0,1)}} = 0$. Способ построе-

ния коэффициентов осредненной формы $\tilde{L}_2$ и весовой функции $b(x)$ изложен в [3] и потому здесь не приводится.

Наибольший интерес представляет рассмотрение практически важного случая периодического распределения отверстий, геометрия которого описана в [4]. В этом случае нахождение коэффициентов осредненной формы удастся свести к решению набора ячеечных задач. Построение этих ячеечных задач в теории оболочек весьма нетривиально из-за наличия в исходном функционале энер-

гии слагаемых, содержащих произведения компонент смещений и их производных. Поэтому приведенные ниже результаты являются основными в настоящей заметке.

Осредненная форма имеет вид $\tilde{L}_2(U, V) = \int_{\Omega} \tilde{W}(U, V) dx$,

$$\tilde{W}(U, V) = \sum_{p, q=1}^3 \sum_{|\alpha_p| \leq n_p} \tilde{a}_{\alpha_p \beta_q} (D^{\alpha_p} u^{(p)})(x) \cdot (D^{\beta_q} v^{(q)})(x). \quad (4)$$

$$|\beta| \leq n$$

Пусть P (как и в [4]) — стандартная ячейка, представляющая собой прямоугольник Π с центром в начале координат со сторонами c_1, c_2 , из которого выброшен единичный круг. Площадь Π , равную $c_1 c_2$, обозначим через S . Для всякого двухкомпонентного мультииндекса α_p обозначим через $P_{\alpha_p}(x)$ трехкомпонентную вектор-функцию с единственной отличной от нуля p -й компонентой, равной $(\alpha_p!)^{-1} x^{\alpha_p}$.

Введем, наконец, вспомогательный функционал

$$\begin{aligned} \Delta_P(Y, Z; \gamma_1, \gamma_2) = & \frac{2E\sigma}{1-\nu^2} \int_P \{ \varepsilon_1(Y) \varepsilon_1(Z) + (y_{x_2}^{(2)} - \frac{\gamma_1}{R}) \times \\ & \times (z_{x_2}^{(2)} - \frac{\gamma_2}{R}) + \nu [y_{x_1}^{(1)} (z_{x_2}^{(2)} - \frac{\gamma_2}{R}) + z_{x_1}^{(1)} (y_{x_2}^{(2)} - \frac{\gamma_1}{R}) + \\ & + \frac{1-\nu}{2} \omega(Y) \omega(Z) + \frac{\sigma^2}{3} [\kappa_1(Y) \kappa_1(Z) + \kappa_2(Y) \kappa_2(Z) + \\ & + \nu (\kappa_1(Y) \kappa_2(Z) + \kappa_1(Z) \kappa_2(Y)) + 2(1-\nu) \tau(Y) \tau(Z)] \} dx, \\ & (\gamma_1, \gamma_2 \in R). \end{aligned}$$

Коэффициенты осредненной формы (4) вычисляются по формулам

$$\tilde{a}_{\alpha_p \beta_q} = S^{-1} \Delta_P(Z_{\alpha_p}, Z_{\beta_q}; \delta_{p3} \delta_{|\alpha_p|0}, \delta_{q3} \delta_{|\beta_q|0})$$

($p, q = 1, 2, 3; |\alpha_p| \leq n_p, |\beta_q| \leq n_q$), где δ — символ Кронеккера, Z_{α_p} ($p = 1, 2, 3; |\alpha_p| \leq n_p$) — решения следующих вариационных задач в ячейке P .

1. При $p = 1, 2; |\alpha_p| = 0, Z_{\alpha_p} = 0$.

2. При $p = 3; |\alpha_p| = 0, Z_{\alpha_p}$ минимизирует $\Delta_P(Y, Y; 1, 1)$ в классе периодических на противоположных сторонах Π вектор-функций $Y(x) \in H^n(P)$.

3. При $p = 1, 2, 3; 0 < |\alpha_p| \leq n_p$ минимизирует $\Delta_P(Y, Y; 0, 0)$ в классе вектор-функций $Y(x) \in H^n(P)$ таких, что $Y(x) - P_{\alpha_p}(x)$ периодичны на противоположных сторонах Π .

Список литературы: 1. Марченко В. А., Хрусьов Е. Я. Краевые задачи в областях с мелкозернистой границей. — К.: Наук. думка, 1974. — 285 с. 2. Берлянд Л. В. Асимптотическое описание тонкой пластины с большим числом мелких отверстий. — Докл. АН УССР. Сер. А, 1983, № 10, с. 5—8. 3. Чудинович И. Ю. Осреднение эллиптических систем дифференциальных уравнений

в областях с пустотами. 1. Общая теорема об осреднении.— Теория функций функцион. анализ и их прил., 1984, вып. 42, с. 21—26. 4. Чудинович И. Ю. Осреднение эллиптических систем дифференциальных уравнений в областях с пустотами. 2. Случай периодического распределения пустот.— Теория функций, функцион. анализ и их прил., 1985, вып. 44, с. 133—136. 5. Гольденвейзер А. Л., Лидский В. Б., Товстик П. Е. Свободные колебания тонких упругих оболочек.— М.: Наука, 1979.—383 с.

Поступила в редколлегию 05.12.84-