

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ В. Н. КАРАЗІНА

Фізичний факультет
Кафедра теоретичної фізики імені академіка І. М. Ліфшиця

«Допущено до захисту»
Зав. кафедри теоретичної фізики
імені академіка І. М. Ліфшиця
доц. Г. Рашба _____
«_____» травня 2025 р.

Оцінка «_____»
Голова ЕК _____
«_____» травня 2025 р.

Головащенко Артем Євгенович

**Моделювання нестационарної акреції для
активних ядер галактик та акреціюючих
рентгенівських подвійних**

Кваліфікаційна робота на здобуття
освітнього рівня
«Магістр» за спеціальністю
104 – «фізика та астрономія»
освітньо-наукова програма -
«фізика»

(підпис студента)



Науковий керівник:

професор кафедри астрономії та
космічної інформатики,
доктор фіз.-мат. наук
Баннікова Олена Юріївна

(підпис керівника)



Науковий радник:

співробітник центру космічних
польотів імені Годдарда NASA
та університету Меріленду (UMBC)
Дородніцин Антон Володимирович

(підпис радника)



Анотація

Головащенко А. Є. *Моделювання нестационарної акреції для активних ядер галактик та акреціюючих рентгенівських подвійних.*

Кваліфікаційна робота на здобуття ступеня вищої освіти «магістр» за спеціальністю 104 «Фізика та астрономія» (освітньо-наукова програма — «Фізика»).

Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна, Харків, 2025 рік.
— 32 с. — табл. 0, іл. 10.

У роботі побудовано чисельну модель нев'язкого диска з політропною рівновагою за умови сталості питомого кутового моменту та модель сферично-симетричної акреції типу Бонді. Розроблено програмний код на мові C++ на базі гідродинамічного коду Athena++, що реалізує чисельні симуляції моделей із застосуванням безрозмірних змінних та масштабів, релевантних для фізичних параметрів компактних астрофізичних об'єктів. Проведено чисельне моделювання нестационарної еволюції акреційних дисків у спрощеннях для двох класів об'єктів: рентгенівської подвійної Cygnus X-1 та активного ядра галактики NGC 1068. Чисельно досліджено сферично-симетричну акрецію, отримано перехід потоку в надзвуковий режим. Для аналізу та візуалізації результатів моделювання було створено серію скриптів на мові Python. Робота буде використана як основа для подальших досліджень еволюції акреційних дисків з урахуванням додаткових ефектів, таких як в'язкість, магнітне поле, випромінювання та інших.

Ключові слова: акреційний диск, рентгенівські подвійні, активні ядра галактик, акреція Бонді, Athena++.

Abstract

Holovashchenko A. Y. *Modeling of non-stationary accretion for active galactic nuclei and accreting X-ray binaries.*

Master's thesis for the degree of Higher Education "Master" in specialty 104 "Physics and Astronomy" (educational and scientific program — "Physics").

V. N. Karazin Kharkiv National University, Kharkiv, 2025. — 32 pages, 0 tables, 10 illustrations.

The thesis presents a numerical model of an inviscid accretion disk in polytropic equilibrium under the assumption of constant specific angular momentum, along with a model of spherically-symmetric Bondi-type accretion. A simulation code was developed in C++ based on the Athena++ hydrodynamics framework, employing dimensionless variables and normalization scales relevant to the physical parameters of compact astrophysical objects. Time-dependent simulations of accretion disk evolution were performed for two classes of objects: the X-ray binary Cygnus X-1 and the active galactic nucleus NGC 1068. The spherical accretion model reproduces the transition to a supersonic flow regime. A series of Python scripts was developed for data analysis and visualization. The results will serve as a basis for future studies of accretion disk evolution, including additional effects such as viscosity, magnetic fields, radiation etc.

Keywords: accretion disk, X-ray binaries, active galactic nuclei, Bondi accretion, Athena++.

Зміст

Вступ	4
1 Моделювання акреційного диску	6
1.1 Радіальна сферично-симетрична акреція Бонді	7
1.2 Врахування орбітального моменту	10
2 Реалізація програмного коду моделі в Athena++	15
3 Застосування до астрофізичних об'єктів	19
3.1 Рентгенівська подвійна Cygnus X-1	19
3.2 Активне ядро галактики NGC 1068	23
3.3 Попередня оцінка результатів	27
Висновки	29
Список використаних джерел	30

Вступ

Вивчення акреційних процесів є одним із ключових напрямів сучасної астрофізики, зокрема в контексті активних ядер галактик (АЯГ) та акреціюючих рентгенівських подвійних систем. Ці об'єкти формуються внаслідок акреції речовини на компактні тіла, такі як чорні діри або нейтронні зорі, що супроводжується вивільненням значної кількості енергії в рентгенівському та оптичному діапазонах [1, 2]. Основною рушійною силою акреційного процесу є гравітаційне притягання, однак реальні конфігурації часто ускладнені наявністю кутового моменту та магнітних полів.

Першим етапом у дослідженні, представленою в цій роботі, стало моделювання сферично-симетричної акреції, що відома як бонді-акреція. Ця модель була вперше запропонована Г. Бонді у 1952 році та детально проаналізована в подальших роботах, зокрема у дослідженні Ханта [3]. У межах даної моделі було отримано аналітичні розв'язки для розподілу густини, швидкості та тиску залежно від радіальної координати, а також побудовано залежність темпу акреції $\dot{M}$ від гідродинамічних параметрів середовища. Графічне представлення результатів дозволило виявити характерні масштабні залежності, які можуть бути використані при інтерпретації числових розв'язків.

Надалі розглянуто акреційні диски за умови постійного кутового моменту. Для опису такої конфігурації використано рівняння Ейлера у циліндричних координатах та враховано розподіл густини та швидкості в площині диска. Особливу увагу приділено формалізму Папалойзу-Прінгла, який дозволяє аналітично описати структуру стійких нев'язких політропних дисків з постійним питомим кутовим моментом [4]. В результаті вдалося аналітично визначити межі диска та отримати профілі основних примітивних гідродинамічних величин, таких як швидкості, густина та тиск.

Моделювання обох конфігурацій — як сферичної акреції, так і дискової — проведено за допомогою коду Athena++. Він реалізує метод Годунова [5], що дозволяє коректно описати розриви та ударні хвилі, характерні для акре-

ційних процесів [6]. Athena++ розроблено на мові C++ як гнучкий код для розв'язування рівнянь гідродинаміки в різних системах координат, з підтримкою адаптивного уточнення сітки (AMR), багатопоточності та широкого спектра фізичних модулів [7]. Проєкт підтримується у відкритому доступі на офіційному онлайн-ресурсі [8], що робить його доступним для широкого кола дослідників у сфері астрофізики.

Таким чином, дана робота поєднує теоретичне описання та числове моделювання фундаментальних конфігурацій акреції, які зустрічаються в різних класах астрофізичних об'єктів. Отримані результати можуть бути використані для інтерпретації спостережень акреціюючих систем, а також як функціональна база для побудови складніших моделей, що враховують магнітне поле, в'язкість, радіаційні ефекти тощо.

1 Моделювання акреційного диску

Акреційний диск — це обертовий тонкий газовий потік, що повільно втрачає енергію та рухається до центра тяжіння під дією гравітації. Така конфігурація є характерною для багатьох астрофізичних об'єктів — від молодих зірок до активних ядер галактик (рис. 1.1) та рентгенівських подвійних (рис. 1.2).

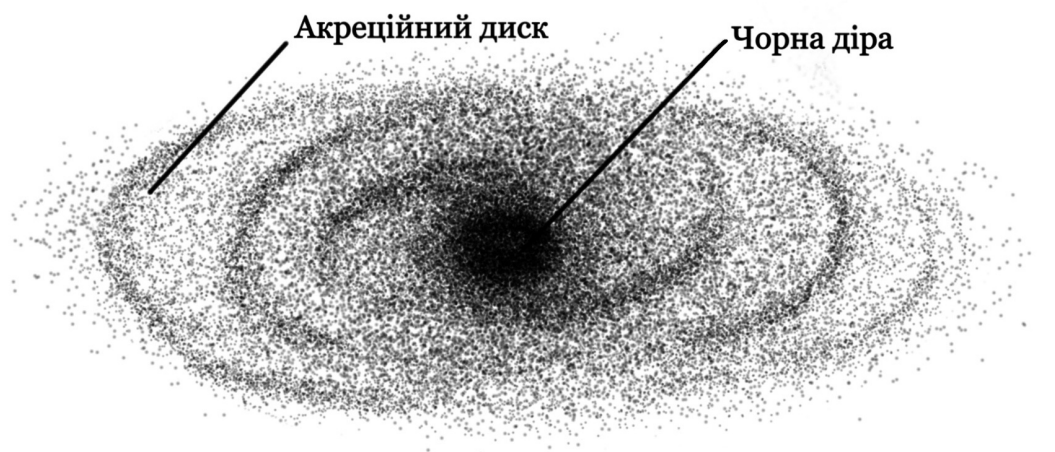


Рисунок 1.1 – Схематичне зображення акреційного диска навколо чорної діри (авторська ілюстрація). Газ рухається по спіралі до центру, втрачаючи енергію через турбулентну в'язкість, яка трансформує гравітаційну енергію в тепло та випромінювання.

Теоретичне розуміння дискової акреції суттєво просунулось у другій половині минулого століття. Ключовою віхою стала класична модель тонкого диска, запропонована Шакурою і Сюняєвим у 1973 році [9]. У ній було введено параметр α для опису турбулентної в'язкості й ця модель стала основою для опису багатьох спостережуваних властивостей акреційних систем. Раніше, у 1971 році, Гант [3] досліджував акрецію гідродинамічними методами у контексті руху зорі крізь газову хмару, показавши складний, нелінійний характер акреційного потоку.

Подальші роботи, зокрема Папалойзу і Прінгла [4], зосереджувались на вивченні стійкості акреційних дисків при різних профілях обертання. Було показано, що диск зі сталим питомим кутовим моментом є динамічно нестійким, проте така конфігурація зберігає аналітичну простоту та використовується для побудови самоподібних моделей. Сучасні підходи включають магнітогідродина-

мічні ефекти (наприклад, роботи Спрайта [2]) та інші удосконалення [1], але ми зосередимось на гідродинамічному описі, що зберігає ключові риси акреції.



Рисунок 1.2 – Ілюстрація акреції в рентгенівській подвійній системі (авторське зображення). Матерія перетікає від зорі-супутника до акреційного диска навколо компактного об'єкта, зазвичай чорної діри (як на рисунку) або нейтронної зорі.

Надалі ми викладемо основні рівняння та припущення, що лежать в основі нашої моделі політропного акреційного диска, побудованої на основі формалізму Папалойзу–Прінгла, у припущенні про сталий кутовий момент [10]. Як характеристику розглядаємої системи, ми припускаємо, що газ є політропним з рівнянням стану:

$$P = K\rho^\gamma, \quad (1.0.1)$$

де K — стала політропи, а γ — показник адіабати.

1.1 Радіальна сферично-симетрична акреція Бонді

Без обертання модель спрощується до сферично симетричної акреції. У цьому випадку потік газу відбувається радіально під дією ньютонівського тяжіння. Така модель була вперше сформульована Германом Бонді у 1952 році [11] і стала базовим прикладом акреційного потоку. Вона широко використовується як початкова задача в чисельному моделюванні.

У рамках нашої роботи було реалізовано цю модель в одномірному наближенні ($v := v_r$) у сферичних координатах. Система рівнянь тоді має вигляд:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}(r^2 \rho v) = 0, \quad (1.1.1)$$

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}(r^2 \rho v^2) + \frac{dP}{dr} = -\rho \frac{d\phi}{dr}, \quad (1.1.2)$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[v_r r^2 \left(\frac{1}{2} \rho v^2 + \frac{\gamma}{\gamma - 1} P \right) \right] = -\rho v_r \frac{\partial \phi}{\partial r}. \quad (1.1.3)$$

де $\phi = -\frac{GM}{r}$ — гравітаційний потенціал точкового масивного джерела в центрі.

Рівняння (1.1.1) описує збереження маси, тобто густина змінюється лише внаслідок переносу речовини потоками. Рівняння (1.1.2) є законом збереження імпульсу. У лівій частині — зміна імпульсу з часом та його перенесення, а у правій частині — сумарна сила, що діє на газ, представлена як градієнт гравітаційного потенціалу ϕ . Рівняння енергії (1.1.3) описує зміну повної енергії E на одиницю об'єму. Ліва частина відображає потік енергії, права описує роботу, яку виконує гравітаційне поле над речовиною.

Для переходу до безрозмірної форми вводимо такі змінні:

$$r = l_0 \tilde{r}, \quad t = \frac{l_0}{v_s} \tilde{t}, \quad v = v_s \tilde{v}, \quad \rho = \rho_0 \tilde{\rho}, \quad P = \rho_0 v_s^2 \tilde{P}, \quad E = \rho_0 v_s^2 \tilde{E}, \quad (1.1.4)$$

де l_0 — масштаб довжини, ρ_0 — масштаб густини, v_s — характерна звукова швидкість:

$$v_s = \sqrt{\frac{k_B T}{\mu m_p}},$$

де T — температура, k_B — стала Больцмана, m_p — маса протона, μ — середня молекулярна маса.

Також для зручності визначимо безрозмірний параметр k , що відображає співвідношення між характерною довжиною l_0 та гравітаційним радіусом r_g :

$$k = \frac{l_0}{r_g}, \quad r_g = \frac{2GM}{c^2},$$

де G — гравітаційна стала, M — маса центрального тіла, c — швидкість світла. Проводячи заміни і скорочуючи на $\rho_0 v_s / l_0$, рівняння маси (1.1.1) набуває вигляду:

$$\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial \tilde{t}} + \frac{1}{\tilde{r}^2} \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} (\tilde{r}^2 \tilde{\rho} \tilde{v}) = 0.$$

Права частина рівняння імпульсу (1.1.2):

$$-\rho \frac{GM}{r^2} = -\rho_0 \tilde{\rho} \cdot \frac{GM}{l_0^2 \tilde{r}^2} = -\rho_0 \frac{c^2}{2k l_0} \cdot \frac{\tilde{\rho}}{\tilde{r}^2} = \frac{\rho_0 v_s^2}{l_0} \left(-\frac{\mathbb{C}^2}{2k} \cdot \frac{\tilde{\rho}}{\tilde{r}^2} \right),$$

де $\mathbb{C} = c/v_s$ — відношення швидкості світла до характерної звукової швидкості.

Для правої частини рівняння енергії (1.1.3) маємо:

$$-\rho v \frac{GM}{r^2} = -\rho_0 \tilde{\rho} \cdot v_s \tilde{v} \cdot \frac{GM}{l_0^2 \tilde{r}^2} = \frac{\rho_0 v_s^3}{l_0} \left(-\frac{\mathbb{C}^2}{2k} \cdot \frac{\tilde{\rho} \tilde{v}}{\tilde{r}^2} \right).$$

У підсумку, безрозмірне рівняння імпульсу у сферичних координатах має вигляд:

$$\frac{\partial(\tilde{\rho} \tilde{v})}{\partial \tilde{t}} + \frac{1}{\tilde{r}^2} \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} (\tilde{r}^2 \tilde{\rho} \tilde{v}^2) + \frac{\partial \tilde{P}}{\partial \tilde{r}} = -\frac{\mathbb{C}^2}{2k} \frac{\tilde{\rho}}{\tilde{r}^2}, \quad (1.1.5)$$

Права частина рівняння (1.1.5) — безрозмірна сила тяжіння, яка відображає класичну ньютонівську силу.

Після позбавлення розмірності система рівнянь містить безрозмірний параметр $\mathbb{C}^2/2k$, який визначає силу гравітаційного впливу в задачі. Його значення залежить як від маси центрального об'єкта, так і від масштабу довжини, характеристик газу тощо.

На основі цієї безрозмірної системи нами було побудовано відповідну чисельну модель Бонді-акреції у сферичних координатах у коді Athena++. Початкові умови моделі — однорідне середовище з постійною густиною та тиском на нескінченності, що відповідає умовам класичної моделі [11].

Однією з ключових характеристик такої системи є наявність надзвукового

переходу. У класичному розв'язку Бонді існує єдина критична точка $\tilde{x}_c$, у якій швидкість потоку дорівнює локальній швидкості звуку:

$$|\tilde{v}(\tilde{x}_c)| = \tilde{c}_s(\tilde{x}_c).$$

Це визначає радіус, у якому газ подолав звуковий бар'єр, переходячи від повільного (субзвукового) режиму до надзвукового падіння на центральний об'єкт. Оскільки тиск у моделі пов'язаний з густиною через політропне рівняння стану (1.0.1), локальна швидкість звуку задається як

$$\tilde{c}_s = \sqrt{\gamma \tilde{P} / \tilde{\rho}} = \sqrt{\gamma \tilde{K} \tilde{\rho}^{\gamma-1}}.$$

Таким чином, в кожний момент часу можна обчислити безрозмірне число Маха:

$$\mathcal{M}(\tilde{x}) = \frac{|\tilde{v}(\tilde{x})|}{\tilde{c}_s(\tilde{x})},$$

яке дозволяє виявити положення переходу на надзвук $\tilde{x}_c$, визначене умовою $\mathcal{M} = 1$.

На рис. 1.3 зображено профіль відношення $\tilde{v} = v/v_s$ до відстані r , побудований на основі чисельного розв'язку, реалізованого в Athena++.

1.2 Врахування орбітального моменту

Переходячи до опису акреційного диска з постійним обертовим моментом, ми перейдемо до циліндричної системи координат (r, ϕ, z) , де r — радіальна відстань від центра, z — висота над площиною диска, а ϕ — азимутальний кут. Це обґрунтовується тим, що така система відповідає аксіально-симетричній геометрії диска.

Для формування акреційного диска нам потрібно додати обертовий потенціал, що буде компенсувати дію гравітаційного. У випадку аксіально-симетричного потоку з постійним питомим кутовим моментом ℓ , відцентрова сила визначається

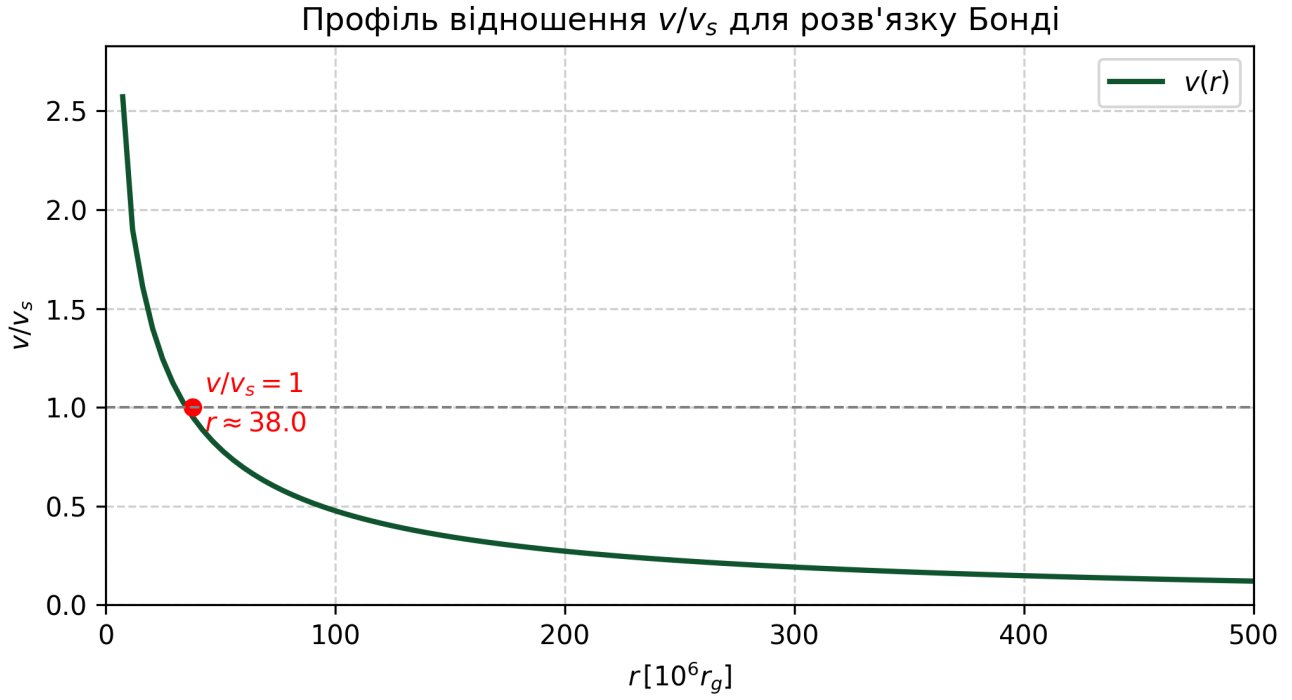


Рисунок 1.3 – Профіль безрозмірної швидкості потоку $\tilde{v} = v/v_s$ для чисельного розв'язку Бонді у міжзоряному середовищі. Масштаб температури визначено як $T = 10^4 K$. Червоним маркером позначено точку переходу на надзвуковий режим, яка відповідає критичному радіусу $r_c \approx 38 \times 10^6 r_g$.

як:

$$\nabla \phi_{\text{rot}} = \frac{\ell^2}{r^3} \hat{r}, \quad \phi_{\text{rot}} = -\frac{\ell^2}{2r^2},$$

де

$$l = v_\phi r = \Omega r^2,$$

v_ϕ — азимутальна швидкість, Ω — кутова швидкість.

Отже, запишемо систему рівнянь у циліндричних координатах у припущенні аксіальної симетрії ($\partial/\partial\phi = 0$) та відсутності вертикального руху ($v_z = 0$). Тоді рівняння маси, імпульсу та енергії (1.1.1), (1.1.2), (1.1.3) набувають вигляду:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \rho v_r) = 0,$$

$$\frac{\partial(\rho v_r)}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \rho v_r^2) + \frac{\partial P}{\partial r} = -\rho \frac{d\phi}{dr} + \frac{\rho v_\phi^2}{r}, \quad (1.2.1)$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[v_r r \left(\frac{1}{2} \rho v^2 + \frac{\gamma}{\gamma-1} P \right) \right] = -\rho v_r \frac{\partial \varphi}{\partial r}, \quad (1.2.2)$$

де $\phi = -\frac{GM}{r}$ — гравітаційний потенціал, а $v_\phi = \ell/r$ — азимутальна швидкість, що визначається через постійний питомий кутовий момент ℓ .

Опустимо рівняння маси та імпульсу в азимутальному напрямку, та розглянемо детальніше рівняння імпульсу (1.2.1). Умова сталості кутового моменту ($\ell = \text{const}$) означає, що кутова швидкість змінюється як $\Omega(r) \propto r^{-2}$. Зокрема, її можна записати через нормалізацію в точці $r = r_m$:

$$\Omega(r) = \Omega_m \frac{r_m^2}{r^2}, \quad \Omega_m = \sqrt{\frac{GM}{r_m^3}}, \quad (1.2.3)$$

де r_m — радіус, у якому розташований центр диска (максимум густини), а Ω_m — кутова швидкість на цьому радіусі, яка відповідає кеплерівському закону.

Рівняння імпульсу в стаціонарному випадку ($\partial/\partial t = 0$) та за умови $v_r \equiv 0$ набуває вигляду:

$$\frac{dP}{dr} = \rho \left(\frac{\ell^2}{r^3} - \frac{GM}{r^2} \right),$$

або, враховуючи $\ell = r^2 \Omega(r)$:

$$\frac{dP}{dr} = \rho \left(\Omega^2 r - \frac{GM}{r^2} \right).$$

Накладаючи умову $\frac{dP}{dr} \Big|_{r=r_m} = 0$, тобто нульовий градієнт тиску в точці рівноваги, отримаємо:

$$\Omega^2 r - \frac{GM}{r^2} \Big|_{r=r_m} = 0 \quad \Rightarrow \quad \Omega_m^2 r_m - \frac{GM}{r_m^2} = 0,$$

що і визначає $\Omega_m = \sqrt{GM/r_m^3}$.

Таким чином, точка $r = r_m$ — це точка, де гравітаційне притягання точно

врівноважується відцентровою силою. Навколо цієї точки встановлюється політропна рівновага, яка і визначає форму акреційного диска. Отже, азимутальну швидкість на цьому радіусі ми визначатимемо як кеплерівську:

$$v_\phi(r_m) = \Omega_m r_m = \sqrt{\frac{GM}{r_m}}.$$

Підставляючи це у вираз для кутового моменту $h = r v_\phi$, маємо:

$$h = r_m v_\phi(r_m) = r_m \sqrt{\frac{GM}{r_m}} = \sqrt{GM r_m}, \quad \Rightarrow \quad v_\phi(r) = \frac{h}{r} = \frac{\sqrt{GM r_m}}{r}.$$

Перейдемо до безрозмірних змінних (1.1.4):

$$v_\phi(r) = \frac{1}{r l_0} \sqrt{\left(\frac{1}{2k} \mathbb{C}^2 k l_0 \right) \cdot r_m l_0} = \frac{1}{r} \sqrt{\frac{1}{2k} \mathbb{C}^2 r_m}.$$

Це остаточно визначає профіль азимутальної швидкості у безрозмірній формі:

$$v_\phi(r) = \sqrt{\frac{\mathbb{C}^2}{2k r_m} \frac{r_m}{r}}. \quad (1.2.4)$$

Таким чином, точка r_m — це точка, де гравітаційне притягання точно врівноважується відцентровою силою. У напрямку внутрішньої частини диска ця швидкість зростає, адже $v_\phi(r) \propto 1/r$, тоді як у напрямку зовнішнього кордону через менший тиск швидкість поступово зменшується. Завдяки такому розподілу азимутальної швидкості, навколо цієї точки встановлюється рівновага, що і визначає форму акреційного диска. Провівши ідентичне із бондіївським обезрозмірення (1.1.4), підставивши рівняння стану для політропного газу (1.0.1), ми отримаємо таке рівняння імпульсу:

$$\frac{\gamma}{\gamma - 1} K \rho^{\gamma-1} = \frac{\mathbb{C}^2}{2k} \left(\frac{1}{r} - \frac{r_m}{2r^2} - C \right), \quad (1.2.5)$$

де C — стала інтегрування.

Цей вираз задає просторовий профіль густини в рівноважному диску зі сталим кутовим моментом. Він описує, як розподіл густини в диску підтримується балансом між відцентровою силою і гравітаційним тяжінням. Константа інтегрування C визначається вимогою, щоб густина на зовнішньому краю диска занулювалась ($\hat{\rho} = 0$ при $\hat{r} = \hat{r}_1$ та $\hat{r} = \hat{r}_2$).

Також тут виникає питання стосовно знаходження значення параметра K – він слугує параметром масштабу густини нашої моделі та визначається з умов в центрі диску, беручи $\hat{r} = \hat{r}_m$. Як видно з рівняння (1.2.5), існування розподілу густини задається умовою, що значення в дужках зправа є додатнім. Цей факт використано нами при побудові логіки програмного коду, опис якого представлений у наступному розділі. Таким чином, ми отримали аналітичний вираз для гідростатичного профілю політропної рівноваги в аксіально-симетричному акреційному диску з постійним кутовим моментом, який ми використовуємо для чисельного моделювання на базі коду Athena++.

2 Реалізація програмного коду моделі в Athena++

Для моделювання акреційних процесів навколо компактних об'єктів, таких як чорні діри, необхідно використовувати чисельні методи, що можуть стабільно розв'язувати рівняння газової динаміки. Як було зазначено раніше, у нашій роботі для цього використовується код Athena++, спеціалізований на розв'язанні задач гідродинаміки, що є багатофункціональним інструментом в астрофізичних дослідженнях.

Athena++ базується на Годуновському методі – чисельній схемі розв'язку рівнянь гідродинаміки, записаних у так званій дивергентній формі. Це означає, що рівняння представлені через похідні потоків фізичних величин, таких як маса, імпульс та енергія. Дивергентна форма рівнянь є зручною, оскільки дозволяє точно зберігати ці величини в процесі чисельного інтегрування. Завдяки цьому забезпечується високий рівень стабільності розв'язку, оскільки чисельно визначене дотримання законів збереження мінімізує накопичення помилок.

Суть Годуновського методу полягає в розбитті обчислювальної області на дискретні комірки, у кожній з яких зберігаються усереднені значення фізичних змінних. На межах цих комірок розв'язуються локальні задачі Рімана – задачі про взаємодію потоків речовини, що проходять з різних боків межі. Розв'язок таких задач дозволяє обчислювати потоки маси, імпульсу та енергії між комірками максимально фізично коректно. Крім цього, таке обчислення "внутрішньокміркових" профілів забезпечує стабільний опис розподілів фізичних величин всередині комірок, таких як ударні хвилі та розриви.

У нашому вихідному коді реалізовано модель акреційного диска у ньютонівському гравітаційному полі з осьовою симетрією. Модель задається профілями густини, азимутальної швидкості та тиску, які визначають початковий стан газу навколо компактного об'єкта.

Політропний профіль густини, визначений з рівняння (1.2.5) має наступний

ВИГЛЯД:

$$\rho(r) = \left[\frac{\mathbb{C}^2}{2k \cdot \gamma / (\gamma - 1) \cdot K} \left(\frac{1}{r} - \frac{r_m}{2r^2} - C \right) \right]^{\frac{1}{\gamma-1}}, \quad (2.0.1)$$

Щоб втілити його у чисельному коді, було введено наступні змінні:

```
vs    = sqrt(K_B * T / (mu * MP));      // звукова швидкість
Crat  = c / vs;                          // безрозмірна швидкість
rg    = 2 * GC * MBH / (c * c);          // гравітаційний радіус
disk.k = l_0 / rg;                       // масштаб довжини
disk.gm = pow(Crat, 2) / 2.0 / disk.k;    // безрозмірна грав. стала
```

Ця конструкція забезпечує таке масштабування, де довжини виражені у одиницях l_0 , а швидкості — розраховуються з масштабу температури T . Це дозволяє формулювати орбітальні профілі швидкості та тиску без необхідності постійно оперувати фізичними константами.

Для зручності профіль густини реалізовано в окремій функції `DiskDensity`:

```
Real DiskDensity(Real x, Disk disk){
    Real eq = disk.gm / gam_rat / disk.Kgas *
    DiskEquation(x, disk.xm, disk.C);
    return pow(eq, 1.0/(gam-1.0));
}
```

Тут `DiskEquation` — функція, що відповідає за вираз в дужках (2.0.1):

```
Real DiskEquation(Real x, Real xm, Real disk_C){
    return (1.0/x - xm/2.0/pow(x,2) - disk_C);
}
```

Далі визначаємо азимутальну швидкість газу v_ϕ , що описує кеплерівське

обертання навколо центрального об'єкта на відстані максимуму густини r_m :

$$v_\phi(r) = \sqrt{\frac{\mathbb{C}^2}{2kr_m} \frac{r_m}{r}}. \quad (2.0.2)$$

Цей вираз реалізується безпосередньо у методі ProblemGenerator:

```
Real v_phi = sqrt(disk.gm/disk.xm)*disk.xm/x;
phydro->u(IM2,k,j,i) = v_phi * rho;
```

Профіль тиску визначається через політропне рівняння стану (1.0.1) також у методі ProblemGenerator:

```
Real press = disk.Kgas * pow(rho, gam);
Real ener = press/(gam-1.0);
phydro->u(IEN,k,j,i) = ener + 0.5 * rho * v_phi * v_phi;
```

Отже, ключові параметри моделі, що задаються в якості вхідних:

```
MBH      # маса чорної діри в масах Сонця
l_0      # масштаб довжини, см
T        # температура газу, K
disk_xm  # радіус центра диска (у масштабах l_0)
disk_C   # безрозмірна константа форми диска
```

Ці параметри визначають фізичні масштаби та початковий стан диска, а також нормалізацію швидкостей.

Гравітація в моделі реалізується як зовнішнє джерело, що діє у напрямку до центра потенціалу та відповідає ньютонівському наближенню. Гравітаційне поле описується потенціалом:

$$\phi(r) = -\frac{\mathbb{C}^2}{2kr}, \quad -\nabla\phi(r) = -\frac{\mathbb{C}^2}{2kr^2}. \quad (2.0.3)$$

Ця сила діє лише в радіальному напрямку, і вона додається як джерельний член до рівняння імпульсу (зліва) та енергії (справа):

$$\frac{\partial(\rho v_r)}{\partial t} + \dots = -\rho \frac{\mathbb{C}^2}{2kr^2}, \quad \frac{\partial E}{\partial t} + \dots = -\rho v_r \frac{\mathbb{C}^2}{2kr^2}, \quad (2.0.4)$$

де v_r — радіальна швидкість, E — повна енергія (внутрішня та кінетична) на одиницю об'єму. У кодї ця реалізація виглядає так:

```
Real gradphi = disk.gm / (x * x);
cons(IM1,k,j,i) += -dt * rho * gradphi;
Real vr = prim(IM1)/rho;
cons(IEN,k,j,i) += -dt * gradphi * rho * vr;
```

Опис часу в моделі почнемо з фізичного визначення динамічного (орбітального) часу для диска, після чого покажемо, як він пов'язаний із вхідними параметрами моделі, що визначають тривалість симуляції та її часовий крок. У ньютонівському наближенні динамічний час визначається як період колового руху на відстані r від центрального об'єкта маси M (орбітальний період):

$$t_{\text{dyn}} = \frac{2\pi r^{3/2}}{\sqrt{GM}}, \quad (2.0.5)$$

Athena++ використовує гнучку нормалізацію часу, спираючись на характерну довжину та швидкість звуку: $t_{\text{ath}} = \frac{l_0}{v_s}$. Таким чином, безрозмірний динамічний час в одиницях коду Athena++ дорівнює:

$$\tilde{t}_{\text{dyn}} = \frac{t_{\text{dyn}}}{t_{\text{ath}}} = 2\pi v_s r^{3/2} \sqrt{\frac{l_0}{GM}}. \quad (2.0.6)$$

3 Застосування до астрофізичних об'єктів

У цьому розділі наведено результати моделювання розподілу фізичних величин для розглянутих астрономічних систем із застосуванням нашого програмного коду. Масштабування довжини у всіх моделях виконується в одиницях гравітаційного радіуса r_g відповідного центрального об'єкта. Інші величини представлено в безрозмірній формі: густина в моделі є величиною, нормованою на її максимальне значення в центрі диска, з її допомогою визначається тиск. Швидкість є нормованою до швидкості звуку v_s , що визначається за масштабом температури T . Для того, щоб оцінити поведінку моделі, як крок по часу для побудови еволюції було обрано орбітальний період (ОП), розрахований для кожного астрономічного об'єкта індивідуально.

3.1 Рентгенівська подвійна Cygnus X-1

Для прикладу моделювання акреційного процесу поблизу рентгенівської подвійної у даній роботі обрано Cygnus X-1, що є одним з найбільш досліджених джерел рентгенівського випромінювання свого класу. Ця система складається з зорі-супутника HDE 226868 та чорної діри (ЧД), маса якої становить $M \approx 21.2 M_\odot$. Радіус положення акреційного диска відповідає порядку сотень гравітаційних радіусів [12].

На рис. 3.1 зображено профіль швидкості диска в азимутальному напрямку на початку симуляції. З нього видно, як швидкість v_ϕ різко зростає на внутрішньому краї диска, досягаючи максимуму, після чого зменшується з відстанню, що відповідає наближеному кеплерівському профілю $v_\phi \propto r^{-1/2}$. На межах області (для $r < 73$ та $r > 160$) швидкість зменшується до фонового значення, що вказує на межі диска.

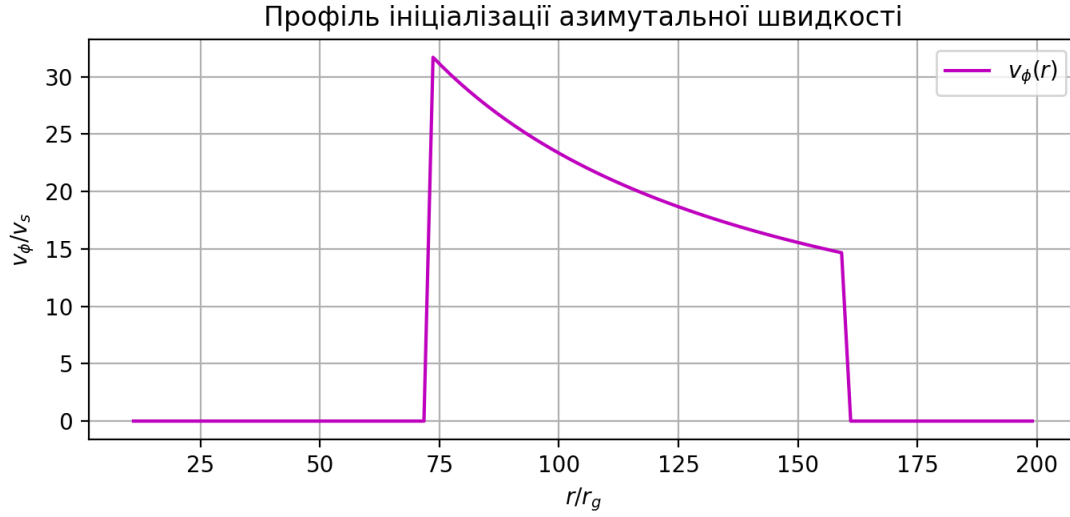


Рисунок 3.1 – Профіль ініціалізації швидкості в азимутальному напрямку (у швидкостях звуку v_s) для акреційного диска компактного об’єкта Cygnus X-1. Параметри моделі: маса ЧД $M_{\text{ВН}} = 21.2 M_\odot$, характерна температура диска $T = 10^8$ К. Максимум густини диска визначено на відстані $100r_g$, внутрішня межа диска $73r_g$, зовнішня межа $160r_g$.

На рис. 3.2 зображено початкові профілі густини ρ (угорі) та тиску p (унизу) акреційного диска. Обидва профілі мають форму гаусіани з максимумом на відстані $r = 100r_g$. Внутрішня межа диска знаходиться на $r = 73r_g$, а зовнішня — на $r = 160r_g$. За межами цих радіусів густина та тиск прямують до фонового вакууму системи.

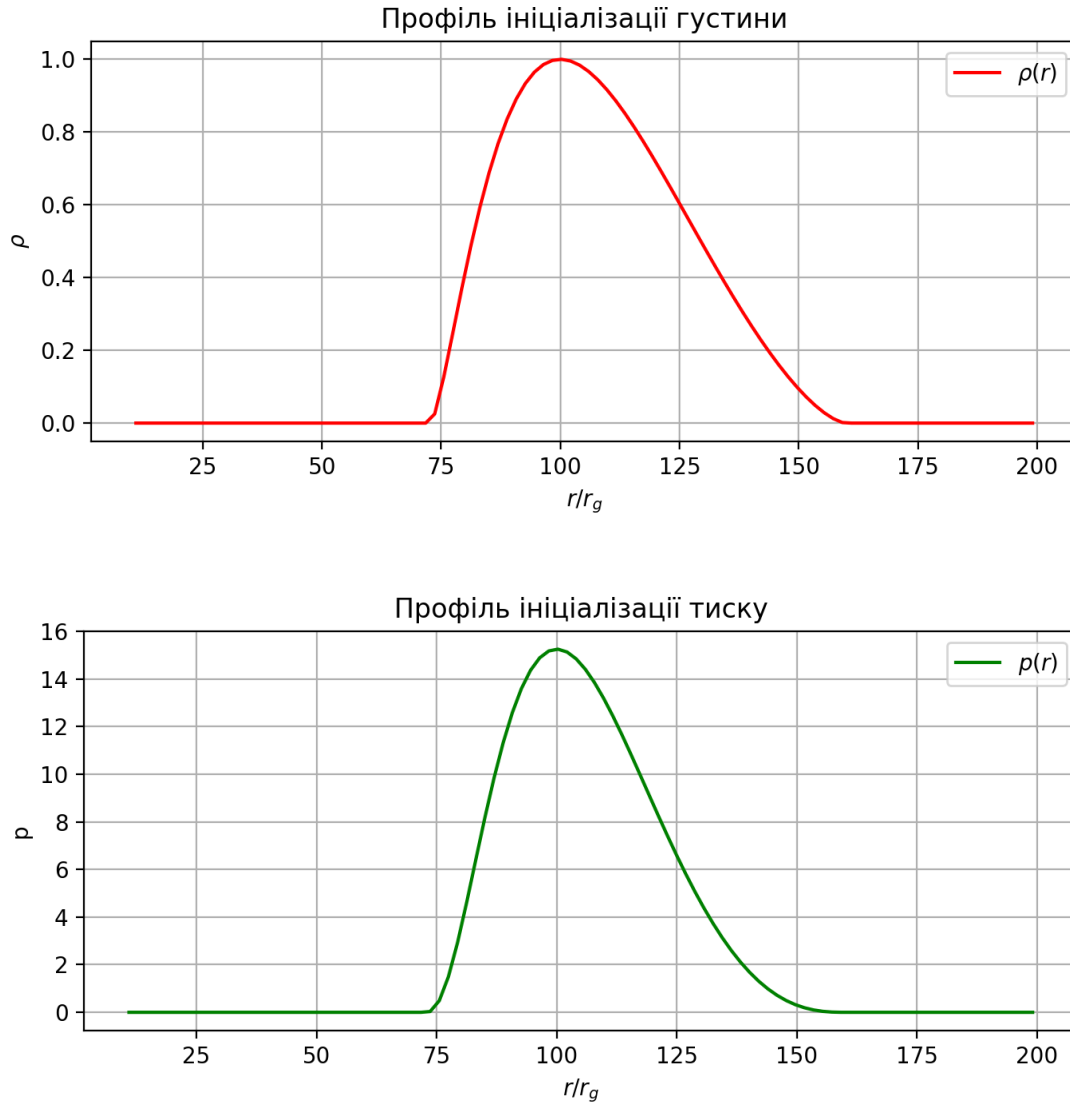


Рисунок 3.2 – Профілі початкових умов моделі акреційного диска компактного об'єкта Cygnus X-1: густина (вгорі) та тиск (внизу). Максимум густини диска визначено на відстані $100 r_g$, внутрішня межа $73 r_g$, зовнішня межа $160 r_g$.

Еволюцію моделі було змодельовано для 100 орбітальних періодів. На рис. 3.3 показано часову еволюцію густини ρ (угорі) та тиску p (внизу) у характерні моменти часу, що відповідають $t = 0, 1, 10$ та 100 ОП. Видно, що на ранніх етапах (після 1 ОП) диск починає втрачати вигляд початкового профілю. З часом спостерігається зниження густини та тиску у внутрішній частині диска ($r < 100 r_g$), відповідно, значення густини на зовнішніх радіусах ($r > 160 r_g$) збільшується, що вказує на перетікання маси за межі початкового профілю. Це свідчить про поступове розсіювання матеріалу з диска в умовах відсутності в'язкості.

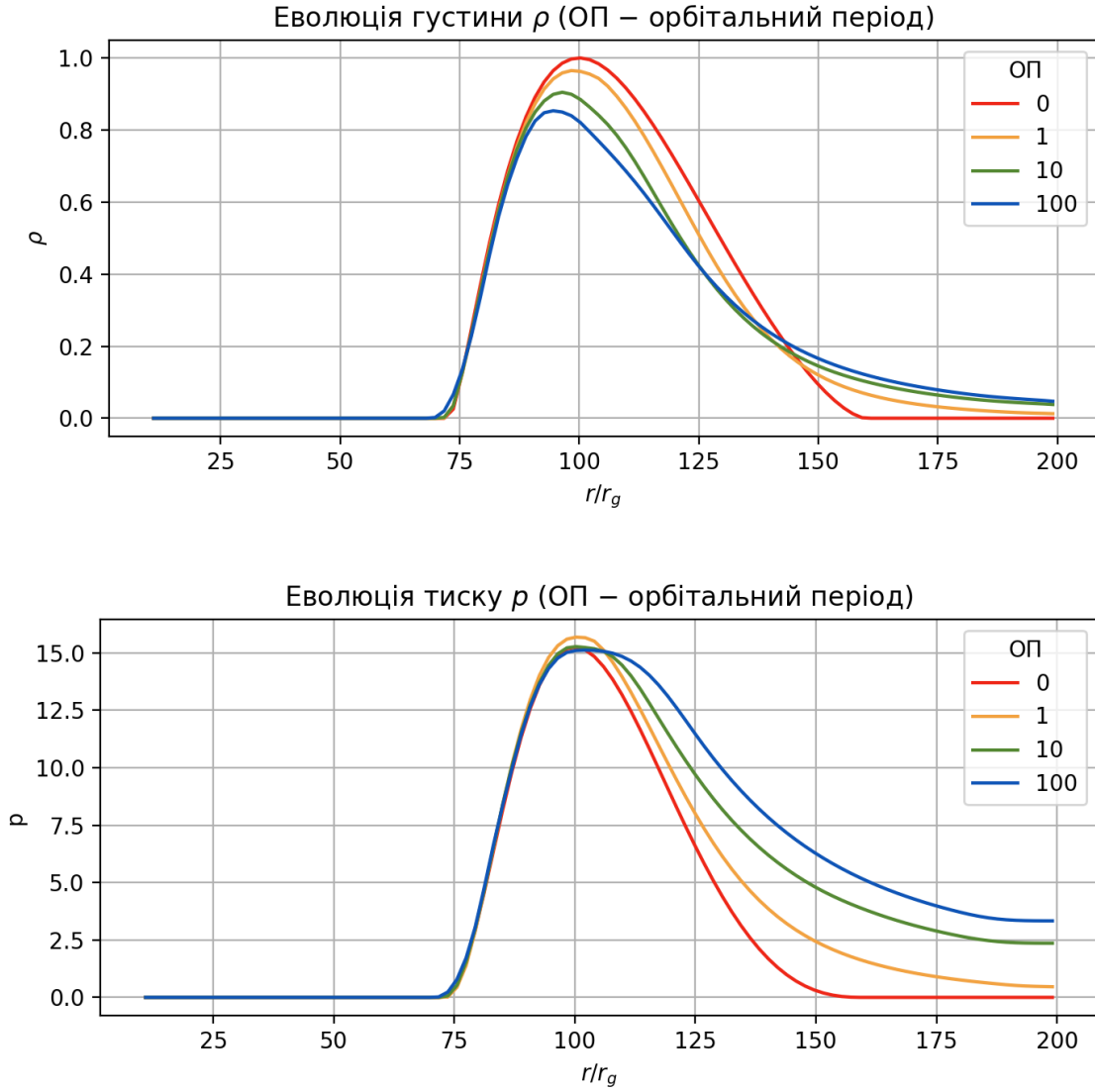


Рисунок 3.3 – Еволюція профілю густини ρ (вгорі) та тиску p (внизу) моделі акреційного диска Cygnus X-1 у часові моменти $t = 0, 1, 10, 100$ ОП. Початкові умови наведено на рис. 3.1.

На рис. 3.4 представлено часову еволюцію азимутальної швидкості v_ϕ (угорі) та радіальної швидкості v_r (унизу) в орбітальних одиницях часу. Спостерігається зменшення амплітуди та деформація профілю v_ϕ , зокрема у внутрішній частині ($r < 100 r_g$), що вказує на втрату кутового моменту через перенесення маси. У зовнішній частині профіль зберігає майже кеплерівську поведінку. Радіальна швидкість v_r , яка на початку моделювання була майже всюди нульовою, з часом набуває від'ємних значень у внутрішній області, що вказує на формування зони акреції. У зовнішній частині диска з'являються додатні значення v_r , пов'язані з розтіканням речовини в зовнішні шари системи.

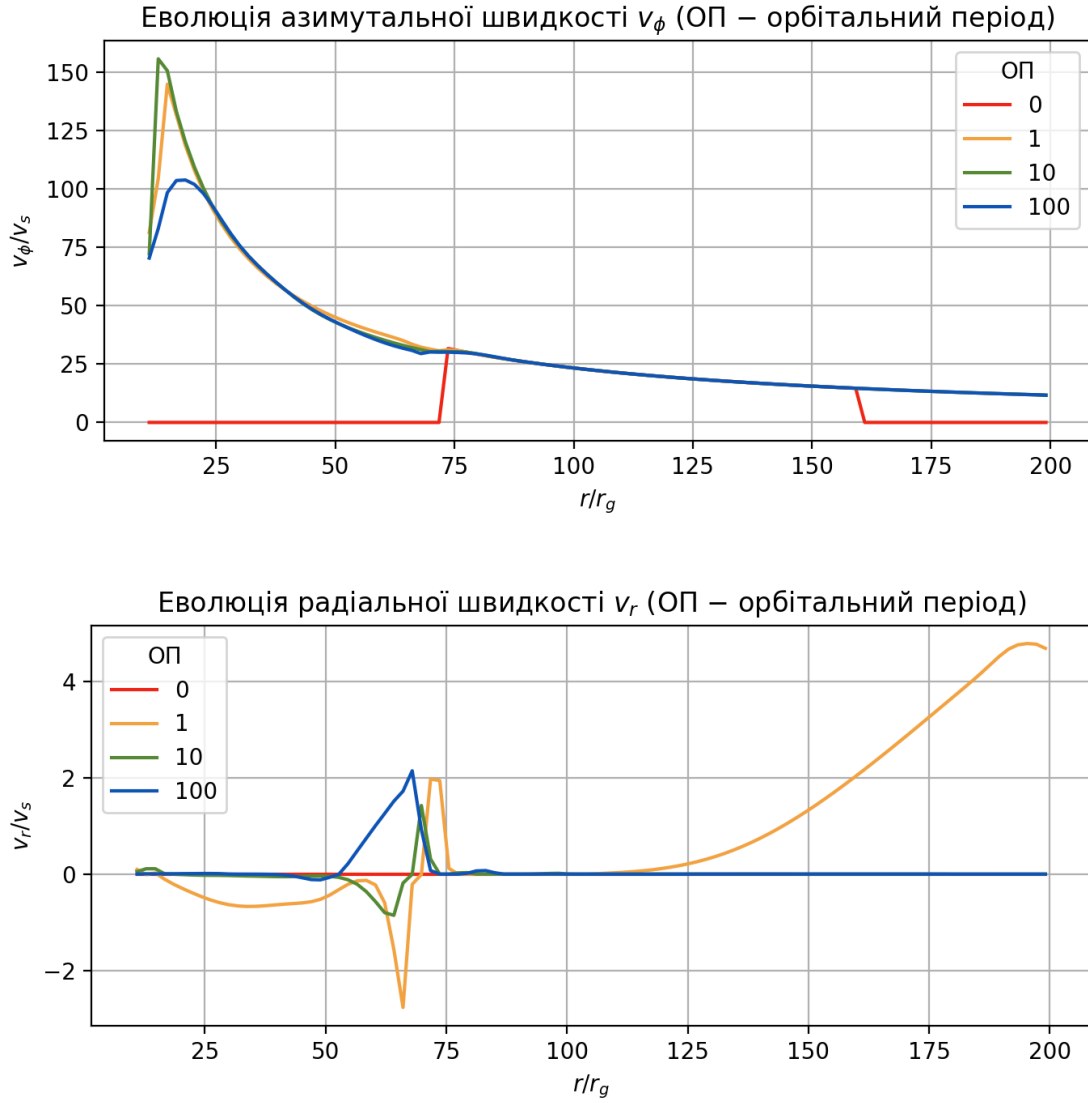


Рисунок 3.4 – Еволюція профілів азимутальної швидкості v_ϕ (вгорі) та радіальної швидкості v_r (внизу) акреційного диска Cygnus X-1 у часові моменти $t = 0, 1, 10, 100$ ОП.

3.2 Активне ядро галактики NGC 1068

Для моделювання структури акреційного середовища активного ядра галактики у цій роботі розглядається галактика NGC 1068. Центральним джерелом у цій системі є надмасивна чорна діра (НМЧД) масою $M_{\text{ВН}} \sim 5 \times 10^6 M_\odot$, характерна температура акреційного диска становить $T = 10^5$ К, а його масштаби $\sim 1000 r_g$ [13, 14].

Азимутальна швидкість v_ϕ у початковий момент (рис. 3.5) відповідає очікуваній кеплерівській поведінці з різким зростанням на внутрішньому краї диска

та спадом $\propto r^{-1/2}$ на більших радіусах (радіальна компонента швидкості v_r при цьому у всій системі дорівнює нулю).

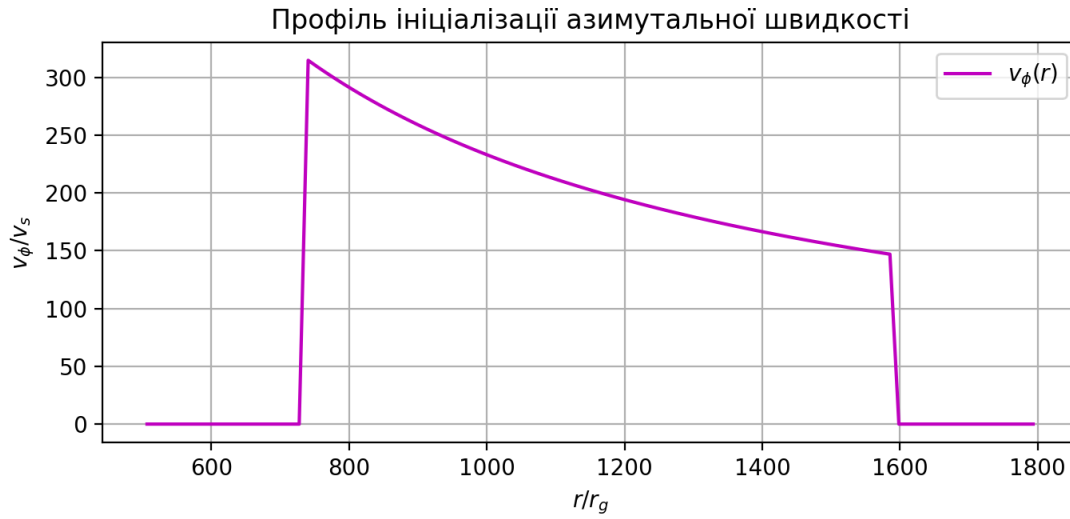


Рисунок 3.5 – Початкові профілі азимутальної v_ϕ швидкості диска NGC 1068.

На рис. 3.6 подано початкові профілі густини ρ (угорі) та тиску p (унизу) моделі диска в NGC 1068. Як і в попередній моделі, обидві функції мають форму гаусіани, максимум густини встановлено на відстані $r = 1000 r_g$ зі стрімким спадом поза областю диска.

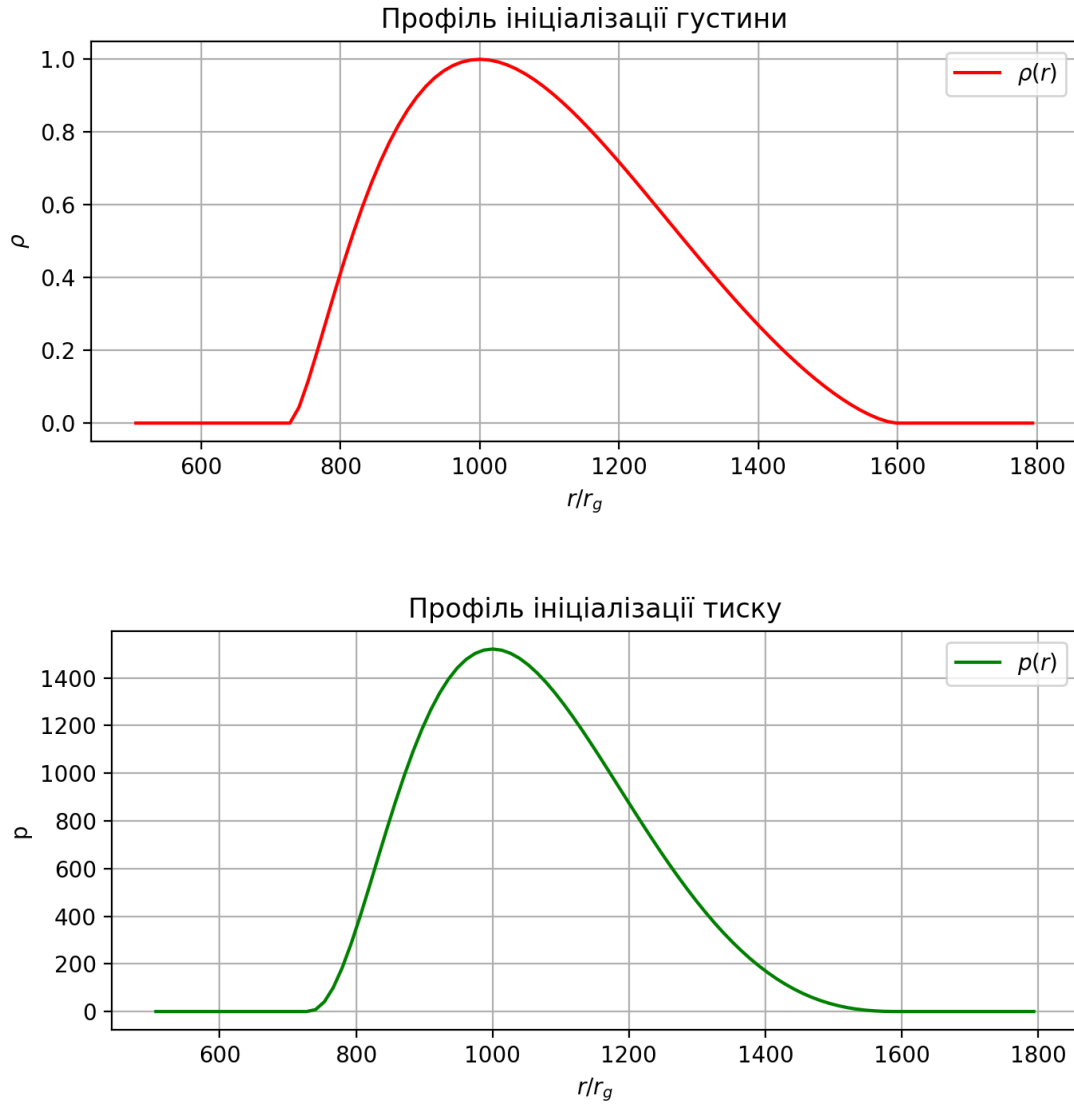


Рисунок 3.6 – Початкові профілі густини ρ (вгорі) та тиску p (внизу) в моделі акреційного диска АЯГ NGC 1068. Маса НМЧД $M_{\text{BH}} = 5 \times 10^6 M_{\odot}$, характерна температура системи $T = 10^5 \text{ K}$.

Еволюцію моделі було простежено до 1000 орбітальних періодів, що дозволило оцінити стійкість та масштабованість динаміки акреційного диска. На рис. 3.7 зображено часову еволюцію густини ρ (угорі) та тиску p (внизу). Спостерігається поступове розширення області високої густини й тиску, що узгоджується з аналогічними процесами в попередній моделі Cygnus X-1. Це підтверджує універсальність моделі та її придатність до опису акреційних дисків різних масштабів.

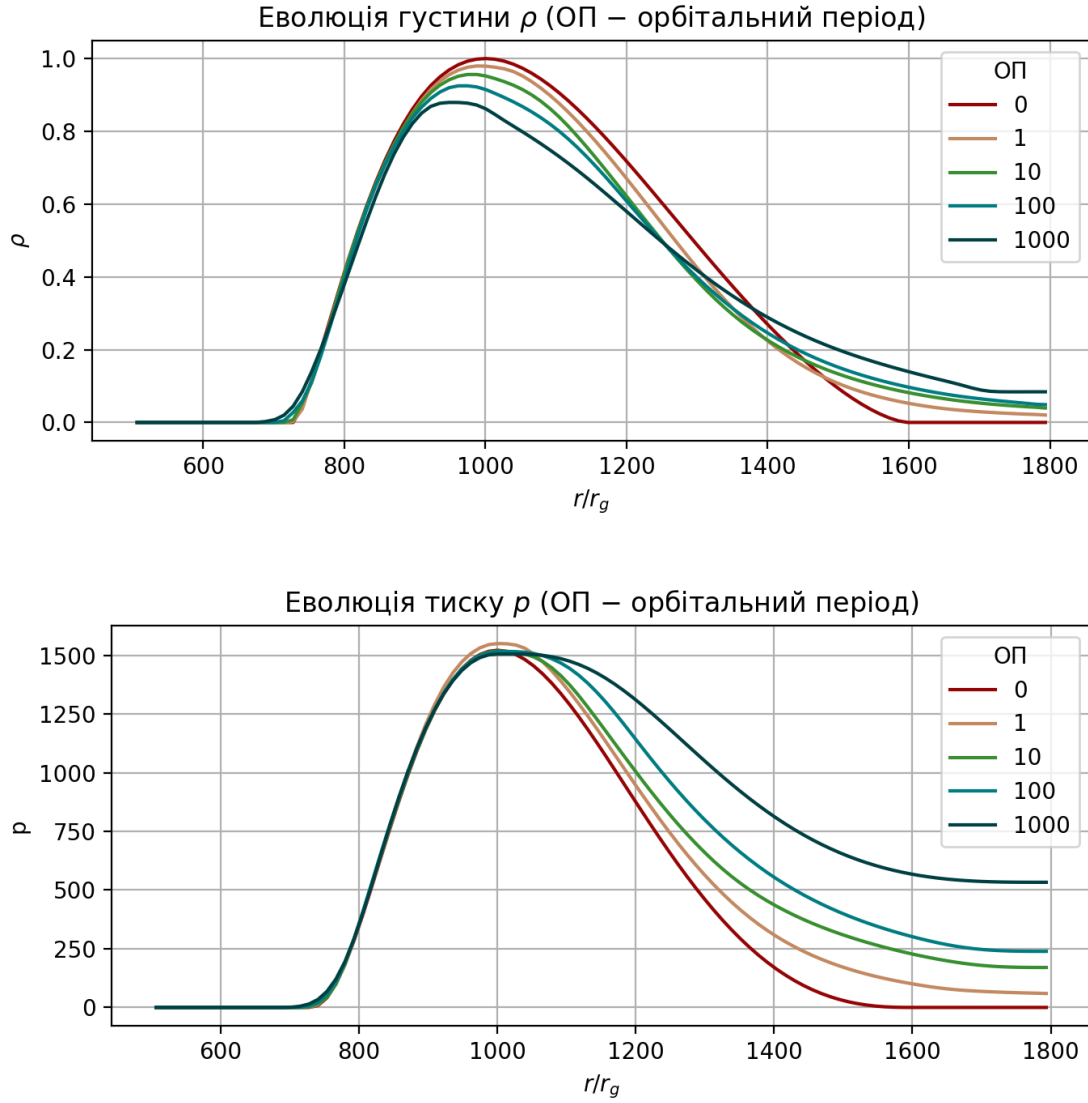


Рисунок 3.7 – Еволюція густини ρ (вгорі) та тиску p (внизу) в акреційному диску NGC 1068 у моменти $t = 0, 1, 10, 100, 1000$ ОП. Маса НМЧД $M_{\text{BH}} = 5 \times 10^6 M_{\odot}$, характерна температура системи $T = 10^5$ К.

Динаміка швидкостей на рис. 3.8 демонструє зміну профілю v_{ϕ} : у внутрішній частині диска швидкість зменшується. Радіальна швидкість v_r набуває від'ємних значень у лівій частині, та позитивних на зовнішніх краях, що вказує на розтікання речовини. Така поведінка відтворює сценарій, аналогічний до моделі для Cygnus X-1.

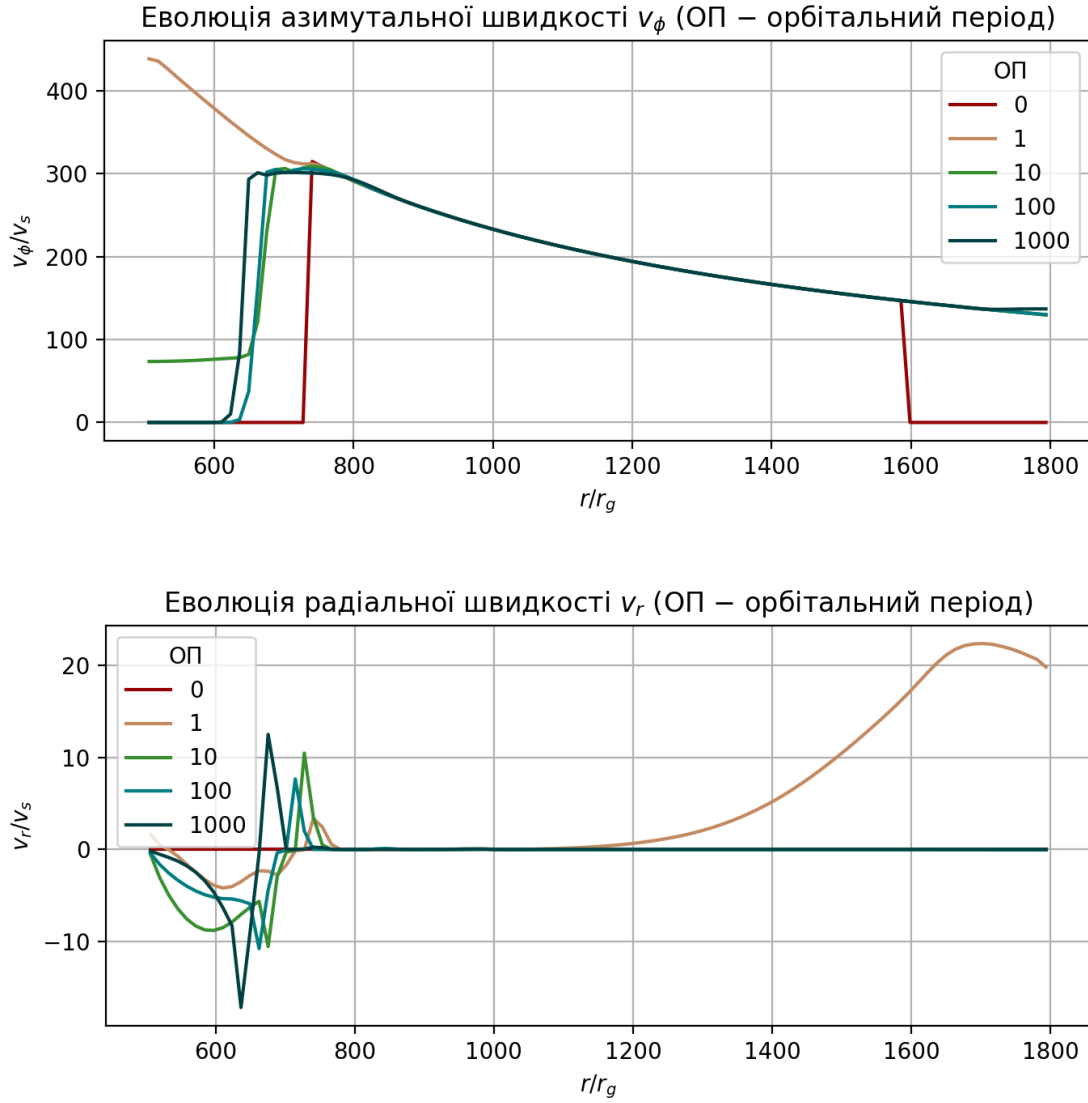


Рисунок 3.8 – Еволюція азимутальної v_ϕ (вгорі) та радіальної v_r (внизу) швидкості у моделі NGC 1068 в моменти $t = 0, 1, 10, 100, 1000$ ОП. Маса НМЧД $M_{\text{ВН}} = 5 \times 10^6 M_\odot$, характерна температура системи $T = 10^5$ К. Стрибкова поведінка радіальної швидкості v_r поблизу внутрішнього краю диска є індикатором формування нестійкої зони, що виникає на фоні різкого градієнта густини (на кордонах диска майже немає енергії) та переходу від квазі-кеплерівського обертання до нульової швидкості.

3.3 Попередня оцінка результатів

Було показано, що обрана модель демонструє хорошу масштабованість — відтворені закономірності динаміки зберігаються при переході від десятків сонячних мас до надмасивних об'єктів. Отримані розподіли примітивних змінних для розглянутих астрофізичних об'єктів вказують на те, що у динамічному часі

диск зберігає загальну структурну цілісність, однак поступово втрачає вигляд початкових профілів внаслідок зміщення та розширення його зовнішньої частини. Це свідчить про трансформацію внутрішньої енергії в кінетичну внаслідок перерозподілу маси під дією гравітації та тиску. Також, без обмежувальної умови для імпульсу в радіальному напрямку модель демонструвала нестабільність, що може бути чисельною і залежати від обраної сітки системи. Для перевірки цих припущень, у подальшому буде проведено серію тестів із модифікованими граничними умовами та варіативною сіткою. Це дозволить встановити природу спостережуваної нестабільності — фізичну чи чисельну — та підвищити точність і надійність моделі при описі довготривалої еволюції акреційних структур.

Висновки

За підсумками виконаної роботи було досягнуто наступних результатів:

1. Відтворено аналітичну модель сферично-симетричної акреції типу Бонді та плаского нев'язкого диска з політропною рівновагою, виходячи з умови сталості обертового моменту.
2. Отримано явний вираз для профілю густини та швидкості в рівноважному аксіально-симетричному диску в циліндричних координатах.
3. Розроблено програмний код на мові C++ для реалізації чисельного моделювання акреційного диска та сферичної акреції на базі гідродинамічного коду Athena++. Для подальшого аналізу та інтерпретації чисельних результатів створено серію скриптів на мові Python, що забезпечують візуалізацію профілів еволюції основних фізичних величин (густини, тиску, швидкості).
4. Проведено чисельне моделювання сферично-симетричної акреції, отримано і порівняно з аналітичним рішенням Бонді розв'язок для переходу потоку в надзвуковий режим.
5. Проведено моделювання нев'язкого акреційного диска з постійним питомим кутовим моментом і політропним рівнянням стану. Для моделювання використовувались типові характеристики двох класів астрофізичних об'єктів: рентгенівської подвійної Cygnus X-1 та активного ядра галактики NGC 1068.

Список використаних джерел

- [1] N. I. Shakura. *Accretion Flows in Astrophysics*. Т. 454. Astrophysics and Space Science Library. Springer International Publishing, 2018. DOI: 10.1007/978-3-319-93043-8.
- [2] H. C. Spruit. “Theory of Magnetically Powered Accretion Disks”. В: *arXiv e-prints* (2010). arXiv:1004.4545.
- [3] R. Hunt. “A Nonlinear Model of the Accretion Disk”. В: *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 154 (1971), с. 141—151.
- [4] J. C. B. Papaloizou та J. E. Pringle. “The dynamical stability of differentially rotating discs with constant specific angular momentum”. В: *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 208 (1984), с. 721—750. DOI: 10.1093/mnras/208.4.721.
- [5] S. K. Godunov. *A Difference Scheme for Numerical Solution of Discontinuous Solution of Hydrodynamic Equations*. Nauka, 1970.
- [6] Ya. B. Zel’dovich та Yu. P. Raizer. *Physics of Shock Waves and High-Temperature Hydrodynamic Phenomena*. Second edition. Nauka, 1966.
- [7] James M. Stone та ін. “The Athena++ Adaptive Mesh Refinement Framework: Design and Magnetohydrodynamic Solvers”. В: *The Astrophysical Journal Supplement Series* 249.1 (2020), с. 4. DOI: 10.3847/1538-4365/ab929b.
- [8] Athena++ Developers. *Athena++: An Adaptive Mesh Refinement Astrophysical MHD Code*. <https://www.athena-astro.app/index.html>. Accessed: 2025-05-13. 2020.
- [9] N. I. Shakura та R. A. Sunyaev. “Black holes in binary systems. Observational appearance”. В: *Astronomy and Astrophysics* 24 (1973), с. 337—355.
- [10] S. L. Shapiro та S. A. Teukolsky. *Black Holes, White Dwarfs, and Neutron Stars: The Physics of Compact Objects*. Wiley-Interscience, 1983.

- [11] H. Bondi. “On spherically symmetrical accretion”. B: *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 112 (1952), c. 195—204. DOI: 10.1093/mnras/112.2.195.
- [12] A. J. Young та ін. “A Complete Relativistic Ionized Accretion Disc in Cygnus X-1”. B: *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 325 (2001), c. 1045. DOI: 10.1046/j.1365-8711.2001.04498.x.
- [13] E.Yu. Bannikova та ін. “Dynamical model of an obscuring clumpy torus in AGNs: I. Velocity and velocity dispersion maps for interpretation of ALMA observations”. B: *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 504.2 (2021), c. 2060—2075. DOI: 10.1093/mnras/stab468.
- [14] Anton Dorodnitsyn та Tim Kallman. “A Physical Model for a Radiative, Convective Dusty Disk in AGN”. B: *The Astrophysical Journal* 910.1 (2021), c. 67. DOI: 10.3847/1538-4357/abe121.