Выпуск 11 1970

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ КОРНЕВЫХ КРАТНОСТЕЙ ОПЕРАТОРА

В. О. Галета, В. Э. Кацнельсон

В этой работе мы устанавливаем один факт о предельном поведении спектров операторов A_n, где $A_n (1 \leqslant n < \infty)$ — последовательность вполне непрерывных операторов, слабо сходящаяся к вполне непрерывному оператору A и удовлетворяющая некоторым дополнительным ограничениям*.

Пусть $\mathfrak{B}$ — банахово пространство, X — замкнутый оператор в $\mathfrak{B}$, Γ — — произвольный замкнутый (простой или сложный) контур в комплексной плоскости, ограничивающий область G_r и обладающий относительно оператора X следующими свойствами:

а) Внутри G_r имеется конечное число $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \ldots, \lambda_n$ собственных значений X, которым соответствует нормально отщепляющиеся корневые подпространства размерностей $\nu_x(\lambda_1), \nu_x(\lambda_2), \ldots, \nu_x(\lambda_n)$. (Число $\nu(\lambda_j)$ называется корневой кратностью собственного значения λ_j).

б) Все остальные точки $\lambda (\lambda \neq \lambda_j)$ замкнутой области G_Γ являются регулярными точками оператора X.

Корневым числом $\nu_X(\Gamma)$ оператора X, соответствующим контуру Γ, называется сумма корневых кратностей всех собственных значений оператора X, попавших внутрь Γ, т. е. число

$$\nu_X(\Gamma) = \nu_X(\lambda_1) + \nu_X(\lambda_2) + \ldots + \nu_X(\lambda_n).$$

Хорошо известна следующая принадлежащая Гохбергу и Крейну [1] теорема** об устойчивости корневых чисел:

Пусть Γ — замкнутый контур, ограничивающий область G_Γ и обладающий относительно ограниченного оператора A свойствами а) и б), и пусть последовательность операторов $A_n (1 \leqslant n < \infty)$ сходится к оператору A по норме, т. е.

$$\| A - A_n \| \to 0 \quad (n \to \infty).$$

Тогда при всех n, начиная с некоторого $N < \infty$, контур Γ обладает свойствами а) и б), и

$$\nu_{A_n}(\Gamma) = \nu_A(\Gamma) \quad (n > N).$$

Если в условии этой теоремы заменить сходимость по норме последовательности A_n к A сильной (и тем более слабой) сходимостью, то ее утверждение перестанет быть справедливым, как показывает следующий пример. Пусть $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ — ортонормированная последовательность векторов в гильбертовом пространстве, и оператор A_n задается формулой

$$A_n = (\,.\,, e_n) e_n.$$

---

* Всюду в работе мы пользуемся терминологией И. Ц. Гохберга и М. Г. Крейна «Основные положения о дефектных числах, корневых числах и индексах линейных операторов». УМН, т. XII. вып. 2 (74), 1957.

* Мы формулируем эту теорему в несколько меньшей общности, чем в [1].

Операторы A_n одномерны, последовательность $A_n (1 \leqslant n < \infty)$ сильно сходится к нулевому оператору, но число $\lambda = 1$ является собственным значением каждого из операторов A_n.

В этой работе мы получаем некоторую модификацию теоремы Гохберга—Крейна об устойчивости корневого числа, заменяя условие сходимости последовательности операторов A_n к A по норме некоторым другим условием.

Будем говорить, что множество A_α ($\alpha \in I, I$ — некоторое множество индексов) *операторов в* $\mathfrak{B}$ *равномерно вполне непрерывно, если существует* компакт $K \subset \mathfrak{B}$ такой, что при всех $\alpha \in I$ образ замкнутого единичного шара B пространства $\mathfrak{B}$ $(B = \{x . \|x\| \leqslant 1\})$ содержится в K:

$$A_\alpha B \subset K \qquad (\alpha \in I).$$

Имеет место

Теорема 1. *Пусть A — оператор в $\mathfrak{B}$, $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность операторов, слабо сходящаяся к A, и пусть множество операторов $A_n (1 \leqslant \leqslant n < \infty)$ равномерно вполне непрерывно. Пусть Γ — замкнутый контур, ограничивающий область G_Γ и обладающий относительно оператора A свойствами а) и б). Тогда при всех n, больших некоторого $N < \infty$, контур Γ состоит из регулярных точек операторов A_n, и*

$$\nu_{A_n}(\Gamma) = \nu_A(\Gamma) \qquad (n \geqslant N).$$

Если $\mathfrak{D}_\Gamma(A)$ и $\mathfrak{D}_\Gamma(A_n)$ — спектральные подпространства операторов A и A_n соответственно, отвечающие частям их спектров, содержащимся внутри Γ, а $\Theta(\mathfrak{D}_\Gamma(A), \mathfrak{D}_\Gamma A_n))$ — растворы этих подпространств, то

$$\Theta \mathfrak{D}_\Gamma(A), \mathfrak{D}_\Gamma(A_n)) \to 0 \qquad (n \to \infty).$$

Доказательство теоремы разобьем на ряд пунктов.

1°. Последовательность $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ сильно сходится к A. Пусть $x \in \mathfrak{B}$. Можем считать, что $\|x\| = 1$. Пусть K —компакт, содержащий все множества $A_n B (1 \leqslant n < \infty)$, B — замкнутый единичный шар в $\mathfrak{B}$. Если бы последовательность векторов $\{A_n x\}_{n=1}^{\infty}$ не имела сильного предела, то так как $A_n x \in K (1 \leqslant n < \infty)$, она имела бы два различных частичных сильных (и значит слабых) предела. Это противоречит предположенной слабой сходимости A_n к A.

2°. Оператор A вполне непрерывен. Пусть $x \in \mathfrak{B}$, $\|x\| = 1$. Тогда $A_n x \in \in K (1 \leqslant n < \infty)$. Согласно 1°, $\|A_n x - Ax\| \to 0$ $(n \to \infty)$. Поэтому $Ax \in K$.

3°. Существуют такие константы $N < \infty$ и $C < \infty$, что для всех $n > N$ контур Γ состоит из регулярных точек операторов A_n, и выполняются неравенства

$$\|(\lambda I - A_n)^{-1}\| \leqslant C \;(n \geqslant N,\; \lambda \in \Gamma). \tag{1}$$

Если это утверждение неверно, то существуют последовательность $\lambda_n \in \Gamma$ и последовательность $x_n \in \mathfrak{B}$, $\|x_n\| = 1$, и $\lambda_n \in \Gamma$ такие, что в смысле сильной сходимости

$$A_n x_n - \lambda_n x_n \to 0 \qquad (n \to \infty). \tag{2}$$

Так как $A_n x_n \in K$, а $\lambda_n \in \Gamma$, то существует подпоследовательность $n_k (1 \leqslant \leqslant k < \infty)$ такая, что $\lambda_{n_k} \to \lambda (k \to \infty)$, $\lambda \in \Gamma$ и $\|A_{n_k} x_{n_k} - y\| \to 0$, $(k \to \infty)$, $y \in \mathfrak{B}$. Поскольку контур Γ состоит из регулярных точек оператора A, а согласно 2° оператор A вполне непрерывен, то $\lambda \neq 0$. Поэтому должен существовать сильный предел x последовательности x_{n_k}. Так как последовательность A_n сильно сходится к A, то переходя к пределу в (2) по последовательности n_k, получим

$$Ax - \lambda x = 0,$$

т. е. число $\lambda \in \Gamma$ является собственным значением оператора A, а это противоречит условию теоремы.

4°. Как следует из 3°, при всех n, начиная с некоторого $N < \infty$, существуют риссовские проекторы

$$P_\Gamma(A_n) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma (\lambda I - A_n)^{-1} d\lambda.$$

Пусть

$$P_\Gamma(A) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma (\lambda I - A)^{-1} d\lambda.$$

Так как и оператор A и операторы A_n вполне непрерывны, то проекторы $P_\Gamma(A)$ и $P_\Gamma(A_n)$ конечномерны.

5°. Множество операторов $P_\Gamma(A_n)$ $(N \leqslant n < \infty)$ равномерно вполне непрерывно.

Так как оператор $P_\Gamma(A)$ конечномерен, то нам достаточно показать, что множество операторов $P_\Gamma(A) - P_\Gamma(A_n)$ $(N \leqslant n < \infty)$ равномерно вполне непрерывно. Так как

$$(\lambda I - A)^{-1} - (\lambda I - A_n)^{-1} = (\lambda I - A)^{-1}(A - A_n)(\lambda I - A_n)^{-1},$$

то

$$P_\Gamma(A) - P_\Gamma(A_n) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma (\lambda I - A)^{-1}(A - A_n)(\lambda I - A_n)^{-1} d\lambda. \qquad (3)$$

Так как множество $\{A_n\}$ $(N \leqslant n < \infty)$, а значит и множество $\{A - A_n\}$ $(N \leqslant n < \infty)$ операторов равномерно вполне непрерывно, то из (1) следует, что существует компакт $K_1 \in \mathfrak{B}$ такой, что

$$(A - A_n)(\lambda I - A_n)^{-1} B \subset K_1 \quad (n \geqslant N, \ \lambda \in \Gamma),$$

где $B = \{x \in \mathfrak{B} \colon \|x\| \leqslant 1\}$.

Оператор-функция $(\lambda I - A)^{-1}$ непрерывно отображает компакт $\Gamma \times K_1$ в $\mathfrak{B}$. Поэтому существует такой компакт $K_2 \subset \mathfrak{B}$, что

$$(\lambda I - A)^{-1} \cdot (A - A_n) \cdot (\lambda I - A_n)^{-1} B \subset K_2 \quad (n \geqslant N, \ \lambda \in \Gamma).$$

Пусть l — длина контура Γ. Множество $K = \bigcup \lambda K_2$ $0 \leqslant |\lambda| \leqslant l$ является абсолютно выпуклым компактом в $\mathfrak{B}$, и

$$\int (\lambda I - A)^{-1} \cdot (A - A_n) \cdot (\lambda I - A_n)^{-1} d\lambda \cdot B \subset K \quad (n \geqslant N).$$

Таким образом,

$$[P_\Gamma(A) - P_\Gamma(A_n)] \cdot B \subset K.$$

6°. Если последовательность операторов T_n $(1 \leqslant n < \infty)$ сильно сходится к нулю, а V_n $(1 \leqslant n < \infty)$ — равномерно вполне непрерывное множество операторов, то

$$\|T_n V_n\| \to 0 \quad (n \to \infty).$$

В частности, если V — вполне непрерывный оператор, то

$$\| T_n V \| \to 0 \ (n \to \infty).$$

Пусть B — замкнутый единичный шар в $\mathfrak{B}$. Нам нужно показать, что равномерно по $x \in B$

$$\| T_n V_n x \| \to 0 \ (n \to \infty).$$

Пусть K — компакт в $\mathfrak{B}$, $V_n B \subset K (1 \leqslant n < \infty)$. Так как последовательность T_n $(1 \leqslant n < \infty)$ сильно сходится к нулю, то равномерно по $y \in K$ $\| T_n y \| \to 0$ $(n \to \infty)$, а значит, и равномерно по $x \in B$ $\| T_n V_n x \| \to 0$ $(n \to \to \infty)$.

7°. Умножая равенство (3) на $P_\Gamma(A_n)$ справа, получим

$$[I - P_\Gamma(A)] \cdot P_\Gamma(A_n) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma (\lambda I - A)^{-1} \cdot (A_n - A) P_\Gamma(A_n) \cdot (\lambda I - A_n)^{-1} d\lambda. \quad (4)$$

Так как согласно 5° множество $P_\Gamma(A_n)$ $(N \leqslant n < \infty)$ равномерно вполне непрерывно, а согласно 1° последовательность $\{A_n - A\}_{n=1}^{\infty}$ сильно сходится к нулю, то по 6°

$$\| (A - A_n) \cdot P_\Gamma(A_n) \| \to 0 \ (n \to \infty). \quad (5)$$

Из (1), (5) и (4) следует, что

$$\| [I - P_\Gamma(A)] \cdot P_\Gamma(A_n) \| \to 0 \ (n \to \infty). \quad (6)$$

Аналогично, используя формулу

$$[I - P_\Gamma(A_n)] \cdot P_\Gamma(A) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma (\lambda I - A_n)^{-1} \cdot (A - A_n) P_\Gamma(A) (\lambda I - A)^{-1} d\lambda,$$

получаем

$$\| [I - P_\Gamma(A_n)] \cdot P_\Gamma(A) \| \to 0 \ (n \to \infty). \quad (7)$$

8°. Пусть $\mathfrak{D}_\Gamma(A)$ и $\mathfrak{D}_\Gamma(A_n)$ — спектральные подпространства операторов A и A_n, отвечающие частям их спектров, содержащимся внутри Γ; $P_\Gamma(A)$ и $P_\Gamma(A_n)$ являются проекторами на $\mathfrak{D}_\Gamma(A$ и $\mathfrak{D}_\Gamma(A_n)$ соответственно. Для раствора Θ $(\mathfrak{D}_\Gamma(A), \mathfrak{D}_\Gamma(A_n))$ этих подпространств имеет место неравенство

$$\Theta(\mathfrak{D}_\Gamma(A), \mathfrak{D}_\Gamma(A_n)) \leqslant \max [\| [I - P_\Gamma(A_n)] \cdot P_\Gamma(A) \|, \| [I - P_\Gamma(A)] \cdot P_\Gamma(A_n) \|]. \quad (8)$$

Из (6), (7) и (8) вытекает, что

$$\Theta(\mathfrak{D}_\Gamma(A), \mathfrak{D}_\Gamma(A_n)) \to 0 \ (n \to \infty), \quad (9)$$

откуда, как известно, [1], следует, что при некотором $N < \infty$

$$\dim \mathfrak{D}_\Gamma(A) = \dim \mathfrak{D}_\Gamma(A_n) \ (n \geqslant N),$$

т. е.

$$\nu_\Gamma(A) = \nu_\Gamma(A_n) \ (n \geqslant N).$$

Теорема доказана.

Замечание. Условия теоремы выполняются, например, в случае, когда $A_n = T \cdot R_n$, $A = T \cdot R$, где T — вполне непрерывный оператор, а последовательность операторов R_n слабо сходится к оператору R.

Из теоремы 1 легко следует

Теорема 2. *Пусть последовательность* $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ *операторов в* $\mathfrak{B}$ *слабо сходится к оператору* A, *и множество операторов* $A_n\,(1 \leqslant n < \infty)$ *равномерно вполне непрерывно. Пусть* $\mu_1(A), \mu_2(A), \ldots, \mu_k(A)$ — *последовательность всех ненулевых собственных значений оператора* A; $\mu_1(A_n), \mu_2(A_n), \ldots, \mu_k(A_n), \ldots$ — *последовательность всех ненулевых собственных значений оператора* A_n, *причем каждое собственное значение* μ *оператора входит в последовательность собственных значений оператора* $\nu(\mu)$ *раз, где* $\nu(\mu)$ — *корневая кратность* μ. *Тогда при надлежащей нумерации собственных значений операторов* A_n

$$\lim_{n\to\infty} \mu_k(A_n) = \mu_k(A) \quad (k = 1, 2, 3, \ldots).$$

Пример. Пусть $\{r_n(s)\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность функций на $[a, b]$, ограниченная равномерно по n,

$$|r_n(s)| \leqslant M < \infty \quad (1 \leqslant n < \infty,\ a \leqslant s \leqslant b),$$

где M — некоторая константа, и пусть последовательность $\{r_n(s)\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к определенной на $[a, b]$ функции $r(s)$ в том смысле, что для любых $s_1, s_2 \in [a, b]$

$$\lim_{n\to\infty} \int_{s_1}^{s_2} r_n(s)\,ds = \int_{s_1}^{s_2} r(s)\,ds.$$

Пусть $K(t, s)$ — функция, определенная на квадрате $a \leqslant t, s \leqslant b$, и пусть интегральные операторы A_n и A задаются формулами

$$A_n = \int_a^b K(t, s)\, r_n(s)\cdot ds,$$

$$A = \int_a^b K(t, s)\, r(s)\cdot ds.$$

Если функция $K(t, s)$ непрерывна по совокупности переменных, то последовательность A_n операторов в пространстве $C[a, b]$ является равномерно вполне непрерывным множеством, и A_n слабо сходится к $A\,(n \to \infty)$.

Если $K(t, s)$ измерима и

$$\int_a^b \int_a^b |K(t, s)|^2\,dt\,ds < \infty,$$

то последовательность $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ операторов в пространстве $L^2[a, b]$ является равномерно вполне непрерывным множеством, и A_n слабо сходится к $A\,(n \to \infty)$.

Отметим, что в обоих случаях последовательность A_n не сходится к A по норме, но, как следует из пункта 1° доказательства теоремы 1, сходится к A сильно.

Поступила 24 апреля 1969 г.