УДК 681.3:519.21

В. В. БАРАНОВ, канд. техн. наук

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ В МАРКОВСКИХ ПРОЦЕССАХ РЕШЕНИЙ С ДИСКОНТИРОВАНИЕМ

Пусть имеется марковский процесс решений $\{x_t,\ t=0,\ 1,\ \ldots\}$ с конечными множествами состояний E и управлений Y [1].

Отображение π: $E \to Y$ назовем решающей функцией, а последовательность таких решающих функций $\{\pi_0,\ \pi_1,\ \ldots\}$ — стратегией. Стратегию вида $\pi^\infty = \{\pi,\ \pi,\ \ldots\}$ назовем стационарной.

С каждой стратегией π свяжем функционал v_β вида

$$v_\beta(\pi)(x) = \lim_n M_x^\pi \sum_{t=0}^{n} \beta^t w(x_t,\ y_t),\ x \in E,$$

где $w(x,\ y)$ — функция непосредственных выигрышей, начисляемых за применение управления $y \in Y$ в состоянии $x \in E$; $\beta\ (0 < \beta < 1)$ — коэффициент дисконтирования. Математическое ожидание здесь берется по мере, порождаемой переходной функцией $Q(x,\ z|y)$, $x,\ z \in E$, $y \in Y$, которая предполагается заданной для каждого $y \in J$.

Если существует стратегия π^* такая, что $v_\beta(\pi^*) \geqslant v_\beta(\pi)$ для всех π, то будем называть ее v_β-оптимальной.

Задача состоит в построении численной процедуры выбора такой стратегии.

Эта задача обычно решается либо с помощью алгоритма Ховарда [2], либо путем сведения к задаче линейного программирования [3]. Однако, оба метода обладают одним и тем же весьма существенным недостатком, состоящем в необходимости решения систем уравнений на каждой итерации. Это приводит к тому, что задачи большой размерности оказываются трудно либо вообще не решаемы. С целью устранения этого недостатка были предприняты попытки построить оптимизационную процедуру, основанную на рекуррентных соотношениях [4, 5]. Данная работа завершает эти попытки в виде простого и эффективного алгоритма.

Пусть u — некоторая конечнозначная функция на E и Q^π — матрица переходных вероятностей с элементами $Q(x,\ z|\pi(x) = y)$. Введем линейный монотонный оператор $Q(\pi)$ вида

$$Q(\pi)u(x) = \sum_{z \in E} u(z)Q(x,\ z|\pi(x)),\ x \in E.$$

Далее, введем оператор F_β: $F_\beta(\pi)u(x) = w(\pi)(x) + \beta Q(\pi)u(x)$, $x \in E$, где $w(\pi)(x) = w(x,\ \pi(x)) = w(x,\ y)$, $y = \pi(x)$.

Имеют место следующие свойства оператора F_β [6]:

а) оператор F_β монотонен;

$$\text{б)}\ \lim_n F_\beta^n(f)u(\pi) = v_\beta(f^\infty); \tag{1}$$

В частности,

$$\lim_{n} [F_\beta^n(f)\,0](x) = v_\beta(f^\infty)(x); \tag{2}$$

$$\text{в)}\quad F_\beta(\pi)\,v_\beta(\pi^\infty) = v_\beta(\pi^\infty). \tag{3}$$

Нетрудно видеть, что оператор F_β определяет рекуррентное соотношение вида

$$v_\beta(f\pi) = F_\beta(f)\,v_\beta(\pi). \tag{4}$$

Определим оператор U_β вида $U_\beta v_\beta(\pi) = \max_f F_\beta(f)\,v_\beta(\pi)$. Решающую функцию σ такую, что $U_\beta v_\beta(\pi) = \max_f F_\beta(f)\,v_\beta(\pi) = F_\beta(\sigma)\,v_\beta(\pi)$, назовем U_β — порожденной. Любую стратегию, составленную из U_β-порожденных решающих функций, также будем называть U_β-порожденной.

Заметим, что оператор U_β обладает такими же свойствами, что и оператор F_β. Однако, $U_\beta u \geqslant F_\beta u$.

Введем, наконец, оператор $\Gamma_\beta = \Gamma_\beta(f\pi)$ вида $\Gamma_\beta(f\pi)\,u = [F_\beta \times \times (f) - F_\beta(\pi)]\,u = F_\beta(f)\,u - F_\beta(\pi)\,u$. Обозначим, далее,

$$\hat{\Gamma}_\beta u = \max_f \Gamma_\beta(f,\ \pi)\,u = [U_\beta - F_\beta(\pi)]\,u.$$

Используя введенные операторы, докажем ряд утверждений, которые обосновывают возможность построения эффективной оптимизационной процедуры.

При этом будем исходить из следующего утверждения:

Теорема 1. *Пусть f и π две стационарные стратегии. Если в некоторой точке $x \in E$ $\Gamma_\beta(f,\ \pi)\,v_\beta(\pi)(x) > 0$, то $v_\beta(f)(x) > v_\beta(\pi)(x)$.*

Эта теорема с небольшими изменениями доказывается так же как в [6]. Поэтому доказательство мы опускаем.

Из этой теоремы теперь нетрудно получить

Следствие 1. *Если стратегия π^∞ удовлетворяет уравнению вида $\max_f \Gamma_\beta(f,\ \pi)\,v_\beta(\pi^\infty)(x) = 0 \quad \forall x \in E$, то она v_β-оптимальна.*

Из этого следствия ясно, что для построения оптимизационной процедуры естественно использовать оператор $\hat{\Gamma}_\beta$. Для этого поступим следующим образом. Выберем в качестве начального приближения некоторую стационарную стратегию $\pi = (\pi,\ \pi,\ \ldots)$. Обозначим, далее, $(\overset{k}{\sigma_1}\pi)$ — нестационарную стратегию вида $(\overset{k}{\sigma_1}\pi) = (\sigma_k,\ \sigma_{k-1},\ \ldots,\ \sigma_1,\ \pi,\ \pi,\ \ldots)$, где каждая решающая функция σ_i, $i = 1,\ \ldots,\ k$ U_β-порождена. Каждой такой стратегии $(\overset{k}{\sigma_1}\pi)$ сопоставим дисконтированный выигрыш $v_\beta(\overset{k}{\sigma_1}\pi)$ вычисленный рекуррентным способом в соответствии с соотношением

$$v_\beta(\overset{k}{\sigma_1}\pi) = U_\beta v_\beta(\overset{k-1}{\sigma_1}\pi) = U_\beta^k v_\beta(\pi).$$

Следующее утверждение мы приведем без доказательства в силу его достаточной очевидности.

Лемма 1. *Пусть имеется повледовательность U_β-порожденных нестационарных стратегий $\{(\sigma_1^k\pi),\ k=1,\ 2,\ \ldots\}$ таких, что $v_\beta(\sigma_1^k\pi)=U_\beta^k v_\beta(\pi)$. Тогда*

$$v_\beta(\sigma_1^{k+1}\pi)\geqslant v_\beta(\sigma_k\sigma_1^k\pi)\geqslant v_\beta(\sigma_1^k\pi),\quad k=1,\ 2,\ \ldots \tag{5}$$

Отсюда вытекает ряд полезных следствий.

Следствие 2. *Существует конечный предел $\lim\limits_k U_\beta^k v_\beta(\pi)=\lim\limits_k v_\beta(\sigma_1^k\pi)=v_\beta(\sigma^*)$. Это, очевидно, вытекает из (5) и ограниченности дисконтированных выигрышей v_β.*

Следствие 3. *Пусть $\{(\sigma_1^k\pi)\}$ — последовательность U_β-порожденных стратегий. Тогда $\lim\limits_k \hat{\Gamma}_\beta v_\beta(\sigma_1^k\pi)=0$.*

Доказательство. Действительно, согласно следствию 2, существует конечный предел $\lim\limits_k v_\beta(\sigma_1^k\pi)=v_\beta(\sigma^*)$. Следовательно, $\lim\limits_k[v_\beta(\sigma_1^{k+1}\pi)-v_\beta(\sigma_1^k\pi)]=0$. Но тогда в силу неравенств (5) также равен нулю предел $\lim\limits_k[v_\beta(\sigma_1^{k+1}\pi)-v_\beta(\sigma_k\sigma_1^k\pi)]=0$. Последнее можно переписать в виде $\lim\limits_k[v_\beta(\sigma_1^{k+1}\pi)-v_\beta(\sigma_k\sigma_1^k\pi)]=\lim\limits_k\times$ $\times\ [U_\beta v_\beta(\sigma_1^k\pi)-F_\beta(\sigma_k)v_\beta(\sigma_1^k\pi)]=\lim\limits_k\hat{\Gamma}_\beta v_\beta(\sigma_1^k\pi)=0$.

Теорема 2. *Пусть $v_\beta(\sigma^*)=\lim\limits_k U_\beta^k v_\beta(\pi)$. Тогда $v_\beta(\sigma^*)$ удовлетворяет уравнению вида: $v_\beta(\sigma^*)=U_\beta v_\beta(\sigma^*)$.*

Доказательство. Действительно, $v_\beta(\sigma_1^{k+1}\pi)=U_\beta v_\beta(\sigma_1^k\pi)$. Поскольку существует конечный предел $\lim\limits_k v_\beta(\sigma_1^k\pi)=v_\beta(\sigma^*)$ и последовательность $\{v_\beta(\sigma_1^k\pi)\}$ монотонно не убывает, то, используя теорему Лебега о монотонной сходимости, получаем, что знак предела и знак оператора U_β можно менять местами. Тогда $v_\beta(\sigma^*)=\lim\limits_k v_\beta(\sigma_1^{k+1}\pi)=\lim\limits_k U_\beta v_\beta(\sigma_1^k\pi)=U_\beta\left[\lim\limits_k v_\beta(\sigma_1^k\pi)\right]=$ $=U_\beta v_\beta(\sigma^*)$.

Теорема 3. *Пусть $v_\beta(\sigma^*)=\lim\limits_k U_\beta^k v_\beta(\pi)$ и σ_* — решающая функция такая, что $v_\beta(\sigma^*)=U_\beta v_\beta(\sigma^*)=F_\beta(\sigma_*)v_\beta(\sigma^*)$. Пусть $\sigma^\infty=(\sigma_*,\sigma_*\ \ldots)$ — стационарная стратегия, составленная из решающих функций σ_*. Тогда $v_\beta(\sigma^*)=v_\beta(\sigma_*^\infty)$.*

Доказательство. По условию имеем $v_\beta(\sigma^*)=F_\beta(\sigma_*)v_\beta(\sigma^*)$. Тогда $v_\beta(\sigma^*)=F_\beta^n(\sigma_*)v_\beta(\sigma^*)$.

Переходя к пределу при $n \to \infty$ и используя свойство (1), получаем $v_\beta(\sigma^*) = \lim_n F_\beta^n(\sigma_*) v_\beta(\sigma^*) = v_\beta(\sigma_*^\infty)$.

Следствие 4. *Пусть* $\{\sigma_k^\infty = (\sigma_k, \sigma_k, \ldots),\ k = 1, 2, \ldots\}$ — *последовательность стационарных стратегий, составленных из решающих функций* σ_k *выбираемых оператором* U_β^k *и* $\{v_\beta(\sigma_k^\infty)\}$ — *последовательность соответствующих дисконтированных выигрышей. Тогда* $\lim_k v_\beta(\sigma_1^k \pi) = \lim_k v_\beta(\sigma_k^\infty) = v_\beta(\sigma_*^\infty)$.

Доказательство. Действительно, $\lim_k v_\beta(\sigma_1^k \pi) = v_\beta(\sigma^*)$.

Но, в силу теоремы 3, $v_\beta(\sigma^*) = v_\beta(\sigma_*^\infty)$. Остается показать, что $\lim_k v_\beta(\sigma_k^\infty) = v_\beta(\sigma_*^\infty)$. Но это так, поскольку стационарные стратегии σ_k^∞ составлены из решающих функций σ_k, выбираемых оператором U_β^k, и поскольку нестационарные стратегии $(\sigma_1^k \pi)$, $k = 1, 2, \ldots$ составлены также из решающих функций σ_k, выбираемых оператором U_β^k.

Следствие 5. *Пусть* $\{\sigma_k^\infty\}$ — *последовательность стационарных стратегий, составленных из решающих функций* σ_k, *выбираемых оператором* U_β^k. *Тогда*

$$\lim_k \hat{\Gamma}_\beta v_\beta(\sigma_k^\infty) = 0. \tag{6}$$

Доказательство. В силу теорем 2, 3, и следствия 4 имеем $\lim_k v_\beta(\sigma_k^\infty) = v_\beta(\sigma_*^\infty)$ и $v_\beta(\sigma_*^\infty) = u_\beta v_\beta(\sigma_*^\infty)$.

Обозначим $\overset{*}{v}_\beta = \sup_f v_\beta(f)$. Очевидно, что $|v_\beta(\sigma_k^\infty)| \leqslant \overset{*}{v}_\beta$, $k = 1, 2, \ldots$. Тогда, используя теорему Лебега о мажорируемой сходимости, имеем $\lim_k U_\beta v_\beta(\sigma_k^\infty) = U_\beta \lim_k v_\beta(\sigma_k^\infty) = U_\beta v_\beta(\sigma_*^\infty)$. Аналогичным образом, $\lim_k F_\beta(\sigma_k) v_\beta(\sigma_k^\infty) = F_\beta(\sigma_*) v_\beta(\sigma_*^\infty)$. Следовательно,

$$\lim_k \Gamma_\beta v_\beta(\sigma_k^\infty) = \lim_k [U_\beta v_\beta(\sigma_k^\infty) - F_\beta(\sigma_k) v_\beta(\sigma_k^\infty)] = U_\beta v_\beta(\sigma_*^\infty) - $$
$$- F_\beta(\sigma_*) v_\beta(\sigma_*^\infty) = v_\beta(\sigma_*^\infty) - v_\beta(\sigma_*^\infty) = 0.$$

Теорема 4. *Пусть стационарная стратегия* $\sigma_*^\infty = (\sigma_*, \sigma_*, \ldots)$ *такова, что* $v_\beta(\sigma_*^\infty) = v_\beta(\sigma^*)$, где $v_\beta(\sigma^*) = \lim_k U_\beta^k v_\beta(\pi)$. Тогда она удовлетворяет уравнению вида $\hat{\Gamma}_\beta v_\beta(\sigma_*^\infty) = 0$.

Доказательство. Согласно (6) имеем: $\lim_k \hat{\Gamma}_\beta v_\beta(\sigma_k^\infty) = \hat{\Gamma}_\beta v_\beta \times$
$\times (\sigma_*^\infty) = 0$.

Следствие 6. *Пусть стационарная стратегия* σ_*^∞ *такова, что* $v_\beta(\sigma_*^\infty) = v_\beta(\sigma^*) = \lim_k U_\beta^k v_\beta(\pi)$. *Тогда она* v_β*-оптимальна.*

Доказательство. В силу теоремы 4 стратегия σ_*^∞ удовлетворяет уравнению $\hat{\Gamma}_\beta v_\beta(\sigma_*^\infty) = 0$. Но тогда, согласно следствию 1, она v_β-оптимальна.

Из полученных результатов видно, что v_β-оптимальная стационарная стратегия σ_*^∞ может быть построена с помощью последовательности U_β-порожденных нестационарных стратегий $\{\sigma_1^k\pi\}$. Остается теперь доказать, что v_β-оптимальная стратегия σ_*^∞ достигается при некотором конечном $k^* < \infty$.

Теорема 5. *Пусть множество различных стационарных стратегий конечно и пусть $\{\sigma_k^\infty\}$ — последовательность U_β-порожденных стационарных стратегий. Тогда v_β-оптимальная стратегия σ_*^∞ достигается при некотором конечном $k^* < \infty$.*

Доказательство. Обозначим $k^* = \inf\{k : \hat{\Gamma}_\beta v_\beta(\sigma_k^\infty) = 0\}$. Таким образом, в момент k^* стратегия $\sigma_{k^*}^\infty$ удовлетворяет такому функциональному уравнению, что согласно следствию 1 стратегия $\sigma_{k^*}^\infty$ v_β-оптимальна. Остается доказать, что $k^* < \infty$.

С этой целью обозначим $\varepsilon = \min\limits_{\{(\sigma, f):\sigma \neq f\}} \left\{ \min\limits_x |\Gamma_\beta(\sigma, f)\, v_\beta(f^\infty(x) \neq 0| \right\}$.

Обозначим $M_k = \max\limits_x |\hat{\Gamma}_\beta v_\beta(\sigma_1^k\pi)(x) - \Gamma_\beta(\sigma_{k+1}, \sigma_k)\, v_\beta(\sigma_k^\infty)(x)|$. Рассмотрим теперь тождество

$$\hat{\Gamma}_\beta v_\beta(\sigma_1^k\pi) - \Gamma_\beta(\sigma_{k+1}, \sigma_k)\, v_\beta(\sigma_k^\infty) = \hat{\Gamma}_\beta v_\beta(\sigma_1^k\pi) - \Gamma_\beta(\sigma_{k+1}, \sigma_k)\, v_\beta(\sigma_k^\infty).$$

Отсюда нетрудно получить

$$\hat{\Gamma}_\beta(\sigma_{k+1}, \sigma_k)\, v_\beta(\sigma_1^k\pi) = \Gamma_\beta(\sigma_{k+1}, \sigma_k)\, v_\beta(\sigma_k^\infty) + \\ + \beta[Q(\sigma_{k+1}) - Q(\sigma_k)][v_\beta(\sigma_1^k\pi) - v_\beta(\sigma_k^\infty)]. \qquad (7)$$

Заметим, что согласно следствию 4 последнее слагаемое в правой части (7) стремится к 0 при $k \to \infty$. Это означает, что $M_k \to 0$ при $k \to \infty$. Тогда найдется некоторое $k_0 < \infty$ такое, что $M_k < \varepsilon$. Но в таком случае для всех $k \geqslant k_0$ знаки отличных от нуля компонент первого слагаемого правой части (7) будут совпадать со знаками соответствующих компонент ее левой части, которая согласно определению оператора $\hat{\Gamma}_\beta$ всегда неотрицательна. Тогда приходим к выводу, что, начиная с некоторого $k_0 < \infty$, для всех $k \geqslant k_0$ будем иметь

$$\Gamma_\beta(\sigma_{k+1}, \sigma_k)\, v_\beta(\sigma_k^\infty) \geqslant 0. \qquad (8)$$

Действительно, предположим противное, т. е. для некоторого $k \geqslant k_0$ и некоторого $x \in E$ $\Gamma_\beta(\sigma_{k+1}, \sigma_k)\, v_\beta(\sigma_k^\infty)(x) < 0$. Так как при этом $|\Gamma_\beta(\sigma_{k+1}, \sigma_k)\, v_\beta(\sigma_k^\infty) \neq 0| \geqslant \varepsilon$, а $M_k < \varepsilon$, то вся правая часть (7) будет отрицательна в рассматриваемой точке $x \in E$.

Но это противоречит тому, что левая часть неотрицательна, как и устанавливает (8).

Но если справедливо (8), то согласно теореме 1 имеем неравенства

$$v_\beta(\sigma_{k+1}^\infty) \geqslant v_\beta(\sigma_k^\infty), \quad k \geqslant k_0. \tag{9}$$

Это означает, что начиная с некоторого $k_0 < \infty$ стационарные стратегии σ_k^∞, $k \geqslant k_0$ упорядочены по возрастанию выигрышей v_β.

Рассмотрим случай, когда в (9) для всех $x \in E$ имеют место равенства $v_\beta(\sigma_{k+n}^\infty)(x) = v_\beta(\sigma_k^\infty)(x)$, $n = 1, 2, \ldots$. Покажем, что если $k \neq k^*$, т. е. стратегия σ_k^∞ не является v_β-оптимальной, то равенства $v_\beta(\sigma_{k+n}^\infty) = \ldots v_\beta(\sigma_k^\infty)$ возможны лишь для конечных n.

Действительно, пусть $k \geqslant k_0$. Тогда, если стратегия σ_k^∞ не является v_β-оптимальной, то, с учетом (8), найдем стратегию σ_{k+n}^∞ такую, что $\Gamma_\beta(\sigma_{k+n}, \sigma_k) v_\beta(\sigma_k^\infty) \geqslant 0$ и хотя бы для одного $x \in E$ $\Gamma_\beta(\sigma_{k+n}, \sigma_k) v_\beta(\sigma_k^\infty)(x) > 0$. Но тогда согласно теореме 1 $v_\beta(\sigma_{k+n}^\infty)(x) > v_\beta(\sigma_k^\infty)(x)$. Так как число различных стационарных стратегий конечно, $n < \infty$.

Отсюда следует, что из монотонно неубывающей последовательности $\{v_\beta(\sigma_k^\infty), k \geqslant k_0\}$ можно выделить строго возрастающую подпоследовательность $\{v_\beta(\sigma_{k_j}^\infty), j = 1, 2, \ldots\}$. Тогда соответствующая подпоследовательность стратегий $\{\sigma_{k_j}^\infty\}$ строго упорядочена по возрастанию выигрышей v_β.

Если предположить, что момент k^*, при котором достигается v_β-оптимальная стационарная стратегия, равен ∞, получим, что число различных стационарных стратегий по меньшей мере счетно. Но это противоречит исходному условию, согласно которому число различных стационарных стратегий конечно. Противоречие устанавливает, что $k^* < \infty$. Теорема доказана.

Следствие 7. *Пусть в условиях теоремы 5 задана последовательность U_β-порожденных нестационарных стратегий $\{(\sigma_1^k \pi), k = 1, 2, \ldots\}$. Тогда предел $\lim\limits_k \hat{\Gamma}_\beta v_\beta(\sigma_1^k \pi) = 0$ достигается при некотором конечном k.*

Доказательство. Существование такого предела установлено в следствии 3. Покажем, что этот предел достигается при некотором конечном k.

С этой целью зафиксируем k такое, что $k \geqslant k^*$, где k^* — момент, начиная с которого достигается v_β-оптимальная стационарная стратегия, т. е. стратегия σ_k^∞ является v_β-оптимальной (при этом $\sigma_k^\infty \neq \sigma_{k+1}^\infty$).

Если теперь предположить, что рассматриваемый предел достигается на ∞, то в силу неравенств (5) найдется подпоследовательность индексов k_i, $i = 1, 2, \ldots$ и $x \in E$ такие, что нестационарные стратегии $(\sigma_1^{k_i}\pi)$, $i = 1, 2, \ldots$ строго упорядочены по возрастанию выигрышей, т. е.

$$v_\beta(\sigma_1^{k_{i+1}}\pi)(x) > v_\beta(\underbrace{\sigma_{k_i} \ldots \sigma_{k_i}}_{(k_{i+1}-k_i)\ \text{раз}}\sigma_1^{k_i}\pi)(x).$$

В частности,

$$v_\beta(\sigma_1^{k_{i+1}}\pi)(x) > v_\beta(\underbrace{\sigma_k \ldots \sigma_k}_{(k_{i+1}-k)\ \text{раз}}\sigma_1^{k}\pi)(x).$$

Переходя к пределу при $i \to \infty$, получаем $v_\beta(\sigma^*)(x) > v_\beta(\sigma_k^\infty)(x)$. Но это неравенство противоречит тому, что стратегия σ_k^∞ v_β-оптимальна и теореме 3. Это доказывает требуемое.

Замечание 1. Если множества состояний E и управлений Y конечны, то и множество различных стационарных стратегий также конечно.

Это очевидным образом вытекает из того, что в случае конечных E и Y число различных отображений E в Y конечно.

Определение 1. *Будем говорить, что последовательность стратегий* $\{(\sigma_1^k\pi),\ k = 1, 2, \ldots\}$ *слабо сходится к некоторой стратегии* σ^*, *если существует стратегия* σ^* *такая, что*

$$\lim_k v_\beta(\sigma_1^k\pi) = v_\beta(\sigma^*).$$

Далее, будем говорить, что последовательность стратегий $\{(\sigma_1^k\pi)\}$ сильно сходится к некоторой стационарной стратегии σ_*^∞, если начиная с некоторого $k^* < \infty$ решающие функции σ_k, из которых образованы стратегии $(\sigma_1^k\pi) = (\sigma_k, \ldots, \sigma_1, \pi)$, $k = 1, 2, \ldots$, совпадают и повторяются неограниченно часто, т. е. $\sigma_k = \sigma_{k^*}$ для всех $k \geqslant k^*$.

Теорема 6. *Пусть число различных стационарных стратегий конечно. Тогда последовательность U_β-порожденных стратегий $\{(\sigma_1^k\pi)\}$ слабо сходится к некоторой v_β-оптимальной стратегии.*

Если при этом v_β-оптимальная стратегия единственна, то последовательность стратегий $\{(\sigma_1^k\pi)\}$ сильно сходится к v_β-оптимальной стационарной стратегии.

Доказательство. Слабая сходимость имеет место всегда в силу следствия 2. При этом сходимость к v_β-оптимальной стационарной стратегии σ_*^∞ вытекает из следствий 4 и 3.

Сильную сходимость в случае, если v_β-оптимальная стратегия единственна, получаем из следующих соображений. Единственность v_β-оптимальной стратегии означает, что различным стратегиям соответствуют различные выигрыши.

Учтем теперь, что в силу следствия 7 предел $\lim_k \hat{\Gamma}_\beta v_\beta(\sigma_1^k\pi) = 0$ достигается при некотором конечном k^*. Так как различным стратегиям соответствуют различные выигрыши, то для всех $k \geqslant k^*$ из условия $\hat{\Gamma}_\beta v_\beta(\sigma_1^k \pi) = 0$ вытекает, что все решающие функции σ_k будут совпадать с σ_{k^*}. Это по определению и означает сильную сходимость к стратегии $\sigma_{k^*}^\infty = \sigma_*^\infty$, которая по доказанному v_β-оптимальна.

Полученные результаты определяют оптимизационную процедуру для вычисления v_β-оптимальной стратегии. Она состоит в последовательном вычислении U_β-порожденных нестационарных стратегий $\{(\sigma_1^k \pi)\}$ и в образовании стационарных стратегий $\{\sigma_k^\infty\}$. Теперь задача состоит в определении момента, когда достигается v_β-оптимальная стационарная стратегия, т. е. правила останова оптимизационной процедуры.

Заметим, что в силу следствия 7 начиная с некоторого $k^* < \infty$ имеем $\hat{\Gamma}_\beta v_\beta(\sigma_1^{k^*} \pi) = 0$ для всех $k \geqslant k^*$. Тогда заманчиво было бы в качестве момента останова оптимизационной процедуры использовать момент τ вида $\tau = \inf\left\{k : \hat{\Gamma}_\beta v_\beta(\sigma_1^k \pi) = 0\right\}$. Однако мы не можем гарантировать, что после такого момента для всех $k \geqslant \tau$ будет выполняться равенство $\hat{\Gamma}_\beta v_\beta(\sigma_1^k \pi) = 0$. Поэтому останов оптимизационной процедуры будем определять исходя из следующих соображений.

По доказанному в следствии 2 и следствии 4 существует предел $\lim\limits_k U_\beta^k v_\beta(\pi) = \lim\limits_k v_\beta(\sigma_1^k \pi) = v_\beta(\sigma_*^\infty)$. Причем, согласно (5), сходимость к пределу монотонна. Поэтому ясно, что для любого $\varepsilon > 0$ существует конечный момент τ_ε:

$$\tau_\varepsilon = \inf\{k : U_\beta v_\beta(\sigma_1^k \pi) \leqslant v_\beta(\sigma_1^k \pi) + \varepsilon\} =$$
$$= \inf\{k : v_\beta(\sigma_1^{k+1} \pi) \leqslant v_\beta(\sigma_1^k \pi)\}.$$

Так как согласно теореме 5 v_β-оптимальная стратегия достигается при некотором конечном k, можно выбрать $\varepsilon > 0$ достаточно малое такое, что в момент τ_ε достигается v_β-оптимальная стратегия. Тогда останов оптимизационной процедуры будем определять исходя из двух условий. Первое состоит в проверке равенства $\hat{\Gamma}_\beta v_\beta(\sigma_1^k \pi) = 0$. Оно вытекает из следствия 7, в силу которого предел $\lim\limits_k \Gamma_\beta v_\beta(\sigma_1^k \pi) = 0$ достигается при некотором конечном k^*. При этом достигается и v_β-оптимальная стационарная стратегия. Однако поскольку значение k^* остается неизвестным, то для определения момента достижения v_β-оптимальной стратегии будем проверять условие вида $U_\beta v_\beta(\sigma_1^k \pi) \leqslant v_\beta(\sigma_1^k \pi) + \varepsilon$ для достаточно малого $\varepsilon > 0$. Тогда приходим к следующему утверждению, определяющему момент останова оптимизационной процедуры.

Теорема 7. *Пусть заданы моменты* τ_n, $n = 1, 2, \ldots$ *такие, что* $\hat{\Gamma}_\beta v_\beta(\sigma_1^{\tau_n}\pi) = 0$ *и* $\exists\, x \in E : \hat{\Gamma}_\beta v_\beta(\sigma_1^{\tau_n - 1}\pi)(x) \neq 0$. *Пусть, далее,* $\varepsilon_n = \min\limits_x \left\{\hat{\Gamma}_\beta v_\beta(\sigma_1^{\tau_n - 1}\pi)(x) \neq 0\right\}$, $n = 1, 2, \ldots$ *Тогда момент* τ^* *вида* $\tau^* = \inf\{k, n : \hat{\Gamma}_\beta v_\beta(\sigma_1^k\pi) = 0;\ \max\limits_x [U_\beta v_\beta(\sigma_1^k\pi)(x) - v_\beta(\sigma_1^k\pi) \times$ $\times (x)] \leqslant \varepsilon_n\}$ *конечен и в этот момент достигается* v_β*-оптимальная стационарная стратегия.*

Доказательство. Прежде всего заметим, что последовательность моментов τ_n, $n = 1, 2, \ldots$ является конечной. Это вытекает из следствия 7, в силу которого для всех $k \geqslant k^*$ $\hat{\Gamma}_\beta v_\beta(\sigma_1^k\pi) = 0$. Тогда из определения величин ε_n, $n = 1, 2, \ldots$ получаем, что число таких величин также конечно. Учтем, что из неравенств (5) вытекает неравенство $\hat{\Gamma}_\beta v_\beta(\sigma_1^k\pi) = U_\beta v_\beta(\sigma_1^k\pi) -$ $- F_\beta(\sigma_k) v_\beta(\sigma_1^k\pi) \leqslant U_\beta v_\beta(\sigma_1^k\pi) - v_\beta(\sigma_1^k\pi)$. Отсюда получаем

$$0 < \varepsilon_n \leqslant [U_\beta v_\beta(\sigma_1^{\tau_n - 1}\pi)(x) - v_\beta(\sigma_1^{\tau_n - 1}\pi)(x)] \neq 0.$$

С другой стороны, согласно следствию 2 разности

$$U_\beta v_\beta(\sigma_1^k\pi) - v_\beta(\sigma_1^k\pi) \to 0 \text{ при } k \to \infty. \tag{10}$$

Наконец, учтем снова, что начиная с некоторого $k^* < \infty$

$$\hat{\Gamma}_\beta v_\beta(\sigma_1^k\pi) = 0 \text{ для всех } k \geqslant k^*. \tag{11}$$

Тогда, поскольку набор положительных величин ε_n конечен, а разности в (10) стремятся к 0 и поскольку выполняются равенства (11), ясно, что момент τ^* конечен ($\tau^* < \infty$) и в этот момент достигается v_β-оптимальная стратегия. Теорема доказана.

В заключение заметим, что v_β-оптимальная стратегия σ_*^∞ не зависит от выбора стратегии π в качестве начального приближения. Это означает, что стратегия π выбирается произвольно. Поэтому выигрыш $v_\beta(\pi)$, используемый в качестве начального, может быть выбран произвольно. В частности, используя соотношение (2), можно положить $v_\beta(\pi) = 0$. Тем самым полученные результаты приводят нас к простой и эффективной процедуре, основанной на рекуррентных соотношениях. Она заключается в выполнении следующих операций.

Пусть на k-й итерации получен вектор выигрышей с компонентами вида

$$v_\beta(\sigma_1^k)(x) = [U_\beta^k 0](x),\ x \in E.$$

Тогда необходимо: 1. Проверить условие $\hat{\Gamma}_\beta v_\beta(\sigma_1^k) = 0$. Если да, перейти к п. 2. Если нет, перейти к п. 4. 2. Обозначим $\tau = k$. Вычислить величину $\varepsilon_\tau = \min\limits_x \hat{\Gamma}_\beta v_\beta(\sigma_1^{\tau-1})(x) \neq 0$. Если

$\tau = 0$, положить $\varepsilon_\tau = 0$. Перейти к п. 3. 3. Проверить условие $\max\limits_x [U_\beta v_\beta (\sigma_1^k)(x) - v_\beta (\sigma_1^k)(x)] \leqslant \varepsilon_\tau$. Если да, то останов. Если нет, перейти к п. 4. 4. Вычислить $v_\beta (\sigma_1^{k+1}) = U_\beta v_\beta (\sigma_1^k)$. Положить $k = k + 1$ и перейти к п. 1.

Список литературы: 1. *Дынкин Е. Б., Юшкевич А. А.* Управляемые марковские процессы и их приложения. М., «Наука», 1975. 338 с. 2. *Ховард Р.* Динамическое программирование и марковские процессы. М., «Сов. радио». 1964. 3. *Майн Х., Осаки С.* Марковские процессы принятия решения. М., «Наука», 1977. 175 с. 4. *Баранов В. В., Подцыкин Н. С.* Об одном алгоритме последовательного улучшения стратегии.— «Вестн. Харьк. ун-та, 1976, № 134. «Математика и механика», вып. 41, с. 16—23. 5. *Баранов В. В.* Об одном классе алгоритмов динамического программирования в стохастических системах.— Вестн. Харьк. ун-та, 1977, № 148. «Прикладная математика и механика», вып. 42, с. 11—19.

Поступила 31 января 1978 г.

УДК 518:517:944/947

Л. В. ПЕРКОЛАБ

ОБ ОДНОМ ЧИСЛЕННОМ РЕШЕНИИ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ КОРТЕВЕГА — ДЕ ФРИСА

В работе [1] обоснована и дана схема решения периодической задачи Коши для уравнения Кортевега — де Фриса

$$\dot{u} - 6uu' + u''' = 0; \quad u(x, 0) = u_0(x) \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi;$$

$$u(0, t) - u(\pi, t) = u'(0, t) - u'(\pi, t) = u''(0, t) - u''(\pi, t) = 0, \quad (1)$$

где функция $u_0(x) = u_0(x + \pi)$, задающая начальные условия, предполагается трижды непрерывно дифференцируемой. Следуя данной схеме, для решения задачи (1) достаточно построить: последовательность собственных значений $\mu_0, \mu_1, \tilde{\mu}_1, \mu_2, \tilde{\mu}_2, \ldots$ периодической и антипериодической краевых задач, порождаемых оператором Штурма — Лиувилля: $L[y] \equiv -y'' + v_0(x) y$; последовательность собственных значений краевой задачи $-y'' + u_0(x) y = \lambda_k y$ $(0 \leqslant x \leqslant \pi)$, $y(0) = y(\pi) = 0$; последовательность $\operatorname{sign}\{c(\pi, \lambda_k) - s'(\pi, \lambda_k)\}$, где $c(x, z)$, $s(x, z)$ — решения задачи $L[y] = zy$, определяемые начальными данными $c(0, z) = s'(0, z) = 1$, $c'(0, z) = s(0, z) = 0$. Для нахождения самого решения $u(x, t)$ в точке x_0, t_0 нужно:

1) по найденным собственным значениям $\mu_0, \mu_1, \tilde{\mu}_1 \ldots \mu_N, \tilde{\mu}_N, \lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_N$ построить аппроксимирующие полиномы

$$T_{2N+1}(z) = -(\mu_0 - z) \prod_{k=1}^{N} (\mu_k - z)(\tilde{\mu}_k - z);$$

$$R_N(z)=\prod_{k=1}^{N}(\lambda_k-z),\ V_{n-1}(z),$$

$$W_{N+1}(z)=-\{R_N(z)\}^{-1}\{T_{2N+1}(z)+V_{N-1}^2(z)\},\tag{2}$$

где полином $(N-1)$-й степени $V_{N-1}(z)$ удовлетворяет интерполяционным условиям

$$V_{N-1}(\lambda_k)=\operatorname{sign}\{c(\pi,\lambda_k)-s'(\pi,\lambda_k)\}\sqrt{-T_{2N+1}(\lambda_k)}$$
$$(k=1,\ 2,\ \ldots\ N)$$

и, решив относительно коэффициентов полиномов r_j, ω_l, u_k систему N-го приближения

$$r_j'=-2u_j;\quad w_l'=2d_N(t)\,u_l-2u_{l-1};$$
$$u_k'=w_k-d_N(t)\,r_k+r_{k-1},\tag{3}$$

где $u_k=r_j=w_l\equiv 0$ при отрицательных k, j, l и при $k>N-1$, $j>N$, $l>N+1$, найти значения

$$R_N(x,z)=\sum_{j=0}^{N}r_j(x)\,z^j,\quad W_{N+1}(x,z)=\sum_{l=0}^{N+1}w_l(x)\,z^l,$$

$$V_{N-1}(x,z)=\sum_{k=0}^{N-1}u_k(x)\,z^k$$

в точке $x=x_0$, полученное при этом $d(x_0)=u(0,x_0)$;

2) оставляя $T_{2N+1}(z)$ неизменным и положив

$$R_N(z)=R_N(x_0,z),\ V_{N-1}(z)=V_{N-1}(x_0,z),$$
$$W_{N+1}(z)=W_{N+1}(x_0,z),$$

решить относительно r_j, ω_l, u_k систему N-го приближения

$$r_j'=-4a_N(t)\,u_j-8u_{j-1}-2b_N(t)\,r_j,$$

$$\omega_l'=-2c_N(t)\,u_l+4a_N(t)\,u_{l-1}-8u_{l-2}+2b_N(t)\,\omega_l,$$

$$u_k'=c_N(t)\,r_k-2a_N(t)\,r_{k-1}+4r_{k-2}+2a_N(t)\,w_k+4w_{k-1},\tag{4}$$

где u_k, r_j, $w_l\equiv 0$ при отрицательных k, j, l и при $k>N-1$, $j>N$, $l>N+1$, тогда функция $a_N(t_0)=a_N(x_0,t_0)=u(x_0,t_0)$ будет давать приближенное решение поставленной задачи в точке x_0, t_0.

Точность полученного решения при этом, согласно работе [1], будет определяться суммой длин отброшенных лакун. Нами схема реализована для $u_0(x)=\lambda\sin x$. Везде в дальнейшем удобно считать $u_0(x)=q(x)$.

Собственные значения μ_0, μ_2, $\tilde{\mu}_2$, ... периодической задачи для оператора Штурма — Лиувилля

$$-y''+q(x)\,y=zy;\quad y(0)=y(\pi);\quad y'(0)=y'(\pi)\tag{5}$$

являются корнями характеристического уравнения этой задачи. Чтобы найти это уравнение, представим, следуя работе Хилле [3], решение $y(x)$ и потенциал $q(x)$ их рядами Фурье по полной в промежутке $[0, \pi]$ системе функций

$$\{e^{i2kx}\}, \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots), \tag{6}$$

а именно:

$$y(x) = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} y_p e^{i2px}, \tag{7}$$

$$q(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} q_k e^{i2kx}. \tag{8}$$

При этом, так как $y(x)$ и $q(x)$ суммируемы с квадратами в $[0, \pi]$ и для них имеет место уравнение замкнутости (формула Парсеваля), для произведения функций $q(x)y(x)$ ряд Фурье по системе функций (6) совпадает с формальным произведением рядов (7) и (8), т. е. для $q(x)y(x)$ будет иметь место следующее разложение:

$$q(x)y(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} q_k e^{i2kx} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} y_p e^{i2px} =$$

$$= \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \left[y_p \sum_{k=-\infty}^{+\infty} q_k e^{i2(p+k)x} \right],$$

или, если заменить индекс суммирования $k = k' - p$,

$$q(x)y(x) = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} y_p \sum_{k'=-\infty}^{+\infty} q_{k'-p} e^{i2k'x} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(\sum_{p=-\infty}^{+\infty} q_{k-p} y_p \right) e^{i2kx}. \tag{9}$$

Решение задачи (5), представленное в виде ряда (7), автоматически удовлетворяет периодическим граничным условиям, однако, следует отметить, что для функции $q(x)$, заданной вначале периодической $(q(x) = q(x+\pi))$ и непрерывно дифференцируемой по крайней мере три раза, разложение в ряд Фурье по системе (6) дает в общем случае периодическую, но имеющую кусочно-непрерывную производную функцию. Подставив, далее, разложения (7), (8), (9) в уравнение Штурма — Лиувилля и воспользовавшись полнотой системы (6), получим однородную относительно y_k, $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{gathered} ((2k)^2 - z)\, y_k + \sum_{p=-\infty}^{+\infty} q_{k-p} y_p = 0, \\ (k = 0, \pm 1, +2, \ldots) \end{gathered} \tag{10}$$

определитель которой

$$\begin{vmatrix}
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdots q_0 + ((2n)^2 - z & q_{-1} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & q_{-2n} & \cdots \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdots & q_{n-1} & \cdots q_1 & q_0 + (2^2 - z) & q_{-1} & q_{-2} & q_{-3} & \cdots q_{-n-1} & \cdots \\
\cdots & q_n & \cdots q_2 & q_1 & q_0 - z & q_{-1} & q_{-2} & \cdots q_{-n} & \cdots \\
\cdots & q_{n+1} & \cdots q_3 & q_2 & q_1 & q_0 + (2^2 - z) & q_{-1} & \cdots q_{-n+1} & \cdots \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdots & q_{2n} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & q_1 & q_0 + ((2n)^2 - z & \cdots \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot
\end{vmatrix}$$

является характеристической функцией задачи (5).

Выбрав конечное четное N достаточно большим и положив в определителе $n = \frac{N}{2}$, получим полином

$$T1_{N+1}(z) = (-1)^{N+1} z^{N+1} + t1_N z^N + \ldots + t1_0,$$

корнями которого будут искомые значения μ_0, μ_2, $\tilde{\mu}_2$, $\ldots$, μ_N, $\tilde{\mu}_N$.

Чтобы найти характеристическое уравнение антипериодической задачи Штурма — Лиувилля

$$-y'' + q(x) y = zy; \quad y(0) = -y(\pi), \quad y'(0) = -y'(\pi), \tag{11}$$

продолжим решение $y(x)$ этой задачи на промежуток $[-\pi, 0]$ по правилу

$$y(-x) = -y(\pi - x). \tag{12}$$

Так как при этом $y'(-x) = -y'(\pi - x)$, полученная функция, удовлетворяя граничным условиям, будет непрерывно дифференцируемой на промежутке $[-\pi, \pi]$ по крайней мере дважды. Представим ее в виде ряда Фурье $\sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ikx}$ по полной в промежутке $[-\pi, \pi]$ системе функций

$$\{l^{ikx}\}, \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots). \tag{13}$$

В силу (12) и граничных условий коэффициенты Фурье $c_{2k} = 0$, $(k = 0, 1, 2, \ldots)$, так что решение $y(x)$ антипериодической задачи Штурма — Лиувилля представляется в виде ряда

$$y(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{i(2k+1)x}, \tag{14}$$

при этом граничные условия $y(0) = -y(\pi)$, $y'(0) = -y'(\pi)$ выполняются автоматически. Затем, для того чтобы представить произведение $q(x) y(x)$ в виде ряда Фурье по той же, что и $y(x)$, системе функций, продолжим $q(x)$ на $[-\pi, 0]$ периодически с периодом π, что даст в общем случае функцию с кусочно-непрерывной производной.

Вновь полученную функцию $q(x)$ представим рядом Фурье по системе (13): $q(x) = \sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty} q_k e^{i2kx}$, тогда для произведения $q(x)\,y(x)$ будем иметь

$$q(x)\,y(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} q_k e^{i2kx} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} y_p e^{i(2p+1)x} =$$

$$= \sum_{p=-\infty}^{+\infty} y_p \sum_{k=-\infty}^{+\infty} q_k e^{i[2(k+p)+1]x}$$

или, если положить $k' = k + p$,

$$q(x)\,y(x) = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} y_p \sum_{k'=-\infty}^{+\infty} q_{k'-p} e^{i(2k'+1)x} =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(\sum_{p=-\infty}^{+\infty} y_p q_{k-p} \right) e^{i(2k+1)x}.$$

Подставив это разложение и разложение (14) в уравнение Штурма — Лиувилля, получим

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left\{ [(2k+1)^2 - z]\, y_k + \sum_{p=-\infty}^{+\infty} q_{k-p} y_p \right\} e^{i(2k+1)x} = 0,$$

что возможно в силу полноты системы функций (13), только если

$$[(2k+1)^2 - z]\, y_k + \sum_{p=-\infty}^{+\infty} q_{k-p} y_p = 0, \quad (k = 0,\ \pm 1,\ \pm 2, \ldots).$$

Полученная однородная относительно y_k, $(k = 0,\ \pm 1,\ \pm 2, \ldots)$ система уравнений имеет нетривиальное решение, если ее определитель равен нулю.

Следовательно, уравнение

$$\begin{vmatrix}
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdots [(-2n-1)^2 - z] + q_0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & q_{-2n} \cdots \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdots q_{n-2} \cdots & [3^2 - z] + q_0 & q_{-1} & q_{-2} & q_{-3} & \cdots & q_{-(n+2)} \cdots \\
\cdots q_{n-1} \cdots & q_1 & [1 - z] + q_0 & q_{-1} & q_{-2} & \cdots & q_{-(n+1)} \cdots \\
\cdots q_n \cdots & q_2 & q_1 & [1 - z] + q_0 & q_{-1} & \cdots & q_{-n} \cdots \\
\cdots q_{n+1} \cdots & q_3 & q_2 & q_1 & [3^2 - z] + q_0 & \cdots & q_{-n+1} \cdots \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdots q_{2n} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & [(2n+1)^2 - z] + q_0 \cdots \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot
\end{vmatrix} = 0$$

является характеристическим уравнением антипериодической задачи Штурма — Лиувилля. Положив $n = N/2 - 1$, где N то же, что и прежде, получим полином $T2_N(z) = (-1)^N z^N + t2_{N-1} z^{N-1} + \ldots + t2_0$, корнями которого будут искомые значения $\tilde{\mu}_1, \tilde{\mu}_2, \ldots, \tilde{\mu}_N$. Легко видеть, что $T_{2N+1}(z) = -T1_{N+1}(z)\, T2_N(z)$.

Этот прием повторим для построения

$$R_N(z) = \prod_{k=1}^{N} (\lambda_k - z) \text{ и } W_{N+1}(z) = (\nu_0 - z) \prod_{k=1}^{N} (\nu_k - z).$$

В первом случае следует искать характеристическое уравнение задачи

$$-y'' + q(x)\, y = zy; \quad y(0) = y(\pi) = 0. \tag{15}$$

Для этой цели продолжим решение $y(x)$ задачи (15) на промежуток $[-\pi, 0]$ нечетно, сохранив непрерывность и дифференцируемость функции, затем представим продолженную функцию $y(x)$ ее рядом Фурье по полной в промежутке $[-\pi; \pi]$ системе функций

$$\{1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \ldots\}, \tag{16}$$

что даст

$$y(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx.$$

При этом в силу нечетности функции $y(x)$ коэффициенты Фурье a_0 и $a_k = 0$, $(k = 1, 2, \ldots)$ и $y(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx$ удовлетворяет условию $y(0) = y(\pi) = 0$ автоматически. Функцию $q(x)$, далее, продолжим на промежуток $[-\pi, 0]$ четно, вновь полученную функцию представим ее рядом Фурье по системе (16). Затем подставим $y(x)$ и $q(x)$ в уравнение (15), поменяем порядки суммирования в произведении $q(x)\, y(x)$ и, используя свойство полноты системы (16), получим однородную относительно b_k $(k = 1, 2, \ldots)$ систему линейных уравнений.

Определитель этой системы

$$\begin{vmatrix}
[1-z]+\frac{q_0-q_2}{2} & \frac{q_1-q_3}{2} & \frac{q_2-q_4}{2} & \frac{q_3-q_5}{2} & \ldots & \frac{q_{n-1}-q_{n+1}}{2} & \ldots \\
\frac{q_1-q_3}{2} & [2^2-z]+\frac{q_0-q_4}{2} & \frac{q_1-q_5}{2} & \frac{q_2-q_6}{2} & \ldots & \frac{q_{n-2}-q_{n+2}}{2} & \ldots \\
\frac{q_2-q_4}{2} & \frac{q_1-q_5}{2} & [3^2-z]+\frac{q_0-q_6}{2} & \frac{q_1-q_7}{2} & \ldots & \frac{q_{n-3}-q_{n+3}}{2} & \ldots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\frac{q_{n-1}-q_{n+1}}{2} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & [n^2-z]+\frac{q_0-q_{2n}}{2} & \ldots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots
\end{vmatrix}$$

является характеристической функцией задачи (15).

Положив $n = N$, получим полином

$$R_N(z) = (-1)^N z^N + r_{N-1} z^{N-1} + \ldots + r_0,$$

корнями которого будут значения $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_N$. Как следует из § 3 гл. I работы [2], корни ν_k, $(k = 0, 1, \ldots)$ функции $c'(\pi, z)$, которые нужны для построения полинома $(N+1)$-й степени

$$W_{N+1}(z) = (\nu_0 - z) \prod_{k=1}^{N} (\nu_k - z),$$

совпадают с собственными значениями задачи

$$-y'' + q(x) y = zy; \quad y'(0) = y'(\pi) = 0. \tag{17}$$

Для построения $W_{N+1}(z)$ продолжим решение $y(x)$ задачи (17) на промежуток $[-\pi, 0]$ четно, сохранив непрерывность как $y(x)$, так и ее производных, вновь полученную функцию представим ее рядом Фурье по полной в $[-\pi, \pi]$ системе функций

$$\{1, \cos x, \cos 2x, \ldots\}. \tag{18}$$

Для $q(x)$ выберем тоже четное продолжение на $[-\pi, 0]$ и представим новую функцию $q(x)$ ее рядом Фурье по системе (18). Подставим затем $y(x)$ и $q(x)$ в уравнение (17), поменяв порядки суммирования у произведения $q(x) y(x)$ и воспользовавшись свойством полноты системы (18), найдем характеристическое уравнение задачи (17) в виде

$$\begin{vmatrix}
[0-z] + \frac{q_0}{4} & \frac{q_1}{2} & \frac{q_2}{2} & \frac{q_3}{2} & \cdots \frac{q_n}{2} \cdots \\
\frac{q_1}{2} & [1-z] + \frac{q_0+q_2}{2} & \frac{q_1+q_3}{2} & \frac{q_2+q_4}{2} & \cdots \frac{q_{n-1}+q_{n+1}}{2} \cdots \\
\frac{q_2}{2} & \frac{q_1+q_3}{2} & [2^2-z] + \frac{q_0+q_4}{2} & \frac{q_1+q_5}{2} & \cdots \frac{q_{n-2}+q_{n+2}}{2} \cdots \\
\frac{q_3}{2} & \frac{q_2+q_4}{2} & \frac{q_1+q_5}{2} & [3^2-z] + \frac{q_0+q_6}{2} \cdots & \frac{q_{n-3}+q_{n+3}}{2} \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\frac{q_n}{2} & \frac{q_{n-1}+q_{n+1}}{2} & \cdots & \cdots & [n^2-z] + \frac{q_0+q_{2n}}{2} \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots
\end{vmatrix} = 0$$

Положив, далее, $n = N$, получим полином

$$W_{N+1}(z) = (-1)^{N+1} z^{N+1} + w_N z^N + \ldots + w_0,$$

корнями которого будут искомые $\nu_0, \nu_1, \ldots \nu_N$.

Осталось найти полином $(N-1)$-й степени $V_{N-1}(z)$, который, согласно (2), можно определить по интерполяционной формуле, используя условия

$$V_{N-1}(z_k) = \operatorname{sign}(c(\pi, z_k) - s'(\pi, z_k)) \times$$
$$\times \sqrt{-R_N(z_k) W_{N+1}(z_k) - T_{2N+1}(z_k)},$$

где различные z_k, $(k = 1, 2, \ldots)$ выбраны произвольно, что не представляет сложности.

Отметим, что полиномы $T_{2N+1}(z)$, $R_N(z)$ и $W_{N+1}(z)$, а, следовательно, и $V_{N-1}(z)$ будут иметь нужную нормировку, это определяется видом соответствующих им характеристических уравнений.

После построения $R_N(z)$, $V_{N-1}(z)$ и $W_{N+1}(z)$ следует решить задачи (3) и (4), что даст значение $u(x_0, t_0)$, которое является решением поставленной задачи.

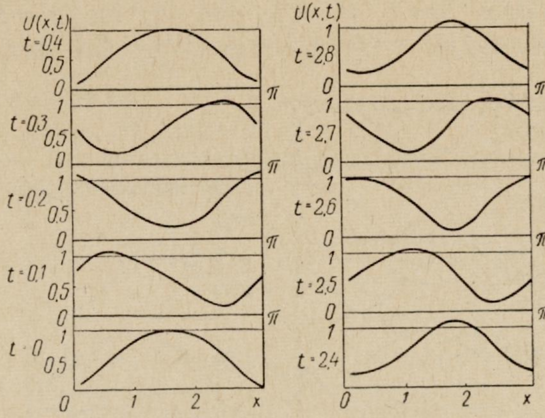

Рис. 1

При численной реализации приведенной выше схемы возникают трудности вычислительного характера.

Во-первых, при произвольном выборе N нет информации о точности решения, так как без численного определения значений μ_0, μ_1, $\tilde{\mu}_1$, μ_2, $\tilde{\mu}_2$, ... остаются неизвестными, даже приближенно, длины отброшенных лакун.

Во-вторых, решение системы (3), и особенно (4), при больших N занимает много времени у ЭВМ средней производительности.

Чтобы обойти эти трудности, в настоящей работе после определения коэффициентов системы полиномов

$$T_{2N+1}(z),\ R_N(z),\ V_{N-1}(z),\ W_{N+1}(z) \tag{19}$$

искали их корни, затем автоматически устанавливали $N_1 < N$ по заданной длине лакуны ε и по выбранному меньшему N_1 перестраивали многочлены (19), что дало некоторую экономию машинного времени и возможность оценить результат. В качестве $q(x)$ выбирали, как указано выше, функцию $\lambda \sin x$, расчет вели для $\lambda = 1$ в диапазоне $0 \leqslant x \leqslant \pi$, $0 \leqslant t \leqslant 3{,}1$ и для $\lambda = 4$ в диапазоне $0 \leqslant x \leqslant \pi$, $0 \leqslant t \leqslant 2{,}1$.

Результаты расчета, выполненного с двумя верными значащими цифрами на ЭВМ М-222, приведены в виде графиков (рис. 1,

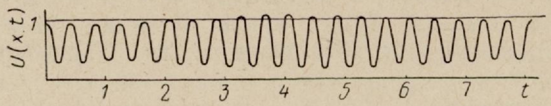

Рис. 2

где $q(x) = \lambda \sin x$; $\lambda = 1$, $N_1 = 2$; рис. 2, где $x = 1{,}4$; $\lambda = 1$; $N_1 = 2$; рис. 3, где $q(x) = \lambda \sin x$; $\lambda = 4$; $N_1 = 4$; рис. 4, где $x = 1{,}5$;

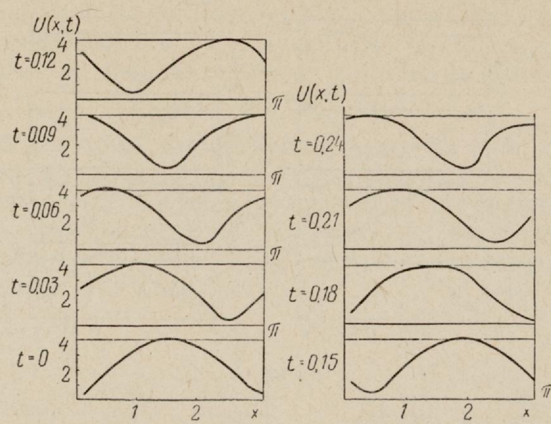

Рис. 3

$\lambda = 4$; $N_1 = 4$), из которых следует, что функция $u(x, t)$ почти периодична по t с почти периодом, равным 0,4 при $\lambda = 1$ и равным 0,18 при $\lambda = 4$.

В заключение автор выражает признательность профессору В. А. Марченко за постановку задачи и руководство работой.

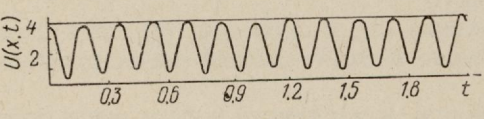

Рис. 4

Список литературы: 1. *Марченко В. А.* Периодическая задача Кортевега—де Фриса.— Мат. сб., 1974, т. 95(137), № 3(11), с. 331—356. 2. *Марченко В. А.* Спектральная теория операторов Штурма — Лиувилля. Киев, «Наукова думка», 1972. 217 с. 3. *Хилле Е., Филлипс Р.* Функциональный анализ и полугруппы. М., ИЛ, 1962. 829 с.

Поступила 26 декабря 1977 г.

УДК 517.535.6

И. П. ПРОСКУРНЯ, канд. физ.-мат. наук

К ОДНОЙ ТЕОРЕМЕ ХЕЙМАНА — ФУКСА

Пусть $\varphi(x)$ — действительная, монотонно возрастающая дважды непрерывно-дифференцируемая выпуклая при $0 \leqslant x \leqslant \infty$ функция ($\varphi(0) = 0$, $\varphi''(x) \geqslant 0$) и такая, что $v(x) = \varphi(x)/x$ медленно растет (см. [1, с. 72]) и удовлетворяет условиям: $v(0) = 1$, $v''(x) \geqslant 0$.

Обозначим $\varlimsup\limits_{x\to\infty} x \frac{v'(x)}{v(x)} \ln\ln x = B(\varphi)$.

Определение*. *Будем говорить, что функция $\varphi(x)$ принадлежит классу Λ_A, если $B(\varphi) = A$.*

Положим для произвольной мероморфной функции $f(z)$ $(z \neq \infty)$ и любого комплексного числа a

$$m_\varphi(r, a, f) = \varphi^{-1}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi\left(\ln^+ \frac{1}{|f(re^{i\theta}) - a|}\right) d\theta\right\}, \quad a \neq \infty;$$

$$m_\varphi(r, \infty, f) = \varphi^{-1}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(\ln^+ |f(re^{i\theta})|)\, d\theta\right\};$$

$$\delta_\varphi(a, f) = \varliminf_{r\to\infty} \frac{m_\varphi(r, a, f)}{T(r, f)}, \quad D_\varphi(f) = \{a : \delta_\varphi(a, f) > 0\},$$

где $T(r, f)$ — неванлинновская характеристика функции $f(z)$ [3, с. 169].

Заметим, что при $\varphi(x) \equiv x$ величины $\delta_\varphi(a, f)$ совпадают с дефектами Р. Неванлинны $\delta(a, f)$ см. [3, с. 271]).

У. Хейман и В. Фукс доказали такое утверждение:

Теорема А [4, с. 125]. *Пусть a_ν $(a_\nu \neq \infty)$ — произвольная последовательность комплексных чисел, и δ_ν — последовательность положительных чисел, $1 \leqslant \nu \leqslant N \leqslant \infty$, подчиненная единственному условию $\sum\limits_{\nu=1}^{N} \delta_\nu = 1$. Тогда существует целая функция $g(z)$ такая, что $\delta(a_\nu, g) = \delta_\nu$ $(1 \leqslant \nu \leqslant N)$, и $g(z)$ не имеет дефектных значений, отличных от a_ν.*

В этой работе нами получен следующий результат:

Теорема 1. *Пусть $\{b_\nu\}_{\nu=0}^{\infty}$ — произвольное счетное множество конечных комплексных чисел и δ_ν — последовательность положительных чисел, подчиненная единственному условию $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \delta_\nu = 1$.*

---

* Это определение класса Λ_A шире, чем приведенное в [2], с. 560.

Тогда существует целая функция $G(z)$, *для которой* $\delta_\varphi(b_\nu, G) \geqslant \geqslant \delta_\nu \cdot e^{A/2}$, *где*

$$\varphi(x) = x \cdot \exp\left\{A \cdot \int\limits_{e}^{\ln(x+e^e)} \frac{ds}{\ln s}\right\} \quad (B(\varphi) \equiv A).$$

Для доказательства теоремы 1 используем конструкцию У. Хеймана и В. Фукса [4, с. 125—139].

Пусть S — некоторое подмножество множества натуральных чисел, имеющее плотность*) $d(S)$. Предположим, что δ_ν $(\nu = 0, 1, \ldots)$ — положительные числа, такие что $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} \delta_\nu = 1$. Известно [4, с. 133], что множество натуральных чисел можно разбить на счетное множество попарно не пересекающихся множеств S_ν с плотностью δ_ν $(\nu = 0, 1, \ldots)$.

Пусть теперь $\{b_\nu\}_{\nu=0}^{\infty}$ — множество чисел из теоремы 1. Определим последовательность $\{c_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ следующим образом: $c_{-n} = c_n$ и при $n = 0, 1, \ldots$

$$c_n = b_\nu, \text{ если } n \in S_\nu \ (\nu = 0, 1, \ldots). \qquad (1)$$

Тогда очевидно, что

$$G(z) = \exp(-e^z - z) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \cdot E_n(z), \qquad (2)$$

где $E_n(z)$ — функции, определенные в [4, с. 129], есть целая функция.

Далее нам понадобятся следующие утверждения.

Лемма 1 [4, с. 129]. *Если* $z = x + iy$, $x \geqslant r_0 \geqslant \frac{\pi}{2}$ и $(2m - 1)\pi < y < (2m+1)\pi$ *(m — фиксировано,* $m = 0, 1, \ldots$*), тогда имеет место неравенство***)

$$|G(z) - c_m| \leqslant K_1 |z| |\exp(-e^z - z)|.$$

Если $z \in A^{(\nu)}$, где

$$A^{(\nu)} = \{z : z = x + iy, \ \ x > 0, \ (2n-1)\pi < y < (2n+1)\pi, \\ |n| \in S_\nu\}, \qquad (3)$$

тогда из соотношения (1) и неравенства леммы 1 следует:

Лемма 2. *Для функции* $G(z)$ *при любом фиксированном* $(\nu = 0, 1, \ldots)$ *и* $z = x + iy \in A^{(\nu)}$ $(x \geqslant r_0 \geqslant \pi/2)$ *справедлива оценка* $|G(z) - b_\nu| \leqslant K_1 |z| |\exp(-e^z - z)|$.

Нашим следующим результатом является

---

*) т. е. $d(S) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{t(n, S)}{n}$ где $t(n, S)$ — количество чисел из S, не превышающих n.

**) Буквой K с индексами будем обозначать положительные абсолютные постоянные.

Лемма 3 [4, с. 130]. *Пусть* $F(y)$ — *ограниченная неотрицательная интегрируемая на каждом сегменте* $0 \leqslant y \leqslant R$ *функция такая, что* $\lim\limits_{R \to \infty} \frac{1}{R} \int\limits_0^R F(y)\, dy = l > 0$.

Тогда при любых фиксированных $d > 0$, $\varepsilon > 0$ *и* $r > r_0(\varepsilon, F)$

$$I(r) = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{\pi/6} e^{r \cos\theta + \int\limits_e^{r\cos\theta - d} \frac{ds}{\ln s}} \cdot F(r \sin\theta)\, d\theta \geqslant$$

$$\geqslant \frac{(1 - 4\varepsilon)\, l e^r}{\sqrt{2\pi r}}\, v(e^r - e_2)\ (e_2 = e^e), \tag{4}$$

где

$$v(x) = \exp\left\{A \cdot \int\limits_e^{\ln(x + e_2)} \frac{ds}{\ln s}\right\}\ (A < \infty).$$

Доказательство леммы 3. Пусть $\psi(y) = \int\limits_0^y F(t)\, dt$,

$$\varkappa(y) = \frac{1}{\sqrt{r^2 - y^2}}\, e^{\sqrt{r^2 - y^2} + A \int\limits_e^{\sqrt{r^2 - y^2} - d} \frac{ds}{\ln s}}.$$

Заметим, что при $y > r_0(\varepsilon, F)$ выполняется неравенство $\psi(y) > (l - \varepsilon)\, y$, а при $0 < y \leqslant r/2$, $\varkappa'(y) \leqslant 0$.

Положим, $r \sin\theta = y$, тогда

$$I(r) = 1/\pi \int\limits_0^{\pi/6} e^{r\cos\theta + A \int\limits_e^{r\cos\theta - d} \frac{ds}{\ln s}} F(r\sin\theta)\, d\theta = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{r/2} \psi'(y)\, \varkappa(y)\, dy.$$

Интегрируя по частям, получаем

$$I(r) = \frac{1}{\pi} \psi(r/2)\, \varkappa(r/2) - \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{r/2} \varkappa'(y)\, \psi(y)\, dy \geqslant$$

$$\geqslant -\frac{1}{\pi} \int\limits_{r^{1/7}}^{r/2} \varkappa'(y)\, \psi(y)\, dy + \frac{1}{\pi} \psi\left(\frac{r}{2}\right) \varkappa\left(\frac{r}{2}\right) \geqslant$$

$$\geqslant -\frac{l - \varepsilon}{\pi} \int\limits_{r^{1/7}}^{r/2} y \varkappa'(y)\, dy + \frac{1}{\pi} \psi\left(\frac{r}{2}\right) \varkappa\left(\frac{r}{2}\right) \geqslant$$

$$\geqslant -\frac{l - \varepsilon}{\pi}\, y \varkappa(y) \Big|_{y = r^{1/7}}^{r/2} + \frac{l - \varepsilon}{\pi} \int\limits_{r^{1/7}}^{r/2} \varkappa(y)\, dy + \frac{1}{\pi} \varkappa\left(\frac{r}{2}\right) \psi\left(\frac{r}{2}\right) \geqslant$$

$$\geqslant \frac{l - \varepsilon}{\pi} \int\limits_{r^{1/7}}^{r/2} \varkappa(y)\, dy + \frac{1}{\pi} \varkappa\left(\frac{r}{2}\right)\left[\psi\left(\frac{r}{2}\right) - \frac{r}{2}(l - \varepsilon)\right].$$

Так как

$$\int_0^{r^{1/7}} \varkappa(y)\,dy \leqslant 2r^{1/7}\frac{e^r}{r}e^{A\int_e^r \frac{ds}{\ln s}} = 2r^{1/7}\frac{e^r}{r}v(e^r - e_2),$$

то

$$I(r) \geqslant \frac{l-\varepsilon}{\pi}\int_0^{r/2}\varkappa(y)\,dy - 2r^{1/7}\frac{e^r}{r}v(e^r - e_2). \tag{5}$$

Пусть $\sqrt{r^2 - y_1^2} = r - u$; $1 - \frac{\sqrt{3}}{2} = \alpha$. Тогда при $r > r_0(\varepsilon)$ ($\varepsilon > 0$— фиксировано) имеем

$$\int_0^{r/2}\varkappa(y)\,dy = e^r\int_0^{\alpha r}(2ru - u^2)^{-\frac{1}{2}}e^{-u}e^{A\int_e^{r-u-d}\frac{ds}{\ln s}}du \geqslant$$

$$\geqslant \frac{e^r}{\sqrt{2r}}\int_0^{\sqrt{r}}\left(1 - \frac{u}{2r}\right)^{-\frac{1}{2}}\frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}e^{A\int_e^{r-u-d}\frac{ds}{\ln s}}du \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1-\varepsilon}{\sqrt{2r}}e^r\int_0^{\sqrt{r}}\frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}e^{A\int_e^{r-u-d}\frac{ds}{\ln s}}du \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1-\varepsilon}{\sqrt{2r}}e^r\int_0^{\varepsilon\ln r}\frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}e^{A\int_0^r\frac{ds}{\ln s}}e^{\int_{r-u-d}^r\frac{ds}{\ln s}}du. \tag{6}$$

Учитывая, что при $0 \leqslant u \leqslant \varepsilon\ln r$ и $r > r_0(\varepsilon)$

$$\int_{r-u-d}^r\frac{ds}{\ln s} \leqslant \int_{r-\varepsilon\ln r-d}^r\frac{ds}{\ln s} \leqslant \frac{\varepsilon\ln r + d}{\ln(r - \varepsilon\ln r - d)} \leqslant 2\varepsilon,$$

мы из оценок (5) и (6) получаем ($r > r_0(\varepsilon, F)$):

$$I(r) \geqslant \frac{(1-2\varepsilon)\,le^r}{\pi\sqrt{2r}}e^{A\int_e^r\frac{ds}{\ln s}}\int_0^{\varepsilon\ln r}\frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}du - 2r^{1/7}\frac{e^r}{r}v(e^r - e_2) \geqslant$$

$$\geqslant \frac{(1-3\varepsilon)\,l\varepsilon^r}{\pi\sqrt{2r}}e^{A\int_e^r\frac{ds}{\ln s}}\int_0^\infty\frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}du - 2r^{1/7}\frac{e^r}{r}v(e^r - e_2) =$$

$$= \frac{(1-3\varepsilon)\,le^r}{\sqrt{2\pi r}}\left(1 - \frac{2\sqrt{2\pi}}{lr^{5/14}}\right)v(e^r - e_2) \geqslant (1-4\varepsilon)\frac{le^r}{\sqrt{2\pi r}}v(e^r - e_2).$$

Оценка (4) доказана.

Докажем теорему 1.

Согласно утверждению леммы 2 на системе полуполосок $A^{(\nu)}$ (ν — фиксировано, $\nu = 0, 1, \ldots$) при $x \geqslant r_0 \geqslant \frac{\pi}{2}$ $(z = x + iy)$

$$\ln^+ \frac{1}{|G(z) - b_\nu|} \geqslant e^x \cos y + x - \ln^+ K_1 - \ln r \geqslant$$
$$\geqslant e^x \cos y - K_2 \ln r. \tag{7}$$

Пусть

$$F_\nu(y) = \begin{cases} \cos y, \text{ если } \left(2n - \frac{1}{2}\right)\pi < y < \left(2n + \frac{1}{2}\right)\pi, \ |n| \in S_\nu, \\ 0 \text{ в противном случае.} \end{cases} \tag{8}$$

Тогда при $R > R_0(\varepsilon, F_\nu)$ $(\varepsilon > 0)$

$$\frac{1}{R}\int\limits_0^R F_\nu(y)\,dy \geqslant \frac{t\left(\frac{R}{2\pi}, S_\nu\right) - 1}{R}\int\limits_0^{2\pi} F_\nu(y)\,dy \geqslant$$
$$\geqslant \frac{(1-\varepsilon)\,\delta_\nu}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} F_\nu(y)\,dy = \frac{(1-\varepsilon)\,\delta_\nu}{\pi}\int\limits_0^{\pi/2} \cos y dy = \frac{(1-\varepsilon)\,\delta_\nu}{\pi},$$

где δ_ν — плотность множества S_ν.

Пусть

$$A_n' = \left\{z : z = x + iy, \quad x > 0, \left(2n - \frac{1}{4}\right)\pi < y < \left(2n + \frac{1}{4}\right)\pi\right\}$$
$$(n = 0, 1, \ldots).$$

Положим

$$\omega_1 = \left\{\bigcup_{(n)} A_n'\right\} \cap \left\{z : |\arg z| < \frac{\pi}{6}\right\}. \tag{9}$$

Легко заметить, что при $z \in \omega_1$ и $z = re^{i\theta}$, $r > r_0(\varepsilon)$ ($r_0(\varepsilon)$ — не зависит от θ) справедливо неравенство

$$e^{r\cos\theta}\cos(r\sin\theta) - K_2 \ln r \geqslant (1-\varepsilon)\, e^{r\cos\theta}\cos(r\sin\theta). \tag{10}$$

Действительно, неравенство (10) следует, если заметить, что при $z \in \omega_1$ $\cos(r\sin\theta) > \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos\theta > \cos\frac{\pi}{6}$. Значит,

$$e^{r\cos\theta}\cos(r\sin\theta) > e^{r/2} \ (r > r_0).$$

Поэтому при $r > r_0(\varepsilon)$,

$$e^{r\cos\theta}\cos(r\sin\theta) - K_2 \ln r \geqslant e^{r\cos\theta}\cos(r\sin\theta) \times$$
$$\times \left\{1 - K_2 \frac{\ln r}{e^{r/2}}\right\} > (1-\varepsilon)\, e^{r\cos\theta}\cos(r\sin\theta).$$

Пусть

$$\omega_2(\nu) = \{\theta : z = re^{i\theta} \in A^{(\nu)} \cap \omega_1\}, \tag{11}$$

где $A^{(\nu)}$ и ω_1 определяются соответственно соотношениями (3) и (9). Тогда при $z = re^{i\theta} \in \omega_1(\nu)$ (r — фиксировано, $r > r_0(\varepsilon)$) из соотношений (7), (8) и (10) имеем $\left(x = \operatorname{Re} z \geqslant \frac{\pi}{2}\right)$

$$\ln^+ \frac{1}{\left|G\left(re^{i\theta}\right) - b_\nu\right|} \geqslant (1-\varepsilon)\, e^{r\cos\theta} \cos(r\sin\theta) =$$

$$= (1-\varepsilon)\, e^{r\cos\theta} F_\nu(r\sin\theta). \tag{12}$$

Для этих z получим оценку снизу для величины $y(r, b_\nu)$. Учитывая (12), имеем $\left(r > \frac{2}{\sqrt{3}} r_0\right)$:

$$y(r, b_\nu) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \ln^+ \frac{1}{\left|G\left(re^{i\theta}\right) - b_\nu\right|}\, v\left(\ln^+ \frac{1}{\left|G\left(re^{i\theta}\right) - b_\nu\right|}\right) d\theta \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\arccos r_0/r}^{\arccos r_0/r} \ln^+ \frac{1}{\left|G\left(re^{i\theta}\right) - b_\nu\right|}\, e^{A\int\limits_e^{\ln\left(\ln^+\frac{1}{\left|G\left(re^{i\theta}\right)-b_\nu\right|}+e_2\right)} \frac{ds}{\ln s}} d\theta \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi/6}^{\pi/6} \ln^+ \frac{1}{\left|G\left(re^{i\theta}\right) - b_\nu\right|}\, e^{A\int\limits_e^{\ln\left(\ln^+\frac{1}{\left|G\left(re^{i\theta}\right)-b_\nu\right|}+e_2\right)} \frac{ds}{\ln s}} d\theta \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\omega_2(\nu)} \ln^+ \frac{1}{\left|G\left(re^{i\theta}\right) - b_\nu\right|}\, e^{A\int\limits_e^{\ln\left(\ln^+\frac{1}{\left|G\left(re^{i\theta}\right)-b_\nu\right|}+e_2\right)} \frac{ds}{\ln s}} d\theta \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1-\varepsilon}{2\pi}\int\limits_{\omega_2(\nu)} e^{r\cos\theta + A\int\limits_e^{r\cos\theta + \ln\frac{\sqrt{2}}{4}} \frac{ds}{\ln s}} \cos(r\sin\theta)\, d\theta =$$

$$= \frac{1-\varepsilon}{2\pi}\int\limits_{-\pi/6}^{\pi/6} e^{r\cos\theta + A\int\limits_e^{r\cos\theta + \ln\frac{\sqrt{2}}{4}} \frac{ds}{\ln s}} F_\nu(r\sin\theta)\, d\theta =$$

$$= \frac{1-\varepsilon}{\pi}\int\limits_0^{\pi/6} e^{r\cos\theta + A\int\limits_e^{r\cos\theta + \ln\frac{\sqrt{2}}{4}} \frac{ds}{\ln s}} F_\nu(r\sin\theta)\, d\theta.$$

Применяя к последнему интегралу лемму 3 и учитывая соотношение (8) при $r > r_0(\varepsilon, \nu)$ $(\varepsilon > 0)$, будем иметь

$$y(r, b_\nu) \geqslant (1 - 5\varepsilon)\frac{e^r}{\sqrt{2\pi^3 r}}\,\delta_\nu v(e^r - e_2). \tag{13}$$

Из результатов У. Хеймана и В. Фукса [4], с. 132 следует, что характеристика Р. Неванлинны функции $G(z)$ удовлетворяет условию $(\varepsilon > 0)$:

$$T(r) = T(r, G) \leqslant (1 + \varepsilon)\frac{e^r}{\sqrt{2\pi^3 r}}. \tag{14}$$

Далее, так как $y(r, b_\nu) = \varphi(m_\varphi(r, b_\nu))$, то оценки (13) и (14) дают $(r > r_0)$:

$$\varphi(m_\varphi(r, b_\nu)) \geqslant (1 - 6\varepsilon)\,\delta_\nu T(r)\, v(e^r - e_2) \geqslant$$

$$\geqslant (1 - 6\varepsilon)\,\delta_\nu T(r)\, v\left(\frac{e^r}{2}\right) \geqslant (1 - 7\varepsilon)\,\delta_\nu T(r)\, v\left(T(r)\sqrt{r}\right) \geqslant$$

$$\geqslant (1 - 7\varepsilon)\,\delta_\nu T(r)\, v\left(T(r)\sqrt{\ln T(r)}\right). \tag{15}$$

В силу определения функции $v(x)$ при $r > r_0(\varepsilon)$ имеем

$$\ln\frac{v\{T(r)\sqrt{\ln T(r)}\}}{v\{T(r)\}} = A \cdot \int\limits_{\ln\{T(r)+e_2\}}^{\ln\{T(r)\sqrt{\ln T(r)}+e_2\}} \frac{ds}{\ln s} \geqslant$$

$$\geqslant A \int\limits_{\ln\{T(r)+e_2\}}^{\ln\{T(r)\sqrt{\ln T(r)}\}} \frac{ds}{\ln s} \geqslant \frac{A}{\ln\left\{\ln T(r) + \frac{1}{2}\ln\ln T(r)\right\}}\ln\frac{T(r)\sqrt{\ln T(r)}}{T(r) + e_2} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{A}{1 + \dfrac{\ln\left\{1 + \dfrac{\ln\ln T(r)}{2\ln T(r)}\right\}}{\ln\ln T(r)}}\left\{\frac{1}{2} - \frac{\ln\left(1 + \dfrac{e_2}{T(r)}\right)}{\ln\ln T(r)}\right\} \geqslant (1 - \varepsilon)\,A/2. \tag{16}$$

Из оценок (15) и (16) получаем*)

$$\varphi(m_\varphi(r, b_\nu)) \geqslant (1 - 7\varepsilon)\,\delta_\nu e^{(1-\varepsilon)A/2}T(r)\, v(T(r)) \geqslant$$

$$\geqslant (1 - 8\varepsilon)\,\delta_\nu e^{(1-\varepsilon)A/2}T(r)\, v((1 - 8\varepsilon)\,\delta_\nu e^{(1-\varepsilon)A/2}T(r)) =$$

$$= \varphi((1 - 8\varepsilon)\,\delta_\nu e^{(1-\varepsilon)A/2}T(r)).$$

Следовательно,

$$m_\varphi(r, b_\nu) \geqslant (1 - 8\varepsilon)\,\delta_\nu e^{(1-\varepsilon)A/2}T(r).$$

---

*) Далее мы существенно используем, что $v(x)$ — медленно растущая функция [1, с. 72].

Таким образом, для функции $G(z)$, определенной соотношением (2), имеем

$$\delta_\varphi(b_\nu, G) \geqslant \delta_\nu e^{A/2} \quad (\nu = 0, 1, \ldots).$$

Теорема 1 доказана.

Следствие. *Существуют мероморфные функции бесконечного нижнего порядка, для которых* $\sum_{(a)} \delta_\varphi^\alpha(a, f)$ *может расходиться при любом* $\alpha < 1$.

Замечание. Теорема 1 сохраняет силу и в том случае, если $\varphi(x) = xv(x)$ является произвольной функцией с указанными выше свойствами и удовлетворяет условию

$$\lim_{x \to \infty} x \frac{v'(x)}{v(x)} \ln \ln x = A \quad (A < \infty).$$

Список литературы: 1. *Гольдберг А. А., Островский И. В.* Распределение значений мероморфных функций. М., «Наука», 1970. 592 с. 2. *Проскурня И. П.* О росте мероморфных функций бесконечного нижнего порядка.— «ДАН СССР. Сер. мат.», 1973, т. 209, № 3, с. 558—561. 3. *Неванлинна Р.* Однозначные аналитические функции. М. ГИТТЛ, 1941. 388 с. 4. *Хейман У. К.* Мероморфные функции. М., «Мир», 1966. 287 с.

Поступила 29 декабря 1977 г.

УДК 512.567.5+512.53.8

Г. Ч. КУРИННОЙ

Ω-АЛГЕБРЫ СО СТОУНОВОЙ РЕШЕТКОЙ ИДЕАЛОВ

Ниже A обозначает Ω-алгебру с набором операций Ω. Под идеалом в A понимаем подалгебру $B \subseteq A$ такую, что если $n \geqslant 1$, ω — n-арная операция из Ω и среди $a_1, a_2, \ldots, a_n \in A$ есть элемент из B, то $\omega(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in B$. Главный идеал в A, порожденный $a \in A$, т. е. наименьший идеал, содержащий a, обозначаем через (a). Так как пересечение и объединение любого семейства идеалов снова является идеалом, то совокупность всех идеалов алгебры A образует полную дистрибутивную решетку $L = L(\subseteq, \cap, \cup)$. Наименьший идеал в A обозначаем через m. Подразумевается, что если Ω не содержит 0-арных операций, то $\varnothing$ является идеалом. Идеал $B \in L$ назовем плотным, если для любых $B \ni a$, $b \notin m$ выполняется $(a) \cap (b) \neq m$.

Теорема 1. *Ω-алгебра A имеет стоунову решетку идеалов тогда и только тогда, когда A представима в виде объединения некоторого множества X плотных идеалов.*

Доказательство. Пусть L — стоунова. Псевдодополнение к $a \in L$ обозначаем через a^*. Через X обозначим семейство идеалов, которые могут быть представлены в виде $(a)^{**}$, где $a \in A$. Проверим, что X удовлетворяет условиям:

а) $A = \bigcup_{B \in X} B$; б) для любого $B \in X$ и любых a, $b \in B$ таких, что a, $b \notin m$, выполняется $(a) \cap (b) \neq m$.

Так как $A = \bigcup_{a \in A} (a)$ и для любого $a \in A$ выполняется $(a) \subseteq (a)^{**}$, то а) справедливо.

Пусть a, $b \notin A$ и $b \notin m$, $b \in (a)^{**}$. Докажем равенство $(a)^{**} = (b)^{**}$. В силу стоуновости L можно записать равенство $A = (b)^* \cup (b)^{**}$. Отсюда $(a) = [(b)^* \cup (b)^{**}] \cap (a) = [(b)^* \cap (a)] \cup [(b)^{**} \cap (a)]$. Так как $(b)^* \cap (b)^{**} = m$ и $a \notin m$, то либо $a \in (b)^* \cap (a)$, либо $a \in (b)^{**} \cap (a)$. Поэтому возможно одно из двух: либо

$$(a) = (a) \cap (b)^*, \tag{1}$$

либо

$$(a) = (a) \cap (b)^{**}. \tag{2}$$

В стоуновых решетках истинно тождество $(x \cap y)^{**} = x^{**} \cap y^{**}$ [см. 4]. Поэтому равенство (1) влечет

$$(a)^{**} = (a)^{**} \cap (b)^*, \tag{3}$$

а равенство (2) влечет

$$(a)^{**} = (a)^{**} \cap (b)^{**}. \tag{4}$$

Так как $b \in (b)^*$, то (3) не может выполняться. Из равенства (4) получаем включение $(b)^{**} \supseteq (a)^{**}$. Обратное включение $(b)^{**} \subseteq (a)^{**}$ получаем из $(b) \subseteq (a)^{**}$. Тем самым доказана справедливость равенства $(a)^{**} = (b)^{**}$.

Для $c \notin m$, $c \in (a)^{**}$ мы можем записать $[(c) \cap (b)]^{**} = (c)^{**} \cap (a)^{**} = (a)^{**}$. Это доказывает неравенство $(c) \cap (b) \neq m$.

Необходимость условий а), б) проверена. Докажем их достаточность.

Пусть X система плотных идеалов и выполняется условие а). Определим на X бинарное отношение θ, полагая $(x, y) \in \theta \leftrightarrow (\exists c \in A)(c \notin m, c \in x \cap y)$. θ является симметрическим и рефлексивным отношением. Проверим транзитивность θ. Пусть $x, y, z \in X$; (x, y), $(y, z) \in \theta$. Это означает, что существуют c_1, $c_2 \in A$; c_1, $c_2 \notin m$ такие, что $c_1 \in x \cap y$, $c_2 \in y \cap z$. Однородность идеала y дает неравенство $(c_1) \cap (c_2) \neq m$ и мы можем выбрать $c \notin m$, $c \in (c_1) \cap (c_2)$. Включение $(c) \subseteq (x) \cap (z)$ дает $(x, z) \in \theta$. Таким образом, θ является эквивалентностью. Объединение идеалов из θ-класса снова будет плотным идеалом. Поэтому можно считать, что множество X удовлетворяет условию

$$x, y \in X; \quad x \neq y \Rightarrow x \cap y = m. \tag{5}$$

Каждый идеал I алгебры A определяет следующее подмножество множества X: $X(I) = \{B \in X \mid B \cap I \neq m\}$. Если I, $J \in L$ и $I \cap J = m$, то в силу плотности идеалов из X, $X(I) \cap X(J) =$

$= \varnothing$. В силу условия (5) верно также и обратное утверждение: если для двух идеалов I и J выполняется равенство $X(I) \subset X(J) = \varnothing$, то $I \cap J = m$. Вышесказанное позволяет утверждать, что L является решеткой с псевдодополнениями. Псевдодополнением к идеалу $I \in L$ будет идеал

$$I^* = \bigcup_{B \in X/X(I)} B. \tag{6}$$

Равенство (6) показывает, что для любого идеала $I \in L$ выполняется $I^* \cup I^{**} = \bigcup_{B \in X} B = A$.

Стоуновость L и теорема 1 доказаны.

Из теоремы 1 с учетом соотношения (5) вытекает:

Следствие. *Полугруппа с нулем имеет стоунову решетку идеалов тогда и только тогда, когда она является 0-прямым объединением подгрупп, в которых любые ненулевые идеалы имеют ненулевое пересечение.*

Напомним, что полугруппа с нулем 0 называется 0-прямым объединением полугрупп $\{S_i \mid i \in I\}$ [см. 1, т. 2, с. 22], если она является объединением семейства $\{S_i \mid i \in I\}$ подполугрупп и выполняются равенства $S_i \cap S_j = 0$, $S_i \cdot S_j = 0$ при $i \neq j$.

Полугруппа S с нулем 0 называется 0-простой, [см. 1, т. 1, с. 98], если 0 является единственным собственным двусторонним идеалом и $S^2 \neq 0$.

Полугруппа называется бирегулярной [см. 3, с. 92], если: а) каждый главный двусторонний идеал в S порождается идемпотентом; б) для каждого главного идеала (a), порожденного элементом $a \in S$, найдется двусторонний идеал $I \subseteq S$ такой, что полугруппа S изоморфна прямому произведению $(a) \times I$.

В б) подразумевается, что S, (a) и I содержат 0 и при изоморфизме полугруппы S на $(a) \times I$ элементу $x \in (a)$ ставится в соответствие $(x, 0)$ и элементу $x \in I$ ставится в соответствие $(0, x)$.

В заключение проверим справедливость следующей теоремы:

Теорема 2. *Решетка двусторонних идеалов ненулевой бирегулярной полугруппы стоунова тогда и только тогда, когда она 0-проста.*

Доказательство. Очевидно, что решетка идеалов ненулевой 0-простой полугруппы стоунова. Пусть теперь известно, что полугруппа S бирегулярна, содержит более одного элемента и решетка $L = L(\subseteq, \cap, \cup, {}^*)$ ее идеалов стоунова. Допустим S представима в виде прямого произведения двух идеалов I_1 и I_2, т. е. $S = \{(a, b) \mid (a, 0) \in I_1, (0, b) \in I_2\}$. Так как $I_1 \cap I_2 = (0, 0)$, то $I_1^* \supseteq I_2$. Выберем $(a, b) \in I_1^*$. Главный идеал полугруппы S, порожденный (a, b), порождается некоторым идемпотентом $(e, f) \in S$ (см. а)). Так как $e^2 = e$ и $(e, f) \in I_1^*$, то и $(e, 0) \in I_1^*$. Из определения псевдодополнений получаем $e = 0$. Отсюда

$a = 0$ и $I_1^* = I_2$. Аналогично проверяем равенство $I_2^* = I_1$. Из условия $I_1^* \cup I_1^{**} = S$ получаем, что один из идеалов I_1 или I_2 одноэлементен. В сочетании с условием б это нам дает, что S является 0-простой полугруппой.

Список литературы. 1. *Клиффорд А., Престон Г.* Алгебраическая теория полугрупп. В 2-х т. М., «Мир», 1972. 2. *Скорняков Л. А.* Дополнения в структуре конгруэнций.— «Мат. сб.», 1972, т. 88 (130), № 1, с. 40—81. 3. *Keimel K.* Darstellung von Halbgruppen und universellen Algebren durch Schnitte in Garben; bireguläre Halbgruppen.— «Math. Nachr.», 1970, vol. 45, № 1—6, S. 81—96. 4. *Grätzer G.* Stone algebras form an equational class.— «J. Austral. math. sos.», 1969, vol. IX, parts 3, 4, p. 308—309.

Поступила 27 января 1978 г.

УДК 512.89

Э. М. ЖМУДЬ, канд. физ.-мат. наук

ОБ ОДНОМ ИНВАРИАНТЕ КВАДРАТИЧНЫХ ФОРМ НАД ПОЛЕМ ГАЛУА ХАРАКТЕРИСТИКИ 2

1. В общепринятых изложениях теории квадратичных форм над полем характеристики 2 [3, 4] существенную роль играет теорема Витта о продолжении изометрий квадратичных пространств. В настоящей работе предлагается построение теории квадратичных форм над полем Галуа характеристики 2, основывающееся не на теореме Витта, а на рассмотрении некоторого инварианта квадратичных форм, являющегося одной из разновидностей сумм Гаусса.

Пусть V — n-мерное ($n < \infty$) линейное пространство над полем K, Q — квадратичный функционал пространства V, т. е. такое отображение $Q: V \to K$, что для любых $x, y \in V$, $\lambda \in K$ имеет место

$$Q(x + y) = Q(x) + Q(y) + B(x, y), \tag{1}$$

где B — билинейный функционал пространства V, $Q(\lambda x) = \lambda^2 Q(x)$. Билинейный функционал B, как видно из (1), всегда является симметрическим. Он однозначно определяется квадратичным функционалом Q; если же характеристика поля отлична от 2, квадратичный функционал Q, в свою очередь, однозначно определяется билинейным функционалом B: в этом случае $Q(x) = P(x, x)$ $(x \in V)$, где P — «поляра» Q, связанная с B соотношением $2P = B$. Как функция координат $\{\xi_i\}$ вектора $x \in V$ в базисе $\{e_i\}$ пространства $V \cdot Q(x)$ является квадратичной формой; при замене базиса эта квадратичная форма переходит в эквивалентную. Тем самым квадратичному функционалу Q ставится в соответствие класс эквивалентных квадратичных форм.

Отношение эквивалентности квадратичных форм в дальнейшем будет обозначаться символом $\sim$. Если f и g — квадратичные формы, отвечающие квадратичному функционалу Q в базисах $\{e_i\}$ и $\{e_i'\}$, будем писать $g = f^T$, где T — матрица перехода от первого базиса ко второму.

Линейное пространство V с заданным на нем квадратичным функционалом Q называется *квадратичным пространством* (обозначение: V_Q). *Изометрией* квадратичного пространства V_Q на квадратичное пространство $V'_{Q'}$ (поле скаляров K общее) называется такой изоморфизм линейных пространств φ: $V \to V'$, что $Q'(\varphi(x)) = Q(x)$ $(x \in V)$. Квадратичные пространства V_Q и $V'_{Q'}$ называются *изометричными* $(V_Q \cong V'_{Q'})$, если существует изометрия V_Q на $V'_{Q'}$. Очевидно, $V_Q \cong V'_{Q'}$ тогда и только тогда, когда совпадают классы квадратичных форм, отвечающих квадратичным функционалам Q и Q'. Квадратичное пространство и квадратичный функционал Q называются *невырожденными*, если невырожден билинейный функционал B, отвечающий Q в силу (1).

Начиная с этого момента характеристика поля K считается равной 2. В этом случае билинейный функционал B в (1) является не только симметрическим, но и антисимметрическим: $B(x, x) = 0$ $(x \in V)$. В базисе $\{e_i\}$ пространства V ему отвечает кососимметрическая (и, вместе с тем, симметрическая) матрица $A = (\alpha_{ij})$ n-го порядка: $\alpha_{ij} = \alpha_{ji} = B(e_i, e_j)$ $(i, j = 1, \ldots, n)$; в частности, $\alpha_{ii} = 0$ $(i = 1, \ldots, n)$. Мы будем считать матрицу A также и матрицей квадратичного функционала Q в базисе $\{e_i\}$. Если $x = \sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i$ $(\xi_i \in K,\ i = 1, \ldots, n)$, то $Q(x) = \sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} \overset{*}{\alpha}_{ij} \xi_i \xi_j$, где $\overset{*}{\alpha}_{ij} = \alpha_{ij}$ $(i \neq j)$, $\overset{*}{\alpha}_{ii} = Q(e_i)$ $(i = 1, \ldots, n)$. Каждая кососимметрическая матрица n-го порядка $A = (\alpha_{ij})$ является матрицей семейства квадратичных функционалов $Q(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \xi_i^2 + \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \alpha_{ij} \xi_i \xi_j$ $(\lambda_i \in K,\ i = 1, \ldots, n)$. Невырожденность Q равносильна невырожденности матрицы A.

Антисимметричный билинейный функционал B, отвечающий квадратичному функционалу Q, естественно использовать для задания на квадратичном пространстве V_Q симплектической метрики: $B(x, y)$ считается скалярным произведением (x, y) векторов x, y. При рассмотрении квадратичного пространства V над полем характеристики 2 это пространство всегда считается симплектическим со скалярным произведением $(x, y) = Q(x + y) + Q(x) + Q(y)$. Изометрия квадратичных пространств является, вместе с тем, также и изометрией симплектических пространств. Невырожденность квадратичного пространства равносильна невырожденности соответствующего симплектического пространства. Поэтому, если V_Q невырождено, то $V_Q = H_1 \oplus \ldots \oplus H_m$ — ортогональная прямая сумма гиперболических плоскостей [2]; в частности, $n = 2m$ — четное число.

Определение 1. *Вектор x квадратичного пространства V_Q назовем сингулярным, если $x \neq 0$ и $Q(x) = 0$.*

Определение 2. *Будем говорить, что квадратичный функционал Q представляет нуль, если существует такой вектор $x \neq 0$, что $Q(x) = 0$, т. е. если квадратичное пространство V_Q содержит сингулярные векторы.* Будем говорить, что квадратичная форма $f = f(X_1, \ldots, X_n)$ представляет нуль, если существует такой вектор $(\xi_1, \ldots, \xi_n) \in K^n$, $(\xi_1, \ldots, \xi_n) \neq 0$, что $f(\xi_1, \ldots, \xi_n) = 0$. Квадратичные формы, представляющие нуль, будем называть *нуль-формами.*

Определение 3. *Квадратичное пространство, не содержащее сингулярных векторов, будем называть асингулярным.*

В дальнейшем будут рассматриваться только невырожденные квадратичные пространства над полем Галуа $K = GF(q)$ $(q = 2^s, s \geqslant 1)$. Через K^* и K^+ обозначим соответственно мультипликативную и аддитивную группы поля K.

2. Рассмотрим случай, когда V_Q — квадратичная плоскость, т. е. когда соответствующее симплектическое пространство является гиперболической плоскостью. Квадратичному функционалу Q при этом соответствует класс невырожденных бинарных квадратичных форм над полем K. Если $\lambda_1, \lambda_2 \in K$, то, очевидно, $f_{\lambda_1, \lambda_2} = \lambda_1 X_1^2 + \lambda_2 X_2^2 + X_1 X_2$ — невырожденная бинарная форма над полем K.

Лемма 1 *). *Каждая невырожденная бинарная квадратичная форма f над полем K эквивалентна некоторой форме f_{λ_1, λ_2}.*

Доказательство. Пусть V_Q — квадратичная плоскость, которой соответствует класс формы f. Если $\{e_1, e_2\}$ гиперболический базис плоскости V_Q (т. е. $(e_1, e_2) = 1$) и $x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 \in V_Q$, то

$$Q(x) = f_{\lambda_1, \lambda_2}(\xi_1, \xi_2), \tag{2}$$

где $\lambda_i = Q(e_i)$ $(i = 1, 2)$. Следовательно, $f \sim f_{\lambda_1, \lambda_2}$.

Лемма 2.

$$f_{\lambda_1, \lambda_2} \sim f_{\lambda_2, \lambda_1}. \tag{3}$$

Доказательство. $f_{\lambda_2, \lambda_1} = f^{T_1}_{\lambda_1, \lambda_2}$, где $T_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Лемма 3. *Если $\mu \in K^*$, то*

$$f_{\lambda_1, \lambda_2} \sim f_{\lambda_1\mu, \lambda_2\mu^{-1}}. \tag{4}$$

Доказательство. $f_{\lambda_1\mu, \lambda_2\mu^{-1}} = f^{T_2}_{\lambda_1, \lambda_2}$, где $T_2 = \begin{pmatrix} \sqrt{\mu} & 0 \\ 0 & \sqrt{\mu^{-1}} \end{pmatrix}$.

---

*) Утверждения лемм 1—7 также, как и их доказательства, остаются в силе для любого совершенного поля K характеристики 2.

Лемма 4.

$$f_{\lambda_1, \lambda_2} \sim f_{\lambda_1, \lambda_1+\lambda_2+1} \sim f_{\lambda_1+\lambda_2+1, \lambda_2}. \qquad (5)$$

Доказательство. $f_{\lambda_1, \lambda_1+\lambda_2+1} = f^{T_3}_{\lambda_1, \lambda_2}$, где $T_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Следовательно, $f_{\lambda_1, \lambda_2} \sim f_{\lambda_1, \lambda_1+\lambda_2+1}$. В силу леммы 1 $f_{\lambda_1, \lambda_1+\lambda_2+1} \sim f_{\lambda_1+\lambda_2+1, \lambda_1}$, откуда на основании доказанного $f_{\lambda_1, \lambda_1+\lambda_2+1} \sim f_{\lambda_1+\lambda_2+1, \lambda_1+(\lambda_1+\lambda_2+1)+1} = f_{\lambda_1+\lambda_2+1, \lambda_2}$. Таким образом, $f_{\lambda_1, \lambda_2} \sim f_{\lambda_1+\lambda_2+1, \lambda_2}$.

Лемма 5.

$$f_{\lambda_1, \lambda_2} \sim f_{\lambda, \lambda}, \text{ где } \lambda = \sqrt{\lambda_1\lambda_2}. \qquad (6)$$

Доказательство. Если $\lambda_1\lambda_2 = 0$ и, например, $\lambda_2 = 0$, то $f_{\lambda_1, \lambda_2} = f^{T_4}_{0, 0}$, где $T_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda_1 & 1 \end{pmatrix}$; следовательно, $f_{\lambda_1, \lambda_2} \sim f_{0, 0}$. Если $\lambda_1 = 0$, то $f_{\lambda_1, \lambda_2} \sim f_{\lambda_2, \lambda_1} = f_{\lambda_2, 0} \sim f_{0, 0}$. Таким образом, для случая $\lambda_1\lambda_2 = 0$ (6) доказано. Если $\lambda_1\lambda_2 \neq 0$, то полагая в (4) $\mu = \sqrt{\lambda_1^{-1}\lambda_2}$, получим $\lambda_1\mu = \lambda_2\mu^{-1} = \sqrt{\lambda_1\lambda_2}$; следовательно, $f_{\lambda_1, \lambda_2} \sim f_{\lambda, \lambda}$, где $\lambda = \sqrt{\lambda_1\lambda_2}$.

Следствие. *Каждая невырожденная бинарная квадратичная форма над полем K эквивалентна форме $f_{\lambda, \lambda}$.*

Лемма 6.

$$f_{\lambda, \lambda} \sim f_{1, \lambda}. \qquad (7)$$

Доказательство. В силу леммы 3 $f_{\lambda, \lambda} \sim f_{\lambda+\lambda+1, \lambda} = f_{1, \lambda}$.

Лемма 7. Квадратичная форма f_{λ_1, λ_2} является нуль-формой тогда и только тогда, когда $f_{\lambda_1, \lambda_2} \sim f_{0, 0}$.

Доказательство. Если $f_{\lambda_1, \lambda_2} \sim f_{0, 0}$, то f_{λ_1, λ_2} — нуль-форма, так как этим свойством обладает форма $f_{0, 0}$. 2°. Если нуль-форма f_{λ_1, λ_2} соответствует квадратичному функционалу Q в гиперболическом базисе $\{e_1, e_2\}$ квадратичной плоскости V_Q (см. доказательство леммы 1), то V_Q содержит сингулярный вектор u_1. Дополнив u_1 до гиперболического базиса $\{u_1, u_2\}$, получим для любого вектора $x = \xi'_1 u_1 + \xi'_2 u_2$,

$$Q(x) = Q(u_1)\xi_1'^2 + Q(u_2)\xi_2'^2 + \xi_1'\xi_2' = \lambda_2'\xi_2'^2 + \xi_1'\xi_2' = f_{0, \lambda_2'}(\xi_1', \xi_2'),$$

где $\lambda_2' = Q(u_2)$. Следовательно, $f_{\lambda_1, \lambda_2} \sim f_{0, \lambda_2'}$, откуда, ввиду леммы 4, $f_{\lambda_1, \lambda_2} \sim f_{0, 0}$.

Следствие. *Невырожденная бинарная форма f над полем K является нуль-формой тогда и только тогда, когда $f \sim f_{0, 0}$.*

Пусть $\alpha, \beta \in K$. Отображение

$$\xi \to \alpha\xi^2 + \beta\xi = \theta_{\alpha, \beta}(\xi) \quad (\xi \in K) \qquad (8)$$

является, очевидно, эндоморфизмом группы K^+. Введем в рассмотрение подгруппу

$$H_{\alpha, \beta} = \theta_{\alpha, \beta}(K^+). \qquad (9)$$

Очевидно, $H_{0,0} = 0$, $H_{0,\alpha} = H_{\alpha,0} = K^+$ $(\alpha \neq 0)$*). Если $\alpha\beta \neq 0$, то $\operatorname{Ker} \theta_{\alpha,\beta} = \{0, \alpha^{-1}\beta\}$; в частности,

$$|\operatorname{Ker} \theta_{\alpha,\beta}| = 2. \tag{10}$$

Лемма 8. Если $\alpha\beta \neq 0$, *то* $(K^+ : H_{\alpha,\beta}) = 2$.

Доказательство. Вытекает из (9) и (10).

Лемма 9. Квадратичная форма $f_{1,\lambda}$ *является нуль-формой тогда и только тогда, когда* $\lambda \in H_{1,1}$.

Доказательство. 1°. Если $f_{1,\lambda}$ — нуль-форма, то $\xi_1^2 + \lambda\xi_2^2 + \xi_1\xi_2 = 0$, где $\xi_1\xi_2 \in K$, $(\xi_1, \xi_2) \neq (0, 0)$. Если $\lambda \neq 0$, то $\xi_1, \xi_2 \neq 0$. Полагая $\xi = \xi_1\xi_2^{-1}$, получим $\lambda = \xi^2 + \xi \in H_{1,1}$. Если $\lambda = 0$, включение $\lambda \in H_{1,1}$ очевидно. 2°. Если $\lambda \in H_{1,1}$, то $\lambda = \xi^2 + \xi$, где $\xi \in K$. Легко видеть, что $f_{1,\lambda} = f_{1,0}^{T_5}$, где $T_5 = \begin{pmatrix} 1 & \xi \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Следовательно, $f_{1,\lambda} \sim f_{1,0} \sim f_{0,0}$, откуда в силу леммы 6 вытекает, что $f_{1,\lambda}$ — нуль-форма.

Лемма 10. $f_{1,\lambda} \sim f_{1,\mu}$ *тогда и только тогда, когда* $\lambda \equiv \mu \pmod{H_{1,1}}$.

Доказательство. 1°. Если $\lambda \equiv \mu \pmod{H_{1,1}}$, то $\mu = \lambda + \xi^2 + \xi$, где $\xi \in K$. Так как $f_{1,\mu} = f_{1,\lambda}^{T_6}$, где $T_6 = \begin{pmatrix} 1 & \xi \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, то $f_{1,\lambda} \sim f_{1,\mu}$.

2°. Допустим, что $f_{1,\lambda} \sim f_{1,\mu}$. Если $\lambda \in H_{1,1}$, то $f_{1,\mu} \sim f_{0,0}$, откуда, ввиду леммы 9, $\mu \in H_{1,1}$. Таким образом, $\lambda \equiv \mu \equiv 0 \pmod{H_{1,1}}$. Если $\lambda \notin H_{1,1}$, то в силу лемм 9 и 7 $f_{1,\lambda} \chi f_{0,0}$ и, следовательно, $f_{1,\mu} \sim f_{0,0}$, откуда вытекает, на основании тех же лемм, что $\mu \notin H_{1,1}$. Так как $(K^+ : H_{1,1}) = 2$, отсюда вытекает, что $\lambda \equiv \mu \pmod{H_{1,1}}$.

Следствие. *Существует ровно два класса невырожденных бинарных квадратичных форм над полем* K: *класс* C_0 *бинарных нуль-форм (с представителем* $f_{0,0}$*) и класс* C_1 *бинарных форм, не представляющих нуль (с представителем* $f_{1,\lambda}$, *где* $\lambda \notin H_{1,1}$).

Определение 4. *Невырожденную квадратичную плоскость, содержащую сингулярный вектор, назовем нуль-плоскостью.*

Очевидно, H является нуль-плоскостью тогда и только тогда, когда соответствующий класс невырожденных бинарных форм состоит из нуль-форм. Предыдущее следствие равносильно следующему утверждению:

Лемма 11. Существует ровно два класса изометричных невырожденных квадратичных плоскостей над полем K: *класс нуль-плоскостей и класс анизотропных плоскостей.*

3. Пусть V_Q — невырожденное квадратичное пространство над полем $K = GF(q)$ $(q = 2^s, s \geqslant 1)$, имеющее размерность $n = 2m$.

---

*) Это следует из совершенности поля K.

Каждому неглавному числовому линейному характеру χ группы K^{+}*) поставим в соответствие число

$$I_\chi(V_Q) = I_\chi(Q) = \sum_{x \in V_Q} \chi\{Q(x)\}. \tag{11}$$

Если в базисе $\{e_i\}$ пространства V_Q квадратичному функционалу Q отвечает квадратичная форма f, полагаем $I_\chi(f) = I_\chi(Q)$.

Лемма 12. *Если $V_Q \cong V'_{Q'}$, то $I_\chi(V_Q) = I_\chi(V'_{Q'})$.*

Доказательство. Если φ изометрия V_Q на $V'_{Q'}$, то

$$I_\chi(V'_{Q'}) = \sum_{x' \in V'_{Q'}} \chi\{Q'(x')\} = \sum_{x \in V_Q} \chi\{Q'(\varphi(x))\} = $$
$$= \sum_{x \in V_Q} \chi\{Q(x)\} = I_\chi(V_Q).$$

Следствие. *$I_\chi(f)$ — инвариант квадратичной формы f: если $f \sim g$, то $I_\chi(f) = I_\chi(g)$.*

Лемма 13. *Инвариант $I_\chi(V_Q)$ не зависит от выбора характера χ.*

Доказательство. Пусть $\alpha \in K$ и χ_0 — фиксированный неглавный характер группы K. Полагая $\chi_0^\alpha(\xi) = \chi_0(\alpha\xi)$ $(\xi \in K)$, получим линейный характер χ_0^α группы K^+, отличный от главного, если $\alpha \neq 0$. Отображение $\alpha \to \chi_0^\alpha$ $(\alpha \in K)$ является изоморфизмом группы K^+ на группу $X(K^+)$ ее линейных характеров. Действительно, если $\alpha, \beta \in K^+$, то $\chi_0^{\alpha+\beta}(\xi) = \chi_0((\alpha+\beta)\xi) = \chi_0(\alpha\xi)\chi_0(\beta\xi) = \chi_0^\alpha(\xi)\chi_0^\beta(\xi) = (\chi_0^\alpha\chi_0^\beta)(\xi)$, следовательно, $\chi_0^{\alpha+\beta} = \chi_0^\alpha\chi_0^\beta$. Если χ_0^α — главный характер группы K^+, то $\chi(\alpha\xi) = 1$ для каждого $\xi \in K$. Если $\alpha \neq 0$, то $\alpha K = K$ и, следовательно, $\chi_0(\xi) = 1$ для любого $\xi \in K$, что противоречит выбору характера χ_0. Следовательно, $\alpha = 0$. Таким образом, $\alpha \to \chi_0^\alpha$ — инъективный гомоморфизм группы K^+ в $X(K^+)$; так как $|K^+| = |X(K^+)|$, то этот гомоморфизм является изоморфизмом K^+ на $X(K^+)$.

Если χ — неглавный характер группы K^+, то на основании доказанного $\chi = \chi_0^\alpha$, где $\alpha \in K^*$. Так как $K^2 = K$ и $\sqrt{\alpha}V_Q = V_Q$, то $I_\chi(V_Q) = \sum_{x \in V_Q} \chi_0^\alpha\{Q(x)\} = \sum_{x \in V_Q} \chi_0\{\alpha Q(x)\} = \sum_{x \in V_Q} \chi_0\{Q(\sqrt{\alpha}x)\} = I_{\chi_0}(V_Q)$, что и доказывает лемму.

Доказанное свойство инварианта $I_\chi(V_Q)$ позволяет в дальнейшем писать $I_\chi(V_Q) = I(V_Q)$, $I_\chi(f) = I(f)$.

Лемма 14. *Если $\lambda \in K$, то*

$$I(f_{\lambda,\lambda}) = I(f_{1,\lambda}) = \begin{cases} q, & \text{если } \lambda \in H_{1,1} \\ -q, & \text{если } \lambda \in H_{1,1}. \end{cases} \tag{12}$$

---

*) Согласно определению линейных характеров абелевой группы, $\chi(\xi + \eta) = \chi(\xi)\chi(\eta)$ $(\xi, \eta \in K)$. Группа K^+ имеет ровно q линейных характеров. Область их значений совпадает с $\{1, -1\}$.

Доказательство. Так как $f_{\lambda,\lambda} \sim f_{1,\lambda}$, то в силу следствия леммы 11 $I(f_{\lambda,\lambda}) = I(f_{1,\lambda})$. Далее, пользуясь произволом в выборе характера χ, выберем его так, чтобы имело место $\operatorname{Ker}\chi = H_{1,1}$[*]. При таком выборе характера χ будем иметь с учетом (8): $I(f_{1,\lambda}) = \sum\limits_{\xi,\eta\in K} \chi\{f_{1,\lambda}(\xi,\eta)\} = \sum\limits_{\xi,\eta\in K} \chi(\xi^2+\lambda\eta^2+\xi\eta) =$

$$= \sum_{\eta\in K} \chi(\lambda\eta^2) \sum_{\xi\in K} \chi(\xi^2+\xi\eta) = \sum_{\eta\in K} \chi(\lambda\eta^2) \sum_{\xi\in K} \chi\{\theta_{1,\eta}(\xi)\} =$$

$= \sum\limits_{\eta\in K} \chi(\lambda\eta^2) \sum\limits_{\xi\in K} \chi^{(\eta)}(\xi)$, где $\chi^{(\eta)} = \chi\circ\theta_{1,\eta}$. Так как $\chi^{(\eta)}$ — линейный характер группы K^+, то

$$\sum_{\xi\in K} \chi^{(\eta)}(\xi) = \begin{cases} q, & \text{если } \chi^{(\eta)} = \varepsilon \\ 0, & \text{если } \chi^{(\eta)} \neq \varepsilon, \end{cases}$$

где ε — главный характер группы K^+. Поэтому

$$I(f_{1,\lambda}) = q \sum_{\eta\in K,\ \chi^{(\eta)}=\varepsilon} \chi(\lambda\eta^2). \tag{13}$$

Далее, $\chi^{(\eta)} = \varepsilon$ тогда и только тогда, когда $H_{1,\eta} = \theta_{1,\eta}(K^+) \subseteq \operatorname{Ker}\chi = H_{1,1}$, что равносильно включению $\xi^2+\xi\eta \in H_{1,1}$ при любом $\xi\in K$. Так как $\xi^2+\xi \in H_{1,1}$ $(\xi\in K)$, то $H_{1,\eta} \subseteq H_{1,1}$ тогда и только тогда, когда $(\eta-1)\xi = (\xi^2+\xi\eta) - (\xi^2+\xi) \in H_{1,1}$ при любом $\xi\in K$, т. е. если $(\eta-1)K \subseteq H_{1,1}$, что равносильно условию $\eta = 1$. Таким образом, $\chi_{(\eta)} = \varepsilon$ тогда и только тогда, когда $\eta = 1$. Поэтому (13) дает $I(f_{1,\lambda}) = q\chi(\lambda)$, откуда и вытекает (12).

Следствие 1. *Формы $f_{\lambda,\lambda}$ и $f_{\mu,\mu}$ эквивалентны тогда и только тогда, когда $I(f_{\lambda,\lambda}) = I(f_{\mu,\mu})$.*

Доказательство. Если $f_{\lambda,\lambda} \sim f_{\mu,\mu}$, то $I(f_{\lambda,\lambda}) = I(f_{\mu,\mu})$ в силу следствия леммы 11. Обратно, если $I(f_{\lambda,\lambda}) = I(f_{\mu,\mu})$, то ввиду леммы 13 $\lambda \equiv \mu \pmod{H_{1,1}}$, откуда на основании лемм 9 и 5 $f_{\lambda,\lambda} \sim f_{\mu,\mu}$.

Следствие 2. *Если f — невырожденная бинарная квадратичная форма над полем K, то* $I(f) = \begin{cases} q, & \text{если } f\in C_0 \\ -q, & \text{если } f\in C_1. \end{cases}$

Эти результаты допускают следующие формулировки на языке квадратичных пространств.

Лемма 15. *Невырожденные квадратичные плоскости H_1 и H_2 изометричны тогда и только тогда, когда $I(H_1) = I(H_2)$.*

Лемма 16. *Если H — невырожденная квадратичная плоскость, то* $I(H) = \begin{cases} q, & \text{если } H \text{ — нуль-плоскость} \\ -q, & \text{если } H \text{ асингулярна.} \end{cases}$

---

[*] Так как $(K^+ : H) = 2$, это можно сделать, и притом единственным способом.

Случай произвольного невырожденного квадратичного пространства сводится к случаю квадратичной плоскости с помощью следующего утверждения.

Лемма 17. *Инвариант* $I(V_Q)$ *мультипликативен, если* $V_Q = V_1 \overset{\perp}{\oplus} V_2$, *где метрика на* V_i *задается ограничением* $Q_i = Q \downarrow V_i$ $(i = 1, 2)$, *то* $I(V_Q) = I(V_1)\, I(V_2)$.

Доказательство. Если χ — неглавный характер группы K^+, то $I(V_Q) = I_\chi(Q) = \sum_{x \in V_Q} \chi\{Q(x)\}$, $I(V_i) = I_\chi(Q_i) = \sum_{x \in V_i} \chi\{Q_i(x)\}$ $(i = 1, 2)$. Представив вектор $x \in V_Q$ в виде суммы $x_1 + x_2$ $(x_i \in V_i$ $(i = 1, 2))$ и учитывая равенство $(x_1, x_2) = 0$, получим $Q(x) = Q(x_1) + Q(x_2)$. Поэтому

$$I(V_Q) = \sum_{x_i \in V_i\ (i=1,2)} \chi(Q(x_1 + x_2)) = \sum_{x_i \in V_i\ (i=1,2)} \chi\{Q_1(x_1)\}\, \chi\{Q_2(x_2)\} =$$

$$= \sum_{x_1 \in V_1} \chi\{Q_1(x_1)\} \sum_{x_2 \in V_2} \chi\{Q_2(x_2)\} = I(V_1) \cdot I(V_2).$$

Из лемм (17) и (16) вытекают

Следствие 1. *Если*

$$V_Q = H_1 \overset{\perp}{\oplus} \ldots \overset{\perp}{\oplus} H_m \tag{14}$$

разложение невырожденного квадратичного пространства V_Q *размерности* $n = 2m$ *в ортогональную прямую сумму гиперболических плоскостей, то*

$$I(V_Q) = I(H_1)\ \ldots\ I(H_m), \tag{15}$$

где H_i *рассматривается как квадратичная плоскость с квадратичным функционалом* $Q_i = Q \downarrow H_i$ $(i = 1, \ldots, m)$.

Следствие 2. *В предположениях следствия 1* $I(V_Q) = (-1)^a q^m$, *где* a — *количество асингулярных слагаемых в* (14).

Лемма 18. [4] *Если размерность* $V_Q \geqslant 4$, *то* V_Q *содержит сингулярный вектор.*

Доказательство. В (14) содержится по меньшей мере два прямых слагаемых H_1, H_2. Очевидно, достаточно рассмотреть случай, когда H_1 и H_2 асингулярны. Пусть $x_i \in H_i$, $x_i \neq 0$ $(i = 1, 2)$. Тогда $Q(x_i) \neq 0$ $(i = 1, 2)$. Так как $Q(x_1 + \alpha x_2) = Q(x_1) + \alpha^2 Q(x_2)$, то при $\alpha = \sqrt{Q(x_1)\, Q(x_2)^{-1}}$ вектор $x = x_1 + \alpha x_2$ будет сингулярным.

Следствие 1. *Если* V_Q — *невырожденное квадратичное пространство размерности* $n \geqslant 2$, *то* $V_Q = H \overset{\perp}{\oplus} V_{Q'}$, *где* H — *нуль-плоскость и* $V_{Q'}$ — *невырожденное квадратичное пространство размерности* $n - 2$.

Следствие 2. *Если* V_Q — *невырожденное квадратичное пространство, то существует разложение* $V_Q = H_1 \overset{\perp}{\oplus} \ldots \overset{\perp}{\oplus} H_m$, *в котором* H_i $(i=1, \ldots, m-1)$ *— нуль плоскости,* H_m *— гиперболическая плоскость (не обязательно являющаяся нуль-плоскостью).*

Теорема 1. *Невырожденные квадратичные пространства* V_Q *и* $V'_{Q'}$ *над полем* K *изометричны тогда и только тогда, когда* $I(V_Q)=I(V'_{Q'})$.

Доказательство. Если $V_Q \cong V'_{Q'}$, то $I(V_Q)=I(V'_{Q'})$ в силу леммы 12. Если $I(V_Q)=I(V'_{Q'})$, то размерности V_Q и $V'_{Q'}$ равны $n=2m$ в силу следствия 2 леммы 17 и 16. Пусть $V_Q = H_1 \overset{\perp}{\oplus} \ldots \overset{\perp}{\oplus} H_m$ и $V'_{Q'} = H'_1 \overset{\perp}{\oplus} \ldots \overset{\perp}{\oplus} H'_m$ — разложения пространств V_Q и $V'_{Q'}$, удовлетворяющие условиям следствия 2 леммы 18 Тогда, ввиду (15) и леммы 16 $I(V_Q)=q^{m-1}I(H_m)$, $I(V'_{Q'})=q^{m-1}I(H'_m)$. Следовательно, $I(H_m)=I(H'_m)$, откуда вытекает, ввиду леммы 15, что $H_m \cong H'_m$. Так как при $i \leqslant m-1$ H_i и H'_i являются нуль плоскостями, то $H_i \cong H'_i$ $(i=1, \ldots, m-1)$ в силу леммы 11. Таким образом, $H_i \cong H'_i$ $(i=1, \ldots, m)$, откуда следует, что $V_Q \cong V'_{Q'}$.

Следствие*. *Существует ровно два класса изометричных невырожденных квадратичных пространств над полем* K, *имеющих заданную размерность* $n=2m$. *Для пространств первого класса* $I(V_Q)=q^m$, *для пространств второго класса* $I(V_Q)=-q^m$.

На языке квадратичных форм теорема 1 и ее следствие означают следующее:

Теорема 1a. *Невырожденные квадратичные формы от* n *переменных* f *и* g *над полем* K *эквивалентны тогда и только тогда, когда* $I(f)=I(g)$.

Следствие. *Существует ровно два класса эквивалентных невырожденных квадратичных форм от* $n=2m$ *переменных над полем* K. *Для форм первого класса* $I(f)=q^m$; *для форм второго класса* $I(f)=-q^m$. *Представителем первого класса является форма* $X_1X_2+\ldots+X_{2m-1}X_{2m} = f_{0,0} \dot{+} \ldots \dot{+} f_{0,0}$**; *представителем второго класса является форма* $X_1X_2+\ldots+X_{2m-1}X_{2m} + \lambda(X_{2m-1}^2+X_{2m}^2) = \overbrace{f_{0,0} \dot{+} \ldots \dot{+} f_{0,0} \dot{+} f_{\lambda,\lambda}}^{m}$, *где* $\lambda \notin \boldsymbol{H}_{1,1}$.

Последнее утверждение также следует из леммы 14 и мультипликативности инварианта $I(f): I(f \dot{+} g) = I(f) \cdot I(g)$.

Пусть $\alpha, \beta, \gamma \in K$, $\gamma \neq 0$, $\varphi_{\alpha,\beta,\gamma}(X_1, X_2) = \alpha X_1^2 + \beta X_2^2 + \gamma X_1X_2$. Если f — невырожденная квадратичная форма от $n=2m$ переменных, то, как легко видеть,

$$f \sim \varphi_{\alpha_1,\beta_1,\gamma_1} \dot{+} \ldots \dot{+} \varphi_{\alpha_m,\beta_m,\gamma_m}, \tag{16}$$

---

* Это утверждение справедливо для любого совершенного поля характеристики 2.

** Здесь «$\dot{+}$» — символ прямого сложения квадратичных форм.

где α_i, β_i, $\gamma_i \in K$, $\gamma_i \neq 0$ $(i = 1, \ldots, m)$. Приведение формы f к виду (16) равносильно выбору в соответствующем квадратичном пространстве $V_Q = H_1 \overset{\perp}{\bigoplus} \ldots \overset{\perp}{\bigoplus} H_m$ базиса, являющегося объединением произвольных базисов гиперболических плоскостей $H_i (i = 1, \ldots, m)$. Замечая, что $\varphi_{\alpha, \beta, \gamma} \sim f_{\alpha\gamma^{-1}, \beta\gamma^{-1}}$, получаем

$$f \sim f_{\alpha_1\gamma_1^{-1}, \beta_1\gamma_1^{-1}} \dot{+} \ldots \dot{+} f_{\alpha_m\gamma_m^{-1}, \beta_m\gamma_m^{-1}}.$$

Так как в силу леммы 3 $f_{\lambda, \mu} \sim f_{1, \lambda\mu}$, то $f_{\alpha_i\gamma_i^{-1}, \beta_i\gamma_i^{-1}} \sim f_{1, \alpha_i\beta_i\gamma_i^{-2}}$. Следовательно,

$$f \sim f_{1, \alpha_1\beta_1\gamma_1^{-2}} \dot{+} \ldots \dot{+} f_{1, \alpha_m\beta_m\gamma_m^{-2}}. \tag{17}$$

Поэтому, если $\chi \in X(K^+)$, $\operatorname{Ker}\chi = H_{1,1}$, то ввиду леммы 14

$$I(f) = \prod_{i=1}^{m} I\left(f_{1, \alpha_i\beta_i\gamma_i^{-2}}\right) = \prod_{i=1}^{m} \{\chi(\alpha_i\beta_i\gamma_i^{-2})\, q\} = \chi(\sigma)\, q^m,$$

где

$$\sigma = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i\beta_i\gamma_i^{-2} = A(f). \tag{18}$$

Правая часть (18) является «инвариантом Арфа» квадратичной формы f [1]. Из предыдущего ясно, что невырожденные формы f и g от $n = 2m$ переменных эквивалентны тогда и только тогда, когда $A(f) = A(g)$.

Список литературы: 1. *Arf C.* Untersuchungen über quadratische Formen in Körper der Charakteristik 2.— «J. reine angew. Math.», 1941, N 183, S. 148—167. 2. *Артин Э.* Геометрическая алгебра. М., «Наука», 1969, с. 145—172. 3. *Дьедонне Ж.* Геометрия классических групп. М., «Мир», 1974, с. 56—61. 4. *Бурбаки Н.* Алгебра. Модули, кольца, формы. М., «Наука», 1966, с. 325—541.

Поступила 26 января 1978 г.

УДК 519.9+575.1

Ю. И. ЛЮБИЧ, д-р физ.-мат. наук

АЛГЕБРАИЧЕСКОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ С. Н. БЕРНШТЕЙНА О ДВУХ ЧИСТЫХ ТИПАХ

Теорема С. Н. Бернштейна, которой посвящена настоящая статья, последняя и, по-видимому, наиболее глубокая из серии теорем его работы [1], где он поставил и существенно продвинул важную для математической генетики проблему описания стохастических квадратичных отображений $V: \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}^n$, удовлетворяющих условию $V^2 = V$ в базисном симплексе $\Delta = \{x \mid x \geqslant 0,$

$s(x)=1\}$. Здесь $s(x)=\sum_{i=1}^{n} x_i$, x_i — координаты вектора x в каноническом базисе $\{e_i\}_1^n$; $x \geqslant 0$ означает, что все $x_i \geqslant 0$. Отображение V в координатной записи имеет вид

$$x_j' = \sum_{i,\,k=1}^{n} p_{ik,\,j} x_i x_k \ (1 \leqslant j \leqslant n; \ \ p_{ki,\,j} = p_{ik,\,j}), \tag{1}$$

стохастичность V означает, что все $p_{ik,j} \geqslant 0$, $\Sigma_j p_{ik,j} = 1$; в силу этого $V\Delta \subset \Delta$. В наших статьях [2]—[5] были предложены новые (отчасти существенно более простые [3]) доказательства всех теорем из [1], кроме последней. Теперь и для этой теоремы мы располагаем модернизированным доказательством. Его изложение составляет задачу настоящей статьи. Как и в [4], мы будем рассуждать на языке неассоциативной вещественной алгебры A со структурными константами $p_{ik,j}$ в каноническом базисе. Напомним, что алгебра A — коммутативная $(xy = yx)$, стохастическая $(x,\ y \in \Delta \Rightarrow xy \in \Delta)$, бернштейновская относительно гомоморфизма $s: A \to \boldsymbol{R}$, т. е. выполняется тождество

$$(x^2)^2 = s^2(x)\, x^2. \tag{2}$$

Оператор V связан с алгеброй A таким образом, что $Vx = x^2$; тождество (2) равносильно условию $V^2x = Vx\ (x \in \Delta)$.

Лемма 1. [2], [4], [7]. *Если $e \neq 0$ — идемпотент $(e^2 = e)$, то линейный оператор $Lx = 2ex - s(x)\,e$, является проектором $(L^2 = L)$. Число $m = \operatorname{rg} L$ не зависит от e.*

Пара чисел $(m,\ \delta)$ $(m = \operatorname{rg} L \geqslant 1,\ \ \delta = \operatorname{def} L \geqslant 0)$ называется типом алгебры A [2]. Отметим для дальнейшего, что алгебра A^2 имеет тип $(m,\ \delta')$, где $\delta' \leqslant \delta$.

Проектор L существенно используется при исследовании проблемы С. Н. Бернштейна [2, 4], но его применение несколько сковывается тем, что он не является неотрицательным (т. е. $x \geqslant 0$ не влечет $Lx \geqslant 0$). Однако, если e — базисный вектор*, то L можно перестроить в некоторый неотрицательный проектор Λ. Оператор Λ в нашем доказательстве теоремы С. Н. Бернштейна играет ключевую роль. В оригинальном тексте [1, с. 112] он также неявно присутствует.

Положим

$$\Lambda x = 2ex - (2ex,\ e)\, e. \tag{3}$$

Очевидно, $\Lambda \geqslant 0$, ибо

$$\Lambda x = P\,(2ex), \tag{4}$$

где P — ортопроектор на ортогональное дополнение к e. Из (3) и (4) вытекает связь между Λ и L:

$$\Lambda = PL. \tag{5}$$

* Наличие идемпотентов среди базисных векторов не обязательно (см. по этому поводу [5]), однако в теореме С. Н. Бернштейна оно предусмотрено условием.

Вместе с тем из разложения $x = (x, e)e + Px$ и равенства $Le = 0$ следует $Lx = (x, e)e + LPx$, откуда в результате замены x на Lx получается $Lx = (Lx, e)e + LPLx$, ибо $L^2 = L$. Но $(Lx, e) = (2ex, e) - s(x)$ и $Lx - (Lx, e)e = 2ex - (2ex, e)e = \Lambda x$. Следовательно,

$$\Lambda = LPL. \tag{6}$$

Лемма 2. *Если e — базисный идемпотент, то линейный оператор Λ, определенный в* (3), *является неотрицательным проектором, коммутирующим с L, причем* $\operatorname{Im} L = \operatorname{Im} \Lambda \oplus \operatorname{Lin}(e)$.

Доказательство. Неотрицательность Λ уже была отмечена. Далее, из (5) и (6) следует $\Lambda^2 = PLPL = P\Lambda = P^2L = PL = \Lambda$, т. е. Λ — проектор. Далее, $\Lambda L = PL^2 = \Lambda$ и $L\Lambda = LPL = \Lambda$, т. е. Λ коммутирует с L, причем $\operatorname{Im}\Lambda \subset \operatorname{Im} L$. Вместе с тем $\operatorname{Lin}(e) \subset \operatorname{Im} L$ и $e \perp \operatorname{Im}\Lambda$. Поэтому $\operatorname{Im} L \supset \operatorname{Im}\Lambda \oplus \operatorname{Lin}(e)$. Обратно, если $x \in \operatorname{Im} L$, т. е. $x = Lz$, то $x = (x, e)e + Px = (x, e)e + PLz = (x, e)e + \Lambda z$.

Следствие 1. $\operatorname{rg}\Lambda = m - 1$.

Следствие 2. *Оператор Λ имеет вид*

$$\Lambda = \sum_{i=1}^{m-1} (\cdot\,, c_i^*)(c_i' + c_i''), \tag{7}$$

где система $\{c_i'\}$ ортогональна, $\{c_i^*\}$ к ней биортогональна, $\{c_i''\}$ ортогональная к двум предыдущим системам и все векторы c_i^*, c_i', c_i'' неотрицательны.

Действительно, таков, согласно [6], общий вид неотрицательных проекторов (ранга $m - 1$).

Положим $c_i = c_i' + c_i''$. Тогда $c_i \perp c_k' (i \neq k)$. Очевидно, $\Lambda c_i = c_i (1 \leqslant i \leqslant m-1)$, а т. к. $\operatorname{Im}\Lambda \perp e$, то все $c_i \perp e$. Не умаляя общности, можно считать, что $s(c_i) = 1$. Равенство $\Lambda c_i = c_i$ дает: $2ec_i = \alpha_i e + c_i$. Применяя к обеим частям гомоморфизм s, получаем $\alpha_i = 1$ и, таким образом,

$$ec_i = \frac{e + c_i}{2}. \tag{8}$$

Для дальнейшего продвижения нам понадобится «нормальный вид» алгебры A, связанный с проектором L. Рассмотрим идеал $N = \operatorname{Ker} s$. Очевидно, N инвариантен относительно L и расщепляется этим проектором*: $N = U \dot{+} W$, где $U = \operatorname{Im}(L \mid N)$, $W = \operatorname{Ker} L \subset N$.

Лемма 3 [2]. *Если $x = se + u + w$ $(s \in \boldsymbol{R},\ u \in U,\ w \in W)$, то*

$$x^2 = s^2 e + (su + 2uw + w^2) + u^2, \tag{9}$$

причем то, что в скобках, принадлежит U, а последнее слагаемое — W.

---

* В [2, 4] через L был обозначен наш $L \mid N$.

Следствие. *Если* $\{u_i\}_1^{m-1}$ — *базис в* U, *то* $A^2 = \mathrm{Lin}(e, u_i, u_iu_k)$ $(1 \leqslant i, k \leqslant m-1)$.

Отметим, что $u_i = c_i - e$ $(1 \leqslant i \leqslant m-1)$ — базис в U (векторы c_i линейно независимы и ортогональны к e).

Возвращаясь к оператору Λ, мы можем теперь дополнить (8) следующей информацией:

$$\Lambda(c_ic_k) = \frac{c_i + c_k}{2}. \tag{10}$$

Действительно, в силу (8), $c_i - e = \Lambda c_i - e = 2ec_i - 2e = 2e(c_i - e) = L(c_i - e)$, т. е. $c_i - e \in U (1 \leqslant i \leqslant m-1)$. По лемме 3 $(c_i - e)(c_k - e) \in W (1 \leqslant i, k \leqslant m-1)$, откуда, вновь учитывая (8), получаем $c_ic_k - \frac{c_i + c_k}{2} \in W$ $(1 \leqslant i, k \leqslant m-1)$. Следовательно, $2e(c_ic_k) = e + \frac{c_i + c_k}{2}$, что и дает (10).

Алгебра A называется правильной [2], если $W^2 = 0$, $UW = 0$. В этом случае $W = \mathrm{Ann}\, A \equiv \{y \mid xy = 0\, (x \in A)\}$, причем для любых $x, y \in A$ [8]

$$xy \equiv \frac{x+y}{2} (\mathrm{mod}\, W). \tag{11}$$

Свойство правильности* адекватно возможности генетической интерпретации отображения V [2], [8]—[10]. В [11] был установлен следующий признак правильности: если A^2 имеет тип (m, δ'), удовлетворяющий неравенству $\delta' > \frac{(m-1)(m-2)}{2}$, то A правильна. Кроме того, А правильна, если $\delta' = \delta = 1$ или, если $\delta = 0$. Отсюда следует [11], что если $A^2 = A$ и $n \equiv \dim A \leqslant 5$, то A правильна. Но в силу (2) $(A^2)^2 = A^2$. Поэтому, если $\dim A \leqslant 5$, то A^2 правильна.

Нам понадобится еще

Лемма 4. *Если* e, e' — *ненулевые идемпоненты,* $\varepsilon = ee'$, *то подпространство* $\mathrm{Lin}(e, e', \varepsilon)$ *является «подалгеброй Менделя»:*

$$e\varepsilon = \frac{e + \varepsilon}{2}, \quad e'\varepsilon = \frac{e' + \varepsilon}{2}, \quad \varepsilon^2 = \frac{e + e' + 2\varepsilon}{4}.$$

Для доказательства достаточно подставить в (2) $x = \xi e + \eta e'$ и сравнить коэффициенты при $\xi^3\eta$, $\xi\eta^3$, $\xi^2\eta^2$.

Доказываемую ниже теорему С. Н. Бернштейна мы сформулируем на языке алгебры A, причем для простоты введем дополнительное условие «нормальности» [2]. В данном случае оно будет состоять из двух пунктов: 1. $e_i - \lambda e_k \overline{\in} (A^2)^\perp$ $(\lambda > 0)$. 2. $e_i - e_k \overline{\in} \mathrm{Ann}\, A$ $(i \neq k)$. В приложениях к генетике это условие не является ограничительным [8].

---

* Отметим, что оно не зависит от выбора e [2].

Теорема. *Если в стохастической бернштейновской алгебре A имеется два базисных идемпотента, например, e_1, e_2 (т. е. $e_1^2 = e_1$, $e_2^2 = e_2$) и*

$$e_1 e_2 = \sum_{k=3}^{n} p_k e_k, \tag{12}$$

где все $p_k > 0$, то при условии нормальности алгебра является либо трехмерной алгеброй Менделя:

$$e_1 e_2 = e_3,\ e_1 e_3 = \frac{e_1 + e_3}{2},\ e_2 e_3 = \frac{e_2 + e_3}{2},\ \ e_3^2 = \frac{e_1 + e_2 + 2e_3}{4},$$

либо четырехмерной «кадрильной» алгеброй Бернштейна:

$$e_1 e_2 = \frac{e_3 + e_4}{2},\ e_3 e_4 = \frac{e_1 + e_2}{2},\ e_1 e_3 = \frac{e_1 + e_3}{2},\ e_1 e_4 = \frac{e_1 + e_4}{2},$$

$$e_2 e_3 = \frac{e_2 + e_3}{2},\ e_2 e_4 = \frac{e_2 + e_4}{2},\ e_3^2 = e_3,\ \ e_4^2 = e_4.$$

Доказательство. Рассмотрим проектор Λ, порождаемый идемпотентом e_1. Мы уже знаем, что $\operatorname{Im}\Lambda \perp e_1$. Покажем, что $\operatorname{Im}\Lambda \perp e_2$. Умножая (12) на e_1 и используя лемму 4, получаем $\sum_{k=3}^{n} p_k e_1 e_k = \frac{1}{2}\left\{e_1 + \sum_{k=3}^{n} p_k e_k\right\}$. Отсюда $\sum_{k=3}^{n} p_k (e_1 e_k,\ e_2) = 0$.

Но $(e_1 e_k,\ e_2) \geqslant 0$, $p_k > 0$ $(3 \leqslant k \leqslant n)$. Следовательно, $(e_1 e_k,\ e_2) = 0$, откуда $(\Lambda e_k,\ e_2) = 0$ $(3 \leqslant k \leqslant n)$.

Таким образом, в разложении (7) при данных условиях все c_i ортогональны как e_1, так и e_2.

Из леммы 4 следует: $\Lambda(e_1 e_2) = e_1 e_2$, откуда в силу (7)

$$e_1 e_2 = \sum_{i=1}^{m-1} \lambda_i c_i, \tag{13}$$

где $\lambda_i = (e_1 e_2,\ c_i')/(c_i,\ c_i') > 0$, $\sum \lambda_i = 1$. Возводя в квадрат и вновь используя лемму 4, получаем

$$\sum_{i,\,k=1}^{m-1} \lambda_i \lambda_k c_i c_k = \frac{1}{4}\left\{e_1 + e_2 + 2\sum_{k=3}^{n} p_k e_k\right\}.$$

Отсюда, умножая скалярно на e_2, получаем $\sum_{i,\,k=1}^{m-1} \alpha_{ik} \lambda_i \lambda_k = 1/4$, где $\alpha_{ik} = (c_i c_k,\ e_2)$. Следовательно, найдется $\alpha_{i_1 k_1} \neq 0$, т. е. $\alpha_{i_1 k_1} > 0$. Применим оператор Λ к $c_{i_1} c_{k_1} = \alpha_{i_1 k_1} e_2 + \ldots$. В силу (10), (12)

$$\frac{c_{i_1} + c_{k_1}}{2} = 2\alpha_{i_1 k_1} \sum_{j=3}^{n} p_j e_j + \ldots,$$

ибо $\Lambda e_2 = 2 e_1 e_2$. Так как выписанные здесь коэффициенты положительны, а остальные неотрицательны, то

$$\operatorname{supp} c_{i_1} \cup \operatorname{supp} c_{k_1} = \{e_i\}_3^n \tag{14}$$

(для вектора $c \geqslant 0$ носитель $\operatorname{supp} c$ определяется как множество тех e_i, для которых $(c, e_i) > 0$). Отсюда $m - 1 = \begin{cases} 1 & (i_1 = k_1), \\ 2 & (i_1 \neq k_1) \end{cases}$ ибо, если $i_1 = k_1$, то при $i \neq i_1$ было бы $c_i \perp c_{i_1}$, что несовместимо с (14) ввиду неотрицательности рассматриваемых векторов; аналогично при $i_1 \neq k_1$ не существует $i\ (1 \leqslant i \leqslant m-1)$, отличного от i_1, k_1. Итак, $m = 2$ или $m = 3$, что является решающим заключением. Рассмотрим эти случаи раздельно.

1) $m = 2$. В этом случае $U = \operatorname{Lin}(u_1)$, где $u_1 = c_1 - e_1$. Согласно следствию леммы 3 $A^2 = \operatorname{Lin}(e, u_1, u_1^2)$. Но в силу (8) $u_1^2 = c_1^2 - c_1$. Поэтому $A^2 = \operatorname{Lin}(e_1, c_1, c_1^2)$. В силу (13) $c_1 = e_1 e_2$ и по лемме 4 $c_1^2 = \frac{1}{4}(e_1 + e_2 + 2e_1 e_2)$. Следовательно, $A^2 = \operatorname{Lin}(e_1, e_2, e_1, e_2)$. Векторы e_1, e_2, $c_1 = e_1 e_2$ попарно ортогональны благодаря (12). Имеем разложение $x^2 = \varphi_1(x) e_1 + \varphi_2(x) e_2 + \varphi_3(x) e_3$. Ввиду нормальности (пункт 1) $c_1 = e_3$, т. е. $n \equiv \dim A = 3$. По лемме 4 алгебра — менделевская.

2) $m = 3$. В этом случае $U = \operatorname{Lin}(u_1, u_2)$, где $u_i = c_i - e_1$. Согласно следствию леммы 3, $A^2 = \operatorname{Lin}(e_1, u_1, u_2, u_1^2, u_2^2, u_1 u_2)$. Но в силу (8) $u_i^2 = c_i^2 - c_i$, $u_1 u_2 = c_1 c_2 - \frac{1}{2}(c_1 + c_2)$. Поэтому $A^2 = \operatorname{Lin}(e_1, c_1, c_2, c_1^2, c_2^2, c_1 c_2)$. Согласно (13) $e_1 e_2 = \lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2$ $(\lambda_i > 0,\ \lambda_1 + \lambda_2 = 1)$ и по лемме 4

$$\frac{1}{4}(e_1 + e_2 + 2\lambda_1 c_1 + 2\lambda_2 c_2) = \lambda_1^2 c_1^2 + \lambda_2^2 c_2^2 + 2\lambda_1 \lambda_2 c_1 c_2. \tag{15}$$

Следовательно, $A^2 = \operatorname{Lin}(e_1, e_2, c_1, c_2, c_1^2, c_2^2)$. Так как e_1, e_2, c_1, c_2 линейно независимы, то $\dim A^2 \geqslant 4$, так что, если $(3, \delta')$ — тип алгебры A^2, то $\delta' \geqslant 1$. Если $\delta' > 1$, алгебра A правильна. В случае $\delta' = 1$ это тоже окажется верным, но будет установлено в конце.

Пусть алгебра A правильна. В силу (11)

$$e_2 \equiv 2\lambda_1 c_1 + 2\lambda_2 c_2 - e_1 \pmod W, \tag{16}$$

причем $W = \operatorname{Ann} A$. Поэтому (с использованием (8))

$$\left.\begin{aligned} e_2 c_1 &= 2\lambda_1 c_1^2 + 2\lambda_2 c_1 c_2 - \frac{e_1 + c_1}{2} \\ e_2 c_2 &= 2\lambda_1 e_1 c_2 + 2\lambda_2 c_2^2 - \frac{e_1 + c_2}{2} \end{aligned}\right\}. \tag{17}$$

Мы знаем, что $c_i \perp e_2$ $(i = 1, 2)$. Кроме того, $c_i^2 \perp e_2$ $(i = 1, 2)$. Действительно, если, например, $c_1^2 = \xi e_1 + \eta e_2 + \ldots$ $(\eta > 0)$, то согласно (10) $c_1 = \Lambda c_1^2 = 2\eta e_1 e_2 + \ldots$, т. е. $\operatorname{supp} \times c_1 = \{e_i\}_3^n$, что влечет $m = 2$. Теперь из (15) следует, что если $c_1 c_2 = \alpha e_1 + \beta e_2 + \ldots$, то $8\lambda_1 \lambda_2 \beta = 1$. С другой стороны, из (17) получаются неравенства $2\lambda_i \beta \leqslant 1$, откуда после сложения $\beta \leqslant 1/2$.

Но тогда $\lambda_1\lambda_2 \geqslant \frac{1}{4}$, а так как $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, $\lambda_i > 0$, то $\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{1}{2}$ и $\beta = \frac{1}{2}$. В результате

$$e_1 e_2 = \frac{c_1 + c_2}{2}, \tag{18}$$

а вместо (16)

$$e_1 + e_2 \equiv c_1 + c_2 \pmod W. \tag{19}$$

Наконец,

$$c_1 c_2 = \alpha e_1 + \frac{1}{2} e_2 + \sum_Q \gamma_k e_k, \tag{20}$$

где подмножество Q выделено условием: $(c_1c_2, e_k) > 0$, $k \geqslant 3$. Очевидно, $\alpha \leqslant \frac{1}{2}$. Докажем, что если

$$\Lambda e_k \neq 0 \quad (3 \leqslant k \leqslant n), \tag{21}$$

то $\alpha = \frac{1}{2}$, т. е. Q пусто и

$$c_1 c_2 = \frac{e_1 + e_2}{2}. \tag{22}$$

Пусть $\alpha < \frac{1}{2}$. В силу (20), (11) и (19)

$$\left(\alpha - \frac{1}{2}\right) e_1 + \sum_Q \gamma_k e_k = c_1 c_2 - \frac{e_1 + e_2}{2} \equiv 0 \pmod W.$$

Но тогда $e_1 \equiv \sum_Q \pi_k e_k \pmod W$, где $\pi_k = \gamma_k \left(\frac{1}{2} - \alpha\right)^{-1} > 0$, $\sum \pi_k = 1$. Отсюда умножением на e_1 получается $e_1 = \sum_Q \pi_k e_1 e_k$. Но все $e_1 e_k$ лежат в симплексе Δ, а e_1 — крайняя точка в Δ. Поэтому $e_1 e_k = e_1$ $(k \in Q)$, т. е. $\Lambda e_k = 0$ $(k \in Q)$ вопреки (21).

Условие (21) приводит не только к (22), но и к полной таблице умножения для системы $\{e_1, e_2, c_1, c_2\}$. Во-первых, из него следует, что $\operatorname{supp} c_1 \cap \operatorname{supp} c_2 = \varnothing$ (т. е. $c_1 \perp c_2$). Действительно, если $e_k \in \operatorname{supp} c_2$, то $e_k \perp \overset{*}{c}_1$, а если $e_k \in \operatorname{supp} c_1$, $e_k \perp \overset{*}{c}_2$. Поэтому, если $e_k \in \operatorname{supp} c_1 \cap \operatorname{supp} c_2$ $\Lambda e_k = 0$ в силу (7). Во-вторых, оказывается, что $\operatorname{supp} c_i^2 \subset \operatorname{supp} c_i \cup \{e_1\}$. Действительно, если, например, $c_1^2 = \sum_P \alpha_k e_k$ $(P \equiv \operatorname{supp} c_1^2)$, то

$$c_1 = \Lambda c_1^2 = \sum_P \alpha_k \Lambda e_k.$$

Но $\Lambda e_k = (e_k, \overset{*}{c}_1) c_1$ при $e_k \in \operatorname{supp} c_1$ и равно $(e_k, \overset{*}{c}_2) c_2$ при $e_k \in \operatorname{supp} c_2$, причем все эти $\Lambda e_k > 0$. Так как $\alpha_k > 0$, то $P \cap \operatorname{supp} c_2 = \varnothing$, т. е. $P \subset \operatorname{supp} c_1 \cup \{e_1\}$.

Из (19) возведением в квадрат с учетом (18), (21) и идемпотентности элементов e_1, e_2 получаем $c_1^2 + c_2^2 = c_1 + c_2$. Следовательно, e_1 не входит в $\operatorname{supp} c_1^2 \cup \operatorname{supp} c_2^2$. Но тогда $\operatorname{supp} c_i^2 \subset \subset \operatorname{supp} c_i$ и, наконец,

$$c_1^2 = c_1, \quad c_2^2 = c_2. \tag{23}$$

Теперь из (17) (где $\lambda_1 = \lambda_2 = 1/2$),

$$e_2 c_1 = \frac{e_2 + c_1}{2}, \quad e_2 c_2 = \frac{e_2 + c_2}{2}. \tag{24}$$

Итак, имеем (8), (18), (22)—(24) и исходные равенства $e_1^2 = e_1$, $e_2^2 = e_2$, что и составляет искомую таблицу умножения, отличающуюся от требуемой в теореме только тем что роли e_3, e_4 играют c_1, c_2. Из (23), в свою очередь, следует, что $A^2 = \operatorname{Lin}(e_1, e_2, c_1, c_2)$, т. е. $\dim A^2 = 4$.

Сделаем теперь «безусловные» выводы из предыдущих условных рассуждений. Предположение (21) вытекает из нормальности (до сих пор не использованной) и правильности алгебры A, т. к., если $e_1 e_k = e_1$ для некоторого $k \neq 1$, то $e_k \equiv e_1 \pmod W$, в силу (11), т. е. $e_k - e_1 \in \operatorname{Ann} A$, вопреки нормальности (пункт 2). Следовательно, при условиях теоремы правильность алгебры A влечет $\dim A^2 = 4$, т. е. $\delta' = 1$. В то же время, если $\delta' > 1$, то A правильна. Значит, $\delta' = 1$ без априорного условия правильности, т. е. при условиях теоремы будет $\dim A^2 = 4$ (A^2 — алгебра типа (3,1)). Система $\{e_1, e_2, c_1, c_2\}$ — базис в A^2, относительно которого A^2 — стохастическая (ибо элементы базиса $\geqslant 0$ и лежат в гиперплоскости $s = 1$). Кроме того, A^2 — бернштейновская, правильная и $e_1 e_2 = \lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2$ ($\lambda_i > 0$), т. е. A^2 удовлетворяет условию (12). Наконец, $\Lambda \mid A^2$ удовлетворяет (21), ибо $\Lambda c_i = c_i \neq 0$ ($i = 1, 2$). Значит, для A^2 справедливы выводы, сделанные выше для A, т. е. таблица умножения (18), (22)—(24) имеет место без предположения о правильности A и условия (21) (но при условии нормальности A).

Теперь можно написать: $x^2 = \varphi_1(x) e_1 + \varphi_2(x) e_2 + \psi_1(x) c_1 + \psi_2(x) c_2$. Ввиду нормальности (пункт 1) разности $\operatorname{supp} c_1 \setminus \setminus \operatorname{supp} c_2$ и $\operatorname{supp} c_2 \setminus \operatorname{supp} c_1$ содержат по одному элементу, скажем, e_3 и e_4 соответственно. Если $\operatorname{supp} c_1 \cap \operatorname{supp} c_2 = \varnothing$, то $c_1 = e_3$, $c_2 = e_4$, и теорема доказана. Если это пересечение непусто, то в силу нормальности оно состоит из одного элемента e_5, т. е. $n \equiv \dim A = 5$. Приведем этот случай к противоречию. Имеем: $c_1 = a_{13} e_3 + a_{15} e_5$, $c_2 = a_{24} e_4 + a_{25} e_5$, где все $a_{ik} > 0$. Так как $c_1^2 = c_1$, то e_3^2, $e_3 e_5$, $e_5^2 \in \operatorname{Lin}(e_3, e_5)$, т. е. $\operatorname{Lin}(e_3, e_5)$ — подалгебра. Точно так же $\operatorname{Lin}(e_4, e_5)$ — подалгебра. Но тогда $\operatorname{Lin}(e_5)$, — подалгебра. Следовательно, $e_5^2 = e_5$, т. е. $e_5 \in A^2$. Так как c_1, $c_2 \in A^2$, то и e_3, $e_4 \in A^2$, и получается, что $\dim A^2 = 5$. Теорема доказана.

Список литературы: 1. *Бернштейн С. Н.* Решение одной математической проблемы, связанной с теорией наследственности.— «Учен. зап. науч.-исслед. кафедр Украины. Отд. мат.», 1924, вып. 1, с. 83—115. 2. *Любич Ю. И.* Основные понятия и теоремы эволюционной генетики свободных популяций.— «Усп. мат. наук», 1971, т. XXVI, вып. 5, с. 51—116. 3. *Любич Ю. И.* Об одной теореме С. Н. Бернштейна.— «Сиб. мат. журн.», 1973, т. XIV, с. 678—679. 4. *Любич Ю. И.* Алгебраическое доказательство теоремы С. Н. Бернштейна о необходимости закона Менделя.— Вест. Харьк. ун-та, 1976, № 134. «Математика и механика», вып. 41, с. 85—88. 5. *Любич Ю. И.* Стохастические алгебры и некоторые их применения в математической генетике.— В кн.: Мат. методы в биологии. Киев, 1977, с. 119—131. 6. *Любич Ю. И.* Общий вид неотрицательных проекторов в R^n.— «Теория функций, функц. анализ и их приложения», 1979, вып. 31, с. 87—92. 7. *Любич Ю. И.* В редакцию УМН.— «Усп. мат. наук», 1972, т. XXVII, вып. 6, с. 265. 8. *Любич Ю. И.* Двухуровневые бернштейновские популяции.—«Мат. сб.», 1974, т. 95 (137), № 4, с. 606—628. 9. *Любич Ю. И.* Правильные бернштейновские популяции.— «Проблемы передачи информации», 1977, т. XIII, вып. 3, с. 91—100. 10. *Любич Ю. И.* Об аналогах закона Харди — Вайнберга.— «Генетика», 1973, т. IX, № 10, с. 139—144. 11. *Любич Ю. И.* Об одном классе квадратичных отображений.— «Теория функций, функц. анализ и их приложения», 1974, вып. 21, с. 36—42.

Поступила 13 декабря 1977 г.

Рефераты

УДК 518 : 517

Один экономичный итерационный метод решения эллиптического уравнения в гильбертовом пространстве. Сохин А. С.— Вестн. Харьк. ун-та, №, «Прикладная математика и механика», вып. 44. Харьков, издательское объединение «Вища школа», 1979, с. 3—11

В статье метод переменных направлений с циклическим выбором параметров по схеме Писмена — Рэкфорда, применяемой при решении задачи Дирихле для разностного уравнения Пуассона в прямоугольнике, обобщается на случай эллиптической краевой задачи в гильбертовом пространстве $-d^2u(t)/(dt^2)+Au(t)=f(t)$, $0<t<1$, $u(0)=u(1)=0$ с самосопряженным положительно определенным неограниченным линейным оператором A. Указывается набор итерационных параметров. Находимая оценка скорости сходимости итераций к решению задачи является величиной порядка $\exp(-\beta\sqrt{n})$, $\beta\simeq 1.2$, что указывает на эффективность итерационного метода переменных направлений также и в случае неограниченных операторов.

Список лит.: 3 назв.

УДК 517.934. 1

Автоколебания системы самоходная машина — автомат вождения. Вовна С. И., Подольский Е. Н.— Вестн. Харьк. ун-та, №, «Прикладная математика и механика», вып. 44. Харьков, издательское объединение «Вища школа», 1979, с. 11—22.

На основе учета нелинейностей, присущих системе автовождения самоходной машины, которая совершает движение, близкое к прямолинейному и равномерному, исследуется отслеживание прямой линии. В явном виде находятся периодические решения и исследуется их устойчивость. Получена асимптотика автоколебаний при больших угловых скоростях поворота колес машины.

Ил. 2. Список лит.: 4 назв.

УДК 538.3 : 532 : 538.4

Равновесие и устойчивость границы раздела идеально проводящей и непроводящей жидкостей между двумя горизонтальными слабоискривленными заряженными поверхностями. Ермаков В. И.— Вестн. Харьк. ун-та, №, «Прикладная математика и механика», вып. 44. Харьков, издательское объединение «Вища школа», 1979, с. 22—27

Приводятся уравнения для определения равновесной формы и для исследования устойчивости поверхности раздела двух несмешивающихся жидкостей разной плотности в условиях действия силы тяжести, поверхностного натяжения и внешнего электрического поля. В предположении слабой изогнутости электродов, между которыми находятся жидкости, задача решается методом последовательных приближений. Определена форма и критерий устойчивости поверхности раздела в частном случае, когда профиль электрода, граничащего с диэлектрической жидкостью, есть периодическая линейчатая поверхность синусоидальной формы. Ил. 3. Список лит. 7 назв.

УДК 517.919.2

О множествах достижимости в банаховом пространстве. Приходько А. П.— Вестн. Харьк. ун-та, №, «Прикладная математика и механика», вып. 44. Харьков, издательское объединение «Вища школа», 1979, с. 27—35

Для неавтономных линейных управляемых процессов в банаховом пространстве даны достаточные условия слабой компактности в себе множеств достижимости, обобщена теорема о выпуклости множеств достижимости, установлен обобщенный принцип релейности для линейных управляемых объектов, а также доказаны теоремы об отсутствии точной управляемости управлениями из L_p $(p>1)$, если фазовое пространство нерефлексивно, а пространство управлений рефлексивно. Список лит.: 8 назв.

УДК 519.3

Относительная управляемость линейных дифференциальных уравнений с запаздыванием в банаховом пространстве. Р а б а х Р.— Вестн. Харьк. ун-та, №, «Прикладная математика и механика», вып. 44. Харьков, издательское объединение «Вища школа», 1979, с. 36—41.

Для линейных управляемых дифференциальных уравнений с запаздыванием в банаховом пространстве получены необходимые и достаточные условия относительной точной управляемости и относительной ε-управляемости.
Список лит.: 5 назв.

УДК 517.934.1

ε-управляемость линейной автономной системы на подпространство. Ч у п р и н а В. Е.— Вестн. Харьк. ун-та, №, «Прикладная математика и механика», вып. 44. Харьков, издательское объединение «Вища школа», 1979, с. 41—44.

Для линейной автономной системы $\dot{x} = Ax + Bu$ даются достаточные, а также необходимые условия ε-управляемости на подпространство за свободное время. Список лит.: 5 назв.

УДК 518 : 517

Один оптимальный итерационный метод решения эволюционных уравнений в гильбертовом пространстве. С о х и н А. С.— Вестн. Харьк. ун-та, №, «Прикладная математика и механика», вып. 44. Харьков, издательское объединение «Вища школа», 1979, с. 44—48.

В статье метод переменных направлений обобщается на случай эволюционного уравнения в гильбертовом пространстве H

$$du(t)/(dt) + Au(t) = f(t),\ 0 < t < T,\ u(0) = u_0 \in H$$

с самосопряженным положительно определенным ограниченным оператором A. Указывается наилучшее значение итерационного параметра. Найденное явное выражение погрешности n-й итерации через многочлены Лагерра позволяет получить эффективную оценку скорости сходимости. Список лит.: 3 назв.

УДК 681.3 : 519.21

Численные методы в марковских процессах решений с дисконтированием. Б а р а н о в В. В.— Вестн. Харьк. ун-та, №, «Прикладная математика и механика», вып. 44. Харьков, издательское объединение «Вища школа», 1979, с. 49—58.

Предложен новый рекуррентный метод последовательных приближений численного синтеза оптимальной стратегии в марковских процессах решений. Метод лишен недостатков алгоритма Ховарда. Список лит.: 5 назв.

УДК 518 : 517 : 944/.947

Об одном численном решении периодической задачи Кортевега — де Фриса. П е р к о л а б Л. В.— Вестн. Харьк. ун-та, №, «Прикладная математика и механика», вып. 44. Харьков, издательское объединение «Вища школа», 1979, с. 58—66.

В данной работе получено численное решение конкретной задачи Коши для уравнения Кортевега — де Фриса. Отыскание решения нелинейного уравнения в частных производных сводится в данном случае к решению обыкновенных дифференциальных уравнений, которые интегрируются приближенными методами. Ил. 4. Список лит.: 3 назв.

УДК 517.535. 6

К одной теореме Хеймана — Фукса. П р о с к у р н я И. П.— Вестн. Харьк. ун-та, №, «Прикладная математика и механика», вып. 44. Харьков, издательское объединение «Вища школа», 1979, с. 67—74.

Работа посвящена изучению свойств φ-дефектов. Доказана теорема:

Центральна наукова
БІБЛІОТЕКА при ХДУ
Інв. № 298029

ЦНБ-4
музей ХГУ-1

Пусть $\{b_\nu\}_{\nu=0}^{\infty}$ — произвольное счетное множество конечных комплексных чисел и δ_ν — последовательность положительных чисел, подчиненная единственному условию: $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} \delta_\nu = 1$. Тогда существует целая функция $G(z)$, для которой $\delta_\varphi(b_\nu, G) \geqslant \delta_\nu \cdot e^{A/2}$, где функция $\varphi(x) = x \cdot v(x)$ удовлетворяет условию

$$\lim_{x \to \infty} x \cdot \frac{v'(x)}{v(x)} \cdot \ln \ln x = A \quad (A < \infty).$$

Список лит.: 4 назв.

УДК 512.567.5 + 512.53.8

Ω-алгебры со стоуновой решеткой идеалов. Куринной Г. Ч.— Вестн. Харьк. ун-та, №, «Прикладная математика и механика», вып. 44. Харьков, издательское объединение «Вища школа», 1979, с. 74—77.

В работе находятся условия, при которых полная решетка идеалов универсальной алгебры (понятие идеала универсальной алгебры обобщает понятие двустороннего идеала в полугруппе) является стоуновой. Вводя понятие однородного идеала (идеала, в котором пересечение двух содержащихся в нем не минимальных идеалов не минимально) доказывается.

Теорема 1. Универсальная алгебра имеет стоунову решетку идеалов тогда и только тогда, когда она представима в виде объединения некоторого множества однородных идеалов.

Следствиями из теоремы 1 являются теоремы 2 и 3.

Теорема 2. Полугруппа с нулем имеет стоунову решетку идеалов тогда и только тогда, когда она является 0 — прямым объединением полугрупп, в которых пересечение ненулевых подполугрупп является ненулевой подполугруппой.

Теорема 3. Решетка идеалов бирегулярной полугруппы стоунова тогда и только тогда, когда она 0-проста.

Список лит.: 4 назв.

УДК 512.89

Об одном инварианте квадратичных форм над полем Галуа характеристики 2. Жмудь Э. М.— Вестн. Харьк. ун-та, №, «Прикладная математика и механика», вып. 44. Харьков, издательское объединение «Вища школа», 1979, с. 77—86.

Излагается новый подход к теории квадратичных форм над полем Галуа характеристики 2, основанный на рассмотрении введенного в работе инварианта.

Список лит.: 4 назв.

УДК 519.9 + 575.1

Алгебраическое доказательство теоремы С. Н. Бернштейна о двух чистых типах. Любич Ю. И.— Вестн. Харьк. ун-та, №, «Прикладная математика и механика», вып. 44. Харьков, издательское объединение «Вища школа», 1979, с. 86—94.

Излагается существенно новое доказательство теоремы, описывающее стационарные законы наследования в популяции с двумя чистыми типами, гибридами которых являются все остальные.

Список лит.: 11 назв.

1р.

Вестн. Харьк. ун-та, 1979 № 177, 1—94 + 2.

V.N. Karazin Kharkiv National University
002182847