ЗАПИСКИ МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА
ХАРЬКОВСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА им. А. М. ГОРЬКОГО
И ХАРЬКОВСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

Том XXIX. Серия 4 1963

ОРТОГОНАЛЬНЫЕ МНОГОЧЛЕНЫ НА СИСТЕМЕ ИНТЕРВАЛОВ ЧИСЛОВОЙ ОСИ

Ю. Я. Томчук

Классические системы ортогональных многочленов, как известно, строятся для весов, которые во всем интервале ортогональности отличны от нуля. Равным образом в современных общих теориях, которыми наука обязана С. Н. Бернштейну и Г. Сеге, рассматривается исключительно тот случай, когда весовая функция обращается в нуль лишь в конечном числе точек интервала ортогональности. В частности, известная асимптотическая формула С. Н. Бернштейна выведена для того случая, когда вес вообще не обращается в нуль. До последнего времени не было сколько-нибудь общих построений, относящихся к случаю, когда весовая функция обращается в нуль на целых интервалах, лежащих внутри интервала ортогональности. Настоящая работа посвящена именно этому случаю. Самый подход к трактуемым в настоящей статье вопросам был дан в статье Н. И. Ахиезера «Об ортогональных многочленах на нескольких интервалах» [1]. Изложению этого подхода посвящены первые два параграфа главы второй. Далее здесь следует отметить статью [2], в которой были приведены без доказательства некоторые результаты настоящей работы. Здесь дано подробное доказательство и развитие результатов этой статьи.

ГЛАВА I

Для построения и исследования ортогональных многочленов на системе интервалов приходится решать некоторые теоретико-функциональные задачи на двухлистных римановых поверхностях. Относящимся сюда рассмотрениям мы посвятим эту главу.

§ 1. Обозначения

Обозначим через E точечное множество, образованное $\rho+1$ отрезками

$$[-1,\ \alpha_1],\ [\beta_1,\ \alpha_2],\ \ldots\ [\beta_{\rho-1},\ \alpha_\rho],\ [\beta_\rho, 1],$$

где

$$-1<\alpha_1<\beta_1<\ldots\ <\beta_\rho<1,$$

а через G — комплексную плоскость, разрезанную вдоль этих отрезков.

Далее, введем многочлены

$$S(z)=(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\ \ldots\ (z-\alpha_\rho),$$
$$R(z)=(z+1)(z-\alpha_1)(z-\beta_1)\ \ldots\ (z-\alpha_\rho)(z-\beta_\rho)(z-1)$$

и условимся под $\sqrt{R(z)}$ понимать ту однозначную в области G ветвь радикала, которая положительна в точках $z=x>1$.

Так как в области G функция $\sqrt{R(z)}$ нами вполне определена, то мы можем найти предельные значения этой функции на множестве E и положить

$$\sqrt{R(x\pm i\cdot 0)}=\pm\sqrt{-R(x)}.$$

Это естественное определение радикала $\sqrt{-R(x)}$ на множестве E, и мы его будем придерживаться на протяжении всей работы. При таком определении

$$\sqrt{-R(x)} > 0 \text{ при } x \in (\beta_\rho,\ 1),$$
$$\sqrt{-R(x)} < 0 \text{ при } x \in (\beta_{\rho-1},\ \alpha_\rho),$$
$$\sqrt{-R(x)} > 0 \text{ при } x \in (\beta_{\rho-2},\ \alpha_{\rho-1})$$

и т. д. Следовательно, отношение

$$\frac{S(x)}{\sqrt{-R(x)}}$$

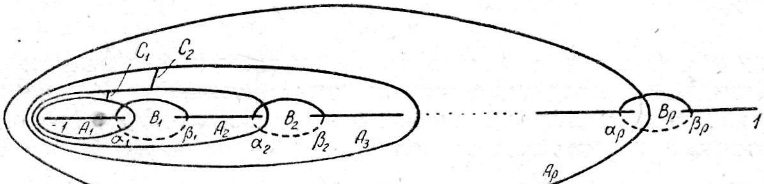
будет положительно внутри каждого из интервалов системы E.

Возьмем второй экземпляр области G, обозначим его G' и, рассматривая G как «верхний» лист, а G' как «нижний», сошьем их в риманову поверхность $\mathfrak{F}$. Линиями перехода этой поверхности будут отрезки системы E.

Если c — точка листа G, то соответствующую точку листа G' обозначим c' и тогда по определению

$$\sqrt{R(c')} = -\sqrt{R(c)}.$$

Введем на римановой поверхности $\mathfrak{F}$ канонические разрезы A_k и B_k ($k = 1, 2, \ldots \rho$). Линии A_k проводятся на верхнем листе римановой поверхности, причем A_k охватывает k интервалов $[-1, \alpha_1]$, $[\beta_1, \alpha_2]$, ... $[\beta_{k-1}, \alpha_k]$, не пересекая их, и является непрерывной замкнутой кривой. Линия B_k начинается в верхней полуплоскости верхнего листа от какой-либо точки разреза A_k, через $k+1$-ю линию перехода проходит в нижнюю полуплоскость нижнего листа, а затем через k-ю линию перехода вновь появляется в верхней полуплоскости верхнего листа.



Это тоже замкнутые кривые. Линии A_k не пересекаются между собой. То же можно сказать и о B_k. Каждая из линий B_k пересекается только с одной из линий A_k (пересекаются линии с одинаковыми индексами). Если провести еще разрезы C_k ($k = 1, 2, \ldots \rho - 1$), соединяющие A_k с A_{k+1}, то риманова поверхность становится односвязной.

На чертеже «сплошные» линии лежат на верхнем листе, а «пунктирные» — на нижнем.

§ 2. Трансфинитный диаметр множества E

Рассмотрим функцию

$$h(z) = \exp \int_1^z \frac{M(z)}{\sqrt{R(z)}}\, dz,$$

где $M(z)$ — многочлен степени ρ со старшим коэффициентом, равным 1.

Остальные коэффициенты выберем так, чтобы

$$\int\limits_{\alpha_k}^{\beta_k} \frac{M(z)}{\sqrt{R(z)}}\,dz = 0 \quad (k = 1,\ 2,\ \ldots\ \rho). \tag{1}$$

Эти условия представляют систему из ρ неоднородных линейных алгебраических уравнений. Можно непосредственно доказать, что определитель этой системы отличен от нуля. Вместо этого мы докажем, что однородная система

$$\int\limits_{\alpha_k}^{\beta_k} \frac{P(z)}{\sqrt{R(z)}}\,dz = 0 \quad (k = 1,\ 2,\ \ldots\ \rho),$$

где $P(z)$ — многочлен степени $\rho - 1$ с неизвестными коэффициентами, имеет только тривиальное решение. Действительно, поскольку $\sqrt{R(z)}$ не меняет знака на $(\alpha_k,\ \beta_k)$, то для того, чтобы рассматриваемый интеграл мог быть равен 0, необходимо, чтобы многочлен $P(z)$ имел корень в $(\alpha_k,\ \beta_k)$. Значит, многочлен $P(z)$ степени $\rho - 1$ должен иметь ρ различных корней. Отсюда следует, что $P(z) \equiv 0$. Итак, однородная система имеет только тривиальное решение.

Таким образом, система (1) однозначно разрешима, и требуемый многочлен $M(z)$ существует. Между прочим, из наших рассуждений следует, что $M(z)$ имеет по одному корню в каждом из интервалов $(\alpha_k,\ \beta_k)$; значит, все его корни вещественны.

Функция $h(z)$, аналитическая в области G, имеет в этой области однозначный модуль. Действительно, после обхода вокруг какого-нибудь из интервалов системы E, скажем, интервала $[\beta_k,\ \alpha_{k+1}]$ $(\beta_0 = -1,\ \alpha_{\rho+1} = 1)$, функция $h(z)$ умножается на величину

$$\exp \oint \frac{M(z)}{\sqrt{R(z)}} = \exp\left\{\pm 2 \int\limits_{\beta_k}^{\alpha_{k+1}} \frac{M(x)}{\sqrt{R(x)}}\,dx\right\},$$

которая по модулю равна 1, так как $\sqrt{R(x)}$ на интервалах системы E имеет чисто мнимое значение.

Мы видим также, что на границе области G модуль функции $h(z)$ равен 1. Действительно, в интервале $(\beta_\rho,\ 1)$ функция

$$\int\limits_{1}^{x} \frac{M(x)}{\sqrt{R(x)}}\,dx$$

имеет чисто мнимые значения, так как в этом интервале $\sqrt{R(x)}$ имеет чисто мнимые значения. Далее, в интервале $(\beta_{\rho-1},\ \alpha_\rho)$

$$\int\limits_{1}^{x} \frac{M(x)}{\sqrt{R(x)}}\,dx = \int\limits_{1}^{\rho} \frac{M(x)}{\sqrt{R(x)}}\,dx + \int\limits_{\beta_\rho}^{\alpha_\rho} \frac{M(x)}{\sqrt{R(x)}}\,dx + \int\limits_{\alpha_\rho}^{x} \frac{M(x)}{\sqrt{R(x)}}\,dx.$$

Но второе слагаемое справа равно 0 в силу определения многочлена $M(z)$, а остальные два члена имеют чисто мнимые значения. Это же рассуждение применимо и к остальным интервалам.

Весьма важное свойство функции $h(z)$ вытекает из того, что интеграл

$$\int_1^z \frac{M(z)}{\sqrt{R(z)}}\,dz$$

в области G имеет всего одну особую точку, а именно, точку $z=\infty$, где он ведет себя как $\ln z$. Благодаря этому $h(z)$ не имеет корней в области G и имеет всего один полюс (первого порядка) в точке $z=\infty$. Учитывая это и сказанное выше, мы заключаем, что $\ln|h(z)|$ есть функция Грина области G с источником в точке $z=\infty$

$$\ln|h(z)|=g(z,\ \infty).$$

Как известно, в окрестности точки $z=\infty$ эта функция Грина может быть представлена в виде

$$g(z,\ \infty)=\ln|z|+\gamma+0\left(\frac{1}{z}\right),$$

причем γ — константа, называемая константой Робена. Число $\tau=e^{-\gamma}$ есть по определению трансфинитный диаметр множества E. Мы видим, таким образом, что

$$\tau=e^{-\gamma}=\lim_{z\to\infty}\left|\frac{z}{h(z)}\right|=\lim_{z\to\infty}\left|z\cdot\exp\left\{-\int_1^z\frac{M(z)}{\sqrt{R(z)}}\,dz\right\}\right|=$$

$$=\left|\exp\int_1^\infty\left\{\frac{1}{\zeta}-\frac{M(\zeta)}{\sqrt{R(\zeta)}}\right\}d\zeta\right|=\exp\int_1^\infty\left\{\frac{1}{x}-\frac{M(x)}{\sqrt{R(x)}}\right\}dx.$$

Приведем простейшие примеры.

1°. Множество E состоит из одного интервала

$$[-1,\ 1].$$

В этом случае

$$S(z)=1;\quad R(z)=z^2-1;\quad M(z)=1$$

Поэтому

$$h(z)=\exp\int_1^z\frac{dz}{\sqrt{z^2-1}}=z+\sqrt{z^2-1}$$

и

$$\tau=\lim_{z\to\infty}\left|\frac{z}{z+\sqrt{z^2-1}}\right|=\frac{1}{2}.$$

2°. Множество E состоит из двух равных интервалов

$$[-1,\ -\beta],\ [\beta,\ 1].\quad (0<\beta<1)$$

В этом случае

$$S(z)=z+\beta;\quad R(z)=(z^2-1)(z^2-\beta^2),\quad M(z)=z.$$

Поэтому

$$h(z)=\exp\int_1^z\frac{\zeta d\zeta}{\sqrt{(\zeta^2-1)(\zeta^2-\beta^2)}}=\sqrt{\frac{2z^2-(1+\beta^2)+2\sqrt{(z^2-1)(z^2-\beta^2)}}{1-\beta^2}}$$

и

$$\tau=\lim_{z\to\infty}\sqrt{1-\beta^2}\left|\frac{z}{\sqrt{2z^2-(1+\beta^2)+2\sqrt{(z^2-1)(z^2-\beta^2)}}}\right|=\frac{\sqrt{1-\beta^2}}{2}.$$

3°. Множество E состоит из двух произвольных интервалов

$$[-1,\ \alpha],\ [\beta,\ 1].$$

В этом случае трансфинитный диаметр довольно просто выражается с помощью эллиптических тэта — функций.

С этой целью нужно ввести модуль

$$k=\sqrt{\frac{2(\beta-\alpha)}{(1-\alpha)(1+\beta)}}$$

и определить число ρ с помощью соотношения

$$\alpha=1-2\,\mathrm{sn}^2(\rho;\ k)\quad(-K<\rho<0).$$

В результате некоторых вычислений мы найдем, что

$$\tau=\frac{1}{2}\left[\frac{\Theta(0)\,\Theta_1(0)}{\Theta(\rho)\,\Theta_1(\rho)}\right]^2.$$

При этом

$$M(z)=z-\gamma,$$

где

$$\gamma=\alpha+\frac{2\,\mathrm{sn}(\rho;\ k)\,\mathrm{cn}(\rho;\ k)}{\mathrm{dn}(\rho;\ k)}\,\frac{\Theta'(\rho)}{\Theta(\rho)}.$$

Вычисления мы опустим. Читатель сможет найти их в работе [3].

§ 3. Абелевы интегралы

Функция

$$\omega(z)=\int\limits_1^z\frac{M(\zeta)}{\sqrt{R(\zeta)}}\,d\zeta,$$

которая входит в качестве показателя в $h(z)$, является абелевым интегралом третьего рода и имеет на римановой поверхности $\mathfrak{F}$ две логарифмические особенности, а именно, в точке $z=\infty$, где $\omega(z)$ ведет себя как $\ln z$, и в точке $z=\infty'$, где $\omega(z)$ ведет себя как $-\ln z$. Интеграл $\omega(z)$ нормирован так, что равны нулю его модули периодичности

$$a_k=\oint\limits_{B_k}d\omega(z)=2\int\limits_{\alpha_k}^{\beta_k}\frac{M(\zeta)}{\sqrt{R(\zeta)}}\,d\zeta.$$

Кроме функции $h(z)$ в дальнейшем мы будем рассматривать функции $h(z;c)$, определенные следующим образом

$$h(z;\ c)=\exp\omega(z;\ c)=\exp\frac{1}{2}\int\limits_1^z\frac{1}{\sqrt{R(z)}}\left\{\frac{\sqrt{R(z)}+\sqrt{R(c)}}{z-c}+M_c(z)\right\}dz,$$

где $M_c(z)$ — многочлен степени ρ со старшим коэффициентом, равным 1. Остальные коэффициенты выбираются из условий

$$a_k=\oint\limits_{B_k}\frac{1}{\sqrt{R(z)}}\left\{\frac{\sqrt{R(z)}+\sqrt{R(c)}}{z-c}+M_c(z)\right\}dz=0,\quad(k=1,\ 2,\ \dots\ \rho)$$

которые легко преобразуются в следующее:

$$\int\limits_{\alpha_k}^{\beta_k}\frac{1}{\sqrt{R(z)}}\left\{\frac{\sqrt{R(c)}}{z-c}+M_c(z)\right\}dz=0.$$

$$(k=1,\ 2\ \dots\ \rho)$$

Эта система из ρ линейных уравнений однозначно разрешима, так как ее определитель совпадает с определителем системы (1).

Заметим, что если $R(c)=0$, то наша система совпадает с системой (1), то есть $M_{\alpha_k}(z)=M_{\beta_k}(z)=M(z)$. $\Omega(z, c)$ представляет абелев интеграл третьего рода с логарифмическими особенностями в точках $z=c$ и $z=\infty$. В точке $z=c$ он ведет себя как $\ln(z-c)$, а в точке $z=\infty$ — как $\ln z$. Интегралы

$$a_k=\oint_{B_k} d\omega(z; c)$$

и

$$-b_k=\oint_{A_k} d\omega(z; c)$$

являются модулями периодичности для $\omega(z; c)$. Выбором коэффициентов у $M_c(z)$ мы сделали все модули периодичности a_k равными нулю. Кроме a_k и b_k абелевы интегралы третьего рода имеют еще один модуль периодичности, а именно, $2\pi i$.

Нам придется рассматривать также и абелевы интегралы первого и второго рода. В качестве основных абелевых интегралов первого рода возьмем функции

$$N_k(z)=\int_1^z \frac{D_k(z)}{\sqrt{R(z)}}\,dz,$$

где $D_k(z)$ — многочлен степени $\rho-1$. Величины $a_j=\oint_{B_j} dN_k(z)$ и $-b_j=\oint_{A_j} dN_k(z)$ являются модулями периодичности для $N_k(z)$. Выберем коэффициенты $D_k(z)$ из условий

$$a_j=0 \quad (j\neq k); \quad a_k=-2.$$

$N_k(z)$ всюду на римановой поверхности F конечны.

Обычно модули периодичности основных интегралов первого рода записывают в виде таблицы. При нашей нормировке эта таблица имеет следующий вид:

	a_1	a_2	. . .	a_ρ	b_1	b_2	. . .	b_ρ
$N_1(z)$	-2	0		0	b_{11}	b_{12}		$b_{1\rho}$
$N_2(z)$	0	-2		0	b_{21}	b_{22}		$b_{2\rho}$
. . .								
$N_\rho(z)$	0	0		-2	$b_{\rho 1}$	$b_{\rho 2}$		$b_{\rho\rho}$

В дальнейшем у нас встретятся функции

$$\omega_k(z)=\int_1^z \left\{\frac{1}{z-\alpha_k}+C_k(z)\right\}\frac{dz}{\sqrt{R(z)}},$$

где $C_k(z)$ — многочлены степени $\rho-1$. Это абелевы интегралы второго рода. В точке α_k интеграл $\omega_k(z)$ имеет простой полюс и

$$\lim_{z\to\alpha_k}\sqrt{z-\alpha_k}\,\omega_k(z)=\frac{1}{\sqrt{R'(\alpha_k)}}\lim_{z\to\alpha_k}\sqrt{z-\alpha_k}\int_1^z\frac{dz}{\sqrt{(z-\alpha_k)^3}}=-\frac{2}{\sqrt{R'(\alpha_k)}}.$$

Выберем коэффициенты многочлена $C_k(z)$ из условий

$$a_j = \oint_{B_j} d\omega_k(z) = 2\int_{\alpha_j}^{\beta_j} \left\{\frac{1}{z-\alpha_k} + C_k(z)\right\} \frac{dz}{\sqrt{R(z)}} = 0 \qquad (j \neq k)$$

$$\int_{-\infty}^{-1} \left\{\frac{1}{z-\alpha_k} + C_k(z)\right\} \frac{dz}{\sqrt{R(z)}} + \int_{1}^{\infty} \left\{\frac{1}{z-\alpha_k} + C_k(z)\right\} \frac{dz}{\sqrt{R(z)}} = 0$$

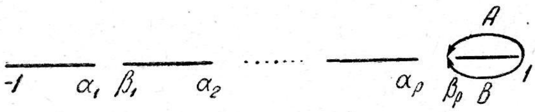
При таком выборе коэффициентов $\omega_k(z)$ имеет в области G однозначную вещественную часть. Действительно, на $(\beta_\rho, 1)$ имеем $\operatorname{Re}\omega_k(z) = 0$. В точках отрезка $(\alpha_\rho, \beta_\rho)$ разность интегралов

$$\operatorname{Re}\int_A \left\{\frac{1}{z-\alpha_k} + C_k(z)\right\} \frac{dz}{\sqrt{R(z)}}$$

и

$$\operatorname{Re}\int_B \left\{\frac{1}{z-\alpha_k} + C_k(z)\right\} \frac{dz}{\sqrt{R(z)}},$$

взятых по изображенным на чертеже путям, равна нулю, так как эта разность представляется в виде



$$\operatorname{Re}\int_{1}^{\beta_\rho} \left\{\frac{1}{z-\alpha_k} + C_k(z)\right\} \frac{dz}{\sqrt{R(z)}} = 0.$$

В точках отрезка $(\beta_{\rho-1}, \alpha_\rho)$ справедливо равенство $\operatorname{Re}\omega_k(z) = 0$ в силу того, что

$$\int_{\alpha_\rho}^{\beta_\rho} \left\{\frac{1}{z-\alpha_k} + C_k(z)\right\} \frac{dz}{\sqrt{R(z)}} = 0.$$

Продолжая так рассуждать, дойдем до отрезка (β_k, α_{k+1}). На нем $\operatorname{Re}\omega_k(z) = 0$. Чтобы доказать однозначность $\operatorname{Re}\omega_k(z)$ на интервалах, лежащих левее, например, на $(-1, \alpha_1)$, достаточно провести кривые A и B через ∞ к точкам этого интервала и воспользоваться вторым из наших условий.

Аналогично можно доказать однозначность функций $\operatorname{Re} N_k(z)$.

Пусть $\Pi(z)$ — абелев интеграл третьего рода; c_1 — корень функции $\exp \Pi(z)$, а c_2 — ее полюс; $\mathfrak{A}_k$, $\mathfrak{B}_k$ — модули периодичности рассматриваемого интеграла. Пусть $w(z)$ — абелев интеграл первого рода и a_k и b_k — его модули периодичности. Проведем окружности U_1 и U_2 вокруг точек c_1 и c_2. Тогда

$$\int_{R_{abc}} \Pi dw = \int_{U_1} \Pi dw + \int_{U_2} \Pi dw,$$

где R_{abc} обозначает совокупность разрезов A_k, B_k и C_k.

Если проинтегрировать правую часть по частям, то получим

$$\int\limits_{R_{abc}} \Pi dw + \int\limits_{U_1} w d\Pi + \int\limits_{U_2} w d\Pi = 0.$$

Но

$$\Pi = (-1)^{j+1} \log(\zeta - c_j) + 0(\zeta).$$

Используя теорему о вычетах, получаем

$$\int\limits_{R_{abc}} \Pi dw = 2\pi i\,[w(c_2) - w(c_1)].$$

Преобразуем левую часть равенства

$$\int\limits_{A_k} \Pi dw = \int\limits_{A_k} [\Pi(\lambda)\, dw(\lambda) - \Pi(\rho)\, dw(\rho)],$$

где λ и ρ — соответственные точки верхнего и нижнего берегов разреза. Но

$$\Pi(\lambda) - \Pi(\rho) = \mathfrak{A}_k,$$
$$w(\lambda) - w(\rho) = a_k,$$
$$dw(\lambda) = dw(\rho).$$

Отсюда

$$\int\limits_{A_k} \Pi dw = -\mathfrak{A}_k b_k.$$

Аналогично подсчитывается

$$\int\limits_{B_k} \Pi dw = a_k \mathfrak{B}_k.$$

В результате находим известное из теории абелевых интегралов соотношение

$$\sum_{k=1}^{\rho} a_k \mathfrak{B}_k - b_k \mathfrak{A}_k = 2\pi i\,[w(c_2) - w(c_1)],$$

которым мы ниже воспользуемся.

§ 4. Краевая задача

В дальнейшем нам понадобится решение задачи Дирихле для области G при некотором специальном предположении относительно краевых значений. Кроме того, нам понадобится один частный результат, связанный с этой задачей и, насколько мы можем судить, никем не отмеченный.

Хотя задача Дирихле для областей рассматриваемого нами типа в общем виде решена и подробно изложена (см. в первую очередь монографию Н. И. Мусхелишвили «Сингулярные интегральные уравнения»), нам представляется целесообразным не ограничиться здесь ссылками, а привести полностью все необходимые построения.

Задача формулируется следующим образом: дана положительная функция $\varphi(x)$ $(x \in E)$, удовлетворяющая условию Гельдера; требуется построить функцию $\Phi(z;\varphi)$, регулярную в области G и отличную в ней от нуля, имеющую однозначный модуль и такую, что на множестве E

$$|\Phi(x \pm i0)| = \varphi(x).$$

Функция $\ln|\Phi(z)|$ является однозначной гармонической функцией в области G, и относительно нее мы имеем классическую задачу Дирихле. Упрощающее предположение, о котором мы упомянули, состоит в том, что краевые значения на противоположных берегах каждого разреза одинаковы. Нас особо будет интересовать величина $|\Phi(\infty)|$. Это есть некоторый функционал от $\varphi(x)$, и мы покажем, что он равен

$$\mathfrak{G}[\varphi] \equiv |\Phi(\infty)| = \exp\left\{\frac{1}{\pi}\int\limits_E \frac{M(x)}{\sqrt{-R(x)}} \ln\varphi(x)\,dx\right\},$$

где $M(z)$ — тот многочлен, который определен выше и который входит в выражение

$$\tau = \exp\int\limits_1^\infty \left\{\frac{1}{x} - \frac{M(x)}{\sqrt{R(x)}}\right\} dx$$

для трансфинитного диаметра точечного множества E.

Начнем с того, что рассмотрим интеграл

$$J(z) = \frac{1}{\pi}\int\limits_E \frac{\sqrt{R(z)}}{\sqrt{-R(x)}}\,\frac{S(x)}{S(z)}\,\frac{\ln\varphi(x)}{z-x}\,dx.$$

Эта функция имеет однозначную вещественную часть. Она всюду конечна, кроме, может быть, точек α_k. На ∞ она равна

$$J(\infty) = \frac{1}{\pi}\int\limits_E \frac{S(x)}{\sqrt{-R(x)}} \ln\varphi(x)\,dx.$$

Предположим, что функция $\varphi(x)$ такова, что выполняются условия

$$\int\limits_E \frac{x^k}{\sqrt{-R(x)}} \ln\varphi(x)\,dx = 0. \quad (k = 0,\ 1,\ \ldots\ \rho - 1) \tag{2}$$

Тогда

$$J(z) = \frac{1}{\pi}\int\limits_E \frac{\sqrt{R(z)}}{\sqrt{-R(x)}}\,\frac{S(x)}{S(z)}\,\frac{\ln\varphi(x)}{z-x}\,dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_E \frac{\sqrt{R(z)}}{\sqrt{-R(x)}}\,\frac{S(x)-S(z)}{S(z)}\,\frac{\ln\varphi(x)}{z-x}\,dx + \frac{1}{\pi}\int\limits_E \frac{\sqrt{R(z)}}{\sqrt{-R(x)}}\,\frac{\ln\varphi(x)}{z-x}\,dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_E \frac{\sqrt{R(z)}}{\sqrt{-R(x)}}\,\frac{\ln\varphi(x)}{z-x}\,dx.$$

Таким образом, в этом случае $J(z)$ и в точках α_k не имеет особенностей. Из формул Племеля — Привалова следует, что $J(z)$ на множестве E равна $\ln\varphi(x)$, то есть $J(z)$ и будет решением нашей краевой задачи. Итак, если условия (2) выполнены, то задача решена.

Если условия (2) не выполнены, то $J(z)$ ведет себя в точках α_k, как

$$\frac{A_k}{\sqrt{z-\alpha_k}},$$

где

$$A_k = \lim_{z\to\alpha_k} J(z)\sqrt{z-\alpha_k} = -\frac{1}{\pi}\,\frac{\sqrt{R'(\alpha_k)}}{S'(\alpha_k)}\int\limits_E \frac{S(x)}{\sqrt{-R(x)}}\,\frac{\ln\varphi(x)}{x-\alpha_k}\,dx.$$

Припомним функции $\omega_k(z)$ и $N_k(z)$, введенные в предыдущем параграфе, и рассмотрим разность

$$J(z) - \sum_{k=1}^{\rho} B_k\omega_k(z),$$

где коэффициенты B_k подберем так, чтобы эта разность не имела особенностей в точках α_k. Для этого нужно, чтобы

$$B_k = \frac{1}{2\pi} \frac{R'(\alpha_k)}{S'(\alpha_k)} \int_E \frac{S(x)}{\sqrt{-R(x)}} \frac{\ln \varphi(x)}{x-\alpha_k} dx.$$

Тогда, если $x \in E$, то

$$\operatorname{Re}\left[J(x \pm i0) - \sum_{k=1}^{\rho} B_k \omega_k (x \pm i0)\right] = \ln \varphi(x),$$

так как $\operatorname{Re} J(x \pm i \cdot 0) = \ln \varphi(x)$ в силу формул Племеля — Привалова, а $\operatorname{Re} \omega_k (x \pm i \cdot 0) = 0$.

Таким образом, в общем случае решение имеет вид

$$|\Phi(z)| = \exp \operatorname{Re}\left\{J(z) - \sum_{k=1}^{\rho} B_k \omega_k(z)\right\},$$

а интересующий нас функционал равен

$$|\Phi(\infty)| = \exp\left\{\frac{1}{\pi} \int_E \frac{S(x)}{\sqrt{-R(x)}} \ln \varphi(x) - \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{\rho} \frac{R'(\alpha_k)}{S'(\alpha_k)} \omega_k(\infty) \times \right.$$

$$\left. \times \int_E \frac{S(x)}{\sqrt{-R(x)}} \frac{\ln \varphi(x)}{x-\alpha_k} dx\right\} = \exp \frac{1}{\pi} \int_E \frac{M_1(x)}{\sqrt{-R(x)}} \ln \varphi(x)\, dx, \tag{3}$$

где $M_1(x)$ — некоторый многочлен степени ρ с равным 1 старшим коэффициентом.

Докажем, что $M(x) \equiv M_1(x)$.

Прежде всего заметим, что функции $\exp N_k(z)$ имеют однозначный модуль и

$$|\exp N_k(z)| = \begin{cases} e \text{ на } [-1, \alpha_1], [\beta_1, \alpha_2], \ldots [\beta_{k-1}, \alpha_k], \\ 1 \text{ на } [\beta_k, \alpha_{k+1}] \ldots [\beta_\rho, 1]. \end{cases}$$

Таким образом $\exp N_k(z)$ есть решение нашей краевой задачи при специальной функции $\varphi(x)$, определяемой написанными здесь равенствами, а именно:

$$\ln \varphi(x) = \begin{cases} 1 \text{ на } [-1, \alpha_1], [\beta_1 \alpha_2], \ldots [\beta_{k-1}, \alpha_k] \\ 0 \text{ на } [\beta_k, \alpha_{k+1}], \ldots [\beta_\rho, 1]. \end{cases}$$

Следовательно, величину

$$|\exp N_k(\infty)| = \exp \int_1^{\infty} \frac{D_k(z)}{\sqrt{R(z)}} dz$$

можно записать иначе, согласно (3), а именно:

$$|\exp N_k(\infty)| = \exp \frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^{k} \int_{\beta_{j-1}}^{\alpha_j} \frac{M_1(x)}{\sqrt{-R(x)}} dx,$$

где $\beta_0 = -1$. Отсюда

$$\int_1^{\infty} \frac{D_k(z)}{\sqrt{R(z)}} dz = \frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^{k} \int_{\beta_{j-1}}^{\alpha_j} \frac{M_1(x)}{\sqrt{-R(x)}} dx. \tag{4}$$

Воспользуемся теперь соотношением, доказанным в конце предыдущего параграфа. Применим его к тому случаю, когда

$$\Pi(z) = \int_1^z \frac{M(z)}{\sqrt{R(z)}} dz,$$

а

$$w(z) = \int_1^z \frac{D_k(z)}{\sqrt{R(z)}} dz.$$

Тогда $c_1 = \infty'$, $c_2 = \infty$; $\mathfrak{A}_j = 0$ (при всех j), $a_j = 0$ (при $j = 1, 2, \ldots k-1, k+1, \ldots \rho$), $a_k = -2$, и мы получаем

$$-2\mathfrak{B}_k = 4\pi i \int_1^{\infty} \frac{D_k(z)}{\sqrt{R(z)}}\,dz.$$

Но

$$\mathfrak{B}_k = 2\sum_{j=1}^{k} \int_{\alpha_{j-1}}^{\beta_j} \frac{M(z)}{i\sqrt{-R(z)}}\,dz.$$

Поэтому

$$\sum_{j=1}^{k} \int_{\beta_{j-1}}^{\alpha_j} \frac{M(z)}{\sqrt{-R(z)}}\,dz = \pi \int_1^{\infty} \frac{D_k(z)}{\sqrt{R(z)}}\,dz \quad (k = 1, 2 \ldots \rho) \tag{5}$$

Из (4) и (5) получаем

$$\sum_{j=1}^{k} \int_{\beta_{j-1}}^{\alpha_j} \frac{M(x)}{\sqrt{-R(x)}}\,dx = \sum_{j=1}^{k} \int_{\beta_{j-1}}^{\alpha_j} \frac{M_1(x)}{\sqrt{-R(x)}}\,dx \ (k = 1, 2 \ldots \rho)$$

или

$$\int_{\beta_{k-1}}^{\alpha_k} \frac{M(x)}{\sqrt{-R(x)}}\,dx = \int_{\beta_{k-1}}^{\alpha_k} \frac{M_1(x)}{\sqrt{-R(x)}}\,dx \quad (k = 1, 2, \ldots \rho).$$

Если $F(x) = M(x) - M_1(x)$, то

$$\int_{\beta_{k-1}}^{\alpha_k} \frac{F(x)}{\sqrt{-R(x)}}\,dx = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots \rho).$$

Значит многочлен $F(x)$ степени $\rho - 1$ имеет ρ различных корней. Поэтому $F(x) \equiv 0$, то есть $M_1(x) \equiv M(x)$, и равенство

$$|\Phi(\infty)| = \exp\left\{\frac{1}{\pi}\int_E \frac{M(x)}{\sqrt{-R(x)}} \ln\varphi(x)\,dx\right\}$$

доказано.

ГЛАВА 2

В настоящей главе будут рассмотрены многочлены, ортогональные на множестве E при некотором специальном весе. А именно, мы будем предполагать, что вес имеет один из видов:

$$\frac{S(x)}{\sqrt{-R(x)}}\frac{dx}{P(x)}, \quad \frac{\sqrt{-R(x)}}{S(x)}\frac{dx}{P(x)} \qquad (x \in E),$$

где $P(x)$ — многочлен, положительный на множестве E. Многочлены, ортогональные относительно этих весов, со старшим коэффициентом, равным единице, обозначим соответственно через

$$T_n(x;\ P) = x^n + \ldots, \quad U_n(x;\ P) = x^n + \ldots$$

§ 1. Одна алгебраическая функция и ее связь с ортогональными многочленами.

Начнем с доказательства следующей леммы:

Лемма. Пусть $P(x)$ и $Q(z)$ — многочлены, положительные при $x \in E$. Пусть $a_1, a_2 \dots a_p$ — корни первого и $b_1\ b_2, \dots b_q\ (q \geqslant p \geqslant \rho)$ — корни второго многочлена (причем корни пишутся с учетом кратности). Пусть, наконец, выполнены равенства

$$\int_E \frac{S(x)}{\sqrt{-R(x)}} \frac{\ln P(x)}{x-\alpha_j} dx = \int_E \frac{S(x)}{\sqrt{-R(x)}} \frac{\ln Q(x)}{x-\alpha_j} dx \qquad (j = 1, 2 \dots \rho) \tag{6}$$

В таком случае существует рациональная функция $f(z; \sqrt{R(z)})$, единственными корнями которой на поверхности f являются точки b_1, $b_2, \dots b_q$, а единственными полюсами — точки $a_1, a_2, \dots a_p$ и точка ∞, в которой полюс имеет кратность $q-p$. (Замена функции $f(z, \sqrt{R(z)})$ на $f(z, -\sqrt{R(z)})$ отвечает замене точек b_e, a_k, ∞ точками b'_e, a'_k, ∞').

Доказательство. Окружим интервалы системы E непересекающимися овалами. В таком случае для любой точки ζ, лежащей вне всех овалов,

$$\frac{1}{2\pi i} \int \frac{S(z)}{\sqrt{R(z)}} \frac{1}{z-\alpha_j} \frac{dz}{z-\zeta} = \frac{S(\zeta)}{(\zeta-\alpha_j)\sqrt{R(\zeta)}},$$

где интегрирование производится по границе всех упомянутых овалов. Стягивая контуры интегрирования в отрезки, получим равенство

$$\frac{1}{\pi} \int_E \frac{S(x)}{\sqrt{-R(x)}} \frac{1}{x-\alpha_j} \frac{dx}{\zeta - x} = \frac{S(\zeta)}{(\zeta-\alpha_j)\sqrt{R(\zeta)}}.$$

Правая часть при $\zeta \to \infty$ является величиной $0\left(\frac{1}{\zeta^2}\right)$. Поэтому обе части можно интегрировать от любой точки $a \overline{\in} E$ до ∞. Мы получим тогда следующее соотношение

$$\int_a^\infty \frac{S(\zeta)\, d\zeta}{(\zeta-\alpha_j)\sqrt{R(\zeta)}} = \lim_{\Delta \to \infty} \frac{1}{\pi} \int_a^A d\zeta \int_E \frac{S(x)}{\sqrt{-R(x)}} \frac{1}{x-\alpha_j} \frac{dx}{z-x} =$$

$$= \lim_{A \to \infty} \frac{1}{\pi} \int_E \frac{S(x)}{\sqrt{-R(x)}} \frac{1}{x-\alpha_j} \ln \frac{A-x}{a-x} dx =$$

$$= \lim_{A \to \infty} \frac{1}{\pi} \int_E \frac{S(x)}{\sqrt{-R(x)}} \frac{1}{x-\alpha_j} \ln \frac{A-x}{A(a-x)} dx =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_E \frac{S(x)}{\sqrt{-R(x)}} \frac{1}{x-\alpha_j} \ln \frac{1}{a-x} dx,$$

причем использовано равенство

$$\int_E \frac{S(x)}{\sqrt{-R(x)}} \frac{dx}{x-\alpha_j} = 0.$$

Наш результат можно представить в виде

$$\frac{1}{\pi} \int_E \frac{S(x)}{\sqrt{-R(x)}} \frac{1}{x-\alpha} \ln(x-a)\, dx = w_j(a) - w_j(\infty).$$

где

$$w_j = \int_1^z \frac{S(\zeta)\, d\zeta}{(\zeta-\alpha_j)\sqrt{R(\zeta)}} \qquad (j = 1, 2, \dots \rho)$$

образуют полный набор абелевых интервалов первого рода. Равенство (6) означает, что

$$\sum_{k=1}^{p} w_j(a_k) + (q-p)\, w_j(\infty) = \sum_{k=1}^{q} w_j(b_k).$$

Но эти равенства, как известно, являются теми условиями, при выполнении которых упомянутая в формулировке леммы рациональная функция от z и $\sqrt{R(z)}$ существует.

Пусть $P(x)$ — многочлен степени p, положительный при $x \in E$, и пусть a_k $(k = 1, 2, \ldots p)$ — его корни.

Рассмотрим следующую задачу: построить рациональную функцию $p(z, \sqrt{R(z)})$, имеющую полюс порядка $n \geqslant p$ в точке ∞', ρ полюсов первого порядка α_j $(j = 1, 2, \ldots \rho)$, корень кратности $n-p$ в точке ∞ и p корней a_k $(k = 1, 2, \ldots p)$.

Таким образом, заданы все $n+\rho$ полюсов искомой функции и лишь n ее корней. Однако этими условиями функция определяется с точностью до постоянного множителя. Определятся также недостающие ρ корней, которые являются непроизвольными. Будем их обозначать через γ_j $(j = 1, 2, \ldots \rho)$. Об их расположении на $\mathfrak{F}$ сказано ниже. Потребуем еще, чтобы

$$\lim_{z \to \infty'} \frac{p(z, \sqrt{R(z)})}{z^n} = \lim_{z \to \infty} \frac{p(z, -\sqrt{R(z)})}{z^n} = 2.$$

Теперь наша функция определится однозначно. Допустим, что она построена:

$$p(z, \sqrt{R(z)}) = \frac{A(z) + B(z)\sqrt{R(z)}}{C(z)},$$

где $A(z)$, $B(z)$, $C(z)$ — многочлены от z. Действительно, всякая рациональная функция от z и $\sqrt{R(z)}$ может быть представлена в таком виде. Так как $p(z, \sqrt{R(z)})$ имеет ρ полюсов в точках α_j и больше нигде на конечном расстоянии, то $C(z) = S(z)$ и, значит,

$$p(z, \sqrt{R(z)}) = \frac{A(z) + B(z)\sqrt{R(z)}}{S(z)}.$$

Если бы многочлен $A(z)$ не делился на $S(z)$, то в некоторых из точек ветвления a_j функция $p(z, \sqrt{R(z)})$ обращалась бы в ∞ как $\frac{1}{z-\alpha_j}$, то есть имела бы полюс второго порядка. Отсюда видно, что $A(z)$ делится на $S(z)$, и мы можем положить

$$p(z, \sqrt{R(z)}) = A_n(z) - \frac{\sqrt{R(z)}}{S(z)} B_{n-1}(z).$$

Так как в точке $z = \infty$ функция $p(z, \sqrt{R(z)})$ обращается в 0, а в точке $z = \infty'$ имеет полюс порядка n, то $A_n(z)$ и $B_{n-1}(z)$ — многочлены степеней n и $n-1$ с одинаковыми старшими коэффициентами. Благодаря нормировке эти коэффициенты равны 1.

Докажем теперь, что $A_n(z) = T_n(z;\, P)$, а $B_{n-1}(z) = U_{n-1}(z;\, P)$. Окружим снова интервалы системы E непересекающимися овалами. Так как точки a_k не принадлежат E, то систему овалов можно выбрать так, что a_k останутся в бесконечной области, ограниченной этими овалами.

Рассмотрим интеграл

$$\oint p(z, \sqrt{R(z)}) \frac{S(z)}{\sqrt{R(z)}} \frac{z^m}{P(z)}\, dz \quad (m = 0, 1, \ldots n-1).$$

Подынтегральная функция регулярна в области G. Так как $p(z, \sqrt{R(z)})$ в точке $z = \infty$ имеет корень кратности $n-p$, та подынтегральная функция ведет себя на ∞ как $z^{(p-n)+\rho-(\rho+1)+m-p}=z^{m-n-1}$. Поэтому наш интеграл $=0$ и, следовательно,

$$\oint A_n(z)\frac{S(z)}{\sqrt{R(z)}}\frac{z^m}{P(z)}dz=\oint B_{n-1}(z)\frac{z^m}{P(z)}dz.$$

Последний интеграл равен 0 по теореме Коши. Стягивая контур в систему интервалов, получаем

$$\int_E A_n(x)\frac{S(x)}{\sqrt{-R(x)}}\frac{x^m}{P(x)}dx=0,\quad (m=0,1,\dots n-1)$$

откуда и следует, что $A_n(z)=T_n(z;P)$.

Рассмотрим далее интеграл

$$\oint p(z,\sqrt{R(z)})\frac{z^m}{P(z)}dz,\quad (m=0,1,\dots n-2),$$

который также равен нулю. Отсюда

$$\oint A_n(z)\frac{z^m}{P(z)}dz=\oint B_{n-1}(z)\frac{\sqrt{R(z)}}{S(z)}\frac{z^m}{P(z)}dz\quad (m=0,1,\dots n-2),$$

Интеграл слева равен нулю, поэтому

$$\int_E B_{n-1}(x)\frac{\sqrt{-R(x)}}{S(x)}\frac{x^m}{P(x)}dx=0,\quad (m=0,1,\dots n-2)$$

и, значит,

$$U_{n-1}(z;P)=B_{n-1}(z).$$

Итак,

$$p(z,\sqrt{R(z)})=T_n(z;P)-\frac{\sqrt{R(z)}}{S(z)}U_{n-1}(z;P).$$

Докажем теперь, что все корни γ_j вещественны и лежат в интервалах $[\alpha_j,\beta_j]$ по одному в каждом. Некоторые из них будут лежать на листе G, а остальные на листе G'. Действительно, функция

$$S(z)\,p(z,\sqrt{R(z)})\,p(z,-\sqrt{R(z)})=$$

$$=\prod_{j=1}^{\rho}(z-\alpha_j)[T_n(z;P)]^2-(z^2-1)\prod_{j=1}^{\rho}(z-\beta_j)[U_{n-1}(z;P)]^2=Q(z)$$

принимает в точках α_k, β_k значения разных знаков

$$\operatorname{sign}Q(\alpha_k)=(-1)^{\rho-k+1},\ \operatorname{sign}Q(\beta_k)=(-1)^{\rho-k}.$$

Поэтому $Q(z)$ имеет нечетное число корней в каждом из пустых интервалов.

С другой стороны в каждом таком интервале может лежать лишь четное число корней a_j. Поэтому в каждом пустом интервале имеется по крайней мере один, а значит точно один непроизвольный корень. Мы видим также, что $Q(z)$ — многочлен степени $p+\rho$. Действительно, $Q(z)$ — рациональная функция от z с единственным полюсом в точке $z=\infty$, порядок которого равен $p+\rho$.

§ 2. Разделение весов на классы

Определение. Две непрерывные функции $t(x)$ и $t^*(x)$, положительные при $x\in E$, принадлежат одному классу, если

$$\int_E\frac{S(x)}{\sqrt{-R(x)}}\frac{\ln t(x)}{x-a_j}dx=\int_E\frac{S(x)}{\sqrt{-R(x)}}\frac{\ln t^*(x)}{x-a_j}dx\quad (j=1,2,\dots\rho).$$

В этом параграфе мы покажем, что если весовые многочлены принадлежат одному классу, то между ортогональными многочленами, соответствующими этим весам, существует простая зависимость, а именно, имеет место следующая

Теорема. Если многочлены $P(x)$ и $Q(x)$, положительные при $x \in E$, принадлежат одному классу, степень $P(x)$ равна p, а степень $Q(x)$ равна q, то при $n \geqslant q \geqslant p$ и $z \in G$

$$\frac{T_n(z;\,Q) + \dfrac{\sqrt{R(z)}}{S(z)}U_{n-1}(z;\,Q)}{T_n(z;\,P) + \dfrac{\sqrt{R(z)}}{S(z)}U_{n-1}(z;\,P)} = \Phi\left(z;\,\sqrt{\frac{Q(x)}{P(x)}}\right)\mathfrak{G}\left[\sqrt{\frac{P(x)}{Q(x)}}\right]$$

$$\frac{T_n(z;\,Q) - \dfrac{\sqrt{R(z)}}{S(z)}U_{n-1}(z;\,Q)}{T_n(z;\,P) - \dfrac{\sqrt{R(z)}}{S(z)}U_{n-1}(z;\,P)} = \Phi\left(z;\,\sqrt{\frac{P(x)}{Q(x)}}\right)\mathfrak{G}\left[\sqrt{\frac{P(x)}{Q(x)}}\right]\frac{Q(x)}{P(x)},$$

где, соответственно предыдущей главе,

$$\Phi(z;\,\varphi) = \exp\left\{\frac{1}{\pi}\int\limits_E \frac{\sqrt{R(z)}}{\sqrt{-R(x)}}\,\frac{\ln\varphi(x)}{z-x}\,dx\right\}$$

$$\mathfrak{G}[\varphi] = \exp\left\{\frac{1}{\pi}\int\limits_E \frac{M(x)}{\sqrt{-R(x)}}\ln\varphi(x)\,dx\right\},$$

Доказательство. Так как многочлены $P(x)$ и $Q(x)$ одного класса, то по лемме параграфа 1 можно построить рациональную функцию $f(z, \sqrt{R(z)})$ так, чтобы она имела корни и полюсы только на листе G, а именно, корни в корнях многочлена $Q(z)$, а полюсы в корнях многочлена $P(z)$ и, кроме того, на ∞ полюс порядка $q-\rho$. Если нормировать эту функцию так, чтобы $f(z, \sqrt{R(z)})$ в точке ∞' равнялась 1, то $f(z, \sqrt{R(z)})$ определится однозначно.

Рассмотрим произведение

$$f(z, \sqrt{R(z)})\,f(z, -\sqrt{R(z)}).$$

Второй множитель обладает свойствами, аналогичными свойствам первого с той разницей, что все его корни и полюсы лежат на листе G'. Отсюда следует, что

$$f(z, \sqrt{R(z)}),\,f(z, -\sqrt{R(z)}) = C\frac{Q(z)}{P(z)},$$

где C — константа. Легко видеть, что при $x \in E$ функции $f(x, \sqrt{R(x)})$ и $f(x, -\sqrt{R(x)})$ имеют комплексно-сопряженные значения, а потому на E

$$\left|f(z;\,\sqrt{R(z)})\right| = \sqrt{C}\sqrt{\frac{Q(z)}{P(z)}} \qquad (z \in E).$$

Кроме того, функция $f(z, -\sqrt{R(z)})$ регулярна в G. Поэтому $f(z, -\sqrt{R(z)})$ можно найти как решение краевой задачи параграфа 4 предыдущей главы. Так как $P(x)$ и $Q(x)$ одного класса и, значит,

$$\int\limits_E \frac{x^k}{\sqrt{-R(x)}}\ln\frac{Q(x)}{P(x)}\,dx = 0, \qquad (k = 0,\ 1,\ \ldots\ \rho-1) \tag{7}$$

то решение этой краевой задачи получим в виде (если учесть, что $f(z, -\sqrt{R(z)})$ в точке ∞ равна 1)

$$f(z, -\sqrt{R(z)}) = \frac{\exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int\limits_E \frac{\sqrt{R(z)}}{\sqrt{-R(x)}} \frac{\ln\frac{Q(x)}{P(x)}}{z-x}dx\right\}}{\exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int\limits_E \frac{M(x)}{\sqrt{-R(x)}} \ln\frac{Q(x)}{P(x)}dx\right\}} =$$

$$= \Phi\left(z; \sqrt{\frac{Q(x)}{P(x)}}\right)\mathfrak{G}\left[\sqrt{\frac{P(x)}{Q(x)}}\right].$$

Заметим сразу, что в силу условий (7) в выражении для $\mathfrak{G}\left[\sqrt{\frac{P(x)}{Q(x)}}\right]$ вместо $M(x)$ можно писать $S(x)$ или просто x^{ρ}.

Теперь находится и $f(z, \sqrt{R(z)})$, а именно,

$$f(z, \sqrt{R(z)}) = \Phi\left(z; \sqrt{\frac{P(x)}{Q(x)}}\right)\mathfrak{G}\left[\sqrt{\frac{P(x)}{Q(x)}}\right]\frac{Q(x)}{P(x)}.$$

Рассмотрим произведение

$$p(z, \sqrt{R(z)})\, f(z, \sqrt{R(z)}).$$

Это рациональная функция от z и $\sqrt{R(z)}$. Она имеет полюс порядка n в точке ∞', ρ полюсов первого порядка в точках α_j ($j = 1, 2, \ldots \rho$), корень кратности $n - q$ в точке ∞ и q корней b_k ($k = 1, 2, \ldots q$), где b_k корни многочлена $Q(z)$. Кроме того, она имеет корни γ_j, являющиеся корнями $p(z, \sqrt{R(z)})$.

Но если по полиному $Q(z)$ построить функцию $q(z, \sqrt{R(z)})$ так, как по полиному $P(z)$ построена $p(z, \sqrt{R(z)})$, то мы получим функцию с теми же свойствами, что и произведение $p(z, \sqrt{R(z)})\, f(z, \sqrt{R(z)})$. Если учесть, что

$$\lim_{z\to\infty'}\frac{p(z, \sqrt{R(z)}) f(z, \sqrt{R(z)})}{z^n} = \lim_{z\to\infty'}\frac{p(z, \sqrt{R(z)})}{z^n} = 2,$$

то

$$q(z, \sqrt{R(z)}) = p(z, \sqrt{R(z)})\, f(z, \sqrt{R(z)}),$$

и, следовательно,

$$f(z, \sqrt{R(z)}) = \frac{q(z, \sqrt{R(z)})}{p(z, \sqrt{R(z)})}.$$

Подставляя сюда выражения для этих трех функций, получим теорему.

§ 3. Представление специальных ортогональных многочленов с помощью абелевых интегралов

Теперь мы можем построить функцию $p(z, \sqrt{R(z)})$. Для этого нам придется воспользоваться функциями $h(z)$ и $h(z; c)$, введенными в предыдущей главе.

Рассмотрим функцию

$$\frac{p(z, \sqrt{R(z)})\,[h(z)]^n \prod\limits_{j=1}^{\rho} h(z;\ \alpha_j)}{\prod\limits_{j=1}^{\rho} h(z;\ \gamma_j) \prod\limits_{k=1}^{p} h(z;\ a_k)}.$$

Эта функция на поверхности $\mathfrak{F}$ не имеет ни нулей, ни полюсов и, следовательно, есть константа.

Итак,

$$p(z, \sqrt{R(z)}) = \frac{A}{[h(z)]^n}\prod_{j=1}\frac{h(z;\ \gamma_j)}{h(z;\ \alpha_j)}\prod_{k=1}^{p} h(z, a_k),$$

причем A определяется из условия

$$\lim_{z\to\infty'} \frac{p(z, \sqrt{R(z)})}{z^n} = 2.$$

Для дальнейшего необходимо вычислить A, а также величину

$$N_n[P] = \frac{1}{\pi}\int_E [T_n(x;\ P)]^2 \frac{S(x)}{\sqrt{-R(x)}}\frac{dx}{P(x)}.$$

С этой целью заметим, что

$$h(z, a_k)\, h(z', a_k) = \frac{z-a_k}{1-a_k}.$$

Поэтому

$$\prod_{k=1}^{p} h(z,a_k)\, h(z',a_k) = \frac{P(z)}{P(1)}.$$

Функция $\Omega(z) = \prod_{k=1}^{p} h(z',a_k)$ регулярна в области G, отлична там от нуля и имеет однозначный модуль. Кроме того, так как $\prod_{k=1}^{p} h(z,a_k)$ и $\prod_{k=1}^{p} h(z',a_k)$ на множестве E принимают сопряженные значения, то на E

$$|\Omega(x)| = \sqrt{\frac{P(x)}{P(1)}}.$$

Воспользовавшись результатами параграфа 4 главы I, получаем, что

$$|\Omega(\infty)| = \frac{1}{\sqrt{P(1)}}\exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_E \frac{M(x)}{\sqrt{-R(x)}}\ln P(x)\,dx\right\}.$$

Выше мы ввели непроизвольные корни $\gamma_j\,(j = 1,\ 2,\ \dots\ \rho)$, часть которых лежит на листе G, а остальные — на листе G'. Введем следующие обозначения, смысл которых понятен:

$$\Gamma_n[P] = \prod_{j=1}^{\lambda}\left|\frac{h(z;\ \gamma_j)}{h(z;\ \gamma_j')}\right| \prod_{j=\lambda+1}^{\rho}\left|\frac{h(z;\ \gamma'_j)}{h(z;\ \gamma_j)}\right|\Bigg|_{z=\infty}$$

и

$$\Gamma_n^*[P] = \frac{\prod_{j=1}^{\rho}|h(z;\ \alpha_j)|}{\prod_{j=1}^{\lambda}|h(z;\ \gamma_j')| \prod_{j=\lambda+1}^{\rho}|h(z;\ \gamma_j)|}\Bigg|_{z=\infty}.$$

Заметим, что

$$h(z',c) = \frac{h(z,c')}{h(z)}.$$

Действительно, $\frac{h(z',c)\,h(z)}{h(z,c')}$ не имеет ни нулей, ни полюсов. В точке $z=1$ эта дробь равна 1, откуда и следует формула.

После этих предварительных замечаний можно найти A

$$A = 2\lim_{z\to\infty}\left[\frac{z}{h(z)}\right]^n \frac{\prod_{j=1}^{\rho} h(z;\ \alpha_j)}{\prod_{k=1}^{p} h(z;\ a_k)}\left[\prod_{j=1}^{\lambda} h(z;\ \gamma_j) \prod_{j=\lambda+1}^{\rho} h(z;\ \gamma_j')\right]^{-1} =$$

$$= 2\tau^n\, \mathfrak{G}\left[\sqrt{\frac{P(1)}{P(x)}}\right] \lim_{z\to\infty}\frac{\prod_{j=1}^{\rho} h(z;\ \alpha_j)}{[h(z)]^{\rho}} \prod_{j=1}^{\lambda}\frac{h(z)}{R(z;\ \gamma_j')} \prod_{j=\lambda+1}^{\rho}\frac{h(z)}{h(z;\ \gamma_j)} =$$

$$= 2\tau^n\, \mathfrak{G}\left[\sqrt{\frac{P(1)}{P(x)}}\right]\Gamma_n^*[P].$$

Рассмотрим интеграл

$$J_n = \int_L p(z, \sqrt{R(z)}) \frac{S(z)}{\sqrt{R(z)}} \frac{z^m}{P(z)}\, dz,$$

взятый по контуру L, охватывающему все линии перехода и лежащему в G. С одной стороны,

$$J_n = 2i \int_E [T_n(x;\ P)]^2 \frac{S(x)}{\sqrt{-R(x)}} \frac{dx}{P(x)} = 2\pi i N_n[P],$$

а с другой стороны, по теореме о вычетах

$$J_n = 2\pi i \lim \frac{p(z, \sqrt{R(z)})\, z^n}{P(z)} =$$

$$= 2\pi i \frac{A\tau^n}{\sqrt{P(1)}} \exp\left\{ -\frac{1}{2\pi} \int_E \frac{M(x)}{\sqrt{-R(x)}} \ln P(x)\, dx \right\} \prod_{j=1}^{\rho} \left| \frac{h(z;\ \gamma_j)}{h(z;\ \alpha_j)} \right|_{z=\infty} =$$

$$= 2\pi i \cdot 2\tau^{2n} \mathfrak{S}\left[\frac{1}{P(x)}\right] \Gamma_n[P].$$

Итак,

$$N_n[P] = 2\tau^{2n} \mathfrak{S}\left[\frac{1}{P(x)}\right] \Gamma_n[P].$$

§ 4. Некоторые неравенства и оценки для специальных ортогональных многочленов

Докажем прежде всего, что при $x \in E$ и $n > \rho$

$$\left| \frac{\sqrt{S(x)}\, T_n(x;\ P)}{\sqrt{P(x)}\, \sqrt{N_n[P]}} \right| < C,$$

где C зависит лишь от множества E.

Для этого заметим, что если ξ и η лежат в некотором интервале $[\alpha_k,\ \beta_k]$ листа G, то

$$\frac{1}{L} < \lim_{z\to\infty} \left| \frac{h(z;\ \xi)}{h(z;\ \eta')} \right| < L,$$

где константа L зависит лишь от множества E.

Действительно, $\lim\limits_{z=\infty} \left| \frac{h(z;\ \xi)}{h(z;\ \eta')} \right|$ существует и отличен от нуля при любых ξ и $\eta \in [\alpha_k,\ \beta_k]$. Так как ξ и η пробегают замкнутое множество значений, то нужная константа L существует.

Отсюда прямо из определения величин $\Gamma_n[P]$ и $\Gamma_n^*[P]$ следует, что

$$\frac{1}{L^\rho} < \Gamma_n[P] < L^\rho;\ \frac{1}{L^\rho} < \Gamma_n^*[P] < L^\rho.$$

Для доказательства нашего неравенства заметим еще, что

$$|h(z)|_{z\in E} = 1;$$

$$\left| \prod_{j=1}^{\rho} h(z;\ \alpha_j) \right|_{z\in E} = |\sqrt{S(z)}|; \left| \prod_{j=1}^{\rho} h(z;\ a_k) \right|_{z\in E} = \left| \sqrt{\frac{P(z)}{P(1)}} \right|$$

$$\frac{A}{\sqrt{N_n[P]}} = \sqrt{2P(1)} \frac{\Gamma_n^*[P]}{\sqrt{\Gamma_n[P]}}.$$

Все эти соотношения были доказаны выше. Учитывая все это, при $x \in E$ получаем

$$\left|\frac{\sqrt{S(x)}\,T_n(x;\,P)}{\sqrt{P(x)}\,\sqrt{N_n[P]}}\right| = \left|\frac{A\sqrt{S(x)}}{2\sqrt{P(x)}\sqrt{N_n[P]}}\left\{\frac{1}{[h(x)]^n}\prod_{j=1}^{\rho}\frac{h(x;\,\gamma_j)}{h(x;\,\alpha_j)}\prod_{k=1}^{p}h(x;\,a_k)+\right.\right.$$

$$\left.+[h(x)]^n\prod_{j=1}^{\rho}\frac{h(x',\,\gamma_j)}{h(x',\,\alpha_j)}\prod_{k=1}^{p}h(x',\,a_k) \leqslant \frac{L^{\frac{3}{2}\rho}}{\sqrt{2}}\left\{\prod_{j=1}^{\rho}|h(x;\,\gamma_j)|+\right.\right.$$

$$\left.+\prod_{j=1}^{\rho}|h(x',\,\gamma_j)|\right\} < C.$$

В дальнейшем нам придется пользоваться формулой Кристофеля—Дарбу

$$\sum_{\nu=0}^{n-1}\frac{T_\nu(x;\,P)\,T_\nu(\xi;\,P)}{N_\nu[P]} = \frac{T_n(x;\,P)\,T_{n-1}(\xi;\,P)-T_n(\xi;\,P)\,T_{n-1}(x;\,P)}{(x-\xi)\,N_{n-1}[P]}.$$

Выражение

$$\frac{1}{\pi N_{n-1}[P]}[T_n(x;\,P)\,T_{n-1}(\xi;\,P)-T_n(\xi;\,P)\,T_{n-1}(x;\,P)]$$

обозначим через $K_n(x,\,\xi)$. Это многочлен степени n по обеим переменным x и ξ, который обращается в 0 при $x=\xi$, и в силу только что доказанного неравенства

$$\left|\frac{\sqrt{S(x)}\sqrt{S(\xi)}\,K_n(x,\,\xi)}{\sqrt{P(x)}\sqrt{P(\xi)}}\right| < C \qquad (x\in E,\ \xi\in E),$$

где C зависит лишь от множества E.

Покажем, что при $x\in E$ и $n\geqslant p$ справедливо неравенство

$$|T_n(x;\,P)| \leqslant Cn\sqrt{N_n[P]}\,\max_E\sqrt{P(x)},$$

где C зависит лишь от множества E.

Для доказательства воспользуемся следующим хорошо известным фактом: если $P_n(x)$ — многочлен степени n и

$$\max_{a\leqslant x\leqslant b}\left|P_n(x)\sqrt{(b-x)(x-a)}\right| < M,$$

то

$$\max_{a\leqslant x\leqslant b}|P_n(x)| < \frac{2M}{b-a}n.$$

Возьмем один из интервалов, входящих в E, например $[\beta_{k-1},\,\alpha_k]$. На этом интервале по доказанному выше

$$\left|\frac{T_n(x;\,P)\sqrt{(\alpha_k-x)(x-\beta_{k-1})}}{\sqrt{N_n[P]}}\right| < C_1\sqrt{P(x)},$$

где C_1 зависит только от E. Отсюда в силу только что приведенного факта следует, что при $x\in[\beta_{k-1},\,\alpha_k]$

$$|T_n(x;\,P)| \leqslant C_2 n\sqrt{N_n[P]}\,\max_E P(x).$$

Перебирая все интервалы множества E и беря наибольшую из констант C_2, мы и получим требуемое неравенство.

В заключение настоящего параграфа докажем, что при $n \geqslant p$ и x, $z \in E$ имеет место неравенство

$$\left|\frac{K_n(z, x)\sqrt{S(x)}}{z-x}\right| \leqslant Cn^3 \max_E P(x),$$

где C зависит лишь от множества E.

С этой целью заметим, что при фиксированном $x \in E$ и любом $z \in E$

$$\left|\frac{K_n(z, x)\sqrt{S(x)}}{z-x}\right| \leqslant \max_{z \in E}\left|\frac{\partial}{\partial z}[K_n(z, x)\sqrt{S(x)}]\right|.$$

Но $K_n(z, x)\sqrt{S(x)}$ есть многочлен степени n от z, удовлетворяющий при $z \in E$ неравенству

$$|K_n(z, x)\sqrt{S(x)}| \leqslant \frac{1}{\pi}\left|\frac{T_n(z; P)}{\sqrt{N_{n-1}[P]}}\right|\left|\frac{T_{n-1}(x; P)\sqrt{S(x)}}{\sqrt{N_{n-1}[P]}}\right| + \frac{1}{\pi}\left|\frac{T_n(x; P)\sqrt{S(x)}}{\sqrt{N_{n-1}[P]}}\right|\left|\frac{T_{n-1}(z; P)}{\sqrt{N_{n-1}[P]}}\right|.$$

Отсюда благодаря доказанным неравенствам следует, что при $z \in E$

$$|K_n(z, x)\sqrt{S(x)}| \leqslant C_1 n \max_E P(x).$$

Теперь остается применить к многочлену $K_n(z, x)\sqrt{S(x)}$ от z неравенство А. А. Маркова, из которого следует, что при $z \in [\beta_{k-1}, \alpha_k]$

$$\left|\frac{\partial}{\partial z}[K_n(z, x)\sqrt{S(x)}]\right| \leqslant \frac{2n^2}{\alpha_k - \beta_{k-1}} C_1 n \max_E P(x).$$

Перебирая все интервалы $[\beta_{k-1}, \alpha_k]$ и беря в качестве C наибольшую из констант $\dfrac{2C_1}{\alpha_k - \beta_{k-1}}$, мы и получим требуемое неравенство.

§ 5. Пример

В качестве простейшего примера для иллюстрации наших общих рассмотрений разберем случай, когда множество E состоит из двух интервалов

$$[-1, \alpha], \ [\beta, 1]$$

а вес имеет вид

$$\frac{x-\alpha}{\pi\sqrt{(1-x^2)(x-\alpha)(x-\beta)}},$$

то есть $t(x) = \mathrm{const}$. В этом случае все построения легко доводятся до конца и получаемая система ортогональных многочленов может быть охарактеризована набором соотношений и свойств столь же полно, как и классические системы.

Мы опустим промежуточные вычисления и приведем лишь окончательные результаты.

Все представления содержат эллиптические функции, которые вводятся, как было указано в параграфе 2 главы 1, а именно:

$$k = \sqrt{\frac{2(\beta-\alpha)}{(1-\alpha)(1+\beta)}}, \quad \alpha = 1 - 2\,\mathrm{sn}^2\rho, \ -K < \rho < 0,$$

$$x = \frac{\mathrm{sn}^2 u\, \mathrm{cn}^2 \rho + \mathrm{sn}^2 \rho\, \mathrm{cn}^2 u}{\mathrm{sn}^2 u - \mathrm{sn}^2 \rho}.$$

Параметрическое выражение ортогональных многочленов таково:

$$T_n(x) = \frac{\tau^n \Theta(\rho)}{\Theta(\overline{2n-1}\rho)}\left\{\left[\frac{\mathrm{H}(u+\rho)}{\mathrm{H}(u-\rho)}\right]^n \frac{\Theta(u-2n\rho)}{\Theta(u)} + \left[\frac{\mathrm{H}(u-\rho)}{\mathrm{H}(u+\rho)}\right]^n \frac{\Theta(u+2n\rho)}{\Theta(u)}\right\}, \quad n \geqslant 1$$

$$T_0(x) = 1$$

при этом

$$\tau = \frac{1}{2}\left[\frac{\Theta(0)\,\Theta_1(0)}{\Theta(\rho)\,\Theta_1(\rho)}\right]^2.$$

Значение квадрата нормы:

$$\frac{1}{\pi}\int_E [T_n(x)]^2 \frac{(x-\alpha)\,dx}{\sqrt{(1-x^2)(x-\alpha)(x-\beta)}} = \begin{cases} 2\tau^n \dfrac{\theta(\overline{2n+1}\rho)}{\theta(\overline{2n-1}\rho)} & (n \geqslant 1) \\ 1 & (n = 0). \end{cases}$$

Нормированные многочлены:

$$\widehat{T}_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\theta(\rho)}{\sqrt{\theta(\overline{2n-1}\rho)\,\theta(\overline{2n+1}\rho)}}\left\{\left[\frac{\mathrm{H}(u+\rho)}{\mathrm{H}(u-\rho)}\right]^n \frac{\theta(u-2n\rho)}{\theta(u)} + \right.$$

$$\left. + \left[\frac{\mathrm{H}(u-\rho)}{\mathrm{H}(n+\rho)}\right]^n \frac{\theta(u+2n\rho)}{\theta(u)}\right\}, \qquad (n \geqslant 1)$$

$$\widehat{T}_0(x) = 1.$$

Значение многочленов на концах интервалов системы E:

$$T_n(-1) = 2(-1)^n\tau^n \frac{\theta(\rho)\,\theta(2n\rho)}{\theta(\overline{2n-1}\rho)\,\theta(0)},$$

$$T_n(1) = 2\tau^n \frac{\theta(\rho)\,\theta(2n\rho)}{\theta(\overline{2n-1}\rho)\,\theta(0)},$$

$$T_n(\alpha) = 2\tau^n \frac{\theta(\rho)}{\theta(\overline{2n-1}\rho)}\left\{\frac{\mathrm{H}'(2n\rho)}{\mathrm{H}'(0)} - 2n\frac{\theta'(\rho)}{\theta(\rho)}\frac{\mathrm{H}(2n\rho)}{\mathrm{H}'(0)}\right\},$$

$$T_n(\beta) = 2\tau^n \frac{\theta(\rho)}{\theta(\overline{2n-1}\rho)}\frac{\mathrm{H}_1(2n\rho)}{\mathrm{H}_1(0)}.$$

Рекуррентное соотношение:

$$x\widehat{T}_n(x) = \alpha_n\widehat{T}_{n+1}(x) + \beta_n\widehat{T}_n(x) + \alpha_{n-1}\widehat{T}_{n-1}(x);$$

здесь

$$\alpha_n = \frac{\tau\sqrt{\theta(\overline{2n-1}\rho)\,\theta(\overline{2n+3}\rho)}}{\theta(\overline{2n+1}\rho)} \qquad (n \geqslant 1)$$

$$\alpha_0 = \sqrt{2}\tau\sqrt{\frac{\theta(3\rho)}{\theta(\rho)}}$$

$$1 + \beta_n = \tau\frac{\theta(\overline{2n+2}\rho)\,[\theta(\overline{2n-1}\rho)]^2 + \theta(\overline{2n-2}\rho)\,[\theta(\overline{2n+1}\rho)]^2}{\theta(\overline{2n-1}\rho)\,\theta(2n\rho)\,\theta(\overline{2n+1}\rho)} \qquad (n \geqslant 1).$$

Коэффициенты α_n, $\beta_n\,(n \geqslant 1)$ конечно-разностного уравнения

$$xy_n = \alpha_n y_{n+1} + \beta_n y_n + \alpha_{n-1}y_{n-1}$$

будут периодическими функциями от n в том и только том случае, когда параметр ρ соизмерим с K.

Действительно, в указанные коэффициенты n входит с множителем 2ρ под знаком функции θ. Если

$$-\rho = \frac{sK}{t},$$

где $\frac{s}{t}$ — несократимая дробь, то после прибавки к n числа t аргумент функции θ изменится на четную кратность K, а поэтому значение функции не изменится. Таким образом окажется, что

$$\alpha_{n+t} = \alpha_n, \ \beta_{n+t} = \beta_n \qquad (n \geqslant 1).$$

Если же параметр ρ не соизмерим с K, то периодичности не будет, так как

$$\frac{\alpha_n^2}{\tau^2} = \frac{\theta(\overline{2n-1}\rho)\,\theta(\overline{2n+3}\rho)}{\theta^2(\overline{2n+1}\rho)} = \frac{\theta^2(\overline{2n+1}\rho)\,\theta^2(2\rho) - \mathrm{H}^2(\overline{2n+1}\rho)\,\mathrm{H}^2(2\rho)}{\theta^2(0)\,\theta^2(\overline{2n+1}\rho)} =$$

$$= \frac{\theta^2(2\rho)}{\theta^2(0)} - K\frac{\mathrm{H}^2(2\rho)}{\theta^2(0)}\,\mathrm{sn}^2(\overline{2n+1}\rho),$$

а вещественные периоды функции $\mathrm{sn}^2 u$ суть четные кратности числа K.

Мы получим тривиальный случай, если положим $\rho = -\frac{K}{2}$. В этом случае $\alpha = -\beta\ (\beta > 0)$, и ортогональные многочлены могут быть выражены через элементарные функции. Заметим лишь, что в этом случае из наших формул следует, что

$$\alpha_0 = \sqrt{\frac{1-\beta^2}{2}}, \quad \alpha_n = \frac{1}{2}\sqrt{1-\beta^2} \qquad (n \geqslant 1),$$

$$\beta_n = (-1)^n \beta \qquad (n \geqslant 1).$$

Но уже при $\rho = -\frac{K}{3}$ мы будем иметь случай нетривиальный и для элементов якобиевой матрицы получаются следующие выражения:

$$\alpha_0 = \sqrt{2}\,\tau\mu, \; \alpha_{3n-2} = \frac{\tau}{\mu^2}, \; \alpha_{3n-1} = \alpha_{3n} = \tau\mu$$

$$\beta_{3n-2} = \beta_{3n-1} = \tau\left(\frac{1}{\mu^2} + \mu^2\nu^2\right) - 1; \; \beta_{3n} = \frac{2\tau}{\nu^2} - 1,$$

где

$$\mu = \sqrt{\frac{\theta_1(0)}{\theta\left(\frac{K}{3}\right)}}; \; \nu = \sqrt{\frac{\theta(0)}{\theta_1\left(\frac{K}{3}\right)}}, \; \tau = \frac{1}{2}\mu^4\nu^4.$$

ГЛАВА 3

В этой главе мы будем заниматься ортогональными многочленами $T_n(x;\,t)$, $U_n(x;\,t)$ при весах

$$\frac{S(x)}{\sqrt{-R(x)}}\frac{dx}{t(x)} \text{ и } \frac{\sqrt{-R(x)}}{S(x)}\frac{dx}{t(x)},$$

где $t(x)$ уже не многочлен, а произвольная непрерывная функция, положительная при $x \in E$ и удовлетворяющая некоторым довольно общим условиям, о которых речь будет ниже.

Как и раньше, мы ограничимся многочленами $T_n(x;\,t)$ и поставим задачу получить для них, во-первых, оценки на множестве E и, во-вторых, асимптотические формулы при $n \to \infty$.

Для многочленов $U_n(x;\,t)$ мы сформулируем лишь окончательные результаты.

§ 1. Две вспомогательные теоремы о приближении многочленами

В теории аппроксимации известна следующая теорема, принадлежащая А. Ф. Тиману.

Пусть $t(x)$ определена на отрезке $[-1, 1]$ и имеет там непрерывную r-ую производную.

В таком случае при любом натуральном n существует многочлен $P_n(x)$ степени n такой, что

$$|t(x) - P_n(x)| \leqslant A_r \left\{\frac{\sqrt{1-x^2}}{n} + \frac{1}{n^2}\right\}^r \omega_r\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{n} + \frac{1}{n^2}\right),$$

где A_r зависит только от r, а $\omega_r(\delta)$ — модуль непрерывности $t^{(r)}(x)$.

В дальнейшем нам понадобится следующее более общее предложение, которое было недавно доказано Ю. Брудным [4].

Теорема 1. Пусть $t(x)$ — r раз непрерывно дифференцируемая функция на множестве E. В таком случае при любом n можно указать многочлен $P_n(x)$ степени n так, чтобы всюду в E имело место неравенство

$$|t(x)-P_n(x)| \leqslant A_r\left\{\frac{\sqrt{|R(x)|}}{n}+\frac{1}{n^2}\right\}^r \omega_r\left\{\frac{\sqrt{|R(x)|}}{n}+\frac{1}{n^2}\right\},$$

где A_r зависит только от r и множества E.

Второе предложение, которое также связано с теоремой Джексона, состоит в следующем.

Теорема 2. Пусть $t(x)$ $(x \in E)$ — положительная функция, имеющая производную порядка r с модулем непрерывности $\omega_r(\delta)$. В таком случае при любом $n \geqslant 2\rho$ можно построить многочлен $P_n(x)$ степени $\leqslant n$, принадлежащий тому же классу, что и $t(x)$, то есть удовлетворяющий равенствам

$$\int_E \frac{x^k \ln t(x)}{\sqrt{-R(x)}}\,dx = \int_E \frac{x^k \ln P_n(x)}{\sqrt{-R(x)}}\,dx \quad (k=0, 1, \ldots \rho-1)$$

и такой, что

$$\max_{x\in E}|t(x)-P_n(x)| \leqslant \frac{A_r}{n^r}\,\omega_r\left(\frac{1}{n}\right),$$

где A_r зависит только от r, E и $\max\limits_{x\in E} t(x)$

Доказательство. Прежде всего продолжим функцию $t(x)$ на весь интервал $[-1, 1]$ с сохранением ее дифференциальных свойств и при любом n построим многочлен $Q_n(x)$ степени $\leqslant n$, для которого

$$\max_{-1\leqslant x\leqslant 1}|t(x)-Q_n(x)| \leqslant \frac{B_r}{n^r}\,\omega_r\left(\frac{1}{n}\right),$$

что возможно по теореме Джексона. Затем займемся «исправлением» многочлена $Q_n(x)$. С этой целью построим многочлен

$$P_{n+2\rho-1}(x) = Q_n(x)\{1+[\varepsilon_0+\varepsilon_1 x+\ldots+\varepsilon_{\rho-1}x^{\rho-1}]\,S(x)\},$$

степень которого $< n+2\rho$, и рассмотрим следующую систему ρ уравнений относительно неизвестных ε_j:

$$\int_E \frac{x^k}{\sqrt{-R(x)}}\ln\{1+[\varepsilon_0+\varepsilon_1 x+\ldots+\varepsilon_{\rho-1}x^{\rho-1}]\,S(x)\}\,dx = \int_E \frac{x^k}{\sqrt{-R(x)}}\ln\frac{t(x)}{Q_n(x)}\,dx.$$
$$(k=0, 1, \ldots \rho-1).$$

Правые части этих уравнений будут величинами порядка $\frac{1}{n^r}\,\omega_r\left(\frac{1}{n}\right)$. Если мы докажем, что якобиан левых частей этих уравнений по ε_j не равен 0 при $\varepsilon_0=\varepsilon_1=\varepsilon_2=\ldots=\varepsilon_{\rho-1}=0$, то отсюда будет следовать, что при достаточно больших n наша система будет разрешима относительно ε_j, и ее решения будут удовлетворять неравенствам

$$|\varepsilon_j| < \frac{c}{n^r}\,\omega_r\left(\frac{1}{n}\right).$$

Таким образом, оказывается, что $P_{n+2\rho-1}(x)$ принадлежит тому же классу, что и $t(x)$, и, с другой стороны, что при $-1\leqslant x\leqslant 1$

$$|t(x)-P_{n+2\rho-1}(x)| \leqslant |t(x)-Q_n(x)| + |Q_n(x)[\varepsilon_0+\varepsilon_1 x+\ldots+$$
$$+\varepsilon_{\rho-1}x^{\rho-1}]S(x)| \leqslant \frac{B_r}{n^r}\,\omega_r\left(\frac{1}{n}\right)+\max_x|Q_n(x)|\cdot\rho\cdot\max_j|\varepsilon_j| <$$
$$\leqslant \frac{A_r^*}{n^r}\,\omega_r\left(\frac{1}{n}\right) < \frac{A_r}{(n+2\rho)^r}\,\omega_r\left(\frac{1}{n+2\rho}\right),$$

и наше утверждение будет доказано.

Остается рассмотреть указанный якобиан. Он равен

$$D=\begin{vmatrix} \int\limits_E \frac{S(x)}{\sqrt{-R(x)}}\,dx & \int\limits_E \frac{xS(x)}{\sqrt{-R(x)}}\,dx & \ldots & \int\limits_E \frac{x^{\rho-1}S(x)}{\sqrt{-R(x)}}\,dx \\ \int\limits_E \frac{xS(x)}{\sqrt{-R(x)}}\,dx & \int\limits_E \frac{x^2S(x)}{\sqrt{-R(x)}}\,dx & \ldots & \int\limits_E \frac{x^{\rho}S(x)}{\sqrt{-R(x)}}\,dx \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \int\limits_E \frac{x^{\rho-1}S(x)}{\sqrt{-R(x)}}\,dx & \int\limits_E \frac{x^{\rho}S(x)}{\sqrt{-R(x)}}\,dx & \ldots & \int\limits_E \frac{x^{2\rho-2}S(x)}{\sqrt{-R(x)}}\,dx \end{vmatrix}$$

Этот определитель действительно отличен от 0. В самом деле, если бы он равнялся 0, то между его строками существовала бы линейная зависимость, то есть нашлись бы не все равные нулю числа $A_0, A_1, \ldots A_{\rho-1}$ такие, что

$$\int\limits_E \frac{A(x)S(x)}{\sqrt{-R(x)}}\,dx=0;\quad \int\limits_E \frac{xA(x)S(x)}{\sqrt{-R(x)}}\,dx=0\ \ldots\ \int\limits_E \frac{x^{\rho-1}A(x)S(x)}{\sqrt{-R(x)}}\,dx=0,$$

где

$$A(x)=A_0+A_1x+A_2x^2+\ldots+A_{\rho-1}x^{\rho-1}.$$

Умножим первое из этих равенств на A_0, второе на A_1 и т. д. и сложим их. Тогда

$$\int\limits_E \frac{[A(x)]\,S(x)}{\sqrt{-R(x)}}\,dx=0.$$

Отсюда $A(x)\equiv 0$, что противоречит предположению.

Итак, $D\neq 0$, и теорема доказана.

§ 2. Первое неравенство для $T_n(x;t)$

В главе 2 мы получили неравенство

$$\left|\frac{\sqrt{S(x)}\,T_n(x;P)}{\sqrt{P(x)}\sqrt{N_n[P]}}\right|<C,$$

где C зависит только от множества E, $n\geqslant p$, а $x\in E$. В настоящем параграфе мы докажем, что аналогичное неравенство имеет место и для $T_n(x;t)$ при некоторых условиях, наложенных на функцию $t(x)$. А именно, справедлива следующая

Теорема. Если положительная функция $t(x)$ $(x\in E)$ непрерывно дифференцируема, то для всех достаточно больших n и любого $x\in E$

$$\left|\sqrt{S(x)}\,T_n(x;t)\right|\leqslant C\tau^n\sqrt{t(x)}\,\mathfrak{G}\left[\frac{1}{\sqrt{t(x)}}\right],$$

где C — константа, зависящая только от множества E.

(Число n, начиная с которого это неравенство будет выполняться, зависит от $t(x)$).

Доказательство. Рассмотрим разность

$$T_n(x;t)-T_n(x;P)\equiv D_n(x),$$

где $P(x)$ — произвольный положительный в E многочлен степени $\leqslant n$. Разложим $D_n(x)$ по многочленам $T_\nu(x;P)$:

$$D_n(x)=\sum_{\nu=0}^{n-1}\alpha_\nu T_\nu(x;P).$$

Так как

$$\alpha_\nu = \frac{1}{\pi N_\nu[P]} \int\limits_E T_n(\xi;\, t)\, T_\nu(\xi;\, P)\, \frac{S(\xi)}{\sqrt{-R(\xi)}}\, \frac{d\xi}{P(\xi)},$$

то

$$D_n(x) = \frac{1}{\pi} \int\limits_E T_n(\xi;\, t)\, \frac{S(\xi)}{\sqrt{-R(\xi)}} \left\{ \sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{T_\nu(\xi;\, P)\, T_\nu(x;\, P)}{N_\nu[P]} \right\} \frac{d\xi}{P(\xi)} =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int\limits_E T_n(\xi;\, t)\, \frac{S(\xi)}{\sqrt{-R(\xi)}} \left\{ \sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{T_\nu(\xi;\, P)\, T_\nu(x;\, P)}{N_\nu[P]} \right\} \left\{ \frac{1}{P(\xi)} - \frac{1}{t(\xi)} \right\} d\xi +$$

$$+ \frac{1}{\pi} \int\limits_E T_n(\xi;\, t)\, \frac{S(\xi)}{\sqrt{-R(\xi)}} \left\{ \sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{T_\nu(\xi;\, P)\, T_\nu(x;\, P)}{N_\nu[P]} \right\} \frac{d\xi}{t(\xi)}.$$

В силу соотношений ортогональности последний интеграл равен 0, и по формуле Кристофеля—Дарбу получаем

$$D_n(x) = \int\limits_E T_n(\xi;\, t)\, \frac{K_n(x,\, \xi)}{x-\xi} \left[\frac{1}{P(\xi)} - \frac{1}{t(\xi)} \right] \frac{S(\xi)}{\sqrt{-R(\xi)}}\, d\xi.$$

Как было показано в главе 2, при $x \in E$ справедливо неравенство

$$\left| \sqrt{S(x)}\, T_n(x;\, P) \right| < C \sqrt{P(x)} \sqrt{N_n[P]},$$

где C зависит только от E. Теперь введем величину

$$U_n = \max_{x \in E} \left| \frac{\sqrt{S(x)}\, T_n(x;\, t)}{\sqrt{t(x)}\, \tau^n} \right|$$

и примем в качестве $P(x)$ многочлен степени n, который удовлетворяет всюду в E неравенству

$$|t(x) - P(x)| \leqslant A \left\{ \frac{\sqrt{|R(x)|}}{n} + \frac{1}{n^2} \right\} \omega_1\left(\frac{1}{n}\right).$$

Его существование вытекает из теоремы 1 предыдущего параграфа. Число n будем считать достаточно большим, так что $P(x)$ будет положителен при $x \in E$. Из неравенства

$$\left| \sqrt{S(x)}\, T_n(x;\, t) \right| \leqslant \left| \sqrt{S(x)}\, T_n(x;\, P) \right| +$$

$$+ \int\limits_E \left| T_n(\xi; t) \sqrt{S(\xi)} \right| \left| \frac{K_n(x,\, \xi) \sqrt{S(x)} \sqrt{S(\xi)}}{x-\xi} \right| \left| \frac{1}{P(\xi)} - \frac{1}{t(\xi)} \right| \frac{d\xi}{\left| \sqrt{R(\xi)} \right|}$$

мы получим, что

$$\left| \frac{\sqrt{S(x)}\, T_n(x;\, t)}{\sqrt{t(x)}\, \tau^n} \right| \leqslant C\, \frac{\sqrt{N_n[P]}}{\tau^n} \max \sqrt{\frac{P(x)}{t(x)}} + U_n J,$$

где

$$J = \int\limits_E \left| \frac{K_n(x,\, \xi) \sqrt{S(x)} \sqrt{S(\xi)}}{x-\xi} \right| \frac{|t(\xi) - P(\xi)|}{P(\xi) \sqrt{t(\xi)} \sqrt{t(x)}}\, \frac{d\xi}{\left| \sqrt{R(\xi)} \right|} \leqslant$$

$$\leqslant A\, \frac{\omega_1\left(\frac{1}{n}\right)}{n} \left(J_1 + \frac{1}{n} J_2 \right),$$

причем

$$J_1 = \int\limits_E \left| \frac{K_n(x,\, \xi) \sqrt{S(x)} \sqrt{S(\xi)}}{x-\xi} \right| \frac{d\xi}{P(\xi) \sqrt{t(\xi)} \sqrt{t(x)}}$$

$$J_2 = \int\limits_E \left| \frac{K_n(x,\, \xi) \sqrt{S(x)} \sqrt{S(\xi)}}{x-\xi} \right| \frac{d\xi}{P(\xi) \sqrt{t(\xi)} \sqrt{t(x)} \left| \sqrt{R(\xi)} \right|}.$$

Примем для определенности, что

$$\max_E \left| \frac{\sqrt{S(x)}\, T_n(x;\, t)}{\sqrt{t(x)}\, \tau^n} \right|$$

достигается в интеграле $[\beta_k, \alpha_{k+1}]$ и ближе к левому концу. В таком случае мы можем принять при оценке интегралов I_1 и I_2, что

$$\beta_k \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}(\beta_k + \alpha_{k+1}).$$

Рассмотрим сначала случай, когда

$$\beta_k + \frac{1}{n^2} < x.$$

Разобьем множество E на четыре части, из которых первыми тремя являются интервалы $\left(\beta_k,\ x - \frac{1}{n^2}\right)$, $\left(x - \frac{1}{n^2},\ x + \frac{1}{n^2}\right)$, $\left(x + \frac{1}{n^2},\ \frac{\beta_k + 2\alpha_{k+1}}{3}\right)$, а четвертая часть, которую обозначим E', есть все остальное. Оценим каждый из полученных при этом восьми интегралов:

$$J_1' = \int_{\beta_k}^{x-\frac{1}{n^2}} \left| \frac{K_n(x,\xi)\sqrt{S(x)}\sqrt{S(\xi)}}{x-\xi} \right| \frac{d\xi}{P(\xi)\sqrt{t(\xi)}\sqrt{t(x)}} \leqslant$$

$$\leqslant C \int_{\beta_k}^{x-\frac{1}{n^2}} \frac{\sqrt{P(\xi)}\sqrt{P(x)}\, d\xi}{(x-\xi)P(\xi)\sqrt{t(\xi)}\sqrt{t(x)}} \leqslant B_1 \int_{\beta_k}^{x-\frac{1}{n^2}} \frac{d\xi}{x-\xi} = B_1[2\ln n + \ln(x-\beta_k)] \leqslant$$

$$\leqslant 2B_1 \ln n,$$

так как $x - \beta_k < 1$;

$$J_1'' = \int_{x-\frac{1}{n^2}}^{x+\frac{1}{n^2}} \left| \frac{K_n(x,\xi)\sqrt{S(x)}\sqrt{S(\xi)}}{x-\xi} \right| \frac{d\xi}{P(\xi)\sqrt{t(\xi)}\sqrt{t(x)}} \leqslant$$

$$\leqslant C \int_{x-\frac{1}{n^2}}^{x+\frac{1}{n^2}} \frac{n^3\sqrt{S(x)}\,(\max P(\xi))}{P(\xi)\sqrt{t(\xi)}\sqrt{t(x)}} \leqslant B_2 n.$$

(При оценке мы пользовались неравенством, полученным в параграфе 4 предыдущей главы).

$$J_1''' = \int_{x+\frac{1}{n^2}}^{\frac{\beta_k+2\alpha_{k+1}}{3}} \left| \frac{K_n(x,\xi)\sqrt{S(x)}\sqrt{S(\xi)}}{x-\xi} \right| \frac{d\xi}{P(\xi)\sqrt{t(\xi)}\sqrt{t(x)}} \leqslant$$

$$\leqslant C \int_{x+\frac{1}{n^2}}^{\frac{\beta_k+2\alpha_{k+1}}{3}} \frac{\sqrt{P(\xi)}\sqrt{P(x)}}{\xi - x} \frac{d\xi}{P(\varepsilon)\sqrt{t(\xi)}\sqrt{t(x)}} \leqslant B_3 \int_{x+\frac{1}{n^2}}^{\frac{\beta_k+2\alpha_{k+1}}{3}} \frac{d\xi}{\xi - x} \leqslant$$

$$\leqslant B_3[2\ln n + \ln(\alpha_{k+1} - x)] \leqslant 3B_3 \ln n,$$

так как $\alpha_{k+1} - x < 2$

$$J_1'''' = \int_{E'} \left| \frac{K_n(x,\xi)\sqrt{S(x)}\sqrt{S(\xi)}}{x-\xi} \right| \frac{d\xi}{P(\xi)\sqrt{t(\xi)}\sqrt{t(x)}} \leqslant B_4.$$

Окончательно, $J_1 \leqslant Bn$. Далее имеем

$$J_2' = \int\limits_{\beta_k}^{x-\frac{1}{n^2}} \left| \frac{K_n(x, \xi)\sqrt{S(x)}\sqrt{S(\xi)}}{x-\xi} \right| \frac{d\xi}{P(\xi)\sqrt{t(\xi)}\sqrt{t(x)}\,|\sqrt{R(\xi)}|} \leqslant$$

$$\leqslant C \int\limits_{\beta_k}^{x-\frac{1}{n^2}} \frac{\sqrt{P(x)}\sqrt{P(\xi)}}{x-\xi} \frac{d\xi}{P(\xi)\sqrt{t(\xi)}\sqrt{t(x)}\,|\sqrt{R(\xi)}|} \leqslant B_5 \int\limits_{\beta_k}^{x-\frac{1}{n^2}} \frac{d\xi}{(x-\xi)\sqrt{\xi-\beta_k}} =$$

$$= \frac{B_5}{\sqrt{x-\beta_k}} \ln \left| \frac{\sqrt{x-\beta_k} + \sqrt{x-\beta_k-\frac{1}{n^2}}}{\sqrt{x-\beta_k} - \sqrt{x-\beta_k-\frac{1}{n^2}}} \right| =$$

$$= \frac{2B_5}{\sqrt{x-\beta_k}} \ln n \left(\sqrt{x-\beta_k} + \sqrt{x-\beta_k+\frac{1}{n^2}}\right) \leqslant$$

$$\leqslant 2B_5 n \ln\left(\sqrt{n^2(x-\beta_k)} + \sqrt{n^2(x-\beta_k)-1}\right).$$

Но в силу нашего условия справедливо неравенство

$$0 < \ln\left[\sqrt{n^2(x-\beta_k)} + \sqrt{n^2(x-\beta_k)-1}\right] < \ln\left(n + \sqrt{n^2-1}\right) < \ln 2n.$$

Значит,

$$J_2' \leqslant B_6 n \ln n.$$

Далее

$$J_2'' = \int\limits_{x-\frac{1}{n^2}}^{x+\frac{1}{n^2}} \left| \frac{K_n(x, \xi)\sqrt{S(x)}\sqrt{S(\xi)}}{x-\xi} \right| \frac{d\xi}{P(\xi)\sqrt{t(\xi)}\sqrt{t(x)}\,|\sqrt{R(\xi)}|} \leqslant$$

$$\leqslant B_7 n^3 \int\limits_{x-\frac{1}{n^2}}^{x+\frac{1}{n^2}} \frac{d\xi}{\sqrt{\xi-\beta_k}} = \frac{B_7 n^3}{2} \left\{ \sqrt{x-\beta_k+\frac{1}{n^2}} - \sqrt{x-\beta_k-\frac{1}{n^2}} \right\} =$$

$$= B_7 n \frac{1}{\sqrt{x-\beta_k+\frac{1}{n^2}} + \sqrt{x-\beta_k-\frac{1}{n^2}}} \leqslant B_7 n^2.$$

$$J_2''' = \int\limits_{x+\frac{1}{n^2}}^{\frac{\beta_k+2\alpha_{k+1}}{3}} \left| \frac{K_n(x, \xi)\sqrt{S(x)}\sqrt{S(\xi)}}{x-\xi} \right| \frac{d\xi}{P(\xi)\sqrt{t(\xi)}\sqrt{t(x)}\,|\sqrt{R(\xi)}|} \leqslant$$

$$\leqslant B_8 \int\limits_{x+\frac{1}{n^2}}^{\frac{\beta_k+2\alpha_{k+1}}{3}} \frac{d\xi}{(\xi-x)\sqrt{\xi-\beta_k}} \leqslant B_9 n \ln n.$$

$$J_2'''' = \int\limits_{E'} \left| \frac{K_n(x;\, \xi)\sqrt{S(x)}\sqrt{S(\xi)}}{x-\xi} \right| \frac{d\xi}{P(\xi)\sqrt{t(\xi)}\sqrt{t(x)}\,|\sqrt{R(\xi)}|} < B_{10}.$$

Окончательно, $J_2 < Bn^2$.

Итак, при $\beta_k + \frac{1}{n^2} < x$ справедлива оценка

$$J \leqslant D\omega_1\left(\frac{1}{n}\right),$$

где D зависит только от E и функции $t(x)$.

Теперь рассмотрим второй случай, а именно:

$$x \leqslant \beta_k + \frac{1}{n^2}.$$

Разобьем множество E на 3 части, из которых первыми двумя являются $\left(\beta_k,\ x+\frac{1}{n^2}\right)$, $\left(x+\frac{1}{n^2},\ \frac{\beta_k+2\alpha_{k+1}}{3}\right)$, а третью часть назовем E'. Тогда, очевидно, интеграл по E' меньше некоторой константы. Остается оценить 4 интеграла:

$$J_1' = \int\limits_{\beta_k}^{x+\frac{1}{n^2}} \left|\frac{K_n(x,\xi)\sqrt{S(x)}\sqrt{S(\xi)}}{x-\xi}\right| \frac{d\xi}{P(\xi)\sqrt{t(\xi)}\sqrt{t(x)}} \leqslant D_1 n^3 \int\limits_{\beta_k}^{x+\frac{1}{n^2}} d\xi \leqslant 2D_1 n_1.$$

$$J_1'' = \int\limits_{x+\frac{1}{n^2}}^{\frac{\beta_k+2\alpha_{k+1}}{3}} \left|\frac{K_n(x,\xi)\sqrt{S(x)}\sqrt{S(\xi)}}{x-\xi}\right| \frac{d\xi}{P(\xi)\sqrt{t(\xi)}\sqrt{t(x)}} \leqslant$$

$$\leqslant D_2 \int\limits_{x+\frac{1}{n^2}}^{\frac{\beta_k+2\alpha_{k+1}}{3}} \frac{d\xi}{\xi-x} \leqslant 2D_2(\ln n+1).$$

Поэтому

$$J_1 \leqslant \mathrm{E}n.$$

Далее

$$J_2' = \int\limits_{\beta_k}^{x+\frac{1}{n^2}} \left|\frac{K_n(x,\xi)\sqrt{S(x)}\sqrt{S(\xi)}}{x-\xi}\right| \frac{d\xi}{P(\xi)\sqrt{t(\xi)}\sqrt{t(x)}\,|\sqrt{R(\xi)}|} \leqslant$$

$$\leqslant \mathrm{E}_1 n^3 \int\limits_{\beta_k}^{x+\frac{1}{n^2}} \frac{d\xi}{\sqrt{\xi-\beta_k}} = \frac{\mathrm{E}_1 n^3}{2}\sqrt{x-\beta_k+\frac{1}{n^2}} < \mathrm{E}_1 n^2;$$

$$J_2'' = \int\limits_{x+\frac{1}{n^2}}^{\frac{\beta_k+2\alpha_{k+1}}{3}} \left|\frac{K_n(x,\xi)\sqrt{S(x)}\sqrt{S(\xi)}}{x-\xi}\right| \frac{d\xi}{P(\xi)\sqrt{t(\xi)}\sqrt{t(x)}\,|\sqrt{R(\xi)}|} \leqslant$$

$$\leqslant \mathrm{E}_2 \int\limits_{x+\frac{1}{n^2}}^{\frac{\beta_k+2\alpha_{k+1}}{3}} \frac{d\xi}{\sqrt{\xi-\beta_k}\,(\xi-x)} \leqslant \mathrm{E}_3 n \ln n.$$

Окончательно,

$$J_2 \leqslant \mathrm{E}n^2$$

и, значит, в случае $x \leqslant \beta_k + \frac{1}{n^2}$ также справедлива оценка

$$J \leqslant D\omega_1\left(\frac{1}{n}\right).$$

Таким образом, мы доказали, что

$$U_n \leqslant C\,\frac{\sqrt{N_n[P]}}{\tau^n} \max \sqrt{\frac{P(x)}{t(x)}} + DU_n\omega_1\left(\frac{1}{n}\right).$$

Отсюда следует, что при достаточно большом n

$$U_n \leqslant C\mathfrak{S}\left[\frac{1}{\sqrt{t(x)}}\right],$$

где C зависит только от E, что эквивалентно доказываемому неравенству.

§ 3. Второе неравенство для $T_n(x; t)$

Пусть $t(x)$ $(x \in E)$ — положительная непрерывно дифференцируемая функция, и пусть при любом $n \geqslant n_0$ существует многочлен $P_n(x)$ такой, что всюду в E

$$\left|1 - \frac{P_n(x)}{t(x)}\right| \leqslant \left[\frac{\sqrt{|R(x)|}}{n} + \frac{1}{n^2}\right]\varepsilon_n.$$

В таком случае для всех достаточно больших n всюду в E выполняется неравенство

$$|T_n(x; t) - T_n(x; P_n)| \leqslant A\varepsilon_n \sqrt{P_n(x)}\sqrt{N_n[P_n]}\ln n,$$

где A зависит лишь от множества E.

Для доказательства возьмем равенство

$$T_n(x; t) = T_n(x; P_n) + \int_E T_n(\xi, t)\frac{\sqrt{S(\xi)}}{\sqrt{-R(\xi)}}\left[\frac{1}{P_n(\xi)} - \frac{1}{t(\xi)}\right]\frac{K_n(x, \xi)\sqrt{S(\xi)}}{x-\xi}\,d\xi$$

и займемся оценкой величины

$$J = \int_E T_n(\xi; t)\sqrt{S(\xi)}\left[\frac{1}{P_n(\xi)} - \frac{1}{t(\xi)}\right]\frac{K_n(x, \xi)\sqrt{S(\xi)}}{x-\xi}\,\frac{d\xi}{\sqrt{-R(\xi)}}.$$

Используя неравенство

$$\left|T_n(\xi; t)\sqrt{S(\xi)}\right| \leqslant C\tau^n\mathfrak{S}\left[\frac{1}{\sqrt{t(\xi)}}\right]\sqrt{t(\xi)},$$

которое выполняется при условиях теоремы, находим, что

$$|J| \leqslant C\tau^n\mathfrak{S}\left[\frac{1}{\sqrt{t(\xi)}}\right]\frac{\varepsilon_n}{n}\left[J_1 + \frac{J_2}{n}\right],$$

где

$$J_1 = \int_E \sqrt{t(\xi)}\left|\frac{K_n(x, \xi)\sqrt{S(\xi)}}{x-\xi}\right|\frac{d\xi}{P_n(\xi)},$$

$$J_2 = \int_E \sqrt{t(\xi)}\left|\frac{K_n(x, \xi)\sqrt{S(\xi)}}{x-\xi}\right|\frac{d\xi}{P_n(\xi)\,|\sqrt{R(\xi)}|}.$$

Оценим J_1.

Разобьем множество E на 2 части: $E' = E \cap \left(x - \frac{1}{n^2},\ x + \frac{1}{n^2}\right)$ и $E'' = E - E'$. Тогда воспользовавшись результатами параграфа 4 предыдущей главы получим следующие неравенства:

$$J_1' = \int_{E'} \sqrt{t(\xi)}\left|\frac{K_n(x, \xi)\sqrt{S(\xi)}}{x-\xi}\right|\frac{d\xi}{P_n(\xi)} \leqslant Cn^3 \max_{x \in E'} P_n(x)\int_{E'} \sqrt{t(\xi)}\frac{d\xi}{P_n(\xi)} \leqslant Bn,$$

где B зависит от E и от функции $t(x)$,

$$J_1'' = \int_{E''} \sqrt{t(\xi)}\left|\frac{K_n(x, \xi)\sqrt{S(\xi)}}{x-\xi}\right|\frac{d\xi}{P_n(\xi)} \leqslant C_1 n\int_{E''} \sqrt{t(\xi)}\sqrt{P_n(x)}\,\frac{d\xi}{\sqrt{P_n(\xi)}} \leqslant$$

$$\leqslant C_2 n \ln n\sqrt{P_n(x)}.$$

Из них следует, что

$$J_1 \leqslant C\sqrt{P_n(x)}\, n \ln n,$$

где C зависит только от множества E.

Остаётся оценить

$$J_2 = \int\limits_E \sqrt{t(\xi)} \left| \frac{K_n(x, \xi)\sqrt{S(\xi)}}{x-\xi} \right| \frac{d\xi}{P_n(\xi)\,|\sqrt{R(\xi)}|}.$$

Примем для определенности, что точка x лежит в интервале $[\beta_k, \alpha_{k+1}]$ и ближе к левому концу. Рассмотрим сначала случай, когда

$$\beta_k + \frac{1}{n^2} < x.$$

Разобьем множество E на 4 части $\left(\beta_k, x - \frac{1}{n^2}\right)$, $\left(x - \frac{1}{n^2}, x + \frac{1}{n^2}\right)$, $\left(x + \frac{1}{n^2}, \frac{\beta_k + 2\alpha_{k+1}}{3}\right)$ и E''' (все остальное). Оценим каждый из полученных при этом восьми интегралов:

$$J_2' = \int\limits_{\beta_k}^{x-\frac{1}{n^2}} \sqrt{t(\xi)} \left| \frac{K_n(x, \xi)\sqrt{S(\xi)}}{x-\xi} \right| \frac{d\xi}{P_n(\xi)\,|\sqrt{R(\xi)}|} \leqslant$$

$$\leqslant C_1 n\sqrt{P_n(x)} \int\limits_{\beta_k}^{x-\frac{1}{n^2}} \frac{\sqrt{t(\xi)}}{\sqrt{P_n(\xi)}} \frac{d\xi}{(x-\xi)\sqrt{\xi-\beta_k}} \leqslant C_2 n^2 \sqrt{P_n(x)} \ln n$$

$$J_2'' = \int\limits_{x-\frac{1}{n^2}}^{x+\frac{1}{n^2}} \sqrt{t(\xi)} \left| \frac{K_n(x, \xi)\sqrt{S(\xi)}}{x-\xi} \right| \frac{d\xi}{P_n(\xi)\,|\sqrt{R(\xi)}|} \leqslant$$

$$\leqslant C_3 n^3 \max_E P_n(x) \int\limits_{x-\frac{1}{n^2}}^{x+\frac{1}{n^2}} \frac{\sqrt{t(\xi)}}{P_n(\xi)} \frac{d\xi}{|\sqrt{R(\xi)}|} \leqslant B_1 n^3 \int\limits_{x-\frac{1}{n^2}}^{x+\frac{1}{n^2}} \frac{d\xi}{\sqrt{\xi-\beta_k}} \leqslant B_1 n^2,$$

где B_1 зависит от множества и от функции $t(x)$;

$$J_2''' = \int\limits_{x+\frac{1}{n^2}}^{\frac{\beta_k+2\alpha_{k+1}}{3}} \sqrt{t(\xi)} \left| \frac{K_n(x, \xi)\sqrt{S(\xi)}}{x-\xi} \right| \frac{d\xi}{P_n(\xi)\,|\sqrt{R(\xi)}|} \leqslant$$

$$\leqslant C_1 n\sqrt{P_n(x)} \int\limits_{x+\frac{1}{n^2}}^{\frac{\beta_k+2\alpha_{k+1}}{3}} \frac{\sqrt{t(\xi)}}{\sqrt{P_n(\xi)}} \frac{d\xi}{(\xi-x)\sqrt{\xi-\beta_k}} \leqslant C_2 n^2 \ln n \sqrt{P_n(x)}$$

$$J_2'''' = \int\limits_{E'''} \sqrt{t(\xi)} \left| \frac{K_n(x, \xi)\sqrt{S(\xi)}}{x-\xi} \right| \frac{d\xi}{P_n(\xi)\,|\sqrt{R(\xi)}|} \leqslant$$

$$\leqslant C_1 n \int\limits_{E'} \sqrt{\frac{t(\xi)}{P_n(\xi)}} \sqrt{P_n(x)} \frac{d\xi}{d\,|\sqrt{R(\xi)}|} \leqslant C_2 n \sqrt{P_n(x)},$$

где $d = \frac{\alpha_{k+1} - \beta_k}{6}$.

Окончательно, в этом случае имеем

$$J_2 \leqslant A\sqrt{P_n(x)}\, n^2 \ln n,$$

где A зависит только от E.

Теперь рассмотрим случай, когда

$$x \leqslant \beta_k + \frac{1}{n^2}.$$

Разобьем множество E на 3 части $\left(\beta_k,\ x+\frac{1}{n^2}\right)$, $\left(x+\frac{1}{n^2},\ \frac{\beta_k+2\alpha_{k+1}}{3}\right)$ и E'''. Оценим каждый из полученных при этом трех интегралов:

$$J_2' = \int\limits_{\beta_k}^{x+\frac{1}{n^2}} \sqrt{t(\xi)} \left|\frac{K_n(x,\xi)\sqrt{S(\xi)}}{x-\xi}\right| \frac{d\xi}{P_n(\xi)\,|\sqrt{R(\xi)}|} \leqslant$$

$$\leqslant C_1 n^3 \max_E P_n(x) \int\limits_{\beta_k}^{x+\frac{1}{n^2}} \frac{\sqrt{t(\xi)}}{P_n(\xi)} \frac{d\xi}{|\sqrt{R(\xi)}|} \leqslant B_1 n^2,$$

где B_1 зависит от множества E и $t(x)$;

$$J_2'' = \int\limits_{x+\frac{1}{n^2}}^{\frac{\beta_k+2\alpha_{k+1}}{3}} \sqrt{t(\xi)} \left|\frac{K_n(x,\xi)\sqrt{S(\xi)}}{x-\xi}\right| \frac{d\xi}{P_n(\xi)\,|\sqrt{R(\xi)}|} \leqslant$$

$$\leqslant C_2 n \int\limits_{x+\frac{1}{n^2}}^{\frac{\beta_k+2\alpha_{k+1}}{3}} \frac{\sqrt{P_n(x)}\,d\xi}{(\xi-x)\sqrt{\xi-\beta_k}} \leqslant C_3 n^2 \ln n \sqrt{P_n(x)}.$$

$$J_2''' = \int\limits_{E'''} \sqrt{t(\xi)} \left|\frac{K_n(x,\xi)\sqrt{S(\xi)}}{x-\xi}\right| \frac{d\xi}{P_n(\xi)\,|\sqrt{R(\xi)}|} \leqslant$$

$$\leqslant C_1 n \sqrt{P_n(x)} \int\limits_{E'''} \sqrt{\frac{t(\xi)}{P_n(\xi)}}\, \frac{1}{d}\, \frac{d\xi}{|\sqrt{R(\xi)}|} \leqslant C_2 n \sqrt{P_n(x)}.$$

Итак, и в этом случае $J_2 \leqslant A\sqrt{P_n(x)}\, n^2 \ln n$, где A зависит только от E.

Используя эти оценки, получаем, что

$$|J| \leqslant A\tau^n \mathfrak{S}\left[\frac{1}{\sqrt{t(\xi)}}\right] \sqrt{P_n(x)}\,\varepsilon_n \ln n,$$

что и требовалось доказать.

§ 4. Асимптотическая формула для $T_n(x, t)$ на множестве E

Пусть положительная функция $t(x)$ $(x \in E)$ имеет непрерывную вторую производную, модуль непрерывности которой удовлетворяет условию

$$\lim_{n\to\infty} \omega_2\left(\frac{1}{n}\right) \ln n = 0.$$

Пусть $P(x)$ — какой-нибудь многочлен, положительный при $x \in E$ и того же класса, что и $t(x)$.

Тогда при $n \to \infty$ справедливо равномерно на E асимптотическое равенство

$$\frac{T_n(x;\,t)}{\sqrt{t(x)}\sqrt{N_n^*[t]}} \sim \frac{1}{\sqrt{P(x)}\sqrt{N_n[P]}}\Big\{T_n(x;\,P)\cos\Psi(x) - \\ - \frac{\sqrt{-R(x)}}{S(x)}U_{n-1}(x;\,P)\sin\Psi(x)\Big\},$$

где

$$N_n^*[t] = N_n[P]\,\mathfrak{G}\left[\frac{P(x)}{t(x)}\right],$$

а $\Psi(x)$ определяется формулой

$$\Psi(x) = \frac{1}{2\pi}\int_E' \frac{\sqrt{-R(x)}}{\sqrt{-R(\xi)}}\,\frac{\ln\frac{t(\xi)}{P(\xi)}}{x-\xi}\,d\xi.$$

Действительно, так как $t(x)$ имеет непрерывную вторую производную, то по теореме 2 параграфа 1 настоящей главы можно при любом $n \geqslant 2\rho$ построить многочлен $P_n(x)$ степени $\leqslant n$, принадлежащий тому же классу, что и $t(x)$, и такой, что

$$\max_{x\in E}|t(x) - P(x)| \leqslant \frac{A_2}{n^2}\,\omega_2\left(\frac{1}{n}\right).$$

Построим последовательность $P_n(x)$, удовлетворяющих этим условиям. По теореме предыдущего параграфа отсюда следует, что при достаточно больших n

$$\left|\frac{T_n(x;\,t)}{\sqrt{P_n(x)}\sqrt{N_n[P_n]}} - \frac{T_n(x;\,P_n)}{\sqrt{P_n(x)}\sqrt{N_n[P_n]}}\right| < A\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\ln n = \delta_n, \tag{8}$$

где в силу условия $\delta_n \to 0$ при $n \to \infty$.

По теореме параграфа 2 главы 2

$$T_n(z;\,P_n) = \frac{1}{2}\,\mathfrak{G}\left[\sqrt{\frac{P(x)}{P_n(x)}}\right]\sqrt{\frac{P_n(z)}{P(z)}}\Big\{T_n(z;\,P)\Big[\Phi\Big(z;\sqrt{\frac{P_n(x)}{P(x)}}\Big)\sqrt{\frac{P(z)}{P_n(z)}} + \\ + \Phi\Big(z;\sqrt{\frac{P(x)}{P_n(x)}}\Big)\sqrt{\frac{P_n(z)}{P(z)}}\Big] + \frac{\sqrt{R(z)}}{S(z)}U_{n-1}(z;\,P)\Big[\Phi\Big(z;\sqrt{\frac{P_n(x)}{P(x)}}\Big)\sqrt{\frac{P(z)}{P_n(z)}} - \\ - \Phi\Big(z;\sqrt{\frac{P(x)}{P_n(x)}}\Big)\sqrt{\frac{P_n(z)}{P(z)}}\Big]\Big\},$$

если $P(x)$ из того же класса, что и $P_n(x)$, а следовательно, и $t(x)$.

На множестве E справедливо равенство $|\Phi(z;\,f)| = f$, а потому, полагая

$$\Psi_{P_n}(x) = \frac{1}{2\pi}\int_E' \frac{\sqrt{-R(x)}}{\sqrt{-R(\xi)}}\,\frac{\ln\frac{P_n(\xi)}{P(\xi)}}{x-\xi}\,d\xi = \arg\Phi,$$

получим

$$T_n(x;\,P_n) = \mathfrak{G}\left[\sqrt{\frac{P(x)}{P_n(x)}}\right]\sqrt{\frac{P_n(x)}{P(x)}}\Big\{T_n(x;\,P)\cos\Psi_{P_n}(x) - \\ - \frac{\sqrt{-R(x)}}{S(x)}U_{n-1}(x;\,P)\sin\Psi_{P_n}(x)\Big\}. \tag{9}$$

Если учесть, что $P_n(x) \to t(x)$, а $\Psi_{P_n}(x) \to \Psi(x)$, то из (8) и (9) следует теорема.

§ 5. Асимптотическая формула для внешности отрезка $[-1, 1]$

Естественно поставить вопрос об асимптотике для ортогональных многочленов вне множества E. Некоторые трудности возникают при нахождении асимптотики в пустых интервалах, и мы в настоящей работе на этом случае не остановимся, а ограничимся лишь внешностью всего отрезка $[-1, 1]$. Мы выведем асимптотику, равномерную вне каждого овала, содержащего этот отрезок. Естественно ожидать, что здесь предположения относительно $t(x)$ не должны быть столь жесткими, как при выводе асимптотики на множестве E. И действительно, справедлива следующая

Теорема. Если функция $t(x)$ положительна на множестве E и удовлетворяет условию Липшица порядка $\geqslant \frac{1}{2}$*, то имеет место равномерно вне всякого овала, содержащего отрезок $[-1, 1]$, асимптотическое равенство **

$$T_n(z; t) \sim T_n(z; P)\, \mathfrak{G}\left[\sqrt{\frac{P(x)}{t(x)}}\right] \Phi\left(z; \sqrt{\frac{t(x)}{P(x)}}\right),$$

где $P(x)$ любой многочлен того же класса, что и $t(x)$.

Доказательство. Пусть $P_n(x)$ — многочлен степени n того же класса, что и $t(x)$ и наилучшим образом аппроксимирующий $t(x)$. Так как (см. параграф 2)

$$T_n(x; t) = T_n(x; P_n) + D_n(x),$$

то

$$\| T_n(x; t) \|_{L_t^2} \leqslant \| T_n(x; P_n) \|_{L_t^2} + \| D_n(x) \|_{L_t^2}.$$

Оценим каждое слагаемое правой части.

$$\| T_n(x; P_n) \|_{L_t^2} = \sqrt{\int_E [T_n(x; P_n)]^2 \frac{S(x)}{\sqrt{-R(x)}} \frac{dx}{t(x)}} \leqslant$$

$$\leqslant C \sqrt{\int_E [T_n(x; P)]^2 \frac{S(x)}{\sqrt{-R(x)}} \frac{dx}{P(x)}} \leqslant C\mathfrak{G}\left[\frac{1}{\sqrt{P_n(x)}}\right] \tau^n.$$

Используя выражение для $D_n(x)$, полученное в параграфе 2 настоящей главы, имеем

$$\| D_n(x) \|_{L_t^2} = \sqrt{\int_E \frac{S(x)}{\sqrt{-R(x)}} \frac{dx}{t(x)} \left| \int_E T_n(\xi; t) \frac{K_n(x, \xi)}{x - \xi} \left[\frac{1}{P_n(\xi)} - \frac{1}{t(\xi)}\right] \frac{S(\xi)}{\sqrt{-R(\xi)}} d\xi \right|^2}.$$

Применяя неравенство Коши—Буняковского к внутреннему интегралу, получаем

$$\| D_n(x) \|_{L_t^2} = \| T_n(x; t) \|_{L_t^2} \times$$

$$\times \sqrt{\iint_{EE} \left[\frac{K_n(x, \xi)}{x - \xi}\right]^2 \frac{S(x)}{\sqrt{-R(x)}} \frac{S(\xi)}{\sqrt{-R(\xi)}} \frac{dx d\xi}{t(\xi)\, t(x)\, P_n^2 \xi} \cdot \frac{K}{n^{\frac{1}{2}+\epsilon}}}.$$

Так как

$$\iint_{EE} \left[\frac{K_n(x, \xi)}{x - \xi}\right]^2 \frac{S(x)}{\sqrt{-R(x)}} \frac{S(\xi)}{\sqrt{-R(\xi)}} \frac{dx}{P_n(x)} \frac{d\xi}{P_n(\xi)} = n,$$

---

* Условия, наложенные на $t(x)$, являются лишь достаточными, но далеко не необходимыми.

** В отличие от предыдущего параграфа здесь не разность между левой и правой частью стремится к нулю, а их отношение стремится к единице.

го

$$\| D_n(x) \|_{L_t^2} \leqslant C \| T_n(x; t) \|_{L^2} \cdot \frac{1}{n^{\varepsilon}},$$

откуда следует, что

$$\| T_n(x; t) \| \leqslant A\tau^n,$$

где A зависит от множества E и функции $t(x)$. Докажем теперь, что $\left| \frac{T_n(z; t)}{T_n(z; P_n)} - 1 \right| < \varepsilon_n$, при z, лежащем вне овала, охватывающего отрезок $[-1,1]$, а $\varepsilon_n \to 0$ при $n \to \infty$. Действительно, вне овала

$$\left| \frac{T_{n-1}(z; P_n)}{T_n(z; P_n)} \right| < K,$$

так как все нули знаменателя лежат на отрезке $[-1,1]$, и на ∞ это выражение обращается в 0. Отсюда следует, что при $x \in E$

$$\left| \frac{K_n(z; x)}{T_n(z; P_n)} \right| = \left| \frac{1}{\pi N_{n-1}[P_n]} \left\{ T_{n-1}(x; P_n) - T_n(x; P_n) \frac{T_{n-1}(z; P_n)}{T_n(z; P_n)} \right\} \right| \leqslant \frac{M}{\tau^{n-1}},$$

где M зависит от E и $t(x)$. Наконец, при $n \to \infty$

$$\left| \frac{T_n(z; t)}{T_n(z; P_n)} - 1 \right| = \left| \int_E T_n(x; t) \frac{K_n(z; x)}{z - x} \frac{1}{T_n(z; P_n)} \left[\frac{1}{P_n(x)} - \frac{1}{t(x)} \right] \frac{S(x)}{\sqrt{-R(x)}} dx \right| \leqslant$$

$$\leqslant \| T_n(x; t) \|_{L_t^2} \cdot \sqrt{\int_E \frac{1}{(z-x)^2} \left[\frac{K_n(z; x)}{T_n(z; P_n)} \right]^2 \left[\frac{1}{P_n(x)} - \frac{1}{t(x)} \right]^2 \frac{S(x)}{\sqrt{-R(x)}} t(x)\, dx} \leqslant$$

$$\leqslant \| T_n(x; t) \|_{L_t^2} \cdot \frac{C}{\tau^{n-1}} \cdot \frac{1}{n^{\frac{1}{2}+\varepsilon}} = B \frac{1}{n^{\frac{1}{2}+\varepsilon}} \to 0.$$

После этого асимптотическое равенство доказывается несложно. Пусть $P(x)$ — многочлен того же класса, что и $t(x)$. Рассмотрим величину

$$\frac{2T_n(z; t)}{\left[T_n(z; P) + \frac{\sqrt{R(z)}}{S(z)} U_{n-1}(z; P) \right] \mathfrak{G}\left[\sqrt{\frac{P(x)}{t(x)}} \right] \Phi\left(z; \sqrt{\frac{t(x)}{P(x)}} \right)} =$$

$$= \frac{T_n(z; t)}{T_n(z; P_n)} \cdot \frac{1}{\mathfrak{G}\left[\sqrt{\frac{P_n(x)}{t(x)}} \right] \Phi\left(z; \sqrt{\frac{t(x)}{P_n(x)}} \right)} \times$$

$$\times \frac{2T_n(z; P_n)}{\left[T_n(z; P) + \frac{\sqrt{R(z)}}{S(z)} U_{n-1}(z; P) \right] \mathfrak{G}\left[\sqrt{\frac{P(x)}{P_n(x)}} \right] \Phi\left(z; \sqrt{\frac{P_n(x)}{P(x)}} \right)} =$$

$$= \frac{T_n(z; t)}{T_n(z; P_n)} \cdot \frac{1}{\mathfrak{G}\left[\sqrt{\frac{P_n(x)}{t(x)}} \right] \Phi\left(z; \sqrt{\frac{t(x)}{P_n(x)}} \right)} \times$$

$$\times \frac{\left\{ \left[T_n(z; P) + \frac{\sqrt{R(z)}}{S(z)} U_{n-1}(z; P) \right] \cdot \mathfrak{G}\left[\sqrt{\frac{P(x)}{P_n(x)}} \right] \Phi\left(z; \sqrt{\frac{P_n(x)}{P(x)}} \right) + \left[T_n(z; P) - \frac{\sqrt{R(z)}}{S(z)} U_{n-1}(z; P) \right] \frac{P_n(z)}{P(z)} \mathfrak{G}\left[\sqrt{\frac{P(x)}{P_n(x)}} \right] \Phi\left(z; \sqrt{\frac{P(x)}{P_n(x)}} \right) \right\}}{\left[T_n(z; P) + \frac{\sqrt{R(z)}}{S(z)} U_{n-1}(z; P) \right] \mathfrak{G}\left[\sqrt{\frac{P(x)}{P_n(x)}} \right] \Phi\left(z; \sqrt{\frac{P_n(x)}{P(x)}} \right)}.$$

Каждый множитель стремится к 1 при $n \to \infty$. Поэтому

$$T_n(z; t) \sim \frac{1}{2} \left[T_n(z; P) + \frac{\sqrt{R(z)}}{S(z)} U_{n-1}(z; P) \right] \mathfrak{G}\left[\sqrt{\frac{P(x)}{t(x)}} \right] \Phi\left(z; \sqrt{\frac{t(x)}{P(x)}} \right).$$

Так как

$$T_n(z; P) - \frac{\sqrt{R(z)}}{S(z)} U_{n-1}(z; P) \to 0$$

при $n \to \infty$, то это соотношение эквивалентно тому, которое требовалось доказать.

§ 6. Неравенства и асимптотические формулы для многочленов $U_n(x; t)$

Сформулируем теперь без доказательств аналогичные неравенства и асимптотические формулы для многочленов $U_n(x; t)$.

1. Если $P(x)$ — многочлен степени p положительный при $x \in E$ и $S_1(x) = (x^2 - 1)(x - \beta_1)(x - \beta_2) \ldots (x - \beta_p)$, то при $x \in E$ и $n > p$ имеет место неравенство

$$\left| \frac{\sqrt{S_1(x)}\, U_n(x; P)}{\sqrt{P(x)}\, \sqrt{N_n[P]}} \right| < C,$$

где C зависит лишь от множества E.

2. Если $t(x)$ $(x \in E)$ — положительная, непрерывно дифференцируемая функция, то при всех достаточно больших n для любого $x \in E$

$$|S_1(x)\, U_n(x; t)| \leqslant C\tau^n \sqrt{t(x)}\, \mathfrak{S}\left[\frac{1}{\sqrt{t(x)}}\right],$$

где C зависит только от E.

3. Пусть $t(x)$ удовлетворяет условиям предыдущей теоремы и пусть при любом $n \geqslant n_0$ существует многочлен $P_n(x)$ такой, что всюду в E

$$\left| 1 - \frac{P_n(x)}{t(x)} \right| \leqslant \left[\frac{|\sqrt{R(x)}|}{n} + \frac{1}{n^2} \right] \varepsilon_n.$$

В таком случае для всех достаточно больших n всюду в E выполняется неравенство

$$|U_n(x; t) - U_n(x; P_n)| \leqslant A\varepsilon_n \sqrt{P_n(x)}\, \sqrt{N_n[P_n]} \ln n,$$

где A зависит лишь от множества E.

4. Пусть положительная функция $t(x)$ $(x \in E)$ имеет непрерывную вторую производную, модуль непрерывности которой удовлетворяет условию

$$\lim_{n \to \infty} \omega_2\left(\frac{1}{n}\right) \ln n = 0.$$

Пусть $P(x)$ — какой-нибудь многочлен, положительный при $x \in E$ и того же класса и $t(x)$. Тогда при $x \to \infty$ справедливо равномерно на E асимптотическое равенство

$$\frac{U_{n-1}(x; t)}{\sqrt{t(x)}\, \sqrt{N_n^*[t]}} \sim \frac{1}{\sqrt{P(x)}\, \sqrt{N_n[P]}} \Big\{ U_{n-1}(x; P) \cos \Psi(x) + \\ + \frac{S(x)}{\sqrt{-R(x)}} T_n(x; P) \sin \Psi(x) \Big\},$$

где

$$N_n^*[t] = N_n[P]\, \mathfrak{S}\left[\frac{P(x)}{t(x)}\right],$$

а $\Psi(x)$ определяется формулой

$$\Psi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_E' \frac{\sqrt{-R(x)}}{\sqrt{-R(\xi)}} \frac{\ln \frac{t(\xi)}{P(\xi)}}{x - \xi}\, d\xi.$$

5. Если $t(x)$ положительна на E и непрерывно дифференцируема, то вне любого овала, охватывающего отрезок $[-1,1]$, мы получаем асимптотическое равенство

$$U_n(z;t) \sim U_n(z;P)\mathfrak{G}\left[\sqrt{\frac{P(x)}{t(x)}}\right]\Phi\left(z;\sqrt{\frac{t(x)}{P(x)}}\right).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. И. Ахиезер. Об ортогональных многочленах на нескольких интервалах. «Докл. АН СССР», 134, № 1 (1960).

2. Н. И. Ахиезер и Ю. Я. Томчук. К теории ортогональных многочленов на нескольких интервалах. «Докл. АН СССР», 138, № 4 (1961).

3. Н. И. Ахиезер. Verallmeinerung einer Korkine-Zolotareffschen Minimum — Aufgabe. «Зап. науково-дослідного ін-ту матем. й механіки» т. XIII, серія 4, вип. 1 (1937).

4. Ю. А. Брудный. Конструктивная характеристика функций, заданных на некоторых совершенных множествах действительной оси. Сб. статей «Исследования по современным проблемам конструктивной теории функций», М.—Л., Физматгиз, 1961.