

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна

Факультет радіофізики, біомедичної електроніки та комп'ютерних систем

Кафедра теоретичної радіофізики

ЗАТВЕРДЖУЮ

Завідувач кафедри

_____ В.В. Хардіков

підпис ініціали, прізвище

« ____ »

2025 року

Кваліфікаційна робота магістра

на тему: **Зондування гіротропії та діелектричної проникності з тороїдальним резонансом.**

Виконав: студент II курсу магістратури, групи РР-61
спеціальності 105 Прикладна фізика та наноматеріали

Данило Крот

Керівник

доктор фіз.-мат. наук,

доцент



Володимир ТУЗ

2025 рік

ЗМІСТ

ВСТУП	5
1.ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ.....	6
1.1. Мультипольний розклад розсіяного поля	6
1.2. Тороїдальний дипольний момент.....	7
1.2.1. Характеристика загального розподілу заряду та струму	7
1.2.2. Статичний тороїдальний дипольний момент.....	10
1.2.3. Динамічний тороїдальний дипольний момент	11
1.3. Сенсори на основі тороїдального дипольного моменту	13
1.4. Висновки до Розділу 1	15
2. ТЕОРІЯ РОЗСІЯННЯ. МУЛЬТИПОЛЬНІ КОЕФІЦІЄНТИ.....	17
2.1. Розрахунок перерізу розсіяння	17
2.2. Оптична теорема	18
2.2.1. Загальні мультипольні вирази у довгохвильовому наближенні.	20
2.3. Аналіз тороїдальних мод.....	21
2.3.1. Тороїдальна система координат	22
2.4. Введення скалярної форми векторного рівняння Гельмгольца	23
2.4.1. Введення векторного рівняння Гельмгольца	23
2.4.2. Вираз для електромагнітного поля через вектор Герца $\mathbf{P}$	24
2.4.3. Скаляризація векторного рівняння Гельмгольца	25

2.5. Розв'язання скалярного рівняння Гельмгольца	26
2.5.1. Розділення змінних	26
2.5.2. Розклад та розв'язання	26
2.5.3. Наближений розв'язок.....	27
2.6. Побудова компонент магнітного поля та розподіл мод	28
2.6.1. Вибір початкової форми вектора Герца	28
2.6.2. Отримання компонент магнітного поля	29
2.6.3. Розподіл різних модальних станів	29
2.7. Висновки до Розділу 2.....	30
3. ТОРОЇДАЛЬНИЙ КЛАСТЕР З ДІЕЛЕКТРИЧНИХ ДИСКІВ	31
3.1. Опис дискретної структури (кластера).....	32
3.2. Умови власних мод.....	34
3.3. Характеристики розсіяння	40
3.4. Висновки до Розділу 3.....	43
4. ТОРОЇДАЛЬНИЙ КЛАСТЕР ЯК СЕНСОР ГІРОТРОПІЇ	45
4.1. Тороїдальний соленоїд у зовнішньому полі	46
4.2. Власні стани поляризації.....	48
4.3. Детектування діелектричної проникності через власні стани	51
4.4. Числові розрахунки тороїдальні моди.....	51

4.4. Висновки до Розділу 4.....	55
5. ВИСНОВКИ.....	56
ЛІТЕРАТУРА	58
ДОДАТОК А. Скрипт для розрахунку розподілу полів для різних азимутальних мод	62
ДОДАТОК Б. Скрипт для розрахунку ефективної діелектричної проникності сегментованого кільця	65

ВСТУП

У цій кваліфікаційній роботі досліджено можливість використання тороїдальних дипольних мод у штучно створених електромагнітних структурах для вимірювання діелектричної проникності та зондування гіротропії матеріалів. Тороїдальні моменти, які історично вважалися малозначущими через слабку взаємодію з падаючою хвилею, демонструють у метаматеріальних системах унікальні властивості: сильну локалізацію електромагнітного поля, низькі випромінювальні втрати та нетривіальний магнітоелектричний зв'язок.

У роботі виконано аналітичний розгляд тороїдальних мод у ідеалізованому тороїдальному резонаторі, чисельний аналіз власних мод дискретних кластерів діелектричних дисків і порівняння їх із суцільним тором. Показано, що кластери забезпечують значно чистіший тороїдальний дипольний відгук завдяки гібридизації мод окремих елементів. Запропоновано новий підхід до сенсорювання: детектування зміни діелектричної проникності та гіротропії за рахунок збудження тороїдального резонансу, локалізованого у центральній області структури. Чисельні моделювання в COMSOL Multiphysics продемонстрували високу чутливість такої метамолекули до змін діагональних і недіагональних елементів тензорів діелектричної та магнітної проникностей.

Отримані результати підтверджують перспективність тороїдальних кластерів для створення високочутливих мікрохвильових сенсорів, зокрема для біомедичних і матеріалознавчих застосувань.

1. ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ

1.1. Мультипольний розклад розсіяного поля

Електромагнітне розсіювання є поширеним явищем у природі, яке описує перерозподіл енергії під час взаємодії електромагнітних хвиль з речовиною. Основний фізичний принцип електромагнітного розсіювання полягає у реакції внутрішніх зарядів речовини на падаючі електромагнітні хвилі. Коли електромагнітні хвилі стикаються з електронами, атомами, молекулами або більшими частинками, ці заряди коливаються під дією електричного поля, а потім випромінюють вторинні електромагнітні хвилі, утворюючи явище розсіювання. Водночас частина енергії падаючого випромінювання перетворюється на теплову енергію, цей процес називається поглинанням.

Розсіювання електромагнітних хвиль у всіх матеріальних системах пов'язане з їхньою неоднорідністю, це є ключовим фактором розсіювання як на мікрорівні молекулярної структури, так і на макрорівні форми об'єкта. Навіть у, здавалося б, однорідному середовищі, такому як чистий газ або тверда речовина, наявність атомів і молекул створює неоднорідність, що є фізичною основою розсіювання та поглинання світла.

Для вирішення складних питань електромагнітного розсіювання було розроблено математичний інструмент – метод мультипольного розкладу. Цей розклад спрощує аналіз електромагнітного поля, розкладаючи складний розподіл зарядів і струмів на низку простих мультипольних моментів (таких як електричний дипольний момент, магнітний дипольний момент, тороїдальний дипольний момент, тощо, див. рис. 1.1). Метод мультипольного розкладу встановлює кількісний зв'язок між мікроскопічним мультипольним збудженням і макроскопічною реакцією об'єкта, що розсіює. Математично цей метод полягає в представленні дальнього поля як суми різних джерел, обмежених невеликою

областю. Ці джерела можуть належати до одного або різних сімейств мультиполів, кожне з яких містить членів різного порядку, таких як диполі, квадруполі, октополі, тощо, які розрізняються залежно від відмінностей у режимах випромінювання.

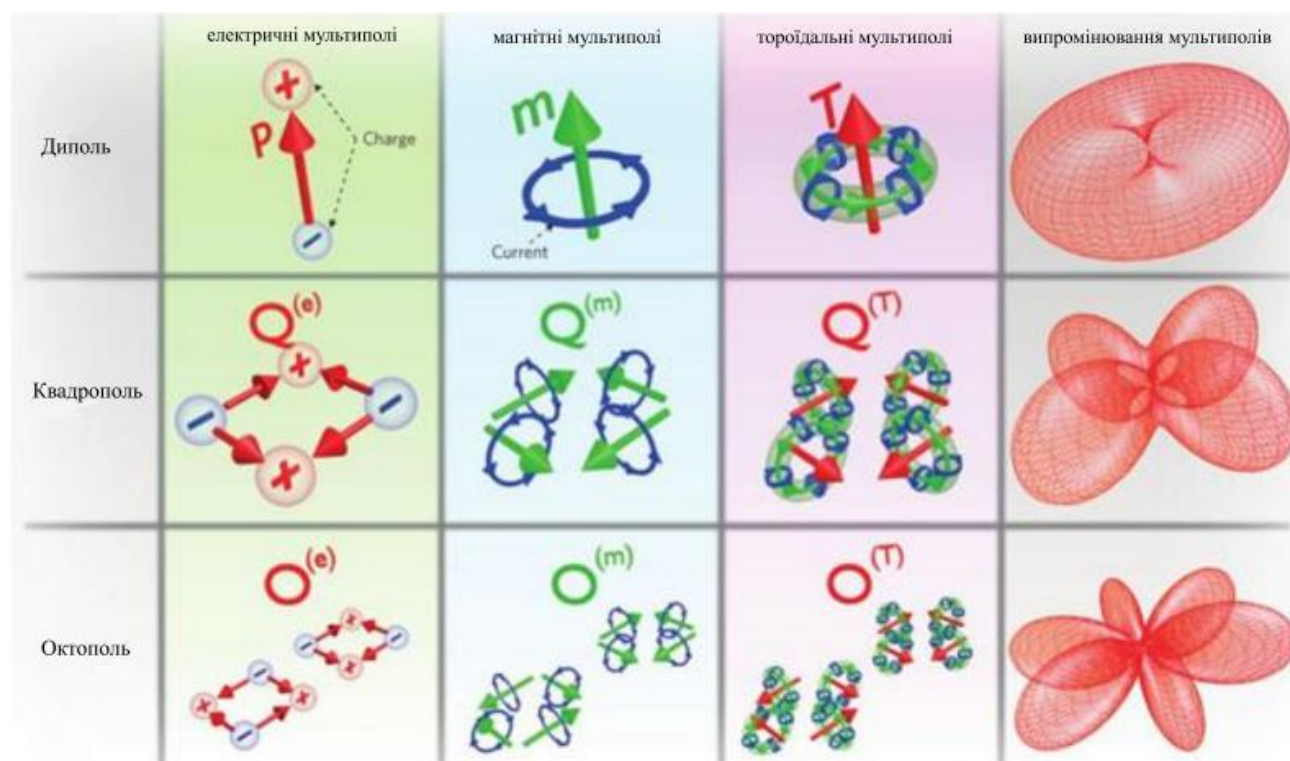


Рисунок 1.1. Сімейство мультиполів та їх члени різного порядку [5].

Розсіяння світла кластерами діелектричних частинок суттєво відрізняється від розсіяння окремими частинками через колективні електромагнітні взаємодії між елементами системи. Коли частинки наближені на відстані, порівнянні з довжиною хвилі, їхні власні резонансні моди, наприклад, електричні та магнітні дипольні й квадрупольні коливання, починають взаємодіяти й гібридизуватися. Унаслідок такої гібридизації виникають нові колективні моди з енергетичним розщепленням на «зв'язану» (bonding) та «розв'язану» (antibonding) конфігурації, що визначають спектр і спрямованість розсіяння. Це може призводити до появи супер-випромінювання або, навпаки, темних мод, до сильного перенормування ефективної поляризованості кластерів та формування направлених діаграм

розсіяння. Таким чином, кластеризація діелектричних частинок дозволяє тонко керувати спектральними й кутовими характеристиками розсіювання завдяки інженерії колективних резонансів.

1.2. Тороїдальний дипольний момент

1.2.1 Характеристика загального розподілу заряду та струму.

Кожен тип мультипольного моменту пов'язаний з певним розподілом заряду та струму на об'єкті, що розсіює електромагнітну хвилю. На рис. 1.2 показано базовий розподіл заряду та струму для електричного диполя, магнітного диполя, полярного (магнітного) тороїдального диполя та аксіального (електричного) тороїдального диполя. В електромагнетизмі найпростішою конфігурацією випромінювання є електричний дипольний момент, що складається з двох протилежних та розділених зарядів, див. рис. 1.2 (а). Електричний диполь є асиметричним, напрямком електричного диполя $\vec{p}$ змінюється при зміні порядку розташування зарядів [1].

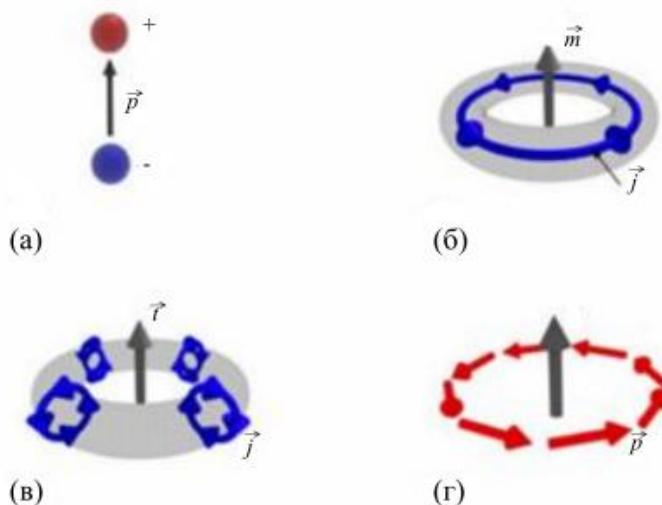


Рисунок 1.2. Чотири основні конфігурації електричних та магнітних мультиполів. (а) електричний диполь, (б) магнітний диполь, (в) полярний тороїдальний диполь, (г) аксіальний тороїдальний диполь.

$\mathcal{P}$		
$\mathcal{T}$	+	-
+	$\vec{g}$	$\vec{p}$
-	$\vec{m}$	$\vec{t}$

Рисунок 1.3. Характеристики поведінки чотирьох дипольних моментів під час інверсії в часі та просторі. $\mathcal{P}$ позначає оператор парності, який визначається як інверсія всіх просторових координат; $\mathcal{T}$ позначає оператор часової інверсії. Знак «+» позначає парну функцію, що проявляється при відповідній трансформації, а «-» позначає непарну функцію.

Іншою базовою конфігурацією струму є круговий струм, показаний на рис. 1.2 (б). Такий розподіл струму не має дивергенції, оскільки всі лінії струму є замкнутими. Така структура створює магнітний дипольний момент $\vec{m}$, перпендикулярний площині струму, напрямок якого залежить від напрямку руху струму. Магнітний дипольний момент є асиметричним, і залежить від напрямку протікання струму.

У такій структурі, як показано на рис. 1.2 (с), утворюється полярний тороїдальний дипольний момент $\vec{t}$. Він складається з кругових струмів, симетрично розташованих на поверхні кільця, так що котушка вигинається у вигляді кільця, а магнітні диполі на кільці з'єднані між собою. Такий розподіл струму також має нульову дивергенцію. Як при часовій інверсії, так і при інверсії просторових координат, зміна напрямку струму призведе до зміни напрямку кільцевого диполя, що є проявом антисиметрії для обох видів інверсії.

Замкнуте кільце, в якому електричні диполі з'єднані кінцями, утворює осьовий тороїдальний дипольний момент $\vec{g}$, див. рис. 1.2 (д). Однак є аргументи, що в рамках електродинаміки Максвелла-Лоренца такий розподіл зарядів є нестабільним. Тому осьовий тороїдальний мультипольний момент зазвичай вважається неможливим у мікроскопічних системах заряду-струму [2]. Але для

суцільних середовищ ситуація дещо інша. Наприклад, осьовий тороїдальний дипольний момент може бути створений за допомогою спінового струму, або в мікроскопічних кристалах з певною кристалічною структурою [3]. Оскільки в цій роботі ми розглядаємо системи частинок, а не суцільні середовища, далі зосередимося на (полярному) кільцевому дипольному моменті. Характерні симетрії чотирьох дипольних моментів показані на рис. 1.3.

1.2.2 Статичний тороїдальний дипольний момент

Статичний тороїдальний дипольний момент – це уявний статичний струм на поверхні кільцевої поверхні. Я. Зельдович був одним із перших вчених, який досліджував це поняття в різних галузях фізики, таких як атомна, ядерна та фізика твердого тіла. Кільцеві котушки в природі зустрічаються як на мікрорівні, так і на макрорівні [4].

На молекулярному рівні ДНК, молекули білків, бактеріофаги та олігосахариди, мають тенденцію утворювати тороїдальні структури [5]. Також тороїдальна симетрія часто зустрічається в твердих речовинах, наприклад, у фулеренах.

Статичні струми створюють постійне магнітне поле всередині тороїдальної структури, тоді як магнітне поле зовні тороїда в ідеальному випадку дорівнює нулю. Оскільки статичні тороїдальні дипольні моменти не генерують електромагнітного випромінювання, їх також називають анаполями, і вони не взаємодіють безпосередньо з електричним та магнітним полями.

У 1946 році Чарльз Кіттл [6] у своїй теоретичній роботі про феромагнітні домени вперше розглянув питання про тороїдальну впорядкованість дрібних частинок у твердому тілі, а згодом багато спостережень підтвердили існування статичних тороїдальних дипольних моментів. Магніт у вигляді тору здатний порушувати просторову інверсійну симетрію та часову інверсійну симетрію. Магнітоелектричні властивості тороїдального магніту мають потенційне

застосування в області зберігання даних. За допомогою зовнішнього електричного поля можна записувати або зчитувати інформацію в магнітному середовищі. У даний час вчені досліджують різні неорганічні сполуки, такі як борати, які виявляють характеристики статичної тороїдальної топології [7]. Однак через слабку взаємодію між статичними тороїдальними дипольними моментами спостереження їх довготривалої впорядкованості залишається технічною проблемою.

1.2.3 Динамічний тороїдальний дипольний момент

Взаємодія динамічного тороїдального дипольного моменту з електромагнітним полем є відносно слабкою, тому під сильним впливом електричного диполя та магнітного диполя вона маскується іншими мультиполями і важко розпізнається. Крім того, він має схожі з електричним диполем характеристики кутового моменту та випромінювання в дальньому полі (див. рис. 1.1). Незважаючи на це, між тороїдальним дипольним моментом та електричним дипольним моментом все ж є відмінності. По-перше, інтенсивність взаємодії тороїдального дипольного моменту з падаючим полем визначається не силою поля, а його похідною за часом. Навіть за відсутності зовнішнього електромагнітного поля тороїдальний дипольний момент може генерувати випромінювання, що здатне поширюватися. По-друге, потужність випромінювання тороїдального дипольного моменту пропорційна ω^6 , тоді як потужність випромінювання електричного дипольного моменту пропорційна ω^4 .

Крім того, векторне поле потенціалу, що утворюється тороїдальним дипольним моментом, також відрізняється від поля, що утворюється електричним дипольним моментом [9, 10]. У мультипольному розкладі в декартовій системі координат, шляхом розкладу векторного потенціалу або внутрішнього розподілу струму в ряд Тейлора, можна виявити наявність динамічних тороїдальних моментів [2, 11, 12]. Ці тороїдальні моменти відіграють

важливу роль в описі довільного розподілу заряду та струму і застосовуються в класичній та квантовій фізиці. Вони походять від особливого поперечного розподілу струму, пов'язаного з вектором намагніченості, і мають топологічні характеристики, подібні до полярного струму, що тече по поверхні тору [13, 14]. Таким чином, тороїдальні моменти відіграють важливу роль у дослідженні фізичних проблем, що мають тороїдальну топологічну структуру.

З поглибленням досліджень, тороїдальні моменти визнаються третьою родиною мультиполів, окрім електричних і магнітних мультиполів, завдяки їхній ключовій ролі в багатьох областях.

Інший метод розкладу поля розсіювання на основі сферичних гармонік, в якому сферичний електричний дипольний момент визначається шляхом прямого включення відповідного члена тороїдального дипольного моменту. У математичному дослідженні малих джерел, пов'язаних з електричним дипольним моментом і тороїдальним дипольним моментом (радіальна щільність струму $J_\omega(r)$), використовується наближення малих джерел сферичною функцією Бесселя, враховуючи сферичний векторний базис (a_1^ω) у векторному виразі електричного моменту другого порядку, формула 1.1 відображає наближення a_1^ω , де перший член $(k)^0$ виражає електричний дипольний момент (e^ω), а член k^0 виражає тороїдальний дипольний момент (t^ω) [15].

$$a_1^\omega \approx -\frac{1}{\pi\sqrt{3}} \int d^3j_\omega(r) - \frac{1}{\pi\sqrt{3}} k^2 \int d^3r \frac{1}{10} \{[r^\dagger J_\omega(r)]r - 2r^2 J_\omega(r)\} \quad (1)$$

З цього рівняння випливає, що якщо джерело містить електричний дипольний момент і тороїдальний дипольний момент, то електромагнітне розсіювання за межами джерела не можна визначити ці два дипольні внески окремо. У цьому підході з використанням сферичної гармоніки, тороїдальні мультиполі визначається як члени вищого порядку в розкладанні сферичних мультипольних коефіцієнтів електричної підсистеми, і тому не розглядається як окреме сімейство мультиполів.

Це також означає, що тороїдальні моменти не можуть збуджуватися незалежно, тобто не існує незалежного механізму зв'язку тільки для тороїдальних моментів.

Суперечність між двома різними підходами до визначення мультиполів призвела до дискусії про фізичну природу тороїдальних мультиполів і, зокрема, до спроб незалежного збудження тороїдального дипольного моменту, без збудження електричної дипольної частини.

Тороїдальний дипольний момент має унікальні електромагнітні властивості, такі як сильна локалізація електромагнітного поля, низькі втрати на випромінювання і висока добротність (Q -фактор). Ці властивості роблять тороїдальний дипольний момент привабливим для багатьох практичних застосувань, таких як зондування, нелінійна оптика та ефективне зберігання енергії. Попит на ці застосування привів до вивчення режимів резонансу тороїдальних моментів. Для штучно створених субхвильових структур збудження тороїдальних моментів може зменшити втрати на випромінювання і підвищити продуктивність пристрою. Шляхом адаптації дизайну структур з тороїдальною топологією можна ефективно послабити збудження електричних і магнітних мультиполів низького порядку так, щоб тороїдальний диполь міг відігравати домінуючу роль у процесі розсіювання.

1.3. Сенсори на основі тороїдального дипольного моменту

Ідея використання тороїдальних дипольних моментів для сенсорики є однією з ключових тем у сучасній фотоніці. Її привабливість ґрунтується на унікальних властивостях тороїдального дипольного моменту, який суттєво відрізняється від більш звичних електричних чи магнітних диполів. Основна проблема полягає в тому, що у більшості природних матеріалів ефекти, пов'язані з макроскопічною тороїдизацією, є надзвичайно слабкими порівняно зі

звичайними ефектами намагнічування та поляризації. Вони маскуються за набагато сильнішими електричними та магнітними відгуками, що робить важким їх експериментальне виявлення. Рішенням стали метаматеріали – штучні структури. Їхні елементарні комірки, «метамолекули», можна спроектувати для досягнення специфічної мети: сприяти збудженню бажаних тороїдальних моментів і, водночас, пригнічувати генерацію небажаних мультиполів нижчого порядку. Саме ця здатність виділити тороїдальний відгук назовні і зробила можливою розробку пристроїв на його основі [24].

Ключове питання тороїдальної сенсорики – де саме розміщувати аналіт, тобто речовину, яку потрібно виявити, для отримання найсильнішого відгуку. Як виявилось, для тороїдальних систем цей вибір є принциповим і призводить до двох абсолютно різних фізичних механізмів, що досі не були описані в літературі. Перший, більш поширений підхід, базується на розміщенні аналіту в «ємнісному зазорі» метамолекули. Це крихитний фізичний розріз на самому елементі, наприклад, у щілинному резонаторі. На противагу цьому, є можливість розміщувати аналіт в центрі метамолекули. Це внутрішній простір всередині всієї структури, в той час як ємнісні зазори на самих елементах залишаються відкритими [25].

Фізика старого методу є досить простою. Така структура працює як звичайний LC-резонансний контур. Будь-яка зміна діелектричної проникності в цьому зазорі призводить до зміни загальної ємності контуру, що, у свою чергу, зміщує його резонансну частоту. Такий механізм має мало спільного з власне тороїдальною відповіддю. Чутливість у цьому випадку прямо пропорційна самій резонансній частоті. Таким чином, у структурі, яка підтримує декілька резонансних мод, не потрібне збудження тороїдального дипольного моменту для отримання найвищої чутливості. Натомість потрібен резонанс із найвищою частотою.

Фундаментально інший фізичний механізм реалізується при розміщенні аналіту в центральній області метамолекули. У такій конфігурації чутливість системи набуває специфічного характеру, оскільки відгук пристрою зумовлений змінами діелектричної проникності безпосередньо в тій зоні, де тороїдальний дипольний режим локалізує та концентрує своє електричне поле. Фундаментальна фізика цього явища полягає у виникненні в тороїдальній структурі унікального магнітоелектричного зв'язку: макроскопічна магнітна відповідь системи, тобто намагніченість, починає ефективно контролюватися діелектричною проникністю навколишнього середовища. Прямим наслідком цього є те, що сама чутливість, як параметр, демонструє виражену резонансну поведінку саме поблизу частоти тороїдального дипольного моменту. Саме тут виявляється ключовий аспект даного підходу: можливість досягнення високої чутливості, що не корелює з частотою резонансу. Навіть якщо тороїдальний резонанс у системі має нижчу частоту, ніж інший домінуючий резонанс, наприклад, магнітний диполь, він, тим не менш, виявляє значно вищу чутливість до збурень діелектричної проникності, локалізованих у центрі. Цей результат є повністю відмінним від властивості стандартного LC-контур, де чутливість прямо пропорційна резонансній частоті.

1.4. Висновки до Розділу 1

У першому розділі проведено систематичний огляд сучасних теоретичних підходів до опису електромагнітного розсіювання та ролі тороїдальних моментів у формуванні резонансних явищ у штучно створених структурах. Показано, що мультипольний розклад є фундаментальним інструментом аналізу джерел розсіювання, дозволяючи розкласти складні розподіли зарядів і струмів на сукупність електричних, магнітних та тороїдальних мультиполів різних порядків. Особливу увагу приділено тороїдальному дипольному моменту як третій,

відмінній від класичних електричного й магнітного, родині мультипольних моментів.

Розглянуто статичні та динамічні тороїдальні дипольні конфігурації, описано їхні топологічні, симетрійні та фізичні властивості. Показано, що динамічний тороїдальний диполь, попри слабку взаємодію з падаючим полем, відіграє ключову роль у формуванні нетривіальних резонансів із сильно локалізованим полем і низькими втратами на випромінювання.

Окрему увагу приділено метаматеріалам, які дають змогу реалізувати «чистий» тороїдальний відгук шляхом геометричного та топологічного контролю струмів зміщення в субхвильових резонаторах. Показано, що такі структури можуть пригнічувати електричні та магнітні дипольні моди, посилюючи тороїдальний диполь і формуючи умови для реалізації анапольних станів із мінімальним випромінюванням.

У завершальній частині розділу наведено огляд застосування тороїдальних резонансів у сенсориці. Було показано, що розміщення аналіту у центрі тороїдальної метаструктури приводить до появи нового типу чутливості, зумовленого магнітоелектричним зв'язком, який виникає саме для тороїдальних мод. Це забезпечує резонансне підсилення відгуку на зміни діелектричної проникності, не пов'язане з частотою основного LC-резонансу, що принципово відрізняє тороїдальні сенсори від звичайних.

Таким чином, у Розділі 1 сформовано теоретичну основу для подальшого аналізу тороїдальних мод у діелектричних метамолекулах, визначено ключові фізичні принципи, що лежать в основі їхнього збудження, та окреслено перспективи практичного використання тороїдальних резонансів у високочутливих сенсорних пристроях.

2. ТЕОРІЯ РОЗСІЯННЯ. МУЛЬТИПОЛЬНІ КОЕФІЦІЄНТИ.

2.1. Розрахунок перерізу розсіювання

З полів розсіювання можна отримати ключові фізичні характеристики. Серед них – поперечний переріз розсіювання, що визначається як відношення чистої потужності (W), яка проходить крізь уявну сферичну поверхню з центром на частинці, до інтенсивності падаючого опромінення ($\mathcal{P}_{\text{inc}}$). Для кількісної оцінки потужності електромагнітної енергії, яку частинка абсорбує (W_{abs}) або розсіює (W_{sca}), вводяться поняття поперечного перерізу поглинання (σ_{abs}) та поперечного перерізу розсіювання (σ_{sca}):

$$\sigma_{\text{abs}} = \left(\frac{W_{\text{abs}}}{\mathcal{P}_{\text{inc}}} \right), \quad \sigma_{\text{sca}} = \left(\frac{W_{\text{sca}}}{\mathcal{P}_{\text{inc}}} \right). \quad (2.1)$$

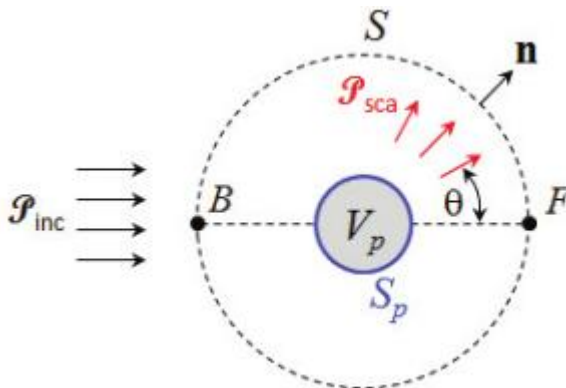


Рисунок 2.1. Уявна сфера S навколо об'єму частинки V_p , обмеженого поверхнею S_p . Амплітуда розсіювання оцінюється у прямому напрямку в точці F .

Повний поперечний переріз розсіювання, або поперечний переріз екстинкції – це кількість енергії, видаленої з поля, що падає, внаслідок поглинання та розсіювання. Згідно з енергетичним балансом, поперечний переріз екстинкції є суперпозицією поперечних перерізів розсіювання та поглинання:

$$\sigma_{\text{ext}} = \sigma_{\text{abs}} + \sigma_{\text{sca}}. \quad (2.2)$$

Звідки визначається потужність енергетичних втрат:

$$Q_{\text{loss}} = \frac{1}{2} \text{Re}[\mathbf{J}_{\text{tot}} \cdot \mathbf{E}^* + j\omega \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}^*]. \quad (2.3)$$

Тут сумарний струм є комбінацією струму провідності та струму зміщення: $\mathbf{J}_{\text{tot}} = \sigma \mathbf{E} + j\omega \mathbf{D}$. Відповідно, враховуються втрати на провідність, поляризаційні та магнітні втрати. Загальна абсорбована енергія розраховується через інтегрування потужності втрат по всьому об'єму частинки:

$$W_{\text{abs}} = \frac{1}{2} \iiint_{V_p} \text{Re}[(\sigma \mathbf{E} + j\omega \mathbf{D}) \cdot \mathbf{E}^* + j\omega \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}^*] dV. \quad (2.4)$$

Розсіяна потужність розраховується шляхом інтегрування вектора Пойнтінга по уявній сферичній поверхні, що оточує частинку

$$W_{\text{sca}} = \frac{1}{2} \oint_S \text{Re}[\mathbf{E}_{\text{sca}} \times \mathbf{H}_{\text{sca}}^*] \cdot \mathbf{n} dS. \quad (2.5)$$

2.2. Оптична теорема

У фізиці оптична теорема являє собою фундаментальний принцип теорії розсіювання хвиль, який корелює амплітуду розсіювання попереду із загальним поперечним перерізом розсіювача. Виведення цієї теореми можливе безпосередньо з аналізу скалярного хвильового рівняння. Сам процес розсіювання визначається суперпозицією падаючого та розсіяного хвильових полів, що схематично продемонстровано на рисунку 2.2 [27].

Якщо плоска хвиля падає на об'єкт, то амплітуда хвилі на великій відстані від об'єкта, що розсіює, нехтуючи членами вищого порядку, задається

$$\psi \approx e^{ikx} + f(\theta) \left(\frac{e^{ikr}}{r} \right). \quad (2.6)$$

Оптична теорема стверджує про зв'язок між повним поперечним перерізом та амплітудою розсіювання. Зазвичай її записують у формі:

$$\sigma_{\text{ext}} = \frac{\frac{4\pi}{k} \text{Im}\{f(0)\}}{E_{\text{inc}}}. \quad (2.7)$$

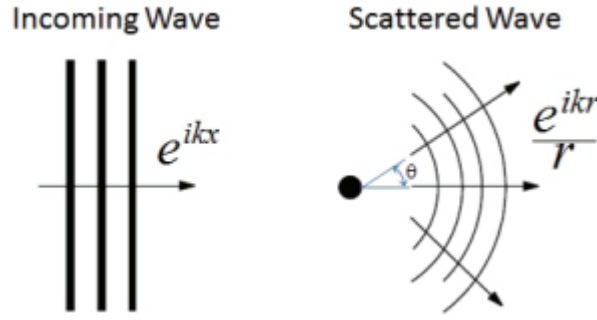


Рисунок 2.2. Плоска хвиля з фазовим множником e^{ikx} розсіюється частинкою. На великій відстані розсіяна хвиля апроксимується сферичною хвилею $\frac{e^{ikr}}{r}$.

Таким чином, теорема встановлює пряму залежність між величиною поперечного перерізу екстинкції та уявною частиною амплітуди розсіювання, обчисленою для нульового кута. Проте, екстинкція зумовлена комбінованим ефектом процесів розсіювання та абсорбції. Якщо процес розсіювання є інтегральним по всіх просторових кутах, то абсорбція часто виявляє ізотропний характер [28].

Середовище COMSOL Multiphysics містить вбудований вузол для розрахунку характеристик дальньої зони, який автоматично обчислює відповідні змінні, що визначаються як:

$$E_{\text{far}} = \lim_{r \rightarrow \infty} r E_{\text{sca}}. \quad (2.8)$$

Змінні дальньої зони, зокрема E_{far} , репрезентують амплітуду розсіювання, а не фізичну напруженість електричного поля, і відповідно поперечний переріз екстинкції може бути обчислений безпосередньо, без необхідності окремої оцінки поперечних перерізів абсорбції та розсіювання, за допомогою виразу:

$$\sigma_{\text{ext}} = \frac{4\pi}{k E_{\text{inc}}} \text{Im}\{E_{\text{far}}(0)\}. \quad (2.9)$$

2.2.1. Загальні мультипольні вирази у довгохвильовому наближенні

Поперечний переріз розсіювання частинки (або системи частинок) апроксимується мультипольним розкладом в декартовій системі координат, в якому враховуються лише домінантні внески найнижчого порядку [29]

$$\sigma_{\text{sca}} \simeq \frac{k_0^4}{6\pi\varepsilon_0^2|\mathbf{E}|^2} |\mathbf{p}|^2 + \frac{k_0^6\varepsilon_s}{720\pi\varepsilon_0^2|\mathbf{E}|^2} \sum_{\alpha\beta} |Q_{\alpha\beta}|^2 + \frac{k_0^4\varepsilon_s\mu_0}{6\pi\varepsilon_0|\mathbf{E}|^2} |\mathbf{m}|^2 + \frac{k_0^6\varepsilon_s^2\mu_0}{80\pi\varepsilon_0|\mathbf{E}|^2} \sum_{\alpha\beta} |M_{\alpha\beta}|^2. \quad (2.10)$$

У цьому виразі k_0 – хвильове число у вакуумі, ε_0 – діелектрична проникність у вакуумі, ε_s – відносна діелектричну проникність оточуючого середовища, μ_0 – магнітна проникність у вакуумі. Для об'єкта розсіювання, геометричні розміри якого є меншими за довжину хвилі падаючого випромінювання λ , точні мультипольні вирази можуть бути апроксимовані за допомогою довгохвильового наближення [30]:

$$\sigma_{\text{sca}} \simeq \frac{k_0^4}{6\pi\varepsilon_0^2|\mathbf{E}|^2} |\mathbf{p}|^2 + \frac{k_0^6\varepsilon_s}{720\pi\varepsilon_0^2|\mathbf{E}|^2} \sum_{\alpha\beta} |Q_{\alpha\beta}|^2 + \frac{k_0^4\varepsilon_s\mu_0}{6\pi\varepsilon_0|\mathbf{E}|^2} |\mathbf{m}|^2 + \frac{k_0^6\varepsilon_s^2\mu_0}{80\pi\varepsilon_0|\mathbf{E}|^2} \sum_{\alpha\beta} |M_{\alpha\beta}|^2 = (\text{ED} + \text{TD}) + \text{EQ} + \text{MD} + \text{MQ}. \quad (2.11)$$

У довгохвильовому наближенні внесок від усіх членів вищих порядків не враховується, а електричний дипольний (ED) момент визначається як:

$$\mathbf{p}_0 = \frac{i}{\omega} \int_V \mathbf{J}_D d\mathbf{r}. \quad (2.12)$$

Магнітний дипольний (MD) момент:

$$\mathbf{m}_0 = \frac{1}{2} \int_V [\mathbf{r} \times \mathbf{j}] d\mathbf{r}. \quad (2.13)$$

Тороїдальний дипольний (TD) момент

$$\mathbf{T} = \frac{1}{10} \int_V \mathbf{J}_D d\mathbf{r}. \quad (2.14)$$

Електричний квадрупольний (EQ) момент:

$$\widehat{Q}^0 = \frac{3i}{\omega} \int_V (\mathbf{j} \otimes \mathbf{r} + \mathbf{r} \otimes \mathbf{j} - \frac{2}{3}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{j})\widehat{U}) d\mathbf{r}. \quad (2.15)$$

Магнітний квадрупольний (MQ) момент

$$\widehat{M}^0 = \frac{1}{3} \int_V ([\mathbf{r} \times \mathbf{j}] \otimes \mathbf{r} + \mathbf{r} \otimes [\mathbf{r} \times \mathbf{j}]) d\mathbf{r}. \quad (2.16)$$

У процесі чисельного моделювання в COMSOL, загальний поперечний переріз розсіювання спершу визначається через безпосередній розрахунок густини індукованого струму зміщення $\mathbf{J}_D(\mathbf{r})$ в об'ємі дисків. Згодом, на основі отриманого розподілу $\mathbf{J}_D(\mathbf{r})$, розраховуються мультипольні моменти та їхні відповідні внески в поперечний переріз розсіювання в рамках довгохвильового наближення. Усі вищезазначені мультиполі розглядаються як такі, що розташовані в початку системи координат, який збігається з центром мас системи частинок.

2.3. Аналіз тороїдальних мод

Рівняння Гельмгольца є фундаментальним інструментом для опису хвильових процесів, а знаходження його точного розв'язку в тороїдальній системі координат має виняткове значення для розвитку теорії розсіювання. Глибоке розуміння специфіки поширення хвиль у тороїдальній геометрії дозволяє ефективно вирішувати низку прикладних задач, зокрема проектування сенсорних систем.

У цьому розділі показано, що за допомогою методу розділення змінних векторне рівняння Гельмгольца можна спростити до скалярного рівняння, що уможливорює аналіз розподілу електромагнітного поля в тороїдальній системі. Перевага цього методу полягає в тому, що він перетворює складну векторну задачу на скалярну, яку легше розв'язувати. За допомогою цього методу можна отримати власні функції та власні значення електромагнітного поля в

тороїдальній системі, а відтак проаналізувати моди та дисперсійні характеристики електромагнітних хвиль. Аналіз розподілу електромагнітного поля у вакуумі, проведений для різних азимутальних індексів ($m = 0, 1, 2$), дозволяє не лише візуалізувати структуру поля, а й виявити фундаментальні закономірності поширення хвиль у тороїдальних системах.

2.3.1. Тороїдальна система координат

Для математичного моделювання досліджуваної структури введено тороїдальну систему координат (ρ, θ, ϕ) , схему якої наведено на рис. 3.1. Цей координатний базис, на відміну від стандартної декартової системи (x, y, z) , є просторовим узагальненням полярних координат, де геометрія визначається двома фундаментальними параметрами: великим радіусом R та малим радіусом r , які задають форму тора відносно центру координат. Просторова орієнтація точки описується пологоїдальним кутом θ , що відраховується від нормалі до площини тора та визначає висоту перерізу, а також азимутальним (тороїдальним) кутом ϕ , який характеризує поворот навколо центральної осі симетрії. Застосування саме тороїдальних координат для систем із відповідною топологією дозволяє суттєво спростити аналітичні вирази, що значно спрощує математичний апарат дослідження та забезпечує коректну фізичну інтерпретацію поведінки системи.

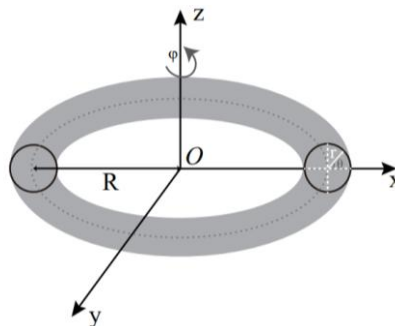


Рисунок 2.3. Осі тороїдальної системи координат, де R - відстань від центру O до центру перерізу трубки, а r - радіус перерізу трубки.

2.4. Введення скалярної форми векторного рівняння Гельмгольца

2.4.1. Введення векторного рівняння Гельмгольца

Рівняння Максвелла – це фундаментальні рівняння, що описують електромагнітне поле, і включають наступні чотири рівняння:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad (2.17)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (2.18)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (2.19)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (2.20)$$

Для спрощення аналізу рівнянь Максвелла зазвичай припускають, що електромагнітне поле є гармонічним у часі, тобто електричне та магнітне поля змінюються з часом за гармонічним законом:

$$\mathbf{E}(r, t) = \mathbf{E}(r)e^{-i\omega t}, \quad \mathbf{B}(r, t) = \mathbf{B}(r)e^{-i\omega t}. \quad (2.21)$$

Спочатку розглянемо гармонічне поле, підставивши його в закон Фарадея:

$$\nabla \times \mathbf{E} = i\omega \mathbf{B}. \quad (2.22)$$

Аналогічно підставимо гармонічне поле в закон Ампера-Максвелла:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + i\mu_0 \epsilon_0 \omega \mathbf{E}. \quad (2.23)$$

Якщо припустити, що ми знаходимось у зоні без джерел ($\mathbf{j} = 0$), рівняння спрощується до

$$\nabla \times \mathbf{B} = -i\mu_0 \epsilon_0 \omega \mathbf{E}. \quad (2.24)$$

Отримання векторного рівняння Гельмгольца з закону Фарадея маємо:

$$\mathbf{B} = \frac{1}{i\omega} \nabla \times \mathbf{E}. \quad (2.25)$$

Підставляючи це у спрощене рівняння Ампера-Максвелла (2.23):

$$\nabla \times \left(\frac{1}{i\omega} \nabla \times \mathbf{E} \right) = -i\mu_0 \epsilon_0 \omega \mathbf{E}. \quad (2.26)$$

Після спрощення отримуємо:

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = \mu_0 \epsilon_0 \omega^2 \mathbf{E}. \quad (2.27)$$

Це векторне рівняння Гельмгольца, яке описує характеристики електромагнітного поля в області без джерел, тому воно застосовне для опису поширення електромагнітних хвиль у вільному просторі або пасивному середовищі. У цих областях рівняння показує, що електричне та магнітне поля залежать лише від власного просторового розподілу та характеристик поширення, а не від розподілу зарядів чи струмів.

2.4.2. Вираз для електромагнітного поля через вектор Герца

В електромагнітній теорії електричне поле $\mathbf{E}$ зазвичай можна виразити через скалярний електричний потенціал Φ та векторний потенціал $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{E} = -\nabla\Phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla\Phi - i\omega \mathbf{A}. \quad (2.28)$$

Для того, щоб задовольнити умову $\nabla \cdot \vec{E} = 0$, необхідно ввести додатковий член для компенсації дивергенції вектора Герца. Тому ми розглядаємо електричне поле в такій формі:

$$\mathbf{E} = -i\omega \mathbf{P} + \nabla \text{div} \mathbf{P}$$

Щоб забезпечити правильний фізичний зміст виразу для електричного поля, амплітуда електричного поля повинна відповідати частоті. Тому вводиться коефіцієнт $\mu_0 \epsilon_0 \omega^2$, щоб гарантувати правильну розмірність та фізичний зміст. Остаточно отримуємо повний вираз для електричного поля:

$$\mathbf{E} = \mu_0 \epsilon_0 \omega^2 \mathbf{P} + \nabla(\nabla \cdot \mathbf{P}). \quad (2.29)$$

Щоб знайти форму представлення магнітного поля $\vec{B}$, підставимо вираз для $\vec{E}$ у (2.22):

$$\text{rot}(\mu_0 \epsilon_0 \omega^2 \mathbf{P} + \text{grad} \text{div} \mathbf{P}) = -i\omega \mathbf{B}. \quad (2.30)$$

Оскільки $\text{curlgrad} = 0$, виносимо константи та перегрупуємо:

$$\mathbf{B} = i\omega \mu_0 \epsilon_0 \text{rot} \mathbf{P}. \quad (2.31)$$

Підставимо рівняння в (2.24):

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{P} - \nabla(\nabla \cdot \mathbf{P}) = \mu_0 \epsilon_0 \omega^2 \mathbf{P}. \quad (2.32)$$

2.4.3. Скаляризація векторного рівняння Гельмгольца

Застосуємо векторну тотожність для подвійного векторного добутку, підставимо тотожність у рівняння(2.32) та скоротимо на $\nabla(\nabla \cdot \mathbf{P})$:

$$-\nabla^2 \mathbf{P} = \mu_0 \epsilon_0 \omega^2 \mathbf{P}. \quad (2.33)$$

Розкладемо рівняння на скалярну форму:

$$\nabla^2 P_j + \mu_0 \epsilon_0 \omega^2 P_j = 0, \quad (j = x, y, z). \quad (2.34)$$

Перетворимо P_x, P_y, P_z у P_ρ, P_θ, P_ϕ :

$$\begin{aligned} P_\rho(\rho, \theta, \phi) &= -P_x(\rho, \theta, \phi)\cos\theta\cos\phi - P_y(\rho, \theta, \phi)\cos\theta\sin\phi + P_z(\rho, \theta, \phi)\sin\theta \\ P_\theta(\rho, \theta, \phi) &= P_x(\rho, \theta, \phi)\sin\theta\cos\phi - P_y(\rho, \theta, \phi)\sin\theta\sin\phi + P_z(\rho, \theta, \phi)\cos\theta \\ P_\phi(\rho, \theta, \phi) &= -P_x(\rho, \theta, \phi)\sin\phi + P_y(\rho, \theta, \phi)\cos\phi \end{aligned} \quad (2.37)$$

Переходимо до скалярної форми рівняння Гельмгольца в тороїдальній системі координат:

$$\frac{\partial}{\partial \rho} \rho(1 - \rho \cos \theta) \frac{\partial P_j}{\partial \rho} + \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{(1 - \rho \cos \theta)}{\rho} \frac{\partial P_j}{\partial \theta} + \frac{\rho}{1 - \rho \cos \theta} \frac{\partial^2 P_j}{\partial \phi^2} + k^2 \rho(1 - \rho \cos \theta) P_j = 0, \quad (2.38)$$

де

$$k^2 = \mu_0 \epsilon_0 \omega^2 R^2 = \left(\frac{\omega R}{c}\right)^2. \quad (2.39)$$

У рівнянні Гельмгольца для електромагнітних хвиль квадрат хвильового числа зазвичай визначається як $k^2 = \mu_0 \epsilon_0 \omega^2$. Це визначення походить з розв'язку хвильового рівняння за певних умов, де ϵ_0 - діелектрична проникність вакууму, μ_0 - магнітна проникність вакууму, а ω - кутова частота. У тороїдальній системі координат розглядається головний тор радіусом R . Щоб використовувати тороїдальну систему координат для опису хвиль, що поширюються на такій геометричній структурі, необхідно включити цей радіус у визначення хвильового числа. Це робиться для того, щоб хвильове число k , визначене на торі, враховувало вплив просторової геометрії. Тому у вираз для хвильового числа вводиться R .

2.5. Розв'язання скалярного рівняння Гельмгольца

2.5.1. Розділення змінних

Для спрощення рівняння представимо $P_j(\rho, \theta, \phi)$ у формі з розділеними змінними:

$$P_j(\rho, \theta, \phi) = \frac{\psi_m(\rho, \theta) e^{im\phi}}{\sqrt{1 - \rho \cos \theta}}. \quad (2.40)$$

Підставивши цей вираз у рівняння (2.38), отримаємо:

$$\frac{\partial^2 \psi_m}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi_m}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \psi_m}{\partial \theta^2} + k^2 \psi_m = \frac{m^2 - \frac{1}{4}}{(1 - \rho \cos \theta)^2} \psi_m. \quad (2.41)$$

Ця підстановка допомагає звести задачу до розв'язання рівняння відносно ψ_m .

2.5.2. Розклад та розв'язання

При $m = \frac{1}{2}$, неоднорідний член у правій частині зникає:

$$\frac{\partial^2 \psi_m}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi_m}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \psi_m}{\partial \theta^2} + k^2 \psi_m = 0. \quad (2.42)$$

У загальному випадку, при $m \neq \frac{1}{2}$, наявність неоднорідного члена праворуч унеможливорює пряме розв'язання методом розділення змінних. Застосуємо метод розкладу в ряд, розклавши $\frac{1}{(1 - \rho \cos \theta)^2}$ у степеневий ряд:

$$(1 - \rho \cos \theta)^{-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \rho^n \cos^n \theta. \quad (2.43)$$

Підставивши це в рівняння, отримаємо рівняння у формі ряду:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \psi_m}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \psi_m}{\partial \theta^2} + k^2 \psi_m = \mu^2 \psi_m \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) \rho^n \cos^n \theta, \quad (2.44)$$

де

$$\mu^2 = m^2 - \frac{1}{4}; \quad \kappa^2 = k^2 - m^2 + \frac{1}{4}. \quad (2.45)$$

2.5.3. Наближений розв'язок

Якщо обмежити досліджувану довжину хвилі $\lambda_\phi = \frac{2\pi R}{m}$ так, щоб вона була значно більшою за характерний розмір поперечного перерізу ($\rho \ll 1$) можна отримати наближений розв'язок. У цьому випадку членами високого порядку в неоднорідній частині можна знехтувати, залишивши лише наближення низького порядку:

$$\psi_m \approx A J_\nu(\kappa \rho) \cos \nu \theta, \quad (2.46)$$

де J_ν — функція Бесселя першого роду.

Підставивши розв'язок низького порядку в неоднорідний член праворуч у вихідному рівнянні, можна рекурсивно знайти поправки вищого порядку. Наприклад, скоригований розв'язок першого порядку:

$$\psi_{m,1} = \frac{A\mu^2}{4\kappa} [J_{\nu+1}(\kappa \rho) \cos(\nu - 1)\theta - J_{\nu-1}(\kappa \rho) \cos(\nu + 1)\theta] \rho^2. \quad (2.47)$$

Можна далі побудувати форму загального розв'язку:

$$\psi_m = \psi_{m,0} + \psi_{m,1} + \psi_{m,2} + \dots + \psi_{m,n}, \quad (2.48)$$

де кожен член отримуються рекурсивно з попереднього. Форма повного розв'язку включає внески різних коливальних мод, особливо в залежності від ρ і θ .

Для спрощення розв'язку ми обмежуємось вивченням мод низького порядку, припускаючи, що поздовжня довжина хвилі $\frac{2\pi R}{m}$ значно більша за характерний розмір поперечного перерізу тора $2\rho_0 R$. Цю умову можна записати як:

$$m\rho_0 < \pi. \quad (2.49)$$

У цьому випадку можна розглядати лише розв'язок найнижчого порядку ψ_m :

$$\psi_{m,0} = A J_\nu(\kappa \rho) \cos \nu \theta. \quad (2.50)$$

Дослідимо властивості нулів $J_\nu(\kappa \rho)$. Щоб задовольнити граничні умови розв'язку (поле затухає до нуля на границі перерізу тора), необхідно, щоб:

$$\kappa \rho_0 = 2.4048, \quad (2.51)$$

де 2.4048 - це перший нуль функції J_0 .

Поєднавши рівняння (2.51) і (2.45), отримаємо:

$$\frac{2.4048^2}{\rho_0^2} = \frac{\omega^2 R^2 c^2}{c^2} - m^2 + \frac{1}{4}. \quad (2.52)$$

Після спрощення отримуємо дисперсійне співвідношення:

$$\omega^2 = \left(\frac{5.7832}{\rho_0^2} + m^2 - \frac{1}{4} \right) \frac{c^2}{R^2}. \quad (2.52)$$

Різні модові числа m визначають дискретизацію частоти, що безпосередньо пов'язано з симетрією тороїдальної системи.

2.6. Побудова компонент магнітного поля та розподіл мод

2.6.1. Вибір початкової форми вектору Герца

На основі отриманих вище результатів виберемо відповідний вираз для вектору Герца $\vec{P}$, переконавшись, що він відповідає граничним умовам та симетрії задачі. Вектор Герца може бути представлений у такій формі:

$$P_j(\rho, \theta, \phi) = \frac{J_0(\kappa\rho) \cos m\phi}{\sqrt{1-\rho\cos\theta}} e^{i\omega t}, \text{ або } P_j(\rho, \theta, \phi) = \frac{J_0(\kappa\rho) \sin m\phi}{\sqrt{1-\rho\cos\theta}} e^{i\omega t}, \quad (2.53)$$

де $m = 0, 1, 2 \dots \frac{1}{k}$ — модове число, що вказує на симетрію та кількість коливань магнітного поля вздовж тороїдального напрямку. Підставивши компоненту вектора Герца для конкретної моди у вираз (2.37), отримаємо конкретні вирази для P_ρ, P_θ та P_ϕ

$$\begin{aligned} P_\rho &= \frac{J_0(\kappa\rho) \sin \theta \cos m\phi}{\sqrt{1-\rho\cos\theta}} e^{i\omega t}, \\ P_\theta &= \frac{J_0(\kappa\rho) \cos \theta \cos m\phi}{\sqrt{1-\rho\cos\theta}} e^{i\omega t}, \\ P_\phi &= 0. \end{aligned} \quad (2.54)$$

2.6.2. Отримання компонент магнітного поля

Підставивши вектор Герца у вираз (2.31), отримаємо три компоненти магнітного поля:

$$\begin{aligned} B_\rho &= i\omega\epsilon\mu \frac{mJ_0(\kappa\rho)\cos\theta \sin m\phi}{\sqrt{(1-\rho\cos\theta)^3}} e^{i\omega t}, \\ B_\theta &= -i\omega\epsilon\mu \frac{mJ_0(\kappa\rho)\sin\theta \sin m\phi}{\sqrt{(1-\rho\cos\theta)^3}} e^{i\omega t}, \\ B_\phi &= i\omega\epsilon\mu \frac{J_0(\kappa\rho) - 2\kappa(1-\rho\cos\theta)J_1(\kappa\rho)\cos\theta}{2\sqrt{(1-\rho\cos\theta)^3}} \cos m\phi e^{i\omega t}. \end{aligned} \quad (2.55)$$

2.6.3. Розподіл різних модальних станів

На рисунку 3.2 показано розподіл магнітного поля для різних чисел мод $m = 0, 1, 2$. Число мод m визначає симетрію та кількість осциляцій магнітного поля в тороїдальному напрямку:

$m = 0$ – Магнітне поле тече вздовж тора, утворюючи однорідну кільцеподібну структуру

$m = 1$ – Квадрупольна мода, магнітне поле тече симетрично у протилежних напрямках по обидва боки.

$m = 2$ – Октупольна мода, з'являється більш складна симетрія.

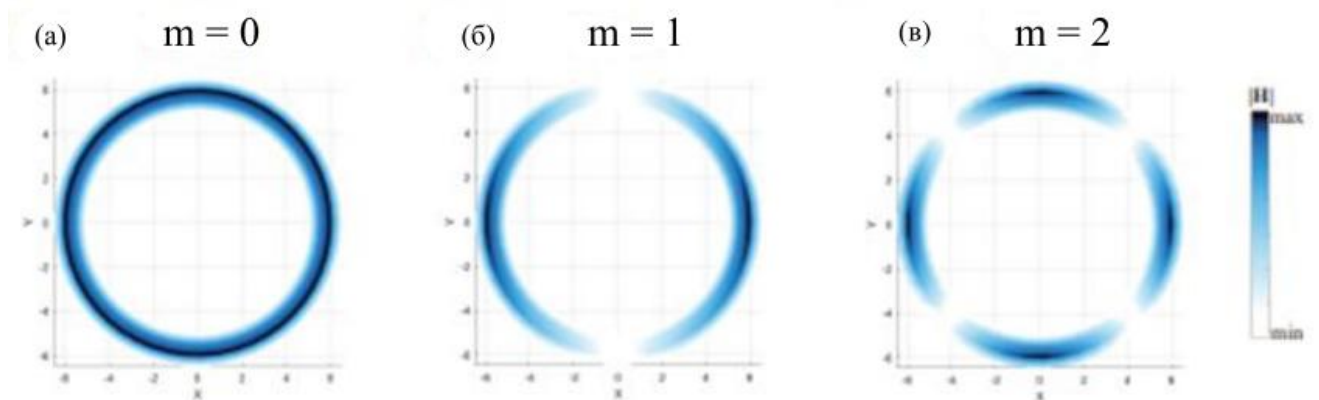


Рисунок 3.2 Розподіл магнітного поля для різних азимутальних чисел мод (а) $m = 0$, (б) $m = 1$, (в) $m = 2$, що ілюструє симетрію та кількість осциляцій поля в тороїдальному резонаторі. Розрахунковий код наведено у Додатку А.

2.7 Висновки до Розділу 2

У цьому розділі було представлено детальний аналітичний підхід до дослідження електромагнітного поля всередині ідеалізованого тороїдального резонатора. Шляхом перетворення векторного рівняння Гельмгольца у скалярну форму за допомогою вектору Герца, а також застосування методу відокремлення змінних у тороїдальній системі координат, було отримано точні власні функції та відповідні електромагнітні поля. Цей процес дозволив формалізувати умови існування та поширення електромагнітних хвиль у тороїдальній системі, що є ключовим для розуміння природи тороїдальних мод.

Аналіз показав, що модальні стани системи дискретизуються азимутальним числом m . Для найнижчої моди $m = 0$ було встановлено структуру магнітного поля, що має замкнену, однорідну, кільцеподібну форму вздовж тора. Ця мода слугує прямим теоретичним аналогом ідеальної тороїдальної моди, яка характеризується мінімальним зв'язком з вільним простором, що потенційно забезпечує високу добротність. Крім того, було проаналізовано моди $m = 1$ та $m = 2$, які демонструють квадрупольну та октупольну симетрії відповідно, що надає фундаментальну основу для класифікації вищих порядків тороїдальних мультипольних відгуків.

Виведене дисперсійне співвідношення кількісно пов'язує власні частоти осциляцій із геометричними параметрами тора та числом моди. Таким чином, результати цього розділу забезпечують необхідну теоретичну базу та еталонну модель для подальшого чисельного моделювання та підтвердження існування, збудження та властивостей тороїдальних мод у діелектричних структурах, які розглядаються у наступних розділах.

3. ТОРОЇДАЛЬНИЙ КЛАСТЕР З ДІЕЛЕКТРИЧНИХ ДИСКІВ

Діелектричні метаматеріали, як правило, формуються з діелектричних частинок із високим показником заломлення, що здатні підтримувати електромагнітні резонанси типу Мі. Геометричні резонансні явища виникають за умови, коли довжина світлової хвилі всередині діелектричного тіла стає порівнянною з його характерними розмірами (наприклад, радіусом). В рамках електромагнітної теорії взаємодію світла з такими структурами доцільно описувати методом мультипольного розкладу, який пов'язує резонанс із набором сферичних гармонік (диполів, квадруполів, октуполів тощо), що збуджуються в резонаторі. Цей підхід є ефективним як для простих, так і для архітектурно складних кластерних структур.[31-34]

Модальний склад та особливості розсіювання об'єктів із кільцевою топологією були ґрунтовно досліджені в широкому спектрі дисциплін: від фізики плазми, мікрохвильових та оптичних хвилеводів до атмосферних і космічних явищ. Електромагнітне розсіювання електричними, магнітними та тороїдальними диполями з подібними характерними розмірами R масштабується як $\sim \frac{R}{\lambda}$, $\left(\frac{R}{\lambda}\right)^2$ та $\left(\frac{R}{\lambda}\right)^3$ відповідно, де λ — довжина хвилі у вільному просторі. При аналізі розсіювання малими частинками ($R \ll \lambda$) кількісна оцінка внеску тороїдального диполя ускладнюється, оскільки його ефект часто маскується домінуючими електричними та магнітними мультиполями [35, 36] .

Конкуренція між різними електромагнітними модами може пригнічувати прояв тороїдальних дипольних мод. Порівняно з електричними та магнітними аналогами, збудження тороїдальних дипольних мод є складнішим завданням, що часто вимагає специфічних конфігурацій падаючої хвилі або особливих механізмів зв'язку. Завдяки раціональному проектуванню метаматеріалів здійснюються спроби реалізувати умови для збудження чистої тороїдальної

моди. У кластерних системах електромагнітна взаємодія призводить до гібридизації мод окремих частинок, формуючи колективну кластерну моду. У полі розсіювання таких композитних структур можуть домінувати мультиполі вищих порядків. Зокрема, для кластерів із кільцевою топологією динамічний тороїдальний момент може стати визначальним, коли електричний дипольний момент другого порядку є максимальним. Втім, за умови низького контрасту діелектричної проникності між резонатором та середовищем, електричний дипольний внесок залишатиметься значним.

Даний розділ присвячено системному дослідженню власних мод та характеристик розсіювання як суцільного кільця, так і дискретного кільцевого кластера. Метою є визначення умов збудження ізольованої тороїдальної дипольної моди та виявлення спільних і відмінних рис у цих системах. У роботі застосовано метод вторинного мультипольного розкладу для декомпозиції внесків різних мультиполів у поле розсіювання, що дозволяє поглибити розуміння фізики тороїдальних мод у кільцеподібних системах.

3.1. Опис дискретної структури (кластера)

У цьому підрозділі проведено порівняльний аналіз модального складу та характеристик розсіювання двох типів структур: суцільного тороїдального кільця та дискретного кільцевого кластера, сформованого з набору частинок-резонаторів. Геометрія обох систем описується ідентичними габаритними параметрами: великим радіусом R (відстань від центру симетрії до осі твірної) та малим радіусом перерізу R_d . Складові елементи дискретного кільця мають радіус R_d і висоту H_d (рис. 4.1). Оскільки геометричні розміри досліджуваних об'єктів відповідають міліметровому масштабу, резонансні явища досліджуються у мікрохвильовому діапазоні.

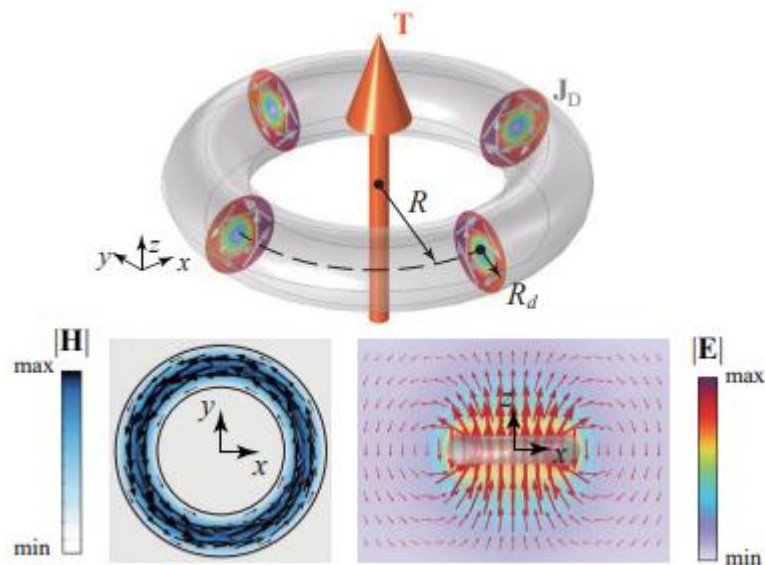


Рисунок 3.1 Початок декартової системи координат суміщено з геометричним центром тора. Холодна/тепла кольорова гама відображає амплітуду, а стрілки – напрямки векторів магнітного/електричного поля. Синя та помаранчева стрілки вказують орієнтацію магнітного (**m**) та тороїдального **T** дипольних моментів відповідно. Геометричні параметри резонатора: $R = 4.0$ мм, $R_d = 1.0$ мм, $\epsilon_{\text{eff}} = \epsilon_{\text{torus}} = 60$.

Дискретна структура складається з N частинок, які рівномірно розподілені вздовж азимутального напрямку, формуючи симетричну кільцеву конфігурацію. Розглядається випадок виготовлення структур із немагнітного матеріалу з діелектричною проникністю ϵ , що знаходяться у середовищі з $\epsilon_s = 1$ (повітря). Для коректного зіставлення електромагнітних властивостей необхідно забезпечити відповідність між ефективною діелектричною проникністю неоднорідного кільця (що складається з дисків $\epsilon = \epsilon_{\text{disk}}$) та проникністю суцільного тора ($\epsilon = \epsilon_{\text{torus}}$) за умови фіксованих R і R_d . Визначення необхідного значення ϵ_{disk} з урахуванням висоти дисків H_d та їх кількості N здійснено за допомогою наближення Максвелла-Гарнетта. Цей метод дозволяє розрахувати

ефективну проникність композитної структури, базуючись на діелектричних параметрах та об'ємній частці її складових [37].

$$\varepsilon_{\text{eff}} = \frac{NV_{\text{disk}}\varepsilon_{\text{disk}} + (V_{\text{torus}} - NV_{\text{disk}})\varepsilon_{\text{gap}}}{V_{\text{torus}}}, \quad (3.1)$$

де $V_{\text{torus}} = 2\pi^2 R R_d^2$ та $V_{\text{disk}} = \pi R_d^2 H_d$ є об'ємами тора та диска відповідно.

Підставивши вирази об'ємів у формулу (3.1) та виконавши прості алгебраїчні перетворення, отримаємо:

$$\varepsilon_{\text{eff}} = \varepsilon_s + NH_d \frac{\varepsilon_{\text{disk}} - \varepsilon_s}{2\pi R}.$$

Тоді необхідна відносна діелектрична проникність диска дорівнює:

$$\varepsilon_{\text{disk}} = \frac{2\pi R}{NH_d} \varepsilon_{\text{torus}} - \frac{2\pi R - NH_d}{NH_d} \varepsilon_s.$$

Надалі ми покладемо $\varepsilon_{\text{eff}} = \varepsilon_s$. Скрипт для розрахунку ефективної діелектричної проникності кільця наведено у Додатку Б.

Після визначення діелектричної проникності $\varepsilon_{\text{disk}}$ стає можливим перехід до розв'язання задачі щодо модального складу та характеристик розсіювання однорідних і неоднорідних кілець, де кількість N та висота H_d дисків виступають змінними параметрами. Усі подальші симуляційні дослідження за цими напрямками виконуються у програмному середовищі COMSOL Multiphysics. Для цього застосовується метод мультипольного розкладу з інтеграцією відповідних розрахункових виразів у COMSOL. Використовуються як точні формулювання цих рівнянь, так і їхнє довгохвильове наближення [30, 38].

3.2. Умови власних мод

На цьому етапі дослідження виконано чисельний розрахунок спектрів власних частот для суцільних і дискретних кільцевих структур. Власні моди, що відповідають дискретним резонансним станам системи, визначаються її геометрією та матеріальними параметрами. Математично задача зводиться до розв'язання рівняння Гельмгольца з відповідними граничними умовами

неперервності полів на межі розділу середовищ. Отримані розв'язки мають вигляд комплексних частот $\omega = \omega' + i\omega''$, де дійсна частина ω' відповідає резонансній частоті, а уявна ω'' характеризує загасання, зумовлене радіаційними втратами енергії у відкритій системі.

Розраховані власні частоти дозволяють відтворити просторовий розподіл електромагнітного поля моди. Класифікація мод та виокремлення тороїдального дипольного відгуку здійснюється через аналіз топології поля та обчислення мультипольних моментів шляхом інтегрування по об'єму джерела.

Процедура ідентифікації цільової моди передбачає комплексний аналіз структури поля та ваги мультипольних складових. Спершу здійснюється попередній відбір мод із вираженою вихровою конфігурацією магнітного поля всередині структури. Такий розподіл, індукований полоїдальними струмами зміщення у поперечному перерізі, є характерною ознакою тороїдальної моди. На завершальному етапі обрана мода проходить верифікацію шляхом кількісного порівняння внесків мультипольних моментів.

У межах методу мультипольного розкладу, що базується на сферичних гармоніках, повний електричний дипольний момент (ED_{total}) визначається з урахуванням тороїдальної складової. При цьому тороїдальні моменти розглядаються як члени вищих порядків у розкладі коефіцієнтів електричного диполя.

Для обраної моди з відповідною топологією поля режим тороїдального диполя ідентифікується за умови, що в розкладі $ED_{\text{exact}}^{\text{total}}$ домінує член другого порядку. Тобто, внесок тороїдального моменту значно перевищує внесок члена першого порядку - квазістатичного електричного диполя $|\mathbf{p}_0| \ll \eta|\mathbf{T}|$. Внесками інших членів розкладу в довгохвильовому наближенні (LWA) у цьому випадку нехтують.

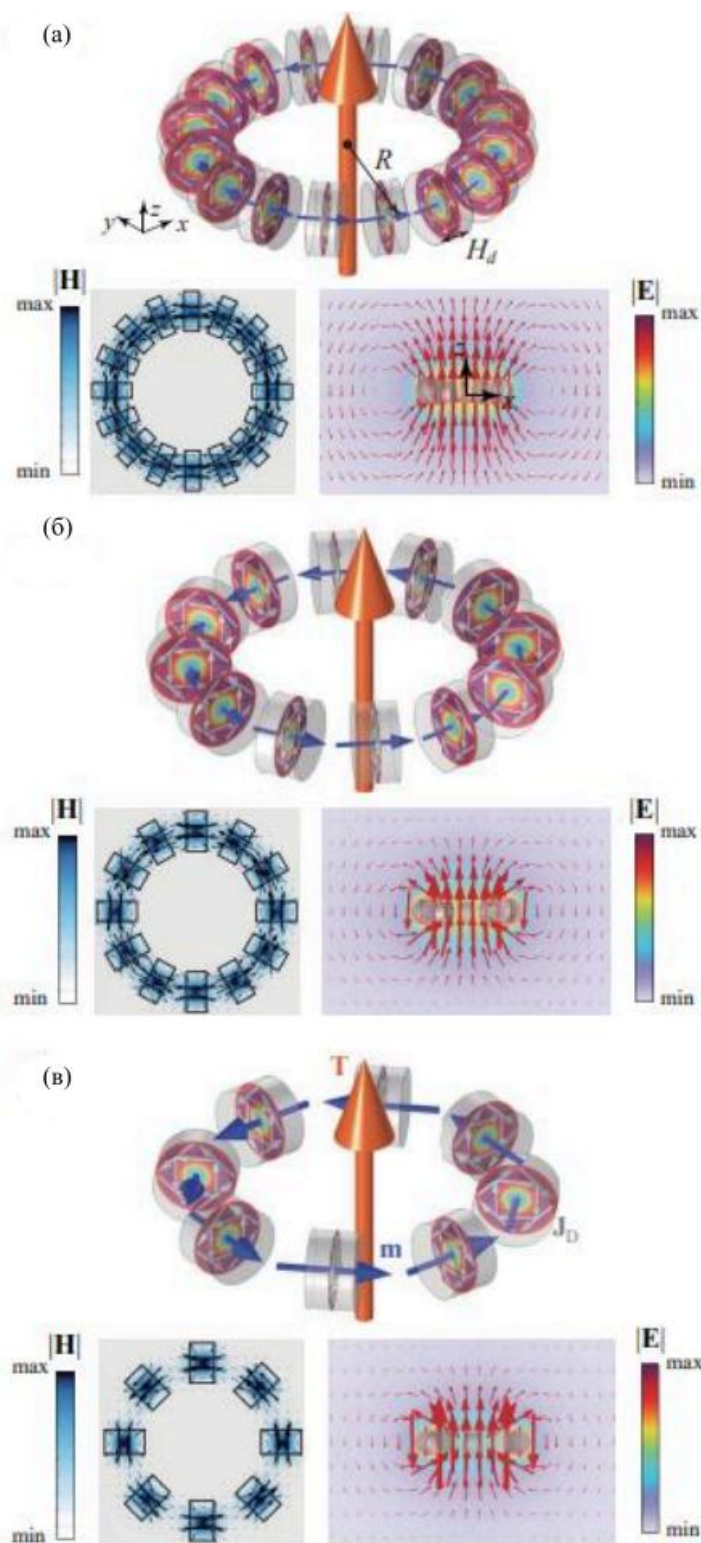


Рисунок 3.2 Розподіл власних мод електричного (теплі тони, червоні стрілки) та магнітного (холодні тони, чорні стрілки) полів для кластерів із кількістю елементів (а) $N=16$, (б) $N=12$ та (в) $N=8$. Геометрія кільця фіксована: $R = 4.0$ мм, $R_d = 1.0$ мм, $\varepsilon_{\text{eff}} = 60$.

Завдяки узгодженню геометричних пропорцій забезпечується спектральна близькість власних частот відповідних мод у суцільному кільці та дискретному кластері. При цьому топологія власного поля в кільці з частинок відтворює розподіл поля в ідеальному суцільному торі. На основі цих критеріїв було ідентифіковано тороїдальну дипольну моду для кластерів із різними параметрами N та N_d (рис. 3.2). Для візуалізації симетричних мод обрано конфігурації з парною кількістю частинок ($N = 8, 12, 16$), що не обмежує загальності отриманих результатів.

Замкнена геометрія масиву діелектричних дисків сприяє ефективному збудженню тороїдального моменту. На відміну від суцільного аналога, моди неоднорідного кільця формуються внаслідок електромагнітного зв'язку між частинками та гібридизації їхніх індивідуальних резонансів. З розподілу електричного поля, рис. 3.2 випливає, що в кожному диску індукується локальний магнітний дипольний (MD) момент, орієнтований вздовж осі частинки. Ці моменти утворюють уздовж периметра кільця вихрову конфігурацію типу «голова-до-хвоста». Таке розташування створює колективну моду, яка на макрорівні проявляється як сумарний тороїдальний дипольний момент T :

$$T \cong \sum_{n=1}^N [\mathbf{r}_n \times \mathbf{m}_n],$$

що є основним мультипольним моментом у спроектованій ультраструктурі.

Кореляція між модами тора та дискретного кільця підтверджується аналізом топології їхніх власних електромагнітних полів. Електричне поле кільцевої моди формує замкнені контури навколо осі симетрії, індукуючи вихрове магнітне поле. Така конфігурація призводить до взаємної компенсації магнітних моментів MD , тоді як тороїдальний момент TD залишається домінуючим. Проте моди дискретного кільця демонструють резонансну поведінку на специфічних частотах, які визначаються розміром, відстанню між дисками та їхніми діелектричними властивостями. Це може призводити до

складної поведінки та зсувів частоти. Щоб дослідити цю залежність, було розраховано власну частоту, добротність та внески ED і TD тороїдальної моди спроектованої структури як функцію ϵ_{torus} . Результати узагальнені на рис. 3.3-3.4.

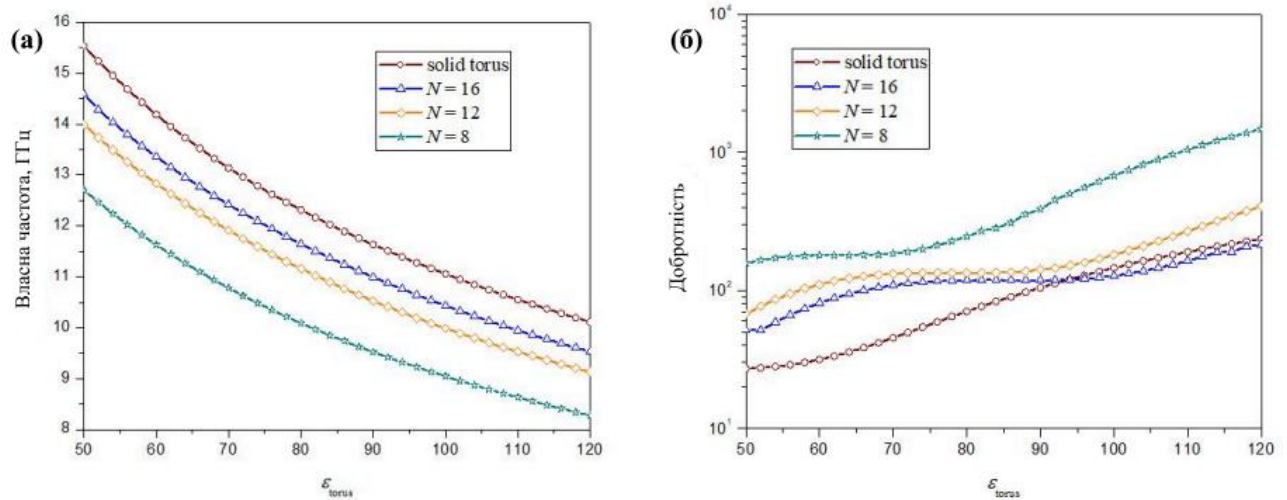


Рисунок 3.3 (а) залежність власної частоти та (б) добротності від діелектричної проникності тора.

З даних, наведених на рис. 3.3(а) випливає, що попри спектральну близькість, власна частота суцільного тора дещо перевищує частоту його дискретного аналога. Зменшення кількості елементів N у кластері призводить до зростання цього частотного відхилення. Проте абсолютна величина зсуву залишається стабільною при варіюванні ϵ_{torus} . Зростання діелектричної проникності супроводжується закономірним зниженням власних частот, що узгоджується з положеннями класичної електродинаміки.

Залежність добротності від проникності має складніший характер (див. рис. 3.3 (б)). Q -фактор моди дискретного кільця перевищує відповідний показник суцільного тора, що пояснюється більшою діелектричною проникністю дисків, що ефективніше локалізує електромагнітне поле в діелектричному резонаторі. Цей механізм також обґрунтовує вищу добротність структур із меншою кількістю елементів. Слід зазначити, що для неоднорідного кільця добротність

моди спочатку поступово зростає, а потім виходить на плато в певному діапазоні зі збільшенням діелектричної проникності, тоді як для моди суцільного кільця добротність завжди монотонно зростає.

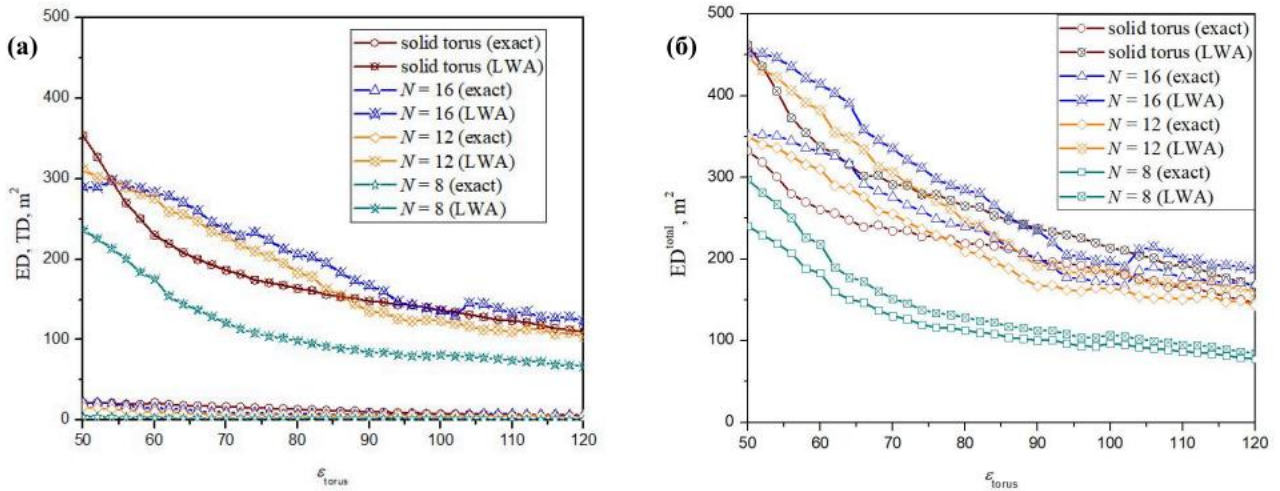


Рисунок 3.4 (а) Внески електричного диполя (ED) та тороїдального диполя (TD), розраховані в довгохвильовому наближенні (LWA), та (б) залежність повного електричного диполя (ED_{total}), розрахованого в LWA, і точного виразу від відносної діелектричної проникності діелектричного тора.

Для підтвердження тороїдальної модальної характеристики заданої моди, було перевірено, що домінування внеску TD-моменту при збільшенні діелектричної проникності зберігається. Як демонструє рис. 3.4(а), зі зростанням ϵ_{torus} амплітуди ED та TD моментів зменшуються, при цьому ED прямує до нуля, а загальний відгук системи наближається до квазістатичної границі. Перехід до квазістатичного режиму підтверджується порівняльним аналізом повного електричного дипольного моменту $ED_{\text{total}} = ED + TD$, розрахованого за точною формулою та в наближенні LWA (рис. 3.4(б)). Зі зростанням діелектричної проникності спостерігається очікувана зближення розв'язків для обох типів структур.

3.3. Характеристики розсіяння

У даному розділі досліджено характеристики розсіяння спроектованої структури в частотному діапазоні існування тороїдальної дипольної моди. Ефективне збудження цієї моди відбувається за виконання умов резонансу з падаючою хвилею при відповідній поляризації. Необхідною умовою збудження кільцевої моди є колінеарність вектору напруженості електричного поля лінійно поляризованої хвилі та вектору тороїдального диполя $\mathbf{T}$. Моделювання виконувалося для випадку бічного опромінення структури плоскою електромагнітною хвилею, що поширюється вздовж осі x із z -поляризацією $\mathbf{E} = \{0, 0, E_z\}$, хвильовий вектор $\mathbf{k} = \{k_x, 0, 0\}$, $k = \frac{2\pi f}{c}$, де $f \in [9, 16]$ ГГц, c — швидкість світла у вакуумі).

Розрахунок повного перерізу розсіяння виконано двома методами: перший шляхом чисельного інтегрування вектора Пойнтінга по замкненій поверхні у дальній зоні; другий методом аналітичного підсумовування мультипольних внесків. У другому методі використано довгохвильове наближення (LWA). Для верифікації точності LWA додатково розраховувався повний електричний дипольний момент у точній формі ($ED_{\text{exact}}^{\text{total}}$).

На рисунку 3.5(а) показано спектральні характеристики перерізу розсіяння діелектричного тору та відповідні мультипольні внески. По-перше, видно, що повний переріз розсіяння (SCS) узгоджується з сумою мультипольних внесків (SUM), за винятком випадків, коли виникають резонанси вищих порядків, які не враховані в SCS. Очевидно, що кожен резонанс у SCS є результатом інтерференції внесків кількох мультиполів, причому внесок ED у досліджуваному діапазоні частот можна ігнорувати. Зокрема, у першому резонансі домінують внески MD та MQ, тоді як у другому резонансі переважають внески MD та TD. Примітно, що частота другого резонансу близька до власної

частоти тороїдальної моди, що чітко відображено у спектрі розсіяння. Характеристики резонансу тороїдальної моди додатково підтверджуються тим фактом, що амплітуди TD та $ED_{\text{exact}}^{\text{total}}$ майже однакові на резонансній частоті. Загалом, можна зробити висновок, що резонанс тороїдальної моди в діелектричному кільці виникає на тлі MD та MQ, а також внесків мультиполів вищих порядків.

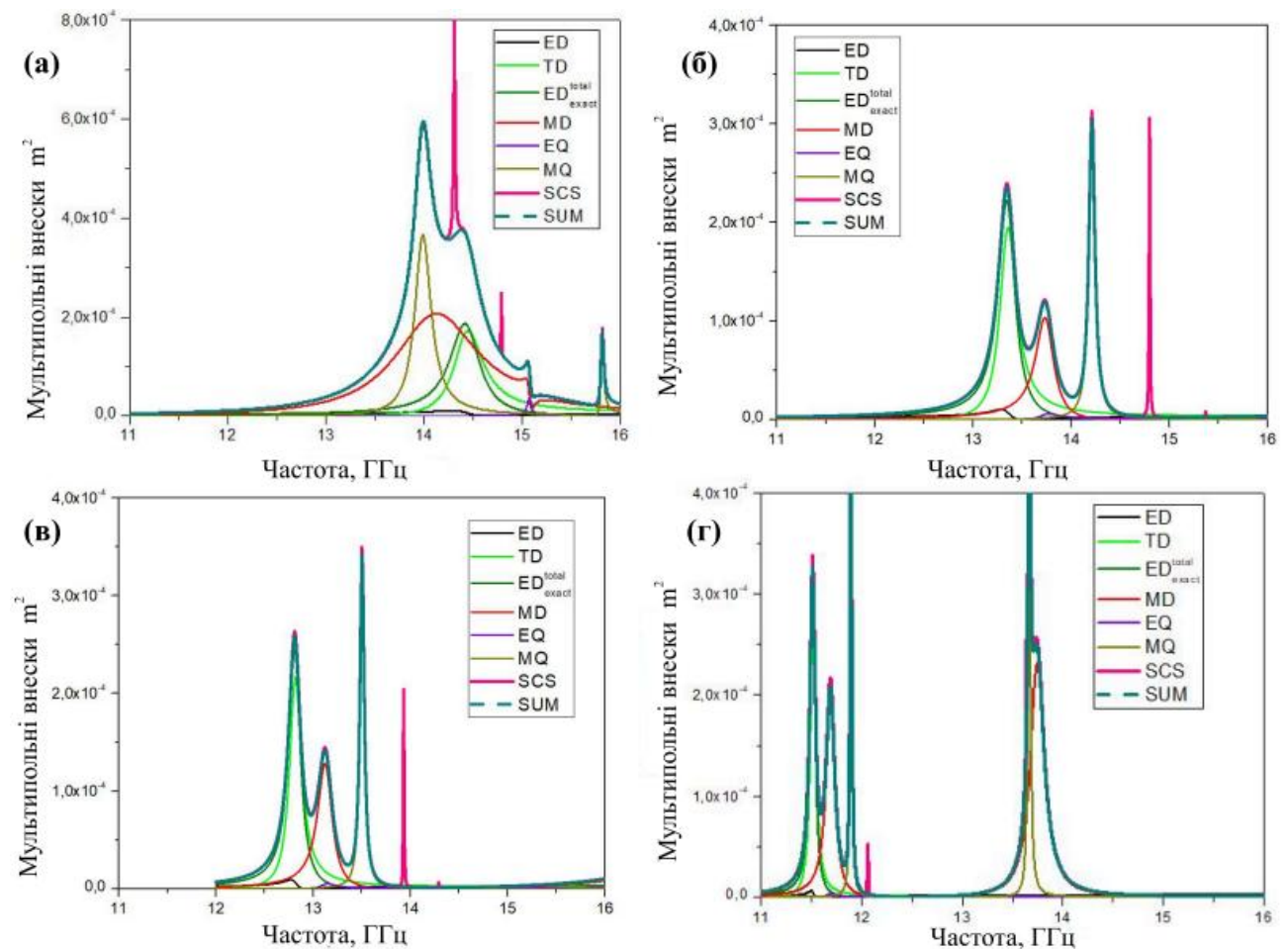


Рисунок 3.5 Переріз розсіяння та відповідні внески мультипольного розкладу для: (а) суцільного кільця (тору), (б) тороїдальної структури, складеної з $N = 16$ діелектричних дисків, (в) тороїдальної структури, складеної з $N = 12$ діелектричних дисків, (г) тороїдальної структури, складеної з $N = 8$ діелектричних дисків.

Далі на рисунках 3.5(б-г) видно фундаментальну відмінність у залежності характеристик дискретної структури у порівнянні з суцільним тором полягає в тому, що кільцевий резонанс f_{TD} у дискретному неоднорідному кільці стає резонансом із найнижчою частотою у спектрі. Інтерференційний внесок ED та TD близький до загального розсіяння SCS, що вказує на відокремлення моди тороїдального диполя від інших мультипольних внесків у кластері частинок. Це означає, що чистий TD-відгук досягається, коли інтенсивність розсіяння членів (TD, ED+TD і SCS) є однаковою, а інтенсивність розсіяння ED є незначною. Вторинний ефект, викликаний характеристиками моди, полягає в тому, що зі зменшенням N частота зміщується в область низьких частот, а добротність резонансу збільшується.

Нарешті, для повноти дослідження також були розраховані характеристики розсіяння тору, виготовленого з матеріалу з відносною діелектричною проникністю $\epsilon_{\text{torus}} = \epsilon_{\text{disk}}$, параметри якого базуються на структурах з $N = 16$ та $N = 12$. Відповідні результати показано на рис. 3.6.

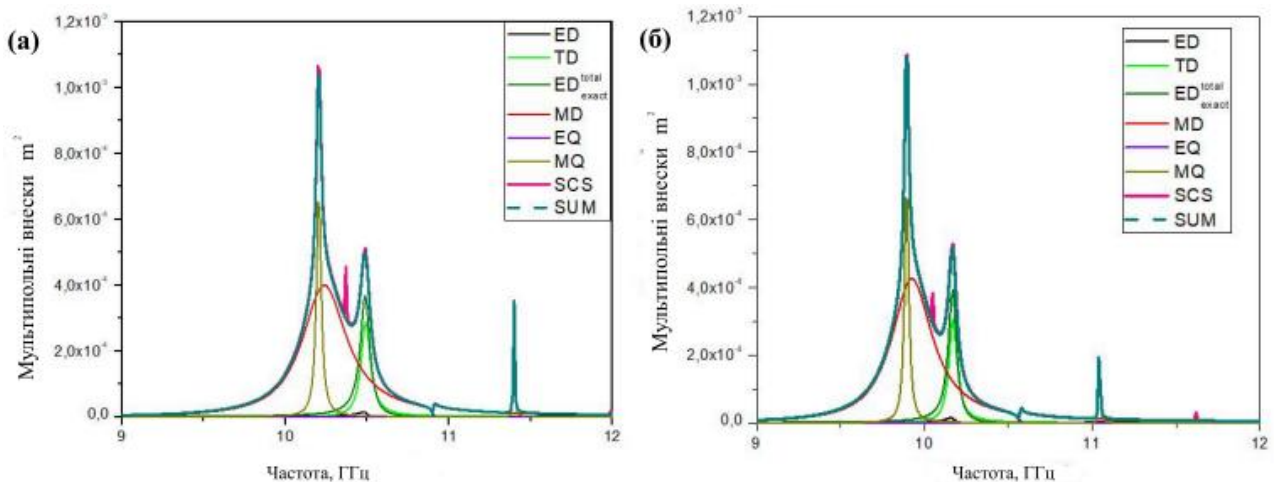


Рисунок 3.6 Розраховані переріз розсіяння (SCS) та відповідні внески мультипольного розкладу для суцільного тора, виготовленого з матеріалу з відносною діелектричною проникністю: (а) $\epsilon_{\text{torus}} = 116.85$, (б) $\epsilon_{\text{torus}} = 124.57$. Це відповідає параметрам кластерів, що складаються з $N = 16$ та $N = 12$ дисків.

Видно, що помірне збільшення діелектричної проникності не призводить до значних змін у характеристиках, проявляючись як зсув у область низьких частот та тенденція до збільшення добротності, що узгоджується з електромагнітною теорією. Загалом, спостережувані тенденції повністю узгоджуються з раніше опублікованими дослідженнями параметрів діелектричних кілець.

3.4. Висновки до Розділу 3

У третьому розділі проведено порівняльний аналіз електромагнітних властивостей суцільного тороїду та дискретного кільцевого кластера, сформованого з діелектричних частинок. На основі чисельного моделювання власних мод і характеристик розсіяння показано, що обидві структури можуть підтримувати тороїдальну дипольну моду, однак механізми її формування суттєво відрізняються.

Для суцільного тора тороїдальна мода виникає як результат вихрового потоку магнітного поля у полоїдальному перерізі та проявляється на тлі значних внесків магнітного диполя й квадруполя. У дискретних кільцях з діелектричних дисків тороїдальний момент формується за рахунок колективної гібридизації локальних магнітних диполів кожного елемента, що організовано в конфігурацію «голова-до-хвоста». Такий механізм забезпечує ізольованіший тороїдальний відгук і кращу відокремленість тороїдальної моди в спектрі.

Визначено, що власні частоти кластерів демонструють систематичний зсув відносно суцільної структури, причому величина зсуву зростає зі зменшенням кількості частинок. Добротність дискретних кластерів виявилася вищою, ніж у суцільного тора, завдяки кращій локалізації поля в індивідуальних резонаторах. Крім того, для кластерів спостерігається насичення добротності при збільшенні

діелектричної проникності дисків, тоді як у суцільному торі добротність зростає монотонно.

Аналіз мультипольного розкладу показав, що у суцільному торі тороїдальна мода завжди супроводжується істотними внесками MD і MQ, тоді як у дискретних кластерах можливо досягти майже «чистого» тороїдального дипольного резонансу. Зокрема, у кластерів з компактною геометрією та оптимальною кількістю частинок (8-16 дисків) тороїдальний диполь стає домінуючим мультиполем у всьому резонансному діапазоні.

Узагальнюючи отримані результати, можна зробити висновок, що дискретні кільцеві структури є ефективнішою платформою для практичної реалізації тороїдальних дипольних мод порівняно з суцільними тороїдальними резонаторами. Вони забезпечують вищу добротність, краще відокремлення тороїдального компонента від інших мультиполів і дають змогу гнучко керувати резонансними властивостями через варіацію геометричних параметрів кластера. Це робить дискретні тороїдальні метаструктури перспективними для розробки високочутливих сенсорів, низьковтратних резонаторів і мікрохвильових компонентів нового покоління.

4. ТОРОЇДАЛЬНИЙ КЛАСТЕР ЯК СЕНСОР ГІРОТРОПІЇ.

У сучасних сенсорах вибір механізму виявлення зміни діелектричної проникності суттєво визначає ефективність роботи пристрою. Зазвичай сенсинг реалізують через модифікацію ємнісних елементів резонатора, однак альтернативні підходи, пов'язані зі збудженням нетривіальних електромагнітних мод, можуть забезпечувати інші, часто вищі, чутливості. Нижче подано стислий огляд запропонованого механізму, який контрастує з традиційними методами та є релевантним для високоточних застосувань, зокрема у біосенсоріці.

Запропонований нами метод сенсингу не використовує зміну діелектричної проникності в ємнісних зазорах метамолекули, що відрізняє його від більшості поширених підходів. У традиційних схемах (наприклад, у масивах split-ring резонаторів) аналіт розміщують у ємнісній щілині, що змінює ємність LC-кола і робить чутливість пропорційною резонансній частоті. Таким чином, максимальна чутливість досягається на найвищому частотному резонансі, без потреби у збудженні тороїдального дипольного моменту.

У нашому підході аналіт розміщується в центрі метамолекули, безпосередньо у зоні сильного локального електричного поля, причому зміни в ємнісних проміжках не відбуваються. За такої конфігурації найчутливішим стає резонанс, пов'язаний із тороїдальним дипольним моментом, а не високочастотний магнітний дипольний режим. Це пов'язано з тим, що проникність середовища явно входить у знаменник дисперсійного рівняння відповідного власного стану. Контраст між цими двома принципами – зміною проникності в ємнісній щілині та зміною в центрі тороїдальної моди – досі не був належним чином описаний, хоча він має ключове значення для таких застосувань, як біосенсори.

4.1. Тороїдальний соленоїд у зовнішньому полі

У тороїдальних соленоїдах протікає 2 складових струму – азимутальна I_ϕ , що спрямована вздовж паралелей тора, та полоїдальна I_P , що спрямована вздовж меридіанів тороїдальної поверхні. Ці компоненти струму відповідають за збудження магнітних та тороїдальних дипольних моментів у структурі. Безпосередньо спосіб намотування котушки може змінювати напрям протікання струму, що впливає на орієнтацію тороїдального моменту розташовуючи його вздовж, або проти осі (див., рис. 4.1) [40].

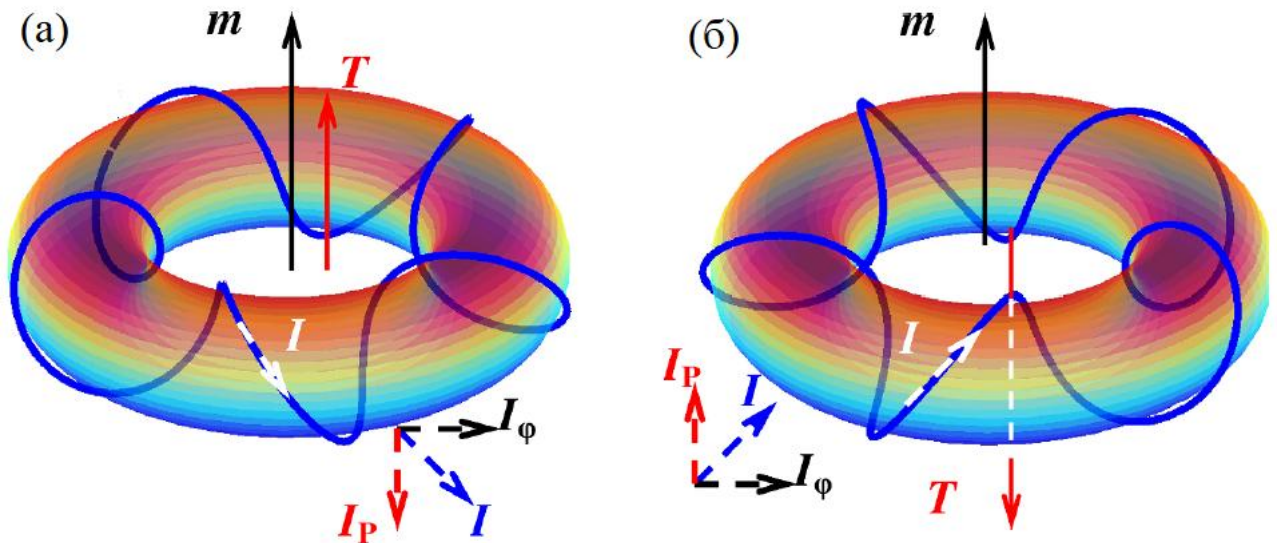


Рисунок 4.1. (а) Тип I, тороїдальний $\mathbf{T}$ та магнітний $\mathbf{m}$ дипольні моменти структури спрямовані в одному напрямку. (б) Тип II, вектори $\mathbf{T}$ і $\mathbf{m}$ антипаралельні [40].

Надалі перший та другий варіант орієнтації будемо називати тип 1 та 2, відповідно.

$$\mathbf{m} = \frac{I}{2} \oint \mathbf{r} \times d\mathbf{r}, \quad (4.1)$$

$$\mathbf{T} = \frac{I}{10} \oint [(\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r})\mathbf{r} - 2r^2 d\mathbf{r}]. \quad (4.2)$$

Виконання інтегрування дає:

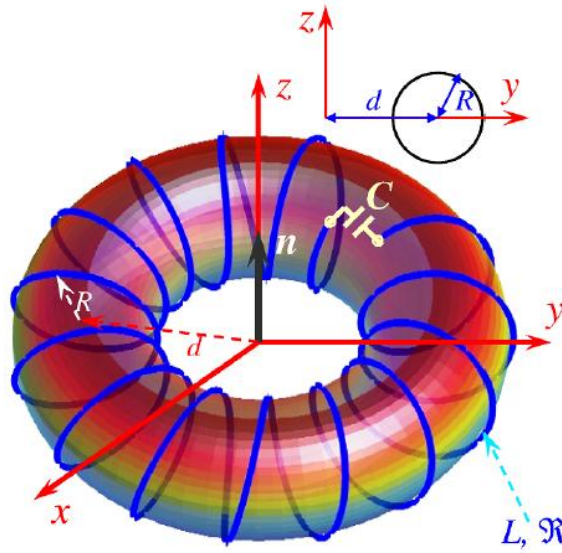


Рисунок 4.2. Тороїдальна метамолекула. L , ρ та C – індуктивність, ефективний опір та ємність у колі, d та R – відповідно більший та менший радіуси тора. Зовнішній конденсатор C компенсує відносно велику індуктивність соленоїда, створюючи резонанс [40].

$$\mathbf{m} = \pi d^2 I \left(1 + \frac{R^2}{2d^2} \right) \mathbf{n}, \quad (4.3)$$

$$\mathbf{T} = \frac{\pi N I d R^2}{2} \mathbf{n}, \quad (4.4)$$

де $N \gg 1$ – кількість витків у котушці, а $\mathbf{n}$ – вектор одиничної довжини, спрямований вздовж осі тора. Величина магнітного дипольного моменту не залежить від кількості витків, і ця властивість є причиною того, що тороїдальні структури переважно використовуються в таких застосуваннях, як індуктори та трансформатори. Дійсно, високий магнітний потік у осерді ($\propto N$) і високе значення індуктивності ($\propto N^2$) можуть бути досягнуті збільшенням N . У той же час, основним джерелом поля розсіювання, що існує за межами соленоїда, є магнітний дипольний момент. Як показує рівняння (4.3), його величина залишається незмінною при збільшенні N , як і розсіяне магнітне поле.

Розглянемо тороїдальний соленоїд у зовнішньому електромагнітному полі, енергія взаємодії тора та полем:

$$W \approx -\mathbf{T} \cdot \text{rot}\mathbf{B} - \mathbf{m} \cdot \mathbf{B}. \quad (4.5)$$

Слід зазначити, що в межах прийнятого квазістатичного наближення сила струму вздовж провідника залишається незмінною, що виключає можливість накопичення електричного заряду. Внаслідок цього всі електричні мультипольні моменти дорівнюють нулю. Окрім того, магнітний квадрупольний момент тороїдального соленоїда за умови однорідного розподілу струму тотожно дорівнює нулю.

Енергія взаємодії дрютяної котушки, що несе однорідний струм, із зовнішнім магнітним полем становить:

$$W = -I\Phi, \quad (4.6)$$

$$\Phi = [\pm\tau \cdot \text{rot}\mathbf{B} + S_m\mathbf{B}] \cdot \mathbf{n}. \quad (4.7)$$

У подальшому виведенні припускається, що верхні та нижні знаки у виразах застосовуються до соленоїдів Типу 1 та Типу 2 відповідно. Припускається, що в обмотці кожного соленоїда наявний розрив. Включення такого ємнісного елемента (конденсатора) необхідне для компенсації значної індуктивності котушки та забезпечення резонансу. Значення струму I визначається згідно із законом Кірхгофа:

$$L \frac{I}{dt} + I\rho + \frac{Q}{C} = -\frac{\Phi}{dt} \quad (4.8)$$

$$I = n \cdot \left[\pm \frac{\tau}{L} \text{rot}\mathbf{B} + \frac{S_m}{L} \mathbf{B} \right] f_1(\omega) \quad (4.9)$$

4.2. Власні стани поляризації

Далі детально проаналізовано власні стани поляризації тороїдального метаматеріалу. Введемо систему координат, одиничні вектори якої визначаються наступним чином [39]:

$$\mathbf{e}_1 = \frac{\mathbf{k} \times \mathbf{n}}{k \sin \theta},$$

$$\mathbf{e}_2 = \frac{\mathbf{k}}{k} \cot \theta - \frac{\mathbf{n}}{\sin \theta}, \quad (4.10)$$

$$\mathbf{e}_3 = \frac{\mathbf{k}}{k}.$$

Згідно з (4.10), третій базисний вектор $\mathbf{e}_3$ колінеарний хвильовому вектору $\mathbf{k}$. Останній, відповідно до рівнянь Максвелла, ортогональний як вектору електричного зміщення $\mathbf{D}$, так і вектору магнітної індукції $\mathbf{B}$. Отже, хвильовий вектор виступає нормаллю до площини $\mathbf{DB}$. Оскільки вектори $\mathbf{e}_1$ та $\mathbf{e}_2$ перпендикулярні до $\mathbf{e}_3$, вони лежать у площині, сформованій векторами $\mathbf{D}$ і $\mathbf{B}$. При цьому у загальному випадку вектори $\mathbf{D}$ і $\mathbf{B}$ не обов'язково є взаємно ортогональними.

Вектор намагніченості $\mathbf{M}$ у вибраній системі координат має вигляд:

$$\mathbf{M} = \left(kH_1 \sin \theta \pm \frac{i}{l} (H_3 \cos \theta - H_2 \sin \theta) \right) \mathbf{A}(\omega, \theta), \quad (4.11)$$

$$\mathbf{A}(\omega, \theta) = \left(\mathbf{e}_1 k \sin \theta \mp \frac{i}{l} (\mathbf{e}_3 \cos \theta - \mathbf{e}_2 \sin \theta) \right) f(\omega). \quad (4.12)$$

Рівняння Максвелла $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$ зводиться до $B_3 = 0$, або, що еквівалентно, $H_3 + M_3 = 0$. Останнє дозволяє отримати H_3 через H_1 та H_2 :

$$H_3 = -\frac{i}{l} \frac{iH_2/l \mp kH_1}{1 + f(\omega) \cos^2 \theta / l^2} f(\omega) \cos \theta \sin \theta. \quad (4.13)$$

Підставимо рівняння (4.13) в (4.11):

$$\mathbf{M} = \frac{kH_1 \mp iH_2/l}{1 + f(\omega) \cos^2 \theta / l^2} \mathbf{A}(\omega, \theta) \sin \theta. \quad (4.14)$$

Хвильове рівняння, записане у стандартній формі, має вигляд:

$$k^2 \mathbf{H} - \mathbf{k}(\mathbf{k} \cdot \mathbf{H}) = \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon (\mathbf{H} + \mathbf{M}). \quad (4.15)$$

Підстановка рівняння (4.14) в (4.15) та прирівнюючи суму цієї системи до нуля, дає можливість отримати дисперсійне рівняння власних станів поляризації:

$$\left(\frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon - k^2 \right) \left(1 + \frac{f(\omega)}{l^2} \cos^2 \theta \right) \left[\left(\frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon - k^2 \right) \left(1 + \frac{f(\omega)}{l^2} \cos^2 \theta \right) + \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon f(\omega) \sin^2 \theta \left(k^2 + \frac{1}{l^2} \right) \right] = 0. \quad (4.16)$$

Хвильове число k_O першого власного стану дорівнює:

$$k_O^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon. \quad (4.17)$$

Зазначений власний стан не взаємодіє з тороїдальним середовищем і поширюється без загасання за умови, що поглинанням у діелектричній матриці можна знехтувати. Поляризація цієї моди визначається виразом:

$$\frac{H_1}{H_2} = \pm \frac{i}{k_O l}, \quad (4.18)$$

що відповідає еліптично поляризованій хвилі. Цей власний стан не взаємодіє з структурою внаслідок взаємної компенсації електрорушійних сил, індукованих тороїдальним та магнітним дипольними внесками.

Другий розв'язок k_E рівняння (4.16) має вигляд:

$$k_E^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon \frac{1+f(\omega)/l^2}{1+\frac{f(\omega)\cos^2\theta}{l^2}-\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon f(\omega)\sin^2\theta}, \quad (4.19)$$

$$\frac{H_1}{H_2} = \mp i k_E l. \quad (4.20)$$

Цей стан також характеризується еліптичною поляризацією, проте з протилежним напрямком обертання вектору поля відносно першої власної моди. За відсутності дисипативних втрат еліпси поляризації обох власних станів є взаємно ортогональними.

Аналіз рівнянь (4.17) та (4.18) вказує на перспективність застосування тороїдального середовища як поляризатора, функціонально подібного до кристала турмаліну. Електромагнітна хвиля з довільною поляризацією при входженні у структуру збуджуватиме обидва поляризаційні стани (4.18) і (4.20). Оскільки друга мода зазнає загасання, а перша поширюється без втрат, структура достатньої товщини забезпечуватиме селективне пропускання лише першого стану. Таким чином, структура функціонує як поляризатор, формуючи на виході поляризацію, що визначається виразом (4.18), незалежно від параметрів вхідного сигналу.

4.3. Детектування діелектричної проникності через власні стани

Оскільки параметри еліпса поляризації першої власної моди залежать від діелектричної проникності матриці середовища-носія, варіації останньої можна реєструвати шляхом аналізу поляризаційного стану випромінювання на виході з структури [40]. Запропонований підхід ґрунтується на варіації характеристик поширення другої власної моди і є найбільш ефективним у тонких шарах, де збурення першого власного стану є нехтувано малими. У цьому наближенні рівняння (4.19) дозволяє встановити співвідношення між відносною зміною діелектричної проникності матриці $\frac{\Delta \varepsilon}{\varepsilon}$ та відповідною зміною хвильового числа другої (незвичайної) моди $\frac{\Delta k_E}{k_E}$. Результат має вигляд:

$$G(\omega, \theta) = 2 \frac{\varepsilon}{k_E} \frac{dk_E}{d\varepsilon} = \frac{1 + \frac{f(\omega)}{l^2} \cos^2 \theta}{1 + \frac{f(\omega)}{l^2} \cos^2 \theta - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon f(\omega) \sin^2 \theta}. \quad (4.21)$$

Величина $G(\omega, \theta)$ є мірою чутливості дисперсійного рівняння (4.19) до змін діелектричної проникності.

4.4. Числові розрахунки тороїдальні моди

У цьому розділі наведено результати числових розрахунків для вивчення придатність кільцевих кластерних структур для використання в сенсорних застосуваннях. За допомогою чисельного моделювання зсуву частоти резонансів мод кластеру в COMSOL Multiphysics продемонстровано потенційне застосування структури, що підтримує резонанс тороїдального дипольного моменту. Дизайн структури базується на параметрах, наведених у Розділі 3. У моделі в центрі кільцевого кластеру розміщено циліндричну область (вставка) діаметром близько 90% від розміру отвору та однакової висоти з діаметром

окремого дискового резонатора. Структура, що досліджується зображена на рисунку 4.3.

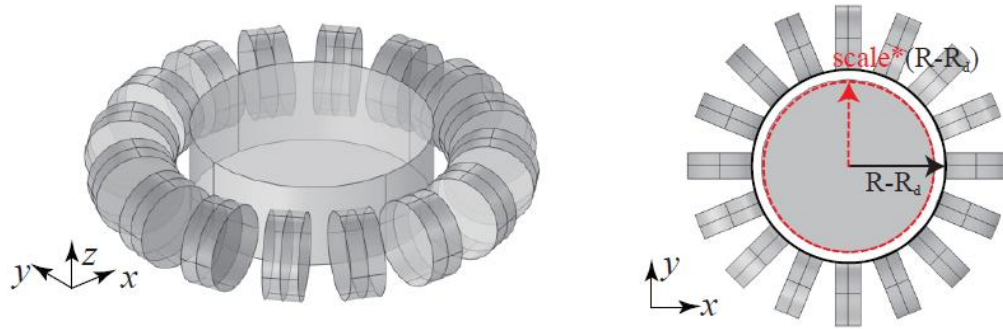


Рисунок 4.3. Тороїдальний кластер з діелектричних дисків з центральним тілом, діелектричні властивості якого вимірюються.

Вивчається здатність кластерної структури виявляти зміни у діагональних та недіагональних елементах тензора діелектричної та магнітної проникності вставки, що задаються у наступному вигляді:

$$\varepsilon_{\text{ins}} = \begin{pmatrix} \varepsilon_t & i\alpha & 0 \\ -i\alpha & \varepsilon_t & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{pmatrix}, \quad \mu_{\text{ins}} = \begin{pmatrix} \mu_t & i\beta & 0 \\ -i\beta & \mu_t & 0 \\ 0 & 0 & \mu_z \end{pmatrix}. \quad (4.22)$$

Числове моделювання тороїдального кластера дозволило дослідити поведінку власної тороїдальної дипольної моди за умов зміни електромагнітних параметрів матеріалу, внесеного у центральну область структури. Основна увага була зосереджена на визначенні залежності резонансної частоти тороїдального коливання від діагональних та недіагональних компонент тензорів діелектричної і магнітної проникностей.

Графіки на рис. 4.4 і 4.5 демонструють монотонну зміну власної частоти тороїдальної моди при варіації діелектричної та магнітної проникності вставки. Результат показує, що тороїдальна структура формує сильну локалізацію магнітного поля в центральному об'ємі, що робить її надзвичайно чутливою саме до магнітних характеристик аналіту. Навіть невеликі зміни μ призводять до

помітного спектрального зсуву резонансної частоти, причому величина цього зсуву є значно більшою, ніж для мод вищого порядку, що також підтверджено попередніми розділами роботи.

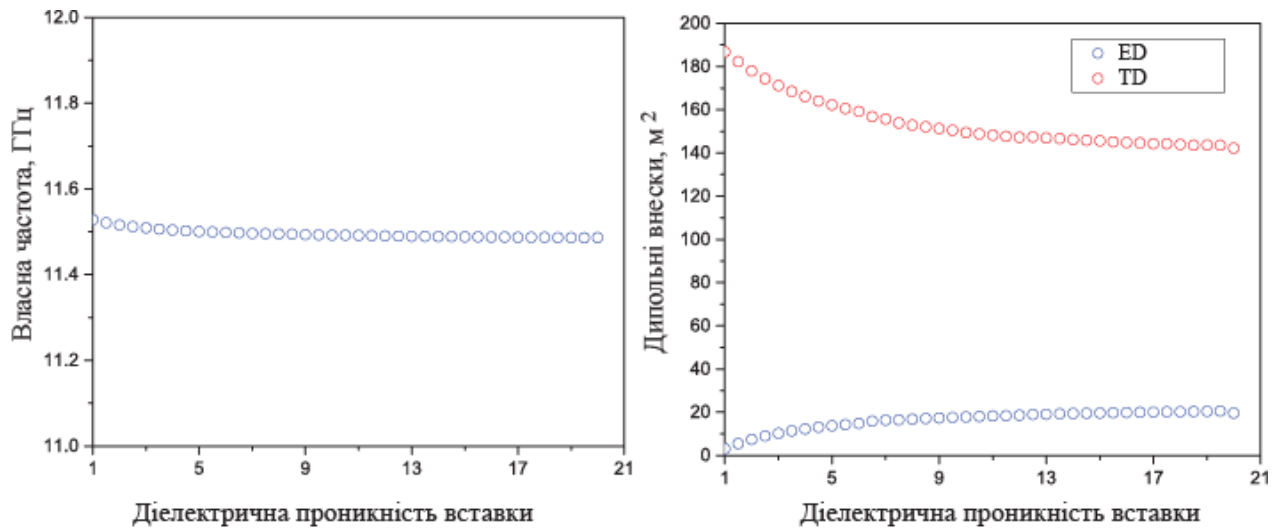


Рисунок 4.4. Зміна частоти власного коливання, як функція зміни діелектричної проникності вставки. Тороїдальна структура, складена з $N = 8$ діелектричних дисків. Геометрія кільця фіксована: $R = 4.0$ мм, $R_d = 1.0$ мм, $\varepsilon_{\text{eff}} = 60$, $\mu_{\text{eff}} = \mu_{\text{ins}} = 1$, $\alpha = \beta = 0$.

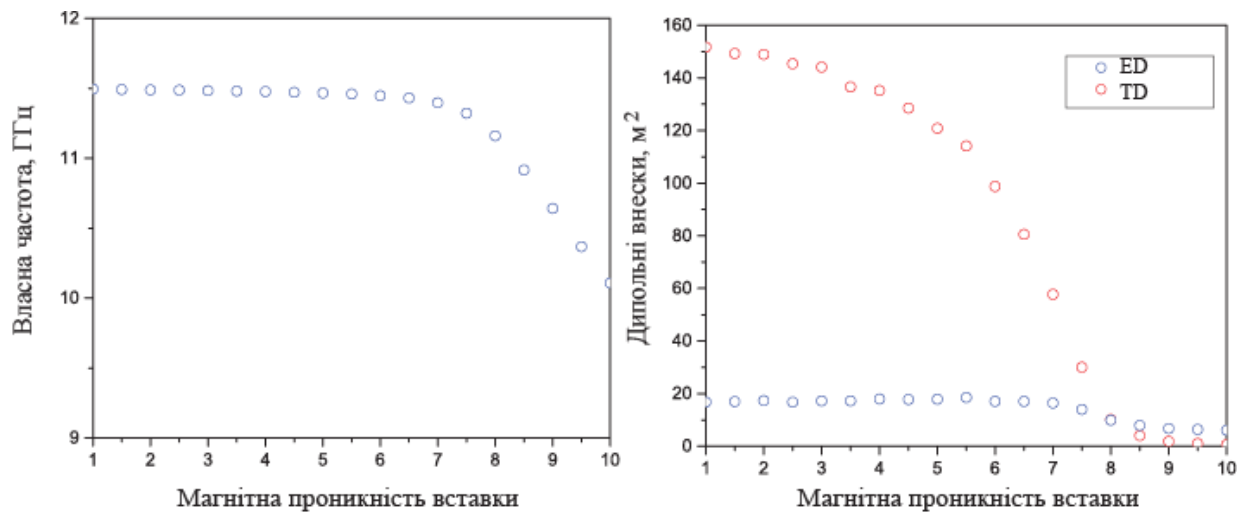


Рисунок 4.5. Зміна частоти власного коливання, як функція зміни магнітної проникності вставки. Тороїдальна структура, складена з $N = 8$ діелектричних дисків. Геометрія кільця фіксована: $R = 4.0$ мм, $R_d = 1.0$ мм, $\varepsilon_{\text{eff}} = 60$, $\mu_{\text{eff}} = 1$, $\varepsilon_{\text{ins}} = 8$, $\alpha = \beta = 0$.

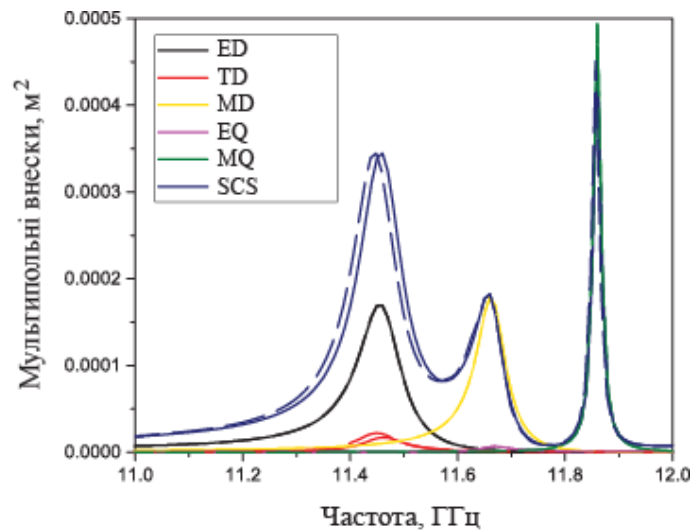


Рисунок 4.6. Зміна резонансної частоти тороїдального коливання від параметра гіротропії. Штрихова лінія – $\beta = 0.1$, суцільна лінія – $\beta = 0.3$. Тороїдальна структура, складена з $N = 8$ діелектричних дисків. Геометрія кільця фіксована: $R = 4.0$ мм, $R_d = 1.0$ мм, $\epsilon_{\text{eff}} = 60$, $\mu_{\text{eff}} = 1$, $\epsilon_{\text{ins}} = 8$, $\mu_t = 3.2$, $\alpha = 0$.

Рисунок 4.6 ілюструє залежність резонансної частоти від параметра гіротропії. Отримані дані показують, що тороїдальний режим є чутливим не лише до ізотропних змін проникностей, а й до недіагональних компонент тензорів, які описують гіротропію. Така залежність підкреслює нетривіальний магнітоелектричний характер тороїдальної моди: її поле включає полоїдальні та азимутальні компоненти струмів зміщення, які природним чином взаємодіють з гіротропним середовищем. Виявлений спектральний зсув є стабільним і лінійним у широкому діапазоні параметрів, що робить цей тип резонансу придатним для прецизійного зондування слабкогіротропних матеріалів.

Аналіз амплітуд модальних компонент показує, що в досліджуваній структурі саме тороїдальна мода демонструє найнижчу резонансну частоту та найсильніший відгук на зміни властивостей аналіту. Це узгоджується з попередніми висновками про унікальність механізму тороїдальної сенсорики,

згідно з яким домінуючу роль відіграє не зміна ємнісного зазору (як у звичайних LC-структурах), а магнітоелектричний зв'язок центральної локалізованої моди з матеріалом вставки. Таким чином, тороїдальна мода виявляє значно більшу чутливість порівняно з магнітними та електричними дипольними резонансами.

4.6. Висновки до Розділу 4

Було проаналізовано структуру, що підтримує як тороїдальний, так і магнітний дипольний, електричний та магнітний квадрупольний резонанси, причому тороїдальний знаходився на нижчій частоті. При внесенні аналізу у центральну область, моделювання показало, що саме низькочастотний тороїдальний режим демонструє значно сильніший спектральний зсув, ніж інші високочастотні режими. Це свідчить про те, що в даній конфігурації тороїдальний дипольний режим виявляє вищу чутливість, демонструючи поведінку, що не відповідає звичайним тенденціям, характерним для збурень ємнісних зазорів. Така поведінка є ексклюзивною для механізму, що отримав назву «справжня тороїдальна сенсорика». Розуміння цього фундаментального контрасту між двома механізмами сенсорики є важливим для розробки майбутніх прикладних пристроїв, зокрема, біосенсорів.

5. ВИСНОВКИ

У роботі було комплексно досліджено фізичні властивості та прикладні можливості тороїдальних електромагнітних мод у кластерних структурах різної геометрії. Основні результати можна сформулювати таким чином:

1. Аналітичний підхід до опису тороїдальних мод, побудований на скаляризації рівняння Гельмгольца та використанні вектора Герца, дозволив отримати точні власні функції і поля ідеалізованого тороїдального резонатора. Показано, що мода з азимутальним числом $m = 0$ є прямим аналогом чистої тороїдальної дипольної конфігурації.

2. Порівняльний аналіз суцільних і дискретних структур виявив принципову різницю в механізмах формування тороїдального диполя. Дискретні кластери діелектричних дисків дозволяють значно краще ізолювати тороїдальну компоненту від електричних і магнітних мультиполів, забезпечуючи чистіший спектральний відгук і вищу добротність.

3. Гібридизація мод у кластерних структурах приводить до формування колективної моди, в якій тороїдальний диполь стає домінуючим мультиполем у широкому діапазоні частот. Показано, що кількість та розташування дисків мають критичний вплив на ступінь «чистоти» тороїдального резонансу.

4. Досліджено новий сенсорний механізм, що ґрунтується на локалізованій у центрі структури тороїдальній моді. На відміну від традиційних LC-сенсорів, чутливість тут визначається не зміною ємності геометричного зазору, а магнітоелектричним зв'язком тороїдальної моди з діелектричними властивостями вставки. Цей механізм забезпечує високу чутливість навіть при низькій частоті резонансу.

5. Числові моделювання показали, що кластер, утворений з діелектричних дисків, демонструє суттєвий зсув резонансної частоти при зміні як діагональних, так і недіагональних елементів тензора проникності. Це

підтверджує можливість практичного використання структури для сенсингу гіротропних матеріалів.

6. Показано, що геометрична оптимізація (кількість елементів, радіус кільця, діаметр дисків) дозволяє цілеспрямовано керувати чутливістю сенсора та якістю тороїдального резонансу.

Загалом, виконане дослідження демонструє, що дискретні тороїдальні метаструктури є перспективною платформою для створення високочутливих мікрохвильових сенсорів нового покоління, з можливістю точного детектування діелектричних і гіротропних властивостей матеріалів. Результати мають як фундаментальне значення для фізики тороїдальних мод, так і прикладне – для проєктування сенсорних пристроїв.

ЛИТЕРАТУРА

1. Jackson J. D. Classical electrodynamics. John Wiley & Sons, 2021. 832 p.
2. Dubovik V., Tugushev V. Toroid moments in electrodynamics and solid-state physics // Physics Reports. 1990. Vol. 187, no. 4. P. 145–202.
3. Fedotov V. A., Marinov K., Boardman A. D. et al. On the anomagnetism and anapole moment of anthracene nanocrystals // New Journal of Physics. 2007. Vol. 9, no. 4. P. 95.
4. Xu J., Han J. The huge magnetic toroids in the milky way halo // The Astrophysical Journal. 2024. Vol. 966, no. 2. P. 240.
5. Papasimakis N., Fedotov V. A., Savinov V. et al. Electromagnetic toroidal excitations in matter and free space // Nature Materials. 2016. Vol. 15, no. 3. P. 263–271.
6. Kittel C. Theory of the structure of ferromagnetic domains in films and small particles // Physical Review. 1946. Vol. 70, no. 11–12. P. 965–971.
7. Mettout B., Tolédano P., Fiebig M. Symmetry replication and toroidic effects in the multiferroic pyroxene $\text{NaFeSi}_2\text{O}_6$ // Physical Review B: Condensed Matter and Materials Physics. 2010. Vol. 81, no. 21. P. 214417.
8. Marinov K., Boardman A. D., Fedotov V. A. et al. Toroidal metamaterial // New Journal of Physics. 2007. Vol. 9, no. 9. P. 324.
9. Afanasiev G., Stepanovsky Y. P. The electromagnetic field of elementary time-dependent toroidal sources // Journal of Physics A: Mathematical and General. 1995. Vol. 28, no. 16. P. 4565.
10. Gongora A., Ley-Koo E. Complete electromagnetic multipole expansion including toroidal moments // Revista Mexicana de física E. 2006. Vol. 52, no. 2. P. 177–181.

11. Gurvitz E. A., Ladutenko K. S., Dergachev P. A. et al. The high-order toroidal moments and anapole states in all-dielectric photonics // *Laser & Photonics Reviews*. 2019. Vol. 13, no. 5. P. 1800266.
12. Evlyukhin A. B., Fischer T., Reinhardt C. et al. Optical theorem and multipole scattering of light by arbitrarily shaped nanoparticles // *Physical Review B*. 2016. Vol. 94, no. 20. P. 205434.
13. Papasimakis N., Fedotov V. A., Savinov V. et al. Electromagnetic toroidal excitations in matter and free space // *Nature Materials*. 2016. Vol. 15, no. 3. P. 263–271.
14. Talebi N., Guo S., Van Aken P. A. Theory and applications of toroidal moments in electrodynamics: their emergence, characteristics, and technological relevance // *Nanophotonics*. 2018. Vol. 7, no. 1. P. 93–110.
15. Fernandez-Corbaton I., Nanz S., Rockstuhl C. On the dynamic toroidal multipoles from localized electric current distributions // *Scientific Reports*. 2017. Vol. 7, no. 1. P. 7527.
16. Papasimakis N., Fedotov V., Marinov K. et al. Gyrotropy of a metamolecule: wire on a torus // *Physical Review Letters*. 2009. Vol. 103, no. 9. P. 093901.
17. Kaelberer T., Fedotov V., Papasimakis N. et al. Toroidal dipolar response in a metamaterial // *Science*. 2010. Vol. 330, no. 6010. P. 1510–1512.
18. Bhattacharya A., Chouhan B. S., Sharma K. et al. Terahertz binary computing in a coupled toroidal metasurface // *Scientific Reports*. 2024. Vol. 14, no. 1. P. 8721.
19. Canós Valero A., Borovkov D., Kalganov A. et al. On the existence of pure, broadband toroidal sources in electrodynamics // *Laser & Photonics Reviews*. 2024. Vol. 18, no. 4. P. 2200740.
20. Fedotov V. A., Rogacheva A. V., Savinov V. et al. Resonant transparency and non-trivial non-radiating excitations in toroidal metamaterials // *Scientific Reports*. 2013. Vol. 3, no. 1. P. 2967.

21. Miroshnichenko A. E., Evlyukhin A. B., Yu Y. F. et al. Nonradiating anapole modes in dielectric nanoparticles // *Nature Communications*. 2015. Vol. 6, no. 1. P. 8069.
22. Basharin A. A., Chuguevsky V., Volsky N. et al. Extremely high q-factor metamaterials due to anapole excitation // *Physical Review B*. 2017. Vol. 95, no. 3. P. 035104.
23. Pradhan M., Sharma S., Bn S. B. et al. Engineered pseudo and hybrid anapole states in a silicon nanoresonator metasurface // *JOSA B*. 2023. Vol. 40, no. 5. P. 986–993.
24. Boardman A. D., Marinov K., Zheludev N., Fedotov V. A. Magnetic response of a toroidal metamaterial // *Physical Review E*. 2005. Vol. 72. P. 036603.
25. Gupta M., Srivastava Y. K., Manjappa M., Singh R. Sensing with toroidal metamaterial // *Applied Physics Letters*. 2017. Vol. 110. P. 121108.
26. Ye Q. W., Guo L. Y., Li M. H. et al. Toroidal dipolar response in a metamaterial planar structure // *Physica Scripta*. 2013. Vol. 88. P. 055002.
27. Bohren C. F., Huffman D. R. Absorption and scattering of light by small particles. John Wiley & Sons, 2008. 544 p.
28. Berg M. J., Sorensen C. M., Chakrabarti A. Extinction and the optical theorem. Part I. Single particles // *JOSA A*. 2008. Vol. 25, no. 7. P. 1504–1513.
29. Evlyukhin A. B., Chichkov B. N. Multipole decompositions for directional light scattering // *Physical Review B*. 2019. Vol. 100, no. 12. P. 125415.
30. Alaei R., Rockstuhl C., Fernandez-Corbaton I. An electromagnetic multipole expansion beyond the long-wavelength approximation // *Optics Communication*. 2018. Vol. 407. P. 17–21.
31. Evlyukhin A. B., Novikov S. M., Zywiets U. et al. Demonstration of magnetic dipole resonances of dielectric nanospheres in the visible region // *Nano Letters*. 2012. Vol. 12, no. 7. P. 3749–3755.

- 32.Kuznetsov A. I., Miroshnichenko A. E., Fu Y. H. et al. Magnetic light // Scientific Reports. 2012. Vol. 2, no. 1. P. 492.
- 33.Jackson J. D. Classical electrodynamics. Wiley, 1975. 848 p.
- 34.Hergert W., Wriedt T. The Mie theory: Basics and applications. Springer-Verlag, 2012. 259 p.
- 35.Sukharevsky O., Vasilets V., Misailov V. Calculation method of electromagnetic waves scattering by dielectric toroid meteorological formations // Radioelectronics and Communications Systems. 2020. Vol. 63, no. 11. P. 596–605.
- 36.Pedersen T. G. Plasmons and magnetoplasmon resonances in nanorings // Physical Review B. 2021. Vol. 103, no. 8. P. 085419.
- 37.Garnett J. C. M. Colours in metal glasses and in metallic films // Philosophical Transactions of The Royal Society of London Series A: Mathematical and Physical Sciences. 1904. Vol. 203, no. 359–371. P. 385–420.
- 38.Yushanov S., Crompton J. S., Koppenhoefer K. C. Mie scattering of electromagnetic waves // Proceedings of the COMSOL Conference. Boston, 2013.
- 39.Kong J. Electromagnetic Wave Theory. Wiley, 1990.
40. Marinov K., Fedotov V. A. Gyrotropy and permittivity sensing driven by toroidal response / New Journal of Physics. 2023. Vol. 25. P. 023030.

ДОДАТОК А

Скрипт для розрахунку розподілу полів для різних азимутальних мод

```
%% %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%  
%%                               Toroidal Resonator Modes                               %%  
%% %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%  
% The calculation is based on the paper: %  
% F. Cap and R. Deutsch, Toroidal Resonators for Electromagnetic Waves, %  
% IEEE MTT, 26(7), pp. 478-486, 1978, doi: 10.1109/TMTT.1978.1129419. %  
%% %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%  
  
clear;  
clc;  
% close all;  
%%  
c = 3e8;  
  
%% Toroidal resonator parameters  
R = 4e-3;  
r_ring = 1e-3;  
a=R;  
  
mu=1;  
ep=1;  
mu0=1;  
%%  
m = 2;  
rho0 = 1; %is the inverse aspect ratio of the torus  
kappa = 2.4048/rho0; %  
  
omega_eigen = (5.7832/rho0^2 + m^2 - 0.25)*c^2/R^2;  
disp(omega_eigen)  
%% Variables  
B = 5e-3;  
  
points = 200;  
x = -B : 2*B/points : B;  
y = -B : 2*B/points : B;  
  
% pointsT = 120;  
theta = pi/4;%0: 2*pi/pointsT: 2*pi;  
  
%% ----- %%  
%%Toroidal Modes of the First Type  
E1_phi = zeros(length(x),length(y));  
E1_theta = zeros(length(x),length(y));  
E1_rho = zeros(length(x),length(y));  
H1_phi = zeros(length(x),length(y));  
H1_theta = zeros(length(x),length(y));  
H1_rho = zeros(length(x),length(y));  
sigma1 = zeros(length(x),length(y));  
%%Toroidal Modes of the Second Type  
E2_phi = zeros(length(x),length(y));  
E2_theta = zeros(length(x),length(y));
```

```

E2_rho = zeros(length(x),length(y));
H2_phi = zeros(length(x),length(y));
H2_theta = zeros(length(x),length(y));
H2_rho = zeros(length(x),length(y));
sigma2 = zeros(length(x),length(y));
%Toroidal Modes of the Third Type
E3_phi = zeros(length(x),length(y));
E3_theta = zeros(length(x),length(y));
E3_rho = zeros(length(x),length(y));
H3_phi = zeros(length(x),length(y));
H3_theta = zeros(length(x),length(y));
H3_rho = zeros(length(x),length(y));
sigma3 = zeros(length(x),length(y));

% PhaseEz = fopen('PhaseEz6GHz1=3.dat', 'w');

%% Field components and surface current
for i = 1 : length(y)
    for j = 1 : length(x)

        rho = 0.5*log((sqrt(x(i)^2 + y(j)^2)+a)^2/(sqrt(x(i)^2 + y(j)^2)-a)^2 );
        if x(i)>0 && y(j)>0
            phi = atan(abs(y(j)/x(i)));
        elseif x(i)<0 && y(j)>0
            phi = pi - atan(abs(y(j)/x(i)));
        elseif x(i)<0 && y(j)<0
            phi = pi + atan(abs(y(j)/x(i)));
        elseif x(i)>0 && y(j)<0
            phi = 2*pi - atan(abs(y(j)/x(i)));
        end

        %Toroidal Modes of the First Type
        E1_rho(i,j) = ((m^2-0.25)* besselj(0, kappa*rho)/sqrt(1-rho*cos(theta))+...
            besselj(1, kappa*rho)*(kappa/2/rho)*(2-3*rho*cos(theta))/...
            sqrt((1-rho*cos(theta))^3))*sin(theta)*cos(m*phi);
        E1_theta(i,j) = (besselj(0, kappa*rho)*(kappa^2+m^2-0.25)/sqrt(1-
            rho*cos(theta))...
            -kappa*besselj(1, kappa*rho)/rho/sqrt(1-
            rho*cos(theta)))*cos(theta)*cos(m*phi)+...
            (kappa*besselj(1,kappa*rho)*sin(theta)^2*cos(m*phi))/(2*sqrt((1-
            rho*cos(theta))^3));
        E1_phi(i,j) = (m*kappa*besselj(1, kappa*rho)*sin(theta)*sin(m*phi))/sqrt((1-
            rho*cos(theta))^3);
        sigma1(i,j)= ((2-3*rho*cos(theta))/sqrt((1-
            rho*cos(theta))^3))*sin(theta)*cos(m*phi);
        H1_rho(i,j) = (1i*omega_eigen*eps*mu)* m*besselj(0,
            kappa*rho)*cos(theta)*sin(m*phi)/sqrt((1-rho*cos(theta))^3)/mu0;
        H1_theta(i,j) = (-1i*omega_eigen*eps*mu)* m*besselj(0,
            kappa*rho)*sin(theta)*cos(m*phi)/sqrt((1-rho*cos(theta))^3)/mu0;
        H1_phi(i,j) = cos(m*phi)*(1i*omega_eigen*eps*mu)* (besselj(0, kappa*rho)-...
            2*kappa*(1-rho*cos(theta))*besselj(1, kappa*rho)*cos(theta))/...
            sqrt((1-rho*cos(theta))^3)/mu0;

        %Toroidal Modes of the Second Type
        E1_rho(i,j) = ((m^2-0.25)* besselj(0, kappa*rho)/sqrt(1-rho*cos(theta))+...
            besselj(1, kappa*rho)*(kappa/2/rho)*(2-3*rho*cos(theta))/...
            sqrt((1-rho*cos(theta))^3))*sin(theta)*cos(m*phi);

```

```

        E1_theta(i,j) = (besselj(0, kappa*rho)*(kappa^2+m^2-0.25)/sqrt(1-
rho*cos(theta))...
        -kappa*besselj(1, kappa*rho)/rho/sqrt(1-
rho*cos(theta))*cos(theta)*cos(m*phi)+...
        (kappa*besselj(1,kappa*rho)*sin(theta)^2*cos(m*phi))/(2*sqrt((1-
rho*cos(theta))^3));
        E1_phi(i,j) = (m*kappa*besselj(1, kappa*rho)*sin(theta)*sin(m*phi))/sqrt((1-
rho*cos(theta))^3);
        sigma1(i,j)= ((2-3*rho0*cos(theta))/sqrt((1-
rho0*cos(theta))^3))*sin(theta)*cos(m*phi);

    end
end

%%
% fclose(CplxMagEz);
% fclose(PhaseEz);

%% Figures
figure;
hold on
grid on
colormap jet;
surf(x,y,abs(H1_phi), 'EdgeColor', 'none');
% title(['Electric field pattern of TM',num2str(abs(1)),'1 mode of CRR'])
% xlim([-A A])
% ylim([-A A])
xlabel('$X$', 'Interpreter', 'latex', 'FontSize', 13);
ylabel('$Y$', 'Interpreter', 'latex', 'FontSize', 13);
axis square

```

ДОДАТОК Б

Скрипт для розрахунку ефективної діелектричної проникності сегментованого кільця

```
N = 6;
ep_gap = 1;
ep_torus = 60;
r = 1.0; %[mm]
R = 4.0; %[mm]
h = 0.8; %[mm]

ep_d = 2*pi*R*ep_torus/N/h - (2*pi*R - N*h)*ep_gap/N/h;
ep_d

ep_d = 22;

r = 4.0; %[mm]
R = 4.0*N/pi; %[mm]
h = 2.5; %[mm]

ep_eff = ep_gap + N*h*(ep_d - ep_gap)/2/pi/R;
ep_eff
```