

К ТЕОРИИ РАССЕЯНИЯ ВОЛН НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДОЙ

В. Л. Герман, А. С. Брюховецкий

В теории рассеяния волн неоднородной средой при допущении, что длина волны λ значительно меньше характерного размера неоднородностей Λ , исходят из скалярного волнового уравнения [1, 2] для любой из компонент электрической напряженности в рассеянной волне

$$\Delta E_1 - \frac{\epsilon_0 + \epsilon_1(\vec{r})}{c^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial t^2} E_1 = \frac{\epsilon_1(\vec{r})}{c^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial t^2} E_0, \quad (1)$$

где E_0 — падающая волна, соответствующая решению волнового уравнения в однородной среде с диэлектрической проницаемостью $\epsilon_0 = \text{const}$. Магнитная проницаемость среды принимается равной единице, проводимость — нулю. Среда считается слабонеоднородной ($\epsilon_1 \ll \epsilon_0$). Общих методов нахождения точных решений этого уравнения при произвольном $\epsilon_1(\vec{r})$ не существует, а такие приближенные решения, как борновское разложение, геометрическая оптика и метод «плавных» возмущений [1, 2] представляют собой разложения в степенные ряды по некоторому малому параметру. Область применимости таких решений ограничивается условиями равномерной сходимости этих рядов и возможности их почленного дифференцирования. Получить их в общем виде не представляется возможным, а потому обычно ограничиваются требованием малости последующего приближения по сравнению с оставляемым.

В данной работе показано, что из метода С. Л. Соболева можно получить приближение, область применимости которого не перекрывается полностью указанными выше методами.

С. Л. Соболевым [3, 4] была обобщена формула Кирхгофа, дающая решение задачи Коши для уравнения типа (1) с нулевой правой частью. В отличие от однородной среды эта формула содержит не только поверхностные интегралы от запаздывающих функций, задаваемых начальными условиями, но также и объемный интегральный член от искомого решения, что указывает на нарушение принципа Гюйгенса в неоднородной среде. Непосредственным продолжением работы [3] было обобщение понятия запаздывающего потенциала [5] для неоднородной среды. Согласно С. Л. Соболеву, запаздывающим потенциалом для уравнения (1) является

$$E_1(\vec{R}_0, t) = \iiint_P \sigma(\vec{R}_0, \vec{r}) \psi(\vec{r}, t - \tau(\vec{R}_0, \vec{r})) dV. \quad (2)$$

Здесь $\vec{R}_0$ и $\vec{r}$ — радиусы-векторы точки наблюдения и точки рассеяния соответственно; P — «эквидистантный» объем, заключенный внутри поверхности $\tau(\vec{R}_0, \vec{r}) = t$; запаздывание $\tau(\vec{R}_0, \vec{r})$ определяется из принципа Ферма для функционала

$$\tau(\vec{R}_0, \vec{r}) = \int_{\vec{R}_0}^{\vec{r}} c^{-1} [\epsilon_0 + \epsilon_1(\vec{r})]^{1/2} ds. \quad (3)$$

Плотность потенциала $\psi(\vec{r}, t)$ является решением интегрального уравнения, получающегося при подстановке выражения (2) в волновое уравнение (1):

$$-4\pi f(\vec{r}, t) = -4\pi\psi(\vec{r}, t) + \iiint_P \Delta\sigma(\vec{r}, \vec{r}_1)\psi(\vec{r}_1, t - \tau(\vec{r}, \vec{r}_1)) dV_1, \quad (4)$$

где $f(\vec{r}, t)$ — плотность источников, т. е. правая часть уравнения (1), поделенная на -4π . Точка $\vec{r} = \vec{r}_1$ из интеграла исключена. Функция $\sigma(\vec{R}_0, \vec{r})$ является решением уравнения

$$2 \nabla \tau \nabla \sigma + \sigma \Delta \tau = 0 \quad (5)$$

при дополнительном условии, что в точке наблюдения $\vec{R}_0$ она имеет особенность типа $|\vec{R}_0 - \vec{r}|^{-1}$. Формально $\sigma(\vec{R}_0, \vec{r})$ совпадает с амплитудой сферической волны точечного источника в неоднородной среде в первом (по λ/Λ) приближении геометрической оптики.

Легко проверить, что для неоднородной среды ($\epsilon_1 \neq 0$) обобщенный запаздывающий потенциал переходит в обычный, а интегральное уравнение (4) — в обычное равенство $f = \psi$, означающее, что в однородной среде плотность источников и плотность запаздывающего потенциала совпадают. В неоднородной среде такого совпадения нет, и для нахождения плотности потенциала необходимо решить интегральное уравнение (4). Знание точного решения интегрального уравнения позволило бы записать точное решение волнового уравнения (1) в форме (2). В дальнейшем предположим, что неоднородная среда локализована в объеме V конечных размеров L . Построим итерации интегрального уравнения (4) по схеме

$$\begin{aligned} \psi_0(\vec{r}, t) &\equiv 0 \\ \psi_{n+1}(\vec{r}, t) &= f(\vec{r}, t) + \frac{1}{4\pi} \iiint_P \Delta\sigma(\vec{r}, \vec{r}_1)\psi_n(\vec{r}_1, t - \tau(\vec{r}, \vec{r}_1)) dV_1 \\ &\quad (n = 0, 1, 2, \dots) \end{aligned} \quad (6)$$

и ограничимся лишь первой итерацией. Для такого ограничения необходима очень быстрая сходимость итерационного процесса. Сходимость подобного итерационного процесса для задачи Коши, по крайней мере при малых t , была доказана С. Л. Соболевым [5]. Потребуем, как обычно делается в таких случаях в физических теориях, малого отличия второй итерации от первой. Для установившегося процесса рассеяния это требование выглядит следующим образом:

$$\frac{1}{4\pi} \left| \iiint_P \Delta\sigma(\vec{r}, \vec{r}_1) f(\vec{r}_1, t - \tau(\vec{r}, \vec{r}_1)) dV_1 \right| \ll |f(\vec{r}, t)|. \quad (7)$$

Здесь учтено, что $f(\vec{r}, t)$ отлично от нуля только внутри рассеивающего объема. Запаздывающий потенциал в этом приближении записывается в виде

$$E_1(\vec{R}_0, t) = \iiint_V \sigma(\vec{R}_0, \vec{r}) f(\vec{r}, t - \tau(\vec{R}_0, \vec{r})) dV. \quad (8)$$

В частном случае монохроматической волны

$$E_0(\vec{r}, t) = E_0(\vec{r}) e^{i\omega t}$$

формула для рассеянной волны

$$E_1(\vec{R}_0, t) = \frac{k^2}{4\pi\epsilon_0} e^{i\omega t} \iiint_V \sigma(\vec{R}_0, \vec{r}) \epsilon_1(\vec{r}) e^{-i\omega r} E_0(\vec{r}) dV \quad (9)$$

совпадает с формулой И. И. Гольдмана и А. Б. Мигдала [6] для решения уравнения Шредингера, полученной в предположении, что функция Грина имеет квазиклассический вид. Роль $\epsilon_1(\vec{r})$ в квантовой механике играет потенциальная энергия частицы. Естественно, что границы применимости формулы (9) из одного только предположения о функции Грина не могли быть получены.

Область применимости решения (8), как было указано ранее, определяется неравенством (7). Чтобы выразить его в явном виде через параметры задачи, необходимо иметь явные выражения для функций $\tau(\vec{R}_0, \vec{r})$ и $\sigma(\vec{R}_0, \vec{r})$. Запоздывание определяется принципом Ферма (3) или решением нелинейного уравнения в частных производных

$$(\nabla\tau)^2 = c^{-2} [\epsilon_0 + \epsilon_1(\vec{r})] \quad (10)$$

при дополнительных краевых условиях, выражающих тот факт, что искомая экстремаль проходит через точки $\vec{r}$ и $\vec{R}_0$. Точное решение такой задачи весьма сложно даже в том случае, когда допускается разделение переменных в уравнении (10). Эта трудность обусловлена необходимостью достаточно точно в аналитическом виде выразить константы разделения через граничные условия. Для определения τ и σ мы воспользуемся разложением в ряд по степеням параметра $\alpha = \epsilon_1/2\epsilon_0 \ll 1$. Ограничиваясь первой степенью, можно получить [1]

$$\tau(\vec{R}_0, \vec{r}) = \frac{V_{\epsilon_0}}{c} \{ |\vec{R}_0 - \vec{r}| + \frac{1}{2\epsilon_0} \int_0^R \epsilon_1(\vec{\rho}) d\rho \}, \quad (11)$$

$$\sigma(\vec{R}_0, \vec{r}) = \frac{1}{|\vec{R}_0 - \vec{r}|} \left\{ 1 - \frac{1}{4\epsilon_0} \int_0^R \frac{\rho}{R} (R - \rho) \Delta_{\perp} \epsilon_1(\rho, \theta, \varphi) d\rho \right\}. \quad (12)$$

Интегрирование здесь ведется вдоль прямой $\vec{R} = \vec{R}_0 - \vec{r}$; $\Delta_{\perp}$ — поперечная часть лапласиана в сферических координатах

$$\Delta_{\perp} = \frac{1}{\rho^2 \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right].$$

Область применимости решения для τ и σ в виде (11) и (12) ограничивается требованием [1]

$$|\chi| = \frac{1}{4\epsilon_0} \left| \int_0^R \frac{\rho}{R} (R - \rho) \Delta_{\perp} \epsilon_1(\rho, \theta, \varphi) d\rho \right| \ll 1. \quad (13)$$

Поскольку $\epsilon_1(\vec{r})$ отлично от нуля только внутри рассеивающего объема и $|\Delta_{\perp} \epsilon_1| \sim \epsilon_1 \Delta^2$, то условие (13) можно переписать в виде

$$|\chi| \leq \frac{\epsilon_1 L^2}{24\epsilon_0 \Delta^2} = \frac{\alpha k L}{24\pi} \cdot \frac{\Delta L}{\Delta^2} \ll 1. \quad (14)$$

Сделаем оценки в неравенстве (7) для случая плоской монохроматической падающей волны $E_0(\vec{r}) = E_0 e^{-i\vec{k}\vec{r}}$. Эти оценки легко сделать, если размеры зоны Френеля значительно меньше размера неоднородности $\frac{\lambda L}{\Lambda^2} \ll 1$. Тогда под интегралом можно выделить быстро осциллирующий множитель $\exp\{-ik|\vec{R}_0 - \vec{r}| - i\vec{k}\vec{r}\}$ и применить метод стационарной фазы. Согласно этому методу, основной вклад в значение интеграла (7) дают точки, для которых фаза $k|\vec{R}_0 - \vec{r}| + \vec{k}\vec{r}$ имеет стационарное значение. Это точки, лежащие вблизи направления обратного направлению вектора $\vec{k}$. Медленно изменяющуюся часть подынтегрального выражения можно разложить в ряд Тейлора по поперечным к этому направлению координатам и распространить по ним пределы интегрирования от $-\infty$ до $+\infty$. Ограничившись нулевым членом разложения, можно получить оценку

$$\left| \iiint_V \Delta\sigma(\vec{R}_0, \vec{r}) f(\vec{r}, t - \tau) dV \right| \approx \left| \iiint_V \frac{\Delta_{\perp} \chi}{R} f(\vec{r}, t - \tau) dV \right| \lesssim |\Delta_{\perp} \chi| \cdot |f| \cdot \lambda L. \quad (15)$$

Здесь сделано приближение $\Delta \frac{\chi}{R} \approx \frac{\Delta_{\perp} \chi}{R}$ на том же основании, что и в (12). Поэтому для выполнения неравенства (7) получаем с учетом (14)

$$\frac{\varepsilon_1 \lambda L^3}{96\pi \varepsilon_0 \Lambda^4} = \frac{\alpha k L}{96\pi^2} \cdot \left(\frac{\lambda L}{\Lambda^2}\right)^2 \ll 1. \quad (16)$$

Полученное для рассматриваемого случая $\frac{\lambda L}{\Lambda^2} \ll 1$ условие (16) не накладывает новых ограничений по сравнению с (14). Из дальнейшего будет видно, что в этом случае формула (9) приводит к тем же результатам, что и метод эквивалентного фазового экрана [7]. В противоположном случае, если $\frac{\lambda L}{\Lambda^2} \gg 1$, экспонента осциллирует медленнее, чем остальная часть подынтегрального выражения (7), так что значения не превысят (15). Основным ограничением и в этом случае будет (14). В случае $\frac{\lambda L}{\Lambda^2} \sim 1$ нельзя выделить в подынтегральном выражении наиболее быстро осциллирующей функции, чтобы в общем случае достаточно строго оценить величину интеграла (7). Однако такая ситуация, при которой осцилляции $\exp\{-ik|\vec{R}_0 - \vec{r}| - i\vec{k}\vec{r}\}$ синфазно складывались бы с осцилляциями остальной части подынтегрального выражения, вообще говоря, невозможна.

В этом случае синфазность изменения $\exp\{-ik|\vec{R}_0 - \vec{r}| - i\vec{k}\vec{r}\}$ и $\varepsilon_1(\vec{r})$ приводила бы к фокусировке электромагнитной волны, что нарушило бы условие (13), означающее [1] малость искривления лучей. Но тогда значение интеграла (7) не превышает величины (15), и основным ограничением во всех трех случаях является условие (14), если в качестве τ и σ взяты выражения (11) и (12). Если же условие (13) не выполнено, то проблема в первую очередь сводится к нахождению σ и τ , а затем уже к решению интегрального уравнения (4). Будем предполагать условие (13) выполненным. При этом в формуле (8) можно пренебречь величиной χ по сравнению с единицей, и рассеянное поле будет выглядеть следующим образом:

$$E_1(\vec{R}_0, t) = \frac{k^2}{4\pi\varepsilon_0} e^{i\omega t} \iiint_V \varepsilon_1(\vec{r}) E_0(\vec{r}) \frac{\exp\{-ik|\vec{R}_0 - \vec{r}| - \frac{ik}{2\varepsilon_0} \int_0^R \varepsilon_1(\vec{\rho}) d\rho\}}{|\vec{R}_0 - \vec{r}|} dV. \quad (17)$$

Из этого выражения следует, очевидно, первое борновское приближение, если возмущения фазы $\frac{k}{2\varepsilon_0} \left| \int_0^R \varepsilon_1(\vec{r}) d\rho \right| \sim akL$ малы по сравнению с единицей, так что ими можно пренебречь. И. И. Гольдман и А. Б. Мигдал [6] показали, что на конечных расстояниях от рассеивающего объема формула аналогичная (17) приводит к тем же результатам, что и квазиклассическое приближение. Для этого было произведено интегрирование по углам вектора $\vec{r}$ с учетом того, что $\exp\{-ik|\vec{R}_0 - \vec{r}| - i\vec{k}\vec{r}\}$ всюду быстро осциллирует за исключением направления обратного вектору $\vec{k}$. По существу эта процедура означает применение метода стационарной фазы, при котором результат определяется с точностью порядка $\frac{\lambda L}{\Lambda^2}$. При $\frac{\lambda L}{\Lambda^2} \sim 1$ метод стационарной фазы не применим и формула (17) не приводит к приближению геометрической оптики.

Покажем, что во френгоферовой зоне ($\frac{L}{R} \ll 1$, $\frac{L^2}{\lambda R} \ll 1$) рассеивающего объема из формулы (17) для плоской волны следует приближение эквивалентного фазового экрана, если только $\frac{\lambda L}{\Lambda^2} \ll 1$. Выбрав начало координат в точке наблюдения, формулу (17) перепишем в сферических координатах

$$E_1(0, t) = \frac{k^2}{4\pi\varepsilon_0} E_0 e^{i\omega t} \iint_V \frac{1}{r} \varepsilon_1(\vec{r}) \exp\left\{-i\left[kr + \vec{k}\vec{r} + \frac{k}{2\varepsilon_0} \int_0^r \varepsilon_1(\vec{r}) dr\right]\right\} \times \\ \times r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi.$$

Следует заметить, что

$$\frac{\varepsilon_1(\vec{r})}{\varepsilon_0} \exp\left\{-\frac{ik}{2\varepsilon_0} \int_0^r \varepsilon_1(\vec{r}) dr\right\} = \frac{2i}{k} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \exp\left\{-\frac{ik}{2\varepsilon_0} \int_0^r \varepsilon_1(\vec{r}) dr\right\}.$$

Производя интегрирование по частям, получим

$$E_1(0, t) = \frac{ik}{2\pi} E_0 e^{i\omega t} \left\{ \iint_{S_2} \frac{1}{r^2} \exp\left\{-i\left[kr + \vec{k}\vec{r} + \frac{k}{2\varepsilon_0} \int_{r_1}^{r_2} \varepsilon_1(\vec{r}) dr\right]\right\} dS_2 - \right. \\ \left. - \iint_{S_1} \frac{1}{r_1} \exp\left\{-i(kr + \vec{k}\vec{r})\right\} + \iiint_V \frac{i(k - \vec{k}\vec{n})r + 1}{r^2} \exp\left\{-i\left[kr + \vec{k}\vec{r} + \right.\right. \\ \left. \left. + \frac{k}{2\varepsilon_0} \int_0^r \varepsilon_1(\vec{r}) dr\right]\right\} dV \right\}.$$

Здесь S_1 — часть поверхности, ограничивающей объем V , которая видна из точки наблюдения, S_2 — остальная часть поверхности. Для простоты поверхность предполагается такой, что любая прямая из начала координат пересекает ее только в двух точках: $r_1(\theta, \varphi)$ и $r_2(\theta, \varphi)$. Направления наблюдения $\vec{n} = -\vec{r}/r$ для всех точек френгоферовой зоны можно считать одинаковыми $\vec{n} = \vec{n}_0 = \text{const}$. Углы рассеяния для крупномасштабных неоднородностей малы $\theta_0 \sim \frac{\lambda}{\Lambda} \ll 1$, так что $k - \vec{k}\vec{n}_0 = k(1 -$

$-\cos \theta_0) \simeq k \frac{\theta_0^2}{2} \sim \frac{\lambda}{\Lambda^2}$. При этом единицей в квадратных скобках в объемном интеграле можно пренебречь. Действительно,

$$[(k - \vec{k} \vec{n}_0) r]^{-1} \sim \frac{\Lambda^2}{\lambda r} \ll \frac{L^2}{\lambda r} \ll 1.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} E_1(0, t) = \frac{ik}{2\pi} E_0 e^{i\omega t} \left\{ \iint_{S_2} \frac{1}{r_2} \exp \left\{ -i \left[kr + \vec{k} \vec{r} + \frac{k}{2\varepsilon_0} \int_{r_1}^{r_2} \varepsilon_1(\vec{r}) dr \right] \right\} dS_2 - \right. \\ \left. - \iint_{S_1} \frac{1}{r_1} \exp \left\{ -i (kr + \vec{k} \vec{r}) \right\} dS_1 + i (k - \vec{k} \vec{n}_0) \iiint_V \frac{1}{r} \exp \left\{ -i [kr + \vec{k} \vec{r} + \right. \right. \\ \left. \left. \frac{k}{2\varepsilon_0} \int_{r_1}^r \varepsilon_1(\vec{r}) dr \right] \right\} dV \right\}. \end{aligned} \quad (18)$$

Интеграл по поверхности S_1 — это взятое с обратным знаком дифракционное представление той части падающей волны, которая проходит через поверхность S_1 . При сложении рассеянной и падающей волн она вычитается из последней. Интеграл по поверхности S_2 представлял бы собой приближение эквивалентного фазового экрана [7], если бы набег фазы за счет неоднородности $\varepsilon_1(\vec{r})$ брался не вдоль направления наблюдения $\vec{r}$, а вдоль направления падения $\vec{k}$. Поскольку максимальное расхождение между прямыми вдоль этих направлений в пределах рассеивающего объема порядка $\theta_0 L \sim \frac{\lambda}{\Lambda} L$, то для незначительного отличия набег фазы вдоль $\vec{r}$ и вдоль $\vec{k}$ необходимо выполнение неравенства $\frac{\lambda L}{\Lambda} \ll \Lambda$, т. е. $\frac{\lambda L}{\Lambda^2} \ll 1$. Но в этом случае объемным интегралом в (18) можно пренебречь по сравнению с поверхностным, поскольку их отношение порядка малости $\frac{\lambda L^3}{\Lambda^2 r} / \frac{L^2}{r} \sim \frac{\lambda L}{\Lambda^2} \ll 1$. Таким образом при $\frac{\lambda L}{\Lambda^2} \ll 1$ формула (8) приводит к тем же результатам, что и приближение эквивалентного фазового экрана.

В качестве примера рассмотрим фраунгоферову дифракцию света на ультразвуковых волнах. Пусть объем V представляет собой прямоугольный параллелепипед со сторонами a , b и l вдоль осей x , y , z соответственно. Внутри объема V

$$\begin{aligned} \varepsilon_1(\vec{r}, t) &= \varepsilon_1 \cos(\Omega t - Kx), \\ \vec{E}_0(\vec{r}, t) &= \vec{E}_0 \exp[i(\omega t - \vec{k} \vec{r})], \\ \vec{k}(k \sin \varphi, 0, k \cos \varphi), \quad K &= 2\pi/\Lambda. \end{aligned}$$

Ω , Λ , ω , λ — частота и длина волны ультразвука и света соответственно ($\Omega \ll \omega$). Точку наблюдения для удобства выберем в плоскости (x, z) , т. е. $R_0(R_0 \sin \theta, 0, R_0 \cos \theta)$. Для фраунгоферовой зоны легко получить

$$\omega\tau \approx kR_0 - k \frac{\vec{R}_0 \vec{r}}{R_0} + \frac{2ak}{K \sin \theta} \sin \left(K \frac{l-z}{2} \operatorname{tg} \theta \right) \cos \left(\Omega t - Kx - K \frac{l-z}{2} \operatorname{tg} \theta \right).$$

Представляя падающее поле в виде дифракционного интеграла по грани параллелепипеда, совпадающей с плоскостью (x, y) , для наблюдаемого поля, равного сумме падающей и рассеянной волн, можно получить в результате вычислений по формуле (9) или (18) выражение

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{R}_0, t) = & \frac{ikab}{2\pi R_0} \vec{E}_0 e^{i(\omega t - kR_0)} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-i)^n \exp \left[-in \left(\Omega t - K \frac{l}{2} \operatorname{tg} \theta \right) \right] \times \\ & \times \frac{\sin \frac{\pi a}{\lambda} \left(\sin \theta - \sin \varphi + n \frac{\lambda}{\Lambda} \right)}{\frac{\pi a}{\lambda} \left(\sin \theta - \sin \varphi + n \frac{\lambda}{\Lambda} \right)} \left\{ I_n \left[\frac{2\alpha k}{K \sin \theta} \sin \left(K \frac{l}{2} \operatorname{tg} \theta \right) \right] + \right. \\ & + ik [1 - \cos(\theta - \varphi)] \int_0^l \exp \left[ikz \left(\cos \theta - \cos \varphi - n \frac{\lambda}{2\Lambda} \operatorname{tg} \theta \right) \right] I_n \left[\frac{2\alpha k}{K \sin \theta} \sin \times \right. \\ & \left. \left. \times \left(K \frac{l-z}{2} \operatorname{tg} \theta \right) \right] dz \right\}. \end{aligned} \quad (19)$$

При этом было использовано разложение

$$\exp(-ip \cos q) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-i)^n e^{-in q} I_n(p),$$

где I_n — функция Бесселя первого рода.

Дифракция заметна лишь для малых углов [8], поэтому направления дифракционных максимумов, в силу того, что $\frac{\pi a}{\lambda} \gg 1$, определяются из условия

$$\theta - \varphi + n \frac{\lambda}{\Lambda} = 0 \quad \text{или} \quad \theta = \varphi - n \frac{\lambda}{\Lambda}.$$

Очевидно, аргумент бесселевых функций

$$\frac{2\alpha kl}{Kl \sin \theta} \sin \left(K \frac{l}{2} \operatorname{tg} \theta \right) \simeq \frac{2\alpha kl}{Kl \left(\varphi - n \frac{\lambda}{\Lambda} \right)} \sin \left[K \frac{l}{2} \left(\varphi - n \frac{\lambda}{\Lambda} \right) \right]$$

несимметричен по отношению к перемене знака у « n », что соответствует наблюдаемой асимметрии дифракционной картины [8]. Асимметрия обеспечивается величиной $n \frac{K^2 l}{k} = 2\pi n \frac{\lambda l}{\Lambda^2}$. Если она мала, то результат (19) совпадает с упрощенной теорией Рамана и Ната [9—11], полученной с помощью метода эквивалентного фазового экрана. Подобный результат легко получить для стоячей ультразвуковой волны ($\vec{\varepsilon}_1(\vec{r}, t) = \varepsilon_1 \cos \Omega t \cos Kx$);

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{R}_0, t) = & \frac{ikab}{2\pi R_0} \vec{E}_0 e^{i(\omega t - kR_0)} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-i)^n e^{-in K \frac{l}{2} \operatorname{tg} \theta} \times \\ & \times \frac{\sin \frac{\pi a}{\lambda} \left(\sin \theta - \sin \varphi - n \frac{\lambda}{\Lambda} \right)}{\frac{\pi a}{\lambda} \left(\sin \theta - \sin \varphi - n \frac{\lambda}{\Lambda} \right)} \left\{ I_n \left[\frac{2\alpha k \cos \Omega t}{K \sin \theta} \sin \left(K \frac{l}{2} \operatorname{tg} \theta \right) \right] + \right. \end{aligned}$$

$$+ ik [1 - \cos(\theta - \varphi)] \int_0^l \exp \left[ikz \left(\cos \theta - \cos \varphi - n \frac{\lambda}{2\Lambda} \operatorname{tg} \theta \right) \right] I_n \times \\ \times \left[\frac{2ak \cos \Omega t}{K \sin \theta} \sin \left(K \frac{l-z}{2} \operatorname{tg} \theta \right) \right] dz \}. \quad (20)$$

В отличие от работы [12] эти результаты не ограничены условием $\theta \ll \ll (Kl)^{-1}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. И. Татарский. Распространение волн в турбулентной атмосфере. «Наука», М., 1967.
2. С. М. Рытов. Введение в статистическую радиофизику. «Наука», М., 1966.
3. С. Л. Соболев. Тр. сейсм. ин-та АН СССР, № 6, 1 (1930).
4. В. И. Смирнов. Курс высшей математики, т. 4, ГИТТЛ, М., 1957.
5. С. Л. Соболев. Тр. сейм. ин-та АН СССР, № 42, 1 (1934).
6. И. И. Гольдман, А. Б. Мигдал. ЖЭТФ, 28, 394 (1955).
7. Е. Л. Фейнберг. Распространение радиоволн вдоль земной поверхности. Изд-во АН СССР, М., 1961.
8. С. М. Рытов. Изв. АН СССР, сер. физ., № 2, 223 (1937).
9. С. V. Раман, N. S. Nagendra Nath. Proc. Ind. Acad. Sci. A2, 406. (1935).
10. С. V. Раман, N. S. Nagendra Nath. Proc. Ind. Acad. Sci., A2, 413 (1935).
11. С. V. Раман, N. S. Nagendra Nath. Proc. Ind. Acad. Sci., A3, 75 (1936).
12. А. С. Брюховецкий. Изв. высш. учебн. завед., Радиофизика, 9, 577 (1966).

О ВЕТВЛЕНИИ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ $\Delta u + \lambda u + u^2 = 0$ НА СФЕРЕ

В. Г. Бабский

§ 1. Рассмотрим на сфере S уравнение

$$\Delta u + \tilde{\lambda} u + u^2 = 0 \quad (1.1)$$

с переменным параметром $\tilde{\lambda}$. Перепишем уравнение (1.1) в виде

$$\Delta u - \varepsilon^2 u + \lambda u + u^2 = 0, \quad \lambda = \tilde{\lambda} + \varepsilon^2. \quad (1.2)$$

Обращением оператора $\Delta - \varepsilon^2$ задача (1.1) сводится к операторному уравнению

$$u = B(\lambda, u) = \lambda A u + A(u^2) \quad (1.3)$$

в гильбертовом пространстве $H = L_2(S)$ с нормой, порожденной скалярным произведением

$$(f, g) = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} f(\theta, \varphi) \overline{g(\theta, \varphi)} \sin \theta d\theta d\varphi, \quad (1.4)$$

где θ, φ — координаты на сфере S . Оператор B вполне непрерывен в H , оператор A является его дифференциалом Фреше в точке $u = 0$ [1]. Оператор A представляет собой интегральный оператор с симметрическим ядром, его характеристическим числам отвечают значения $\tilde{\lambda}_l = l(l+1)$ ($l = 1, 2, \dots$), каждому из которых соответствует $(2l+1)$ собственных функций — сферических гармоник порядка l [2],

$$Y_l^m(\theta, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\varphi} P_l^m(\cos \theta), \quad -l \leq m \leq l. \quad (1.5)$$

Здесь функции $P_l^m(\cos \theta)$ нормированы, т. е. определяются формулой [3]

$$P_l^m(x) = \sqrt{\frac{(l+m)!}{(l-m)!}} \sqrt{\frac{2l+1}{2}} \cdot \frac{1}{2^l \cdot l!} (1-x^2)^{-\frac{m}{2}} \frac{d^{l-m}(x^2-1)^l}{dx^{l-m}}, \quad (1.6)$$

так что $\|Y_l^m\|_H = 1$.

Поскольку при любом l размерность собственного подпространства оператора A нечетна, применима теорема М. А. Красносельского [1], из которой следует

Теорема 1.1. Значения $\tilde{\lambda}_l = l(l+1)$ являются точками бифуркации для уравнения (1.1).

По определению [1], число λ_l называется точкой бифуркации, если для любых $\varepsilon, \delta > 0$ найдется характеристическое число λ оператора $B(\lambda, u)$ из промежутка $|\lambda - \lambda_l| < \varepsilon$, которому отвечает по крайней мере одна ненулевая собственная функция u с нормой, меньшей δ . Если δ достаточно мало, будем называть решения уравнения (1.3) «малыми».

Когда нулевое решение изолировано, все малые решения представимы в виде сходящихся рядов по целым или дробным степеням параметра $|\lambda - \lambda_l|$ [4]. Случай неизолированного нулевого решения (а именно такой случай имеет место для уравнения (1.3)) не исследован.

Для нахождения малых решений, представимых в виде рядов по целым или дробным степеням параметра $|\lambda - \lambda_l|$, применим метод Ляпунова-Шмидта [5, 6]. Другие малые решения здесь не рассматриваются.

§ 2. Пусть $\lambda = \lambda_l + \mu$, и собственное подпространство оператора A , соответствующее λ_l , образовано функциями $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{2l+1}$, где φ_1 отвечает $m=0$ в (1.5), а расположение остальных собственных функций произвольно.

Решение уравнения (1.3) будем искать в виде

$$u = \sum_{k=1}^{2l+1} \xi_k \varphi_k + v = \Phi + v, \xi_k = (u, \varphi_k), (v, \varphi_k) = 0 \quad (2.1)$$

$$(k = 1, 2, \dots, 2l+1).$$

Подставляя (2.1) в (1.3), получим

$$v - \lambda_l A v = \mu / \lambda_l \Phi + \mu A v + A(\Phi^2) + 2A(\Phi v) + A(v^2) \equiv Rv. \quad (2.2)$$

Введем проекционный оператор

$$Pw = w - \sum_{k=1}^{2l+1} (w, \varphi_k) \varphi_k, \quad w \in H \quad (2.3)$$

и, используя условия разрешимости уравнения Фредгольма, перепишем (2.2) в эквивалентной форме

$$v - \lambda_l A v = PRv \quad (Rv, \varphi_k) = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, 2l+1). \quad (2.4)$$

Малые решения уравнения (2.4) можно искать в виде ряда по степеням параметров $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{2l+1}, \mu$:

$$v = \sum_{p, q=0}^{\infty} v_{pq} \xi_1^{p_1} \dots \xi_{2l+1}^{p_{2l+1}} \mu^q, \quad v_{00} = 0; \quad (p = p_1, \dots, p_{2l+1}). \quad (2.5)$$

Введем обозначения* $j_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $j_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$, $\dots$, $j_{2l+1} = (0, \dots, 0, 1)$. Для коэффициентов, стоящих в (2.5) при членах не выше третьей степени, получаем уравнения

$$v_{j_s, 0} = v_{01} = v_{j_s, 1} = v_{02} = v_{j_s, 2} = v_{03} = 0, \quad (2.6)$$

$$v_{j_s + j_t, 0} - \lambda_l A v_{j_s + j_t, 0} = \begin{cases} 2PA(\varphi_s \varphi_t), & s \neq t, \\ PA(\varphi_s^2), & s = t, \end{cases} \quad (2.7)$$

$$v_{j_s + j_t + j_r, 0} - \lambda_l A v_{j_s + j_t + j_r, 0} = 2Pw_{str} = \begin{cases} 2P[A(\varphi_s v_{j_t + j_r, 0}) + A(\varphi_t v_{j_s + j_r, 0}) + A(\varphi_r v_{j_s + j_t, 0})] & s \neq t \neq r \\ 2P[A(\varphi_s v_{j_t + j_r, 0}) + A(\varphi_r v_{j_s + j_t, 0})], & s = t \neq r \\ 2PA(\varphi_s v_{j_t + j_r, 0}), & s = t = r, \end{cases} \quad (2.8)$$

$$v_{j_s + j_t, 1} - \lambda_l A v_{j_s + j_t, 1} = PA v_{j_s + j_t, 0}. \quad (2.9)$$

Нетрудно выписать уравнения для последующих коэффициентов. Подставляя (2.5) с уже известными коэффициентами в уравнения $(Rv, \varphi_k) = 0$ ($k =$

* Такие обозначения предложены В. И. Юдовичем,

$= 1, 2, \dots, 2l+1$), получаем систему $(2l+1)$ уравнений разветвления:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\lambda_l} \mu \xi_k + \sum_{r,s=1}^{2l+1} \xi_r \xi_s (A(\varphi_r \varphi_s), \varphi_k) + \\ & + \sum_{r,s=1}^{2l+1} \mu \xi_r \xi_s (A v_{lr+l_s,0}, \varphi_k) + \sum_{r,s,t=1}^{2l+1} \xi_r \xi_s \xi_t (\omega_{rst}, \varphi_k) + \dots = 0 \\ & (k = 1, 2, \dots, 2l+1). \end{aligned} \quad (2.10)$$

Пусть теперь $l = 1$, $\tilde{\lambda} = 2$, $\varphi_1 = Y_1(\theta)$, $\varphi_2 = Y_1^1(\theta, \varphi)$ и $\varphi_3 = Y_1^{-1}(\theta, \varphi)$. Методом индукции можно доказать следующее утверждение.

Лемма 2.1. *Функции $v_{pq}(\theta, \varphi)$ ($p = p_1, p_2, p_3$) имеют вид $v_{pq}(\theta, \varphi) = e^{(p_2-p_3)\varphi} F_{pq}(\theta)$, причем $F_{p'q} = F_{p''q}$ ($p' = p_1, p'_2, p'_3$; $p'' = p_1, p''_2, p''_3$) при $p'_2 = p''_2$, $p'_3 = p''_3$ или при $p'_2 = p''_3$, $p'_3 = p''_2$.*

Из леммы 2.1 непосредственно следует, что система уравнений разветвления (2.10) в этом случае имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\lambda_1} \mu \xi_1 + 2(A(\varphi_1 v_{2000}), \varphi_1) \xi_1^3 + 2[(A(\varphi_1 v_{0110}), \varphi_1) + (A(\varphi_2 v_{1010}), \varphi_1) + \\ & + (A(\varphi_3 v_{1100}), \varphi_1)] \xi_1 \xi_2 \xi_3 + (A v_{2000}, \varphi_1) \mu \xi_1^2 + (A v_{0110}, \varphi_1) \mu \xi_2 \xi_3 \dots = 0; \\ & \frac{1}{\lambda_1} \mu \xi_2 + 2[(A(\varphi_1 v_{1100}), \varphi_2) + (A(\varphi_2 v_{2000}), \varphi_2)] \xi_1^2 \xi_2 + \\ & + 2[(A(\varphi_2 v_{0110}), \varphi_2) + (A(\varphi_3 v_{0200}), \varphi_2)] \xi_2^2 \xi_3 + \\ & + (A v_{1100}, \varphi_2) \mu \xi_1 \xi_3 + \dots = 0; \\ & \frac{1}{\lambda_1} \mu \xi_3 + 2[(A(\varphi_1 v_{1010}), \varphi_3) + (A(\varphi_3 v_{2000}), \varphi_3)] \xi_1^2 \xi_3 + \\ & + 2[(A(\varphi_2 v_{0020}), \varphi_3) + (A(\varphi_3 v_{0110}), \varphi_3)] \xi_2 \xi_3^2 + \\ & + (A v_{1010}, \varphi_3) \mu \xi_1 \xi_3 + \dots = 0. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Здесь оставлены лишь члены до третьего порядка с отличными от нуля коэффициентами. Будем искать решения системы (2.11) в виде

$$\xi_i = \alpha_i \mu^{\varepsilon_i} + o(\mu^{\varepsilon_i}) \quad (i = 1, 2, 3). \quad (2.12)$$

Для нахождения ε_i применим метод наименьших показателей [5], который заключается в том, что после подстановки (2.12) в (2.11) в каждом уравнении приравниваются два показателя, не больших, чем каждый из оставшихся. Если полученная таким образом система уравнений для ε_i имеет решение, то оно считается допустимым в том случае, когда ε_i положительны и выполняется условие наименьших показателей. Как оказывается, число возможных вариантов здесь конечно, и перебор их для рассматриваемого случая приводит к единственному допустимому решению:

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \frac{1}{2}. \quad (2.13)$$

Система уравнений для коэффициентов α_i имеет вид

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\lambda_1} \alpha_1 + a_{11} \alpha_1^3 + a_{21} \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 = 0; \\ & \frac{1}{\lambda_1} \alpha_2 + a_{21} \alpha_1^2 \alpha_2 + a_{22} \alpha_2^2 \alpha_3 = 0; \\ & \frac{1}{\lambda_1} \alpha_3 + a_{31} \alpha_1^2 \alpha_3 + a_{32} \alpha_2 \alpha_3^2 = 0. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Здесь a_{ik} — соответствующие коэффициенты из (2.11), причем, как следует из уравнений (2.7) — (2.9) и леммы 2.1, $a_{21} = a_{31} \neq a_{11}$ и $a_{22} = a_{32} \neq a_{21}$. Обозначим $a_{11} = a_1$ и $a_{22} = a_2$. Система (2.14) имеет два решения: а) $a_1 = \pm (-\lambda_1 a_1)^{-1/2}$, $a_2 = a_3 = 0$; б) $a_1 = 0$, $a_2 a_3 = (-\lambda_1 a_2)^{-1}$. Как показывают вычисления,

$$a_1 = 2(A(\varphi_1 v_{2000}), \varphi_1) = -\frac{1}{\lambda_1} \cdot \frac{1}{10\pi}, \quad (2.15)$$

$$a_2 = 2[(A(\varphi_2 v_{0110}), \varphi_2) + (A(\varphi_3 v_{0200}), \varphi_2)] = -\frac{1}{\lambda_1} \cdot \frac{1}{20\pi}.$$

Лемма 2.1 имеет еще одно важное

Следствие. В уравнениях (2.11) коэффициенты при членах ξ_2^k и ξ_3^k ($k \geq 2$), выражаемые формулой

$$\gamma_{oko} = 2(A(\varphi_2 v_{0(k-1)0}), \varphi_s) + \sum_{i+j=k} (A(v_{oio} v_{ojo}), \varphi_s), \\ k = 0, k_1 \text{ или } k_1, 0 \quad (s = 1, 2, 3), \quad (2.16)$$

равны нулю. Тогда нетрудно видеть, что при $\mu = 0$ и $\xi_1 = 0$ уравнения разветвления (2.11) удовлетворяются при любом ξ_2 ($\xi_3 = 0$), или при любом ξ_3 ($\xi_2 = 0$), т. е. уравнение (1.3) имеет в точке $\lambda = \lambda_1$ ($\mu = 0$) два семейства «вырожденных» однопараметрических решений, зависящих от произвольных параметров ξ_2 и ξ_3 .

Характер решения системы (2.14) выясняется, если использовать, по крайней мере частично, симметрию исследуемого уравнения. Воспользуемся для этого приемом, предложенным в работе [6] для одного случая кратного спектра. Пусть G — группа вращений окружности ($g \in G$ является поворотом на угол g). Для $g \in G$ и $u \in H$ положим

$$L_g u(\theta, \varphi) = u(\theta, \varphi + g). \quad (2.17)$$

Нетрудно проверить, что уравнение (1.3) и собственное подпространство оператора A , соответствующее характеристическому числу λ_1 , инвариантны относительно операторов L_g . Выберем в этом собственном подпространстве базисные функции

$$\psi_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} P_1(\cos \theta), \quad \psi_2 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin \varphi P_1^1(\cos \theta), \quad \psi_3 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos \varphi P_1^{-1}(\cos \theta).$$

Лемма 2.2. Всякое решение уравнения (1.3) можно представить в виде

$$u' = \zeta_1 \psi_1 + \zeta_2 \psi_2 + v', \quad (v', \psi_k) = 0 \quad (k = 1, 2, 3), \quad (2.18)$$

а малые решения уравнения (1.3) определяются с точностью до преобразования L_g .

Лемма доказывается аналогично соответствующей теореме в [6]. Из нее следует, что число уравнений разветвления может быть уменьшено до двух, причем первое из них вырождается в уравнение для ζ_1 :

$$\frac{1}{\lambda_1} \mu \zeta_1 + 2(A(\psi_1 v_{2000}), \psi_1) \zeta_1^3 + (A v_{2000}, \psi_1) \mu \zeta_1^2 + \dots = 0, \quad (2.19)$$

откуда с помощью диаграммы Ньютона получаем $\zeta_1 = \pm (-\lambda_1 a_1)^{-1/2} \mu^{1/2} + o(\mu^{1/2})$.

Второе уравнение разветвления

$$\frac{1}{\lambda_1} \mu \zeta_2 + 2(A(\psi_2 v_{0200}), \psi_2) \zeta_2^3 + (A v_{1100}, \psi_2) \mu \zeta_1 \zeta_2 + \dots = 0 \quad (2.20)$$

имеет малые решения лишь при $\zeta_1 = 0$, которые также определяются с помощью диаграммы Ньютона: $\zeta_2 = \pm (-\lambda_1 a_2)^{-1/2} \mu^{1/2} + o(\mu^{1/2})$.

Сформулируем результаты, полученные для первой точки бифуркации уравнения (1.3).

Теорема 2.1. При малых $|\lambda = \lambda_1|$ от нулевого решения уравнения (1.3) отщепляется четыре малых решения

$$\begin{aligned} u_{1,2} &= \pm \sqrt{5\mu^{1/2}} \cdot P_1(\cos \theta) + o(\mu^{1/2}), \\ u_{3,4} &= \pm 2\sqrt{5\mu^{1/2}} P_1^1(\cos \theta) \sin \varphi + o(\mu^{1/2}). \end{aligned} \quad (2.21)$$

Следует отметить, поскольку симметрия исследуемого уравнения была использована не полностью, вероятно, что решения (2.21) представляют собой в действительности лишь пару малых решений.

§ 3. Рассмотрим уравнение (1.3) в подпространстве $H_1 \subset H$ функций $u(\theta)$, не зависящих от координаты φ . В этом подпространстве спектр оператора A будет простым, а уравнение разветвления — одномерным:

$$\frac{1}{\lambda_l} \mu^2 + (A(\varphi_l^2), \varphi_l) \xi^2 + 2(A(\varphi_l v_{20}), \varphi_l) \xi^3 + \dots = 0. \quad (3.1)$$

Коэффициент $\frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \lambda_l} \beta_l = (A(\varphi_l^2), \varphi_l) \left(\varphi_l = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} P_l(\cos \theta) \right)$ при нечетных l равен нулю, а при четных l равен [7]

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \lambda_l} \cdot \sqrt{\frac{2l+1}{2}} \cdot \frac{2l+1}{3l+1} \left[\frac{1.3 \dots (l-1)}{2.4 \dots l} \right]^3 \frac{2.4 \dots 3l}{1.3 \dots (3l-1)},$$

т. е. положителен.

Для вычисления коэффициента $\frac{1}{2\pi \lambda_l} \gamma_l = (A(\varphi_l v_{20}), \varphi_l)$ необходимо определить v_{20} из уравнения

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dv_{20}}{d\theta} \right) + l(l+1) v_{20} = \frac{1}{2\pi} [P_l]^2. \quad (3.2)$$

Нетрудно показать, что $v_{20}(\theta)$ представляет собой линейную комбинацию полиномов Лежандра четного порядка от $n=0$ до $2l$ с коэффициентами, которые могут быть определены из (3.2). Окончательно [7]

$$\begin{aligned} \gamma_l &= \sum_{n=0}^{2l} \frac{(2l+1)(2n+1)}{(n-l)(n+l+1)} \cdot \left[\frac{1.3 \dots (2l-n-1)}{2.4 \dots (2l-n)} \right]^2 \left[\frac{1.3 \dots (n-1)}{2.4 \dots n} \right]^4 \times \\ &\quad \times \left[\frac{2.4 \dots (2l+n)}{1.3 \dots (2l+n+1)} \right]^2 \\ &\quad (n - \text{четное}), \end{aligned} \quad (3.3)$$

Приведем без доказательства следующее утверждение.

Лемма 3.1. $\gamma_l < 0$ при любом нечетном l . Схема доказательства: при малых l — проверяем непосредственным вычислением, при больших l — используем асимптотическое равенство, вытекающее из формулы Стирлинга:

$$\frac{1.3.5 \dots (2l-1)}{2.4.6 \dots 2l} \approx \frac{1}{\sqrt{\pi l}}, \quad (3.4)$$

а затем сравниваем в сумме (3.3) слагаемые с номерами $n = k-1$ и $n = l+k$ ($k = 1, 3, 5, \dots, l$).

Применяя диаграмму Ньютона к уравнению (3.1), приходим к следующему результату.

Теорема 3.1. При малых $|\lambda - \lambda_l|$ от нулевого решения уравнения (1.3) в H_1 ответляется при четных l — одно решение

$$u(\theta) = -\frac{1}{\beta_l} \cdot \mu \cdot P_l(\cos \theta) = o(\mu),$$

а при нечетных l — два решения

$$u(\theta) = \pm [-2\gamma_l]^{-\frac{1}{2}} \mu^{1/2} P_l(\cos \theta) + o(\mu^{1/2}).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. М. А. Красносельский. Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений. ГИТТЛ, 1956.
2. С. Л. Соболев. Уравнения математической физики. ГИТТЛ, 1950.
3. И. М. Гельфанд, Р. А. Минлос, З. Я. Шапиро. Представления группы вращений и группы Лоренца. Физматгиз, 1958.
4. П. Г. Айзенгендлер, М. М. Вайнберг. Теория ветвлений решений нелинейных уравнений в многомерном случае. Докл. АН СССР, т. 163, № 3, стр. 543—546, 1965.
5. М. М. Вайнберг, В. А. Треногин. Методы Ляпунова и Шмидта в теории нелинейных уравнений и их дальнейшее развитие. — «Усп. матем. наук», т. XVII, вып. 2(104), стр. 13—75, 1962.
6. В. И. Юдович. Свободная конвекция и ветвление. ПММ, т. 31, вып. 1, стр. 101—111, 1967.
7. Е. В. Гобсон. Теория сферических и эллипсоидальных функций. Изд-во иностр. лит., 1952.

ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ВЕРОЯТНОСТИ ПЕРВОГО ДОСТИЖЕНИЯ ОДНОМЕРНЫМ СЛУЧАЙНЫМ ПРОЦЕССОМ ФИКСИРОВАННЫХ ГРАНИЦ

Ю. А. Александров, А. А. Янцевич

1. Пусть динамическая система описывается линейным стохастическим дифференциальным уравнением — 2-го порядка с постоянными коэффициентами

$$a_2 \frac{d^2x}{dt^2} + a_1 \frac{dx}{dt} + x = \xi(t), \quad (1)$$

где $\xi(t)$ — белый шум, причем

$$M\{\xi(t)\} = 0; \quad M\{\xi(t)\xi(t+\tau)\} = S_0\delta(\tau).$$

Запишем уравнение (1) в виде системы двух уравнений 1-го порядка:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= v \\ \frac{dv}{dt} &= -\frac{a_1}{a_2}v - \frac{x}{a_2} + \frac{1}{a_2}\xi(t) \end{aligned} \right\}. \quad (2)$$

Уравнение Колмогорова применительно к двумерному случаю имеет вид [1,2]

$$\frac{\partial w}{\partial t} + v \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{1}{a_2}x \frac{\partial w}{\partial v} = \frac{a_1}{a_2}v \frac{\partial w}{\partial v} + \frac{a_1}{a_2}w + \frac{S_0}{2a_2^2} \frac{\partial^2 w}{\partial v^2}, \quad (3)$$

где $w = w(x, v, t)$ — двумерная совместная плотность распределения вероятностей.

Из уравнения (3) следует, что краевая задача на конечном или полубесконечном интервале может быть поставлена только по скорости v

2. Найдем уравнение для одномерной плотности распределения вероятностей $w(x, t)$ [3].

Умножим (3) на v и проинтегрируем по v в пределах $\pm\infty$. В результате этого получим

$$\frac{\partial G(x, t)}{\partial t} + \frac{a_1}{a_2}G(x, t) = -\frac{\partial}{\partial x}[\bar{v}^2 w(x, t)] - \frac{1}{a_2}xw(x, t), \quad (4)$$

где $G(x, t) = \bar{v}w(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} vw(x, v, t) dv$ — поток вероятности,

$$\bar{v}^2 w(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} v^2 w(x, v, t) dv.$$

Из (5) можно получить уравнение для стационарной плотности в предположении устойчивости исходной системы (1):

$$a_1 G_{ст}(x) = xw(x) - a_2 \frac{\partial}{\partial x}[\bar{a}^2 w(x)]. \quad (5)$$

Исключая из уравнения (4) и уравнения непрерывности поток $G(x, t)$, получим уравнение гиперболического типа для $w(x, t)$:

$$a_2 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + a_1 \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} [x \cdot w] + a_2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} [\bar{v}^2 \cdot w]. \quad (6)$$

Уравнение (6) в отличие от (2) допускает постановку краевых задач по координате x . Решение уравнения (6) может быть представлено в виде разложения по собственным функциям соответствующей задачи Штурма—Лиувилля.

3. Рассмотрим задачу определения вероятности первого выхода случайного процесса $x(t)$ из заданных границ за время t . Запишем (6) в безразмерных координатах:

$$\frac{a_2}{a_1^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} + \frac{\partial w}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial y} [y \cdot w] + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad (7)$$

где

$$y = \frac{x}{\sigma}; \quad \tau = \frac{t}{a_1}; \quad \sigma^2 = a_2 \bar{v}^2 = \frac{S_0}{2a_1}.$$

Рассмотрим следующую краевую задачу для уравнения (7):

$$w(y, \tau) \Big|_{y=\pm \frac{1}{\sigma}} = 0 \quad (8)$$

с начальными условиями

$$\left. \begin{aligned} w(y_1, \tau) \Big|_{\tau=0} &= \delta(\sigma y - \sigma y_0) \\ \frac{\partial w(y_1, \tau)}{\partial \tau} \Big|_{\tau=0} &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (9)$$

Применяя к (7) метод разделения переменных, получаем два уравнения

$$\frac{a_2}{a_1^2} T'' + T' + \lambda T = 0 \quad (10)$$

и

$$Y'' + yY' + (1 + \lambda)Y = 0. \quad (11)$$

Решение (10) имеет вид

$$T_k(\tau) = C_{1k} e^{p_{1k}\tau} + C_{2k} e^{p_{2k}\tau}, \quad (12)$$

где

$$p_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4\lambda_k \frac{a_2}{a_1^2}}}{2 \frac{a_2}{a_1^2}} = \alpha \pm j\beta \quad (\alpha < 0).$$

Решение уравнения (11) с учетом краевых условий (8) может быть выражено через вырожденную гипергеометрическую функцию, используя подстановки [4, 5, 6]

$$z = \frac{y^2}{2}; \quad Y(\lambda, y) = e^{-z} \psi(\lambda, z), \quad (13)$$

и приведением (11) к виду

$$z \frac{d^2 \psi}{dz^2} + \left(\frac{1}{2} - z \right) \frac{d\psi}{dz} + \frac{\lambda}{2} \psi = 0. \quad (14)$$

Таким образом, искомое решение уравнения (7) может быть представлено суперпозицией частных решений:

$$\omega(y, \tau) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(\tau) Y_k(y) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{\alpha\tau} [C_{1k} \cos \beta\tau + C_{2k} \sin \beta\tau] e^{-\frac{y^2}{2}} {}_1F_1\left(-\frac{\lambda_k}{2}; \frac{1}{2}; \frac{y^2}{2}\right). \quad (15)$$

Используя начальные условия (9) и свойства ортогональности, найдем постоянные C_{1k} и C_{2k} . После их подстановки в (15) получим

$$\omega(y, y_0, \tau) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{N_k} e^{\alpha\tau} \left[\cos \beta\tau - \frac{\alpha}{\beta} \sin \beta\tau \right] {}_1F_1\left(-\frac{\lambda_k}{2}; \frac{1}{2}; \frac{y_0^2}{2}\right) \times \\ \times e^{-\frac{y^2}{2}} {}_1F_1\left(-\frac{\lambda_k}{2}; \frac{1}{2}; \frac{y^2}{2}\right), \quad (16)$$

где

$$N_k = \int_{-\frac{l}{\sigma}}^{\frac{l}{\sigma}} \left[e^{-\frac{y^2}{2}} {}_1F_1\left(-\frac{\lambda_k}{2}; \frac{1}{2}; \frac{y^2}{2}\right) \right]^2 dy.$$

Условная вероятность первого недостижения границ определится путем интегрирования (16) по y в пределах $\pm \frac{l}{\sigma}$:

$$\omega(y_0, \tau) = \frac{2l}{\sigma} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{N_k} e^{\alpha\tau} \left[\cos \beta\tau - \frac{\alpha}{\beta} \sin \beta\tau \right] \times \\ \times {}_1F_1\left(-\frac{\lambda_k}{2}; \frac{1}{2}; \frac{y_0^2}{2}\right) {}_1F_1\left(\frac{\lambda_k}{2} + \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; -\frac{l^2}{2\sigma^2}\right). \quad (17)$$

Для выполнения расчетов по соотношению (17) необходимо определить собственные значения λ_k , которые являются положительными корнями уравнения

$${}_1F_1\left(-\frac{\lambda_k}{2}; \frac{1}{2}; \frac{l^2}{2\sigma^2}\right) = 0.$$

Минимальный положительный корень может быть найден с помощью таблиц вырожденных гипергеометрических функций, приведенных в [7]. Первые два приближенных значения λ_k приведены также в работе [8].

Авторы пользуются случаем, чтобы выразить благодарность Г. Я. Любарскому за участие в обсуждении полученных результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Н. Колмогоров. Об аналитических методах в теории вероятностей. УМН, 1938, вып. 5.
2. А. А. Андронов, Л. С. Понтрягин, А. А. Витт. О статистическом рассмотрении динамических систем. ЖЭТФ, 3, 1933, № 3.
3. А. А. Бласов. Статистические функции распределения. Изд-во «Наука», М., 1966.
4. В. С. Зарицкий. Определение вероятности недостижения одномерным марковским процессом фиксированных границ. Изв. АН СССР. Техническая кибернетика, 1967, № 2.

5. Г. Бейтмен, А. Эрдейи. Высшие трансцендентные функции. Т. I, II. Изд-во «Наука», 1965.
 6. Э. Камке. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. Т. I. Изд-во «Наука», М., 1965.
 7. Л. Дж. Слейтер. Вырожденные гипергеометрические функции. ВЦ АН СССР. Библиотека матем. табл., вып. 39, М., 1966.
 8. В. С. Зарицкий. Определение вероятности надежной работы системы в течение заданного промежутка времени. Изв. АН СССР. Техническая кибернетика, 1966, № 1.
-

УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ОДНОМЕРНЫХ ПЛОТНОСТЕЙ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ В СЛУЧАЕ ЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Ю. А. Александров, А. А. Янцевич

Рассмотрим динамическую систему, описываемую дифференциальным уравнением второго порядка, вида

$$a_2 \frac{d^2 x}{dt^2} + a_1 \frac{dx}{dt} + x = \xi, \quad (1)$$

где

$$M \{ \xi(t) \} = 0, \quad M \{ \xi(t) \cdot \xi(t + \tau) \} = S_0 \delta(\tau).$$

Уравнение Колмогорова для двумерного марковского процесса $\{x(t), v = \frac{dx}{dt}\}$ имеет вид [1, 2, 3, 5]

$$\frac{\partial W}{\partial t} + v \frac{\partial W}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial v} \left[\left[\frac{a_1}{a_2} v + \frac{x}{a_2} \right] W \right] + B_v \frac{\partial^2 W}{\partial v^2}, \quad (2)$$

где $W = W(x, v, t)$ — двумерная плотность распределения вероятностей; $B_v = \frac{S_0}{2a_2^2}$ — коэффициент диффузии скорости.

Получим уравнение для одномерной плотности $W(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} W(x, v, t) dv$. В результате умножения левой и правой частей (2) на v , интегрирования по v в пределах $\pm \infty$, находим уравнение для потока

$$a_2 \frac{\partial G}{\partial t} + a_1 G = xW - a_2 \frac{\partial}{\partial x} [\langle v^2 \rangle W], \quad (3)$$

где

$$G(x, t) = \langle v \rangle W(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} v W(x, v, t) dv.$$

Исключая из уравнения (3) и уравнения непрерывности

$$\frac{\partial W}{\partial t} - \frac{\partial G}{\partial x} = 0 \quad (4)$$

поток $G(x, t)$, получим уравнение гиперболического типа для $w(x, t)$:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} + \frac{a_1}{a_2} \frac{\partial W}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{x}{a_2} W \right] + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \{ \langle v^2 \rangle W \}, \quad (5)$$

где

$$\langle v^2 \rangle W(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} v^2 W(x, v, t) dv. \quad (6)$$

Из (5) следует, что редукция уравнения Колмогорова для двумерной плотности $W(x, v, t)$ к уравнению гиперболического типа для одномерной плотности $W(x, t)$ привела к появлению $\langle v^2 \rangle$. Таким образом, для «замыкания» уравнения (5) необходимо найти $\langle v^2 \rangle$.

Известно, что для гауссовского случайного процесса координата x и скорость v , наблюдаемые в один и тот же момент времени, статистически независимы [5].

В этом случае для определения локальных характеристик процесса $x(x)$ можно воспользоваться представлением

$$W(x, v, t) = W(x, t) \cdot W(v)$$

и, следовательно,

$$\langle v^2 \rangle = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} v^2 W(x, t) W(v) dv}{\int_{-\infty}^{\infty} W(x, t) W(v) dv} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} v^2 W(v) dv}{\int_{-\infty}^{\infty} W(v) dv} = \overline{v^2} = \frac{S_0}{2a_1 a_2} = \frac{\sigma_x^2}{a_2}. \quad (7)$$

Тогда, подставляя (7) в (5), находим

$$a_2 \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} + a_1 \frac{\partial W}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} [xW] + \sigma_x^2 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}. \quad (8)$$

Полагая в (8) $a_2 = 0$, приходим к уравнению одномерной диффузии

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{a_1} W \right) + \frac{S_0}{2a_1^2} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}, \quad (9)$$

где

$$2B_x = \frac{S_0}{a_1^2} \text{ — коэффициент диффузии координаты } x \text{ а } W(x, 0) = \delta(x).$$

Посмотрим, в каких случаях для определения $\langle v^2 \rangle$ можно воспользоваться условной плотностью $W(x, y, t)$ для процесса $x(t)$. Рассмотрим формально следующее соотношение:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{y-x}{t} \right)^2 W(x, y, t) dy,$$

или [5]

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\Delta y}{\Delta t} \right)^2 W_1(\Delta y, \Delta t) d(\Delta y). \quad (10)$$

Однако выражение (10) приводит к парадоксу [4]:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\Delta y}{\Delta t} \right)^2 W_1(\Delta y, \Delta t) d(\Delta y) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{2B_x}{\Delta t} = \infty. \quad (11)$$

В действительности не существует бесконечных скоростей изменения случайного процесса.

Пусть время изменяется дискретно с шагом τ . Тогда для $\Delta t = \tau$ имеем

$$\langle v^2 \rangle = \frac{2B_x}{\tau} < \infty, \quad (12)$$

где $\langle v^2 \rangle$ — среднее значение квадрата скорости на интервале τ . Положим $\Delta t = \tau \approx T_v$ и посмотрим на формулу (12) как на определение локального среднего значения квадрата скорости:

$$\langle v^2 \rangle = \frac{2B_x}{T_v}, \quad (13)$$

где T_v — время корреляции скорости, причем $T_v \neq 0$ для конечных скоростей.

Очевидно, что для бесконечных скоростей $T_v = 0$. С этой точки зрения $\langle v^2 \rangle$ зависит от конечно-разностного шага во времени.

Таким образом, применение конечно-разностного аппарата является принципиально необходимым, если учесть, что $\langle v^2 \rangle < \infty$. Переход к пределу в выражении (10) был неправилен потому, что неявно предполагалась независимость среднего квадрата скорости от конечно-разностного шага во времени.

Учитывая, что для динамической системы, описываемой дифференциальным уравнением (1) $T_v = \frac{2a_2}{a_1}$, находим

$$\langle v^2 \rangle = \frac{S_0}{2a_1a_2} = \frac{\sigma_x^2}{a_2}. \quad (14)$$

Выражение (14) совпадает с (7). Таким образом, для нахождения $\langle v^2 \rangle$ в случае систем второго порядка можно воспользоваться соотношениями (12)—(14), для вычисления которых достаточно знать лишь $W(x, y, t)$. Заметим, что в этом случае средний квадрат смещения определится согласно выражению

$$\langle x^2 \rangle = \frac{\sigma_x^2}{a_2} t^2.$$

Уравнение (8) допускает, в отличие от уравнения Колмогорова (2), постановку краевых задач по координате x на конечном или полубесконечном интервалах. Решение уравнения (8) на конечном интервале может быть представлено в виде разложения по собственным функциям соответствующей задачи Штурма—Лиувилля.

Из (3) можно получить уравнение для установившейся плотности $W(x)$ в предположении устойчивости исходной системы (1):

$$a_1 G_{\text{ст}} = xW(x) - a_2 \langle v^2 \rangle \frac{\partial W(x)}{\partial x}. \quad (15)$$

Решение (15) имеет вид [6]

$$W(x) = \frac{c}{a_2 \langle v^2 \rangle} \exp \left[\int_{x_1}^x \frac{y}{a_2 \langle v^2 \rangle} dy \right] - \frac{a_1 G_{\text{ст}}}{a_2 \langle v^2 \rangle} \int_{x_1}^x \exp \left[\int_{x'}^x \frac{y}{a_2 \langle v^2 \rangle} dy \right] dx'. \quad (16)$$

Постоянную c определяем из условия нормировки $\int_{-l}^l W(x) dx = 1$. Величину потока $G_{\text{ст}}$ следует находить из граничных условий. Если $G(-l) = G(l) = 0$, то (16) упрощается:

$$W(x) = \frac{c}{a_2 \langle v^2 \rangle} \exp \left[\int_{x_1}^x \frac{y}{a_2 \langle v^2 \rangle} dy \right]. \quad (17)$$

Получим уравнение, которое позволяет находить одномерные моменты времени первого достижения. Для этой цели необходимо найти оператор, сопряженный к дифференциальному оператору уравнения (8). В случае стационарности уравнения (1), когда коэффициенты сноса и диффузии не зависят от времени, путем несложных преобразований сопряженного уравнения приходим к уравнению

$$a_2 \frac{\partial^2 P(\tau, x_0)}{\partial \tau^2} + a_1 \frac{\partial P(\tau, x_0)}{\partial \tau} = a_2 \langle v^2 \rangle \frac{\partial^2 P(\tau, x_0)}{\partial x_0^2} - x_0 \frac{\partial P(\tau, x_0)}{\partial x_0}, \quad (18)$$

где

$$P(\tau, x_0) = 1 - W(\tau, x_0).$$

Дифференцируя обе части уравнения (18) по τ , умножив результат на $e^{ju\tau}$ и интегрируя по τ в пределах от 0 до ∞ , получим уравнение для характеристической функции:

$$(ju)^2 a_2 \theta(u, x_0) - (ju) a_1 \theta(u, x_0) = a_2 \langle v^2 \rangle \frac{d^2 \theta(u, x_0)}{dx_0^2} - \frac{d\theta(u, x_0)}{dx_0}, \quad (19)$$

где

$$\theta(u, x_0) = \int_0^\infty \frac{dP(\tau, x_0)}{d\tau} e^{ju\tau} d\tau.$$

Для определения одномерных моментов времени первого достижения границы воспользуемся представлением характеристической функции в виде ряда [6]

$$\theta(u, x_0) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(ju)^k}{k!} M_k(x_0). \quad (20)$$

Подставляя выражение для характеристической функции $\theta(u, x_0)$ и ее производных, найденных из (20), в уравнение (19) и приравнявая члены при одинаковых степенях ju , получим необходимые уравнения для определения моментов. Так, среднее время достижения границы определяется уравнением

$$a_2 \langle v^2 \rangle \frac{d^2 M_1(x_0)}{dx_0^2} - x_0 \frac{dM_1(x_0)}{dx_0} = -a_1, \quad (21)$$

которое необходимо решать при краевых условиях:

$$M_1(-l) = M_1(l) = 0. \quad (22)$$

Второй момент времени достижения находится из уравнения

$$a_2 \langle v^2 \rangle \frac{d^2 M_2(x_0)}{dx_0^2} - x_0 \frac{dM_2(x_0)}{dx_0} = 2a_2 - 2a_1 M_1(x_0). \quad (23)$$

Для дисперсии $D = M_2 - M_1^2$ времени достижения имеет место уравнение вида

$$a_2 \langle v^2 \rangle \frac{d^2 D(x_0)}{dx_0^2} - x_0 \frac{dD(x_0)}{dx_0} = 2a_2 \langle v^2 \rangle \left(\frac{dM_1(x_0)}{dx_0} \right)^2 - 2a_2. \quad (24)$$

Среднее время достижения границы $M_1(x_0)$ и дисперсия времени первого достижения $D(x_0)$ при произвольном законе плотности распределения вероятностей $W(x_0)$ начальных значений x_0 , определяются выражениями

$$T = \langle M_1 \rangle = \int_a^b M_1(x_0) W(x_0) dx_0, \quad (25)$$

$$\Delta = \langle D \rangle = \int_a^b D(x_0) W(x_0) dx_0. \quad (26)$$

Решение уравнений (21), (23) и (24) может быть получено обычными методами.

Авторы благодарят Г. Я. Любарского и И. Е. Казакова за обсуждение результатов, изложенных в работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Н. Колмогоров. Об аналитических методах в теории вероятностей. УМИ, вып. 5, 1938.
 2. С. Чандрасекар. Стохастические проблемы в физике и астрономии. Изд-во иностр. лит., М., 1947.
 3. А. А. Андронов, Л. С. Понтрягин, А. А. Витт. О статистическом рассмотрении динамических систем. ЖЭТФ, 3, № 3, 1933.
 4. А. А. Власов. Статистические функции распределения. Изд-во «Наука», М., 1966.
 5. Миддлтон. Введение в статистическую теорию связи. Изд-во «Сов. радио», М., 1961.
 6. Р. Л. Стратонович. Избранные вопросы теории флуктуаций в радиотехнике. Изд-во «Сов. радио», М., 1961.
-

О НЕКОТОРЫХ КЛАССАХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ
С ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ

Ю. А. Александров, А. А. Янцевич

При изучении случайных процессов возникает необходимость в определении плотности распределения вероятностей $W(x, t)$ процесса $x(t)$, удовлетворяющего стохастическому дифференциальному уравнению высокого порядка. В настоящее время можно указать ряд методов, на основе которых анализируются динамические системы, находящиеся под воздействием случайных возмущений:

1) в первую очередь к ним относятся методы линейной алгебры, хорошо приспособленные для рассмотрения линейных преобразований гауссовых процессов [1];

2) рассмотрение процесса $x(t)$ как кривой в соответствующем гильбертовом пространстве и представление его в виде разложения по ортонормированному базису (канонические разложения) [1, 2];

3) методы, основанные на линеаризации нелинейностей, входящих в исходные уравнения [1, 3];

4) сведение процесса $x(t)$ к многомерному марковскому процессу (без последействия) [4—7]. Преимуществом этого метода является возможность сведения общей нелинейной статистической задачи к изучению решений линейного дифференциального уравнения в частных производных параболического типа (уравнению Фоккера — Планка — Колмогорова (ФПК)).

Заметим, что постановка и решение краевых задач для уравнения ФПК сопряжены со значительными трудностями, и в практически интересных случаях не представляется возможным получение результатов в аналитической форме. Тем самым исключается возможность решения целого ряда задач по исследованию нелинейных динамических систем, находящихся под воздействием случайных возмущений. Таким образом, сведение процесса $x(t)$ к марковскому процессу (без последействия) путем соответствующего расширения фазового пространства не всегда целесообразно [4].

Определение плотности распределения вероятностей с учетом соответствующих начальных и краевых условий может быть получено путем перехода от фазового пространства и параболических уравнений для многомерных плотностей распределения вероятностей к координатному пространству $[x, t]$ и уравнениям более высокого порядка по t для плотности распределения вероятности $W(x, t)$. Непосредственное изучение процесса $x(t)$ связано с учетом последействия и развивалось в основном в рамках корреляционной теории [1, 8]. Была предпринята попытка построения теории случайных процессов с последействием в работе [9]. Однако эта работа осталась незамеченной и указанное направление дальше практически не развивалось, исключая некоторые задачи турбулентной диффузии, статистической механики [10—13] и замечания Дж. Л. Дуба [14], касающегося тех условий, при которых справедливо

Таким образом, многомерные плотности распределения вероятностей для марковских процессов (без последствия) выражаются через вероятности перехода $p(x, t/x_0, t_0)$ и одномерную плотность распределения вероятностей $W_1(x_0, t_0)$:

$$\begin{aligned} & W_{n+1}(x_0, x_1, \dots, x_n; t_0, t_1, \dots, t_n) = \\ & = p(x_n, t_n/x_{n-1}, t_{n-1}) p(x_{n-1}, t_{n-1}/x_{n-2}, t_{n-2}) \dots p(x_1, t_1/x_0, t_0) W_1(x_0, t_0) = \\ & = W_1(x_0, t_0) \prod_{k=1}^n p(x_k, t_k/x_{k-1}, t_{k-1}). \end{aligned} \quad (6)$$

Характерное свойство марковских процессов (без последствия) состоит в том, что одномерная плотность распределения вероятностей $W_1(x_0, t_0)$ и вероятности перехода $p(x, t/x_0, t_0)$ полностью определяют марковский случайный процесс (без последствия). Можно показать, что для марковского процесса (без последствия) корреляционная функция производной от процесса содержит δ -функцию [16]. Рассмотрим выражение для W_3 :

$$W_3(x_0, t_0; s_1, \tau_1; x_1, t_1) = p(x_1, t_1/s_1, \tau_1) p(s_1, \tau_1/x_0, t_0) W_1(x_0, t_0), \quad (7)$$

где

$$t_0 < \tau_1 < t_1.$$

Проинтегрируем обе части этого равенства по s_1 :

$$\int W_3(x_0, t_0; s_1, \tau_1; x_1, t_1) ds_1 = W_1(x_0, t_0) \int p(x_1, t_1/s_1, \tau_1) p(s_1, \tau_1/x_0, t_0) ds_1. \quad (8)$$

Так как

$$\int W_3(x_0, t_0; s_1, \tau_1; x_1, t_1) ds_1 = W_2(x_1, t_1; x_0, t_0),$$

то

$$\begin{aligned} W_2(x_1, t_1; x_0, t_0) &= p(x_1, t_1/x_0, t_0) W_1(x_0, t_0) = \\ &= W_1(x_0, t_0) \int p(x_1, t_1/s_1, \tau_1) p(s_1, \tau_1/x_0, t_0) ds_1. \end{aligned} \quad (9)$$

Уравнение (9) представляет собой известное функциональное соотношение СЧК и является исходным при построении диффузионных процессов. Из (9) вытекает также, что совокупности $\{p(x, t; y, \tau)\}$ образуют полугруппу, инфинитезимальный оператор которой определяет соответствующее диффузионное уравнение [7]. Используя (9), можем вместо (6) записать следующее соотношение:

$$\begin{aligned} & W_{n+1}(x_0, x_1, \dots, x_n; t_0, t_1, \dots, t_n) = \\ & = W_1(x_0, t_0) \int_{s_1} p(x_1, t_1/s_1, \tau_1) p(s_1, \tau_1/x_0, t_0) ds_1 \int_{s_2} p(x_2, t_2/s_2, \tau_2) p(s_2, \tau_2/x_1, t_1) ds_2 \dots \\ & \dots \int_{s_n} p(x_n, t_n/s_n, \tau_n) p(s_n, \tau_n/x_{n-1}, t_{n-1}) ds_n = \\ & = W_1(x_0, t_0) \prod_{k=1}^n \int_{s_k} p(x_k, t_k/s_k, \tau_k) p(s_k, \tau_k/x_{k-1}, t_{k-1}) ds_k. \end{aligned} \quad (10)$$

3. Квази-марковские процессы

Рассмотрим общее соотношение, справедливое для случайных процессов:

$$\begin{aligned} & W_{n+1}(x_0, x_1, \dots, x_n; t_0, t_1, \dots, t_n) = \\ & = p(x_n, t_n/x_{n-1}, t_{n-1}; \dots; x_1, t_1; x_0, t_0) W_n(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}; t_0, t_1, \dots, t_{n-1}). \end{aligned} \quad (11)$$

Из (11) видно, что описание некоторых классов случайных процессов связано с установлением определенных соотношений между условными плотностями $p_n, p_{n-1}, \dots, p_2$. Марковские случайные процессы имеют место, если

$$p(x_n, t_n / x_{n-1}, t_{n-1}; \dots; x_1, t_1; x_0, t_0) = p(x_n, t_n / x_{n-1}, t_{n-1}). \quad (12)$$

Очевидно, что можно получить некоторые другие классы случайных процессов, используя гипотезы, отличные от (12), например,

$$L\{p(x_n, t_n / x_{n-1}, t_{n-1}; \dots; x_1, t_1; x_0, t_0)\} = p(x_n, t_n / x_{n-1}, t_{n-1}), \quad (13)$$

где L — некоторый оператор.

При построении некоторых классов случайных процессов на основании гипотез (12), (13) условные плотности $p_n, p_{n-1}, \dots$ рассматриваются уже как функции независимых аргументов $x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n$. В дальнейшем ограничимся рассмотрением класса случайных процессов, для которых

$$L_t^{(k)}\{p_k\} = p_{k-1}, \quad (k = 2, 3, \dots, n), \quad (14)$$

где $L_t^{(k)}$ — линейный дифференциальный оператор, вида

$$L_t^{(k)} = \sum a_{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_k}^{(k)} \frac{\partial^{\alpha_0 + \alpha_1 + \dots + \alpha_k}}{\partial t_0^{\alpha_0} \partial t_1^{\alpha_1} \dots \partial t_k^{\alpha_k}}. \quad (15)$$

с постоянными коэффициентами $a_{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_k}^{(k)}$.

Заметим, что соотношения (14) необходимо дополнить соответствующими начальными условиями, которые вытекают из физической постановки задачи и не могут задаваться произвольно. Можно, конечно, построить новые классы случайных процессов, рассматривая более общие связи между p_k и p_{k-1} . В этом случае $L^{(k)}$ может быть дифференциальным оператором, содержащим дифференцирование по x_k , коэффициенты могут зависеть от всех переменных. Наконец, L может представлять собой интегро-дифференциальный оператор, не обязательно линейный. Из соотношения (14) следует, что случайные процессы рассматриваемого класса полностью характеризуются, как и марковские процессы, условной плотностью $p(x, t / y, \tau)$ и $W_1(x, t)$. Поэтому естественно называть такие процессы квази-марковскими процессами.

Получим аналог функционального уравнения СЧК для квази-марковских процессов. С этой целью рассмотрим уравнение (11) для $n = 2$ и $t_0 < t' < t$:

$$W_3(x_0, x', x; t_0, t', t) = p(x, t / x', t'; x_0, t_0) W_2(x_0, x'; t_0, t'). \quad (16)$$

Учитывая, что

$$W_2(x_0, x'; t_0, t') = p(x', t' / x_0, t_0) W_1(x_0, t_0), \quad (17)$$

находим

$$W_3(x_0, x', x; t_0, t', t) = p(x, t / x_0, t_0) p(x', t' / x_0, t_0) W_1(x_0, t_0). \quad (18)$$

Проинтегрируем (18) по x' . В силу условия согласованности

$$\int W_3(x_0, x', x; t_0, t', t) dx' = W_2(x_0, x; t_0, t). \quad (19)$$

Тогда

$$\begin{aligned} W_2(x_0, x; t_0, t) &= \int_{x'} p(x, t / x', t'; x_0, t_0) p(x', t' / x_0, t_0) W_1(x_0, t_0) dx' = \\ &= \int_{x'} \{L_{t'}\}^{-1} p(x, t / x', t') p(x', t' / x_0, t_0) W_1(x_0, t_0) dx'. \end{aligned} \quad (20)$$

Но из (17) следует, что

$$W_2(x_0, x; t_0, t) = p(x, t/x_0, t_0) W_1(x_0, t_0). \quad (21)$$

Следовательно,

$$p(x, t/x_0, t_0) W_1(x_0, t_0) = \int_{x'} \{L_t\}^{-1} p(x, t/x', t') p(x', t'/x_0, t_0) W_1(x_0, t_0) dx'. \quad (22)$$

Если оператор $L_t^{(k)}$ не зависит от t_0 , то

$$p(x, t/x_0, t_0) = \int_{x'} \{L_t\}^{-1} p(x, t/x', t') p(x', t'/x_0, t_0) dx' \quad (23)$$

или

$$p(x, t/x_0, t_0) = \int_{x'} \int_{t_0}^t p(x, t/x', t' - \theta) p(x', t' - \theta/x_0, t_0) K(\theta) d\theta dx'. \quad (24)$$

Для интервалов (t_0, t) , которые превышают интервал корреляции процесса $\frac{dx(t)}{dt}$, имеем

$$p(x, t/x_0, t_0) = \int_{x'} dx' \left[\int_{t_0}^t p(x, t/x', t' - \theta) K(\theta) d\theta \right] p(x', t'/x_0, t_0) \quad (25)$$

или

$$p(x, t/x_0, t_0) = \int_{x'} dx' \left[\int_{t_0}^t p(x', t' - \theta/x_0, t_0) K(\theta) d\theta \right] p(x, t/x', t'), \quad (25')$$

в зависимости от выбора точки t' на интервале (t_0, t) .

Заметим, что соотношения, аналогичные (25) и (25'), имеют место и для законов распределения вероятностей $F(x, t; y, \tau)$. Функциональное уравнение (25) обобщает известное соотношение СЧК на квази-марковские процессы. Очевидно, что последствие учитывается весовой функцией $K(\theta)$ и в частном случае $K(\theta) = \delta(\theta)$ из (25) и (25') вытекает соотношение СЧК:

$$p(x, t/x_0, t_0) = \int_{x'} p(x, t/x', t') p(x', t'/x_0, t_0) dx'. \quad (26)$$

Рассмотрим теперь значения случайного процесса $x_0 = x(t_0)$; $x_1 = x(t_1)$; ...; $x_{n-1} = x(t_{n-1})$; $x_n = x(t_n)$, взятые в последовательные моменты времени $t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{n-1} < t_n$. Процесс $x(t)$ будем считать квази-марковским процессом, если справедливо равенство

$$\begin{aligned} p(x_n, t_n/x_{n-1}, t_{n-1}; x_{n-2}, t_{n-2}; \dots; x_1, t_1; x_0, t_0) = \\ = \int_{t_0}^{t_n} p(x_n, t_n/x_{n-1}, t_{n-1} - \theta) K(\theta) d\theta. \end{aligned} \quad (27)$$

Выберем шаг $t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n < t_{n-1}$ и т. д. таким образом, чтобы последствие по скорости распространялось на интервалы, меньшие, чем интервалы $t_0 < \theta_0 < t_1$; $t_1 < \theta_1 < t_2$; $t_2 < \theta_2 < t_3$; ...; $t_{n-1} < \theta_{n-1} < t_n$; В этом случае вместо (27) можем записать

$$\begin{aligned} p(x_n, t_n/x_{n-1}, t_{n-1}; x_{n-2}, t_{n-2}; \dots; x_1, t_1; x_0, t_0) = \\ = \int_{t_{n-1}}^{t_n} p(x_n, t_n/x_{n-1}, t_{n-1} - \theta_{n-1}) K(\theta_{n-1}) d\theta_{n-1}, \end{aligned} \quad (28)$$

С помощью (35), (36) можем записать (38) в виде

$$\begin{aligned}
 W(\bar{x}, \bar{y}) &= W(x_0, y_0, t_0; x_1, y_1, t_1; \dots; x_n, y_n, t_n) = \\
 &= \int_{t_{n-1}}^{t_n} p(x_n, y_n, t_n/x_{n-1}, y_{n-1}, t_{n-1} - \theta_{n-1}) K(\theta_{n-1}) d\theta_{n-1} \times \\
 &\times \int_{t_{n-2}}^{t_{n-1}} p(x_{n-1}, y_{n-1}, t_{n-1}/x_{n-2}, y_{n-2}, t_{n-2} - \theta_{n-2}) K(\theta_{n-2}) d\theta_{n-2} \dots \\
 &\dots \int_{t_1}^{t_2} p(x_2, y_2, t_2/x_1, y_1, t_1 - \theta_1) K(\theta_1) d\theta_1 \times \\
 &\times \int_{t_0}^{t_1} p(x_1, y_1, t_1/x_0, y_0, t_0 - \theta_0) K(\theta_0) d\theta_0 \cdot W(x_0, y_0, t_0). \quad (39)
 \end{aligned}$$

ИЛИ

$$W(\bar{x}, \bar{y}) = W(x_0, y_0, t_0) \prod_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} p(x_k, y_k, t_k/x_{k-1}, y_{k-1}, t_{k-1} - \theta_{k-1}) K(\theta_{k-1}) d\theta_{k-1}. \quad (40)$$

Обобщая (40) на случай многих процессов $\bar{x}_n = (x_0, x_1, \dots, x_n)$; $\bar{y}_n = (y_0, y_1, \dots, y_n)$; $\dots$; $\bar{z}_n = (z_0, z_1, \dots, z_n)$,

можем записать

$$\begin{aligned}
 W(\bar{x}_n; \bar{y}_n; \dots; \bar{z}_n) &= W(x_0, y_0, \dots, z_0, t_0; x_1, y_1, \dots, z_1, t_1; \\
 x_n, y_n, \dots, z_n, t_n) &= p(x_n, y_n, \dots, z_n, t_n | x_{n-1}, y_{n-1}, \dots, \\
 z_{n-1}, t_{n-1}; \dots; x_1, y_1, \dots, z_1, t_1; x_0, y_0, \dots, z_0, t_0) \times \\
 &\times p(x_{n-1}, y_{n-1}, \dots, z_{n-1}, t_{n-1} / x_{n-2}, y_{n-2}, \dots, z_{n-2}, t_{n-2}; \dots; \\
 x_1, y_1, \dots, z_1, t_1; x_0, y_0, \dots, z_0, t_0) \dots p(x_2, y_2, \dots, \\
 z_2, t_2 / x_1, y_1, \dots, z_1, t_1; x_0, y_0, \dots, z_0, t_0) \times \\
 &\times p(x_1, y_1, \dots, z_1, t_1 / x_0, y_0, \dots, z_0, t_0) \cdot W(x_0, y_0, \dots, z_0, t_0) = \\
 &\int_{t_{n-1}}^{t_n} p(x_n, y_n, \dots, z_n, t_n / x_{n-1}, y_{n-1}, \dots, \\
 z_{n-1}, t_{n-1} - \theta_{n-1}) K(\theta_{n-1}) d\theta_{n-1} \cdot \int_{t_{n-2}}^{t_{n-1}} p(x_{n-1}, y_{n-1}, \dots, \\
 z_{n-1}, t_{n-1} / x_{n-2}, y_{n-2}, \dots, z_{n-2}, t_{n-2} - \theta_{n-2}) K(\theta_{n-2}) d\theta_{n-2} \dots \\
 &\dots \int_{t_1}^{t_2} p(x_2, y_2, \dots, z_2, t_2 / x_1, y_1, \dots, z_1, t_1 - \theta_1) K(\theta_1) d\theta_1 \times \\
 &\times \int_{t_0}^{t_1} p(x_1, y_1, \dots, z_1, t_1 / x_0, y_0, \dots, z_0, t_0 - \theta_0) K(\theta_0) d\theta_0 \times \\
 &\times W(x_0, y_0, \dots, z_0, t_0) \quad (41)
 \end{aligned}$$

ИЛИ

$$\begin{aligned}
 W(\bar{x}_n, \bar{y}_n, \dots, \bar{z}_n) &= W(x_0, y_0, \dots, z_0, t_0) \times \\
 &\times \prod_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} p(x_k, y_k, \dots, z_k, t_k / x_{k-1}, y_{k-1}, \dots, z_{k-1}, t_{k-1} - \theta_{k-1}) K(\theta_{k-1}) d\theta_{k-1}. \quad (42)
 \end{aligned}$$

4. Дифференциальные уравнения для плотностей

Предположим, что $x(t)$ является непрерывным случайным процессом и удовлетворяет обычным условиям, которые налагаются на марковский процесс при получении уравнения ФПК из соотношения СЧК [4, 18], причем дополнительно потребуем, чтобы существовали производные

$$\frac{\partial^2 W}{\partial t^2}; \frac{\partial^3 W}{\partial t^3}; \dots; \frac{\partial^n W}{\partial t^n}, \text{ где } W(x, t; y, \tau) = \frac{\partial F(x, t; y, \tau)}{\partial y}.$$

Покажем с помощью аналога функционального уравнения СЧК (25), что функция $W(x, t; y, \tau)$, для однородного во времени квази-марковского процесса удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned} a_n \frac{\partial^n W(x, t; y, \tau)}{\partial t^n} + \dots + a_1 \frac{\partial W(x, t; y, \tau)}{\partial t} = \\ = -A(x) \frac{\partial W(x, t; y, \tau)}{\partial x} - B(x) \frac{\partial^2 W(x, t; y, \tau)}{\partial x^2}. \end{aligned} \quad (43)$$

Функциональное уравнение (25) можем записать в виде

$$F(x, t - \Delta t; y, \tau) = \int_z \left[\int_{t-\Delta t}^{\tau} F(z, t - \theta; y, \tau) K(\theta) d\theta \right] d_z F(x, t - \Delta t; z, t). \quad (44)$$

В дальнейшем ограничимся тем частным случаем, для которого

$$K\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) = \left(\sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial^{i-1}}{\partial t^{i-1}}\right)^{-1} \quad (45)$$

В силу свойств функции распределения имеем также

$$F(x, t; y, \tau) = \int_z \left[\int_{t-\Delta t}^{\tau} F(x, t - \theta; y, \tau) K(\theta) d\theta \right] d_z F(x, t - \Delta t; z, t). \quad (46)$$

Из (44) и (46) следует, что

$$\begin{aligned} \frac{F(x, t - \Delta t; y, \tau) - F(x, t; y, \tau)}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta t} \int_z \left\{ \int_{t-\Delta t}^{\tau} [F(z, t - \theta; y, \tau) - \right. \\ \left. - F(x, t - \theta; y, \tau) K(\theta) d\theta] d_z F(x, t - \Delta t; z, t) \right\}. \end{aligned} \quad (47)$$

По формуле Тейлса

$$\begin{aligned} F(z, t; y, \tau) - F(x, t; y, \tau) = (z - x) \frac{\partial F(x, t; y, \tau)}{\partial x} + \frac{1}{2} (z - x)^2 \frac{\partial^2 F(x, t; y, \tau)}{\partial x^2} + \\ + 0((z - x)^2). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \frac{F(x, t - \Delta t; y, \tau) - F(x, t; y, \tau)}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta t} \int_{|z-x| \geq \Delta} \left(\int_{t-\Delta t}^{\tau} [F(z, t - \theta; y, \tau) - \right. \\ \left. - F(x, t - \theta; y, \tau)] K(\theta) d\theta \right) d_z F(x, t - \Delta t; z, t) + \\ + \frac{1}{\Delta t} \int_{|z-x| < \Delta} \left(\int_{t-\Delta t}^{\tau} [F(z, t - \theta; y, \tau) - F(x, t - \theta; y, \tau)] K(\theta) d\theta \right) d_z F(x, t - \\ - \Delta t; z, t) = \frac{1}{\Delta t} \int_{|z-x| \geq 0} \left\{ \int_{t-\Delta t}^{\tau} [F(z, t - \theta; y, \tau) - F(x, t - \theta; y, \tau)] \times \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times K(\theta) d\theta \Big\} d_z F(x, t - \Delta t; z, t) + \\
& + \int_{t-\Delta t}^{\tau} \frac{\partial}{\partial x} F(x, t - \theta; y, \tau) K(\theta) d\theta \cdot \frac{1}{\Delta t} \int_{|z-x| < 0} (z-x) d_z F(x, t - \Delta t; z, t) + \\
& + \frac{1}{2} \int_{t-\Delta t}^{\tau} \frac{\partial^2}{\partial x^2} F(x, t - \theta; y, \tau) K(\theta) d\theta \times \\
& \times \frac{1}{\Delta t} \int_{|z-x| < 0} [(z-x)^2 + 0(z-x)^2] d_z F(x, t - \Delta t; z, t). \quad (48)
\end{aligned}$$

Переходя к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$, находим [18, 19]

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{|z-x| \geq 0} \left\{ \int_{t-\Delta t}^{\tau} [F(z, t - \theta; y, \tau) - F(x, t - \theta; y, \tau)] K(\theta) d\theta \right\} d_z F(x, t - \Delta t; z, t) = 0; \quad (49)$$

$$\begin{aligned}
\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left\{ \int_{t-\Delta t}^{\tau} \frac{\partial}{\partial x} F(x, t - \theta; y, \tau) K(\theta) d\theta \cdot \int_{|z-x| < 0} (z-x) d_z F(x, t - \Delta t; z, t) \right\} = \\
= K\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) A(x) \frac{\partial F(x, t; y, \tau)}{\partial x}; \quad (50)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left\{ \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_{t-\Delta t}^{\tau} F(x, t - \theta; y, \tau) K(\theta) d\theta \times \right. \\
& \times \int_{|z-x| < \Delta} [(z-x)^2 + 0(z-x)^2] d_z F(x, t - \Delta t; z, t) \Big\} = \\
& = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left\{ \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_{t-\Delta t}^{\tau} F(x, t - \theta; y, \tau) K\left(\frac{\partial}{\partial(t-\theta)}\right) \delta(\theta) d\theta \times \right. \\
& \times \int_{|z-x| < \Delta} (z-x)^2 d_z F(x, t - \Delta t; z, t) \Big\} = K\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) \frac{1}{2} B(x) \frac{\partial^2 F(x, t; y, \tau)}{\partial x^2}. \quad (51)
\end{aligned}$$

Таким образом, предел правой части равенства равен

$$K\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) A(x) \frac{\partial F(x, t; y, \tau)}{\partial x} + K\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) \frac{B(x)}{2} \frac{\partial^2 F(x, t; y, \tau)}{\partial x^2}. \quad (52)$$

Тогда можно предположить о существовании предела

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} [F(x, t - \Delta t; y, \tau) - F(x, t; y, \tau)] = \frac{\partial F(x, t; y, \tau)}{\partial t}. \quad (53)$$

В этом случае имеем

$$\begin{aligned}
a_n \frac{\partial^n F(x, t; y, \tau)}{\partial t^n} + \dots + a_1 \frac{\partial F(x, t; y, \tau)}{\partial t} = -A(x) \frac{\partial F(x, t; y, \tau)}{\partial x} - \\
- \frac{B(x)}{2} \frac{\partial^2 F(x, t; y, \tau)}{\partial x^2}, \quad (54)
\end{aligned}$$

где

$$K\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) = \left(\sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial^{i-1}}{\partial t^{i-1}} \right)^{-1} \text{ — оператор,}$$

учитывающий эффект последействия.

В результате дифференцирования (54) получаем уравнение для плотности распределения

$$a_n \frac{\partial^n W(x, t; y, \tau)}{\partial t^n} + \dots + a_1 \frac{\partial W(x, t; y, \tau)}{\partial t} = -A(x) \frac{\partial W(x, t; y, \tau)}{\partial x} - \frac{B(x)}{2} \frac{\partial^2 W(x, t; y, \tau)}{\partial x^2}. \quad (55)$$

Заметим, что при $K(\theta) = \delta(\theta)$ имеют место известные соотношения для марковских процессов (без последствия):

$$\frac{\partial W(x, t; y, \tau)}{\partial t} = -A(x) \frac{\partial W(x, t; y, \tau)}{\partial x} - \frac{B(x)}{2} \frac{\partial^2 W(x, t; y, \tau)}{\partial x^2}. \quad (56)$$

Для получения аналога второго уравнения для процессов с последствием предположим, что существуют непрерывные производные

$$\frac{\partial}{\partial y} [A(y) W(x, t; y, \tau)] \text{ и } \frac{\partial^2}{\partial y^2} [B(y) W(x, t; y, \tau)]. \quad (57)$$

Покажем, что в этом случае плотность распределения $W(x, t; y, \tau)$ для непрерывного случайного процесса с последствием удовлетворяет уравнению

$$a_n \frac{\partial^n W(x, t; y, \tau)}{\partial \tau^n} + \dots + a_1 \frac{\partial W(x, t; y, \tau)}{\partial \tau} = -\frac{\partial}{\partial y} [A(y) W(x, t; y, \tau)] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} [B(y) W(x, t; y, \tau)]. \quad (58)$$

Следуя [10], полагаем, что a и b ($a < b$) — некоторые числа и $R(y)$ — неотрицательная непрерывная функция, имеющая непрерывные производные до второго порядка включительно, причем

$$R(y) = 0 \text{ при } y < a \text{ и } y > b, \\ R(a) = R(b) = R'(a) = R'(b) = R''(a) = R''(b) = 0. \quad (59)$$

В силу функционального уравнения для квази-марковских процессов имеем

$$W(x, t; y, \tau + \Delta\tau) = \int_z \left[\int_t^{\tau + \Delta\tau} W(x, t; z, \tau - \theta) K(\theta) d\theta \right] W(z, \tau; y, \tau + \Delta\tau) dz. \quad (60)$$

Кроме того, из свойств плотности распределения

$$W(x, t; y, \tau) = \int_z \left[\int_t^{\tau + \Delta\tau} W(x, t; y, \tau - \theta) K(\theta) d\theta \right] W(z, \tau; y, \tau + \Delta\tau) dz = \\ = \int_t^{\tau + \Delta\tau} W(x, t; y, \tau - \theta) K(\theta) d\theta \cdot \int_z W(z, \tau; y, \tau + \Delta\tau) dz. \quad (61)$$

Следовательно,

$$\int_a^b \frac{\partial W(x, t; y, \tau)}{\partial \tau} R(y) dy = \frac{\partial}{\partial \tau} \int_a^b W(x, t; y, \tau) R(y) dy = \\ = \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \int_a^b \frac{W(x, t; y, \tau + \Delta\tau) - W(x, t; y, \tau)}{\Delta\tau} R(y) dy =$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta\tau} \left\{ \int_z \int_y \left[\int_t^{\tau+\Delta\tau} W(x, t; z, \tau - \theta) K(\theta) d\theta \right] W(z, \tau; y, \tau + \Delta\tau) R(y) dz dy - \right. \\
&\quad \left. - \int_z \int_y \left[\int_t^{\tau+\Delta\tau} W(x, t; y, \tau - \theta) K(\theta) d\theta \right] W(z, \tau; y, \tau + \Delta\tau) R(y) dz dy \right\} = \\
&= \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta\tau} \left\{ K \left(\frac{\partial}{\partial \tau} \right) \left[\int_z \int_y W(x, t; z, \tau) W(z, \tau; y, \tau + \Delta\tau) R(y) dz dy - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \int_z \int_y W(x, t; y, \tau) W(z, \tau; y, \tau + \Delta\tau) R(y) dz dy \right] = \right. \\
&= \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta\tau} \left\{ K \left(\frac{\partial}{\partial \tau} \right) \left[\int_z W(x, t; z, \tau) \cdot \int_y W(z, \tau; y, \tau + \Delta\tau) R(y) dy dz - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \int_y R(y) \int_z W(x, t; y, \tau) W(z, \tau; y, \tau + \Delta\tau) dz dy \right] \right\} = \\
&= \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta\tau} \left\{ K \left(\frac{\partial}{\partial \tau} \right) \left[\int_z W(x, t; z, \tau) \int_y W(z, \tau; y, \tau + \Delta\tau) R(y) dy dz - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \int_y W(x, t; y, \tau) R(y) dy \right] \right\}.
\end{aligned}$$

Изменяя обозначения переменных интегрирования y на z , а z на y , получим

$$\begin{aligned}
&\int_a^b \frac{\partial W(x, t; y, \tau)}{\partial \tau} R(y) dy = \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta\tau} \left\{ K \left(\frac{\partial}{\partial \tau} \right) \left[\int_y W(x, t; y, \tau) \times \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \times \int_z W(y, \tau; z, \tau + \Delta\tau) R(z) dz - R(y) \right] \right\} dy. \quad (62)
\end{aligned}$$

По формуле Тейлора

$$R(z) = R(y) + (z - y) R'(y) + (z - y)^2 R''(y) + 0[(z - y)^2].$$

Так как в силу ограниченности функции $R(z)$ и условия

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{|y-x| \geq \Delta} dF(x, t - \Delta t; y, t) = 0,$$

имеет место выполнение условий

$$\begin{aligned}
&\int_{|y-z| \geq \Delta} W(y, \tau; z, \tau + \Delta\tau) R(z) dz = 0(\Delta\tau), \\
&\int_{|y-z| < \Delta} W(y, \tau; z, \tau + \Delta\tau) dz = 1 + 0(\Delta\tau),
\end{aligned}$$

то

$$\begin{aligned}
&\int_z W(y, \tau; z, \tau + \Delta\tau) R(z) dz - R(y) = \\
&= R'(y) \int_{|y-z| < \Delta} (z - y) W(y, \tau; z, \tau + \Delta\tau) dz + \\
&+ \frac{1}{2} R''(y) \int_{|y-z| < \Delta} [(z - y)^2 + 0(z - y)^2] W(y, \tau; z, \tau + \Delta\tau) dz + 0(\Delta\tau).
\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{\partial W(x, t; y, \tau)}{\partial \tau} R(y) dy &= \lim_{\Delta \tau \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta \tau} \left\{ K \left(\frac{\partial}{\partial \tau} \right) \cdot \int_y W(x, t; y, \tau) \left[R'(y) \times \right. \right. \\ &\times \int_{|y-z| < \Delta} (z-y) W(y, \tau; z, \tau + \Delta \tau) dz + \frac{1}{2} R''(y) \int_{|y-z| < \Delta} [(z-y)^2 + 0(z-y)^2] \times \\ &\times W(y, \tau; z, \tau + \Delta \tau) dz + 0(\Delta \tau) \left. \right] dy \Big\}. \end{aligned} \quad (63)$$

Переходя в (63) к пределу при $\Delta \tau \rightarrow 0$, находим

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{\partial W(x, t; y, \tau)}{\partial \tau} R(y) dy &= K \left(\frac{\partial}{\partial \tau} \right) \left\{ \int_y W(x, t; y, \tau) \left[A(y) R'(y) - \right. \right. \\ &\left. \left. - \frac{1}{2} B(y) R''(y) \right] dy \right\}. \end{aligned} \quad (64)$$

Так как $R'(y) = R''(y) = 0$ для $y \leq a$ и $y \geq b$, то вместо (64) можем записать

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{\partial W(x, t; y, \tau)}{\partial \tau} R(y) dy &= K \left(\frac{\partial}{\partial \tau} \right) \left\{ \int_a^b W(x, t; y, \tau) \left[A(y) R'(y) + \right. \right. \\ &\left. \left. + \frac{1}{2} B(y) R''(y) \right] dy \right\}. \end{aligned} \quad (65)$$

Учитывая, что

$$\int_a^b W(x, t; y, \tau) A(y) R'(y) dy = - \int_a^b R(y) \frac{\partial}{\partial y} [A(y) W(x, t; y, \tau)] dy$$

и

$$\int_a^b W(x, t; y, \tau) B(y) R''(y) dy = \int_a^b R(y) \frac{\partial^2}{\partial y^2} [B(y) W(x, t; y, \tau)] dy,$$

в результате подстановки в (65) находим

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{\partial W(x, t; y, \tau)}{\partial \tau} R(y) dy &= K \left(\frac{\partial}{\partial \tau} \right) \left[\int_a^b \left\{ - \frac{\partial}{\partial y} [A(y) W(x, t; y, \tau)] + \right. \right. \\ &\left. \left. + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} [B(y) W(x, t; y, \tau)] \right\} R(y) dy \right] \end{aligned} \quad (66)$$

или

$$\begin{aligned} \int_a^b \left\{ \frac{\partial W(x, t; y, \tau)}{\partial \tau} + K \left(\frac{\partial}{\partial \tau} \right) \left[\frac{\partial}{\partial y} \{ A(y) W(x, t; y, \tau) \} - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \{ B(y) W(x, t; y, \tau) \} \right] \right\} R(y) dy = 0. \end{aligned} \quad (67)$$

Так как $R(y) \neq 0$, то имеем

$$\begin{aligned} a_n \frac{\partial^n W(x, t; y, \tau)}{\partial \tau^n} + \dots + a_1 \frac{\partial W(x, t; y, \tau)}{\partial \tau} &= - \frac{\partial}{\partial y} [A(y) W(x, t; y, \tau)] + \\ &+ \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} [B(y) W(x, t; y, \tau)], \end{aligned} \quad (68)$$

где учтено, что

$$K\left(\frac{\partial}{\partial \tau}\right) = \left(\sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial^{i-1}}{\partial \tau^{i-1}}\right)^{-1}.$$

Основная задача, которая представляет интерес для приложений, заключается в отыскании неизвестной функции $W(x, t; y, \tau)$ по «прямому» и «обратному» уравнениям (43) и (58), в которых коэффициенты $A(x)$ и $B(x)$ предполагаются известными.

Если положить $K(\theta) = \delta(\theta)$, то получим уравнение параболического типа для $W(x, t; y, \tau)$:

$$\frac{\partial W(x, t; y, \tau)}{\partial \tau} = -\frac{\partial}{\partial y} [A(y) W(x, t; y, \tau)] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} [B(y) \cdot W(x, t; y, \tau)]. \quad (69)$$

5. Уравнения для апостериорных распределений

Обозначим $\bar{x}_m = (x_0, x_1, \dots, x_m)$ — последовательность наблюдаемых данных за время от 0 до $m\Delta t$, $\bar{y}_m = (y_0, y_1, \dots, y_m)$ — последовательность неизвестных значений сигнала. Совместную плотность распределения вероятностей $\bar{x}_m$ и $\bar{y}_m$ обозначим $W(\bar{x}_m, \bar{y}_m)$.

Для случая квази-марковских процессов совместная плотность распределения $\bar{x}_m$ и $\bar{y}_m$ представляется следующим образом:

$$W(\bar{x}_m; \bar{y}_m) = W(x_0, y_0, t_0) \prod_{k=1}^m \int_{t_{k-1}}^{t_k} p(x_k, y_k, t_k | x_{k-1}, y_{k-1}, t_{k-1} - \theta_{k-1}) K(\theta_{k-1}) d\theta_{k-1}. \quad (70)$$

По аналогии можно записать

$$W(\bar{x}_{m+1}; \bar{y}_{m+1}) = W(x_0, y_0, t_0) \prod_{k=1}^{m+1} \int_{t_{k-1}}^{t_k} p(x_k, y_k, t_k | x_{k-1}, y_{k-1}, t_{k-1} - \theta_{k-1}) K(\theta_{k-1}) d\theta_{k-1}. \quad (71)$$

Или, учитывая (70),

$$W(\bar{x}_{m+1}; \bar{y}_{m+1}) = W(\bar{x}_m, \bar{y}_m) \int_{t_m}^{t_{m+1}} p(x_{m+1}, y_{m+1}, t_{m+1} | x_m, y_m, t_m - \theta_m) K(\theta_m) d\theta_m. \quad (72)$$

Рассмотрим условную вероятность $W(\bar{y}_m/\bar{x}_m)$ значений $\bar{y}_m$ сигнала при условии, что наблюдалась реализация $\bar{x}_m$. Используя формулу условной вероятности, имеем

$$W(\bar{y}_m/\bar{x}_m) = \frac{1}{W(\bar{x}_m)} W(\bar{x}_m; \bar{y}_m), \quad (73)$$

или, подставляя в (73) значение $W(\bar{x}_m; \bar{y}_m)$, из (70) получаем

$$W(\bar{y}_m/\bar{x}_m) = \frac{1}{W(\bar{x}_m)} W(\bar{x}_m; \bar{y}_m) = \frac{1}{W(\bar{x}_m)} W(x_0, y_0, t_0) \times \\ \times \prod_{k=1}^m \int_{t_{k-1}}^{t_k} p(x_k, y_k, t_k | x_{k-1}, y_{k-1}, t_{k-1} - \theta_{k-1}) K(\theta_{k-1}) d\theta_{k-1}. \quad (74)$$

Аналогично,

$$\begin{aligned} W(\bar{y}_{m+1}/\bar{x}_{m+1}) &= \frac{1}{W(\bar{x}_{m+1})} W(\bar{x}_{m+1}; \bar{y}_{m+1}) = \frac{1}{W(\bar{x}_{m+1})} W(x_0, y_0, t_0) \times \\ &\times \prod_{k=1}^{m+1} \int_{t_{k-1}}^{t_k} p(x_k, y_k, t_k/x_{k-1}, y_{k-1}, t_{k-1} - \theta_{k-1}) K(\theta_{k-1}) d\theta_{k-1} = (75) \\ &= \frac{1}{W(\bar{x}_{m+1})} W(\bar{x}_m; \bar{y}_m) \int_{t_m}^{t_{m+1}} p(x_{m+1}, y_{m+1}, t_{m+1}/x_m, y_m, t_m - \\ &\quad - \theta_m) K(\theta_m) d\theta_m. \end{aligned}$$

Существенный интерес представляет апостериорное распределение вероятностей для последнего значения сигнала y_m . Обозначим его

$$W(y_m, t_m) = W(y_m/\bar{x}_m). \quad (76)$$

Если известно совместное распределение нескольких случайных величин, то для получения плотности распределения одной из них необходимо проинтегрировать совместную плотность распределения по всем остальным переменным:

$$\begin{aligned} W(y_m, t_m) &= W(y_m/\bar{x}_m) = \frac{1}{W(\bar{x}_m)} \int_{y_0} \dots \int_{y_{m-1}} W(\bar{x}_m, \bar{y}_m) dy_0 \times \\ &\times dy_1 \dots dy_{m-1} = \frac{1}{W(\bar{x}_m)} \int_{y_0} \dots \int_{y_{m-1}} W(x_0, y_0, t_0) \prod_{k=1}^m \left\{ \int_{t_{k-1}}^{t_k} p(x_k, y_k, \right. \\ &\quad \left. t_k/x_{k-1}, y_{k-1}, t_{k-1} - \theta_{k-1}) \cdot K(\theta_{k-1}) d\theta_{k-1}, dy_{k-1} \right\}. \quad (77) \end{aligned}$$

В свою очередь,

$$\begin{aligned} W(y_{m+1}, t_{m+1}) &= W(y_{m+1}/\bar{x}_{m+1}) = \frac{1}{W(\bar{x}_{m+1})} \int_{y_0} \dots \int_{y_m} W(\bar{x}_{m+1}; \\ &\bar{y}_{m+1}) dy_0 dy_1 \dots dy_m = \frac{1}{W(\bar{x}_{m+1})} \int_{y_0} \dots \int_{y_m} W(x_0, y_0, t_0) \prod_{k=1}^{m+1} \left\{ \int_{t_{k-1}}^{t_k} p(x_k, y_k, \right. \\ &t_k/x_{k-1}, y_{k-1}, t_{k-1} - \theta_{k-1}) \cdot K(\theta_{k-1}) d\theta_{k-1} dy_{k-1} \Big\} = \frac{1}{W(\bar{x}_{m+1})} \int_{y_0} \dots \int_{y_m} W(\bar{x}_m; \\ &\bar{y}_m) \cdot \int_{t_m}^{t_{m+1}} p(x_{m+1}, y_{m+1}, t_{m+1}/x_m, y_m, t_m - \theta_m) K(\theta_m) d\theta_m dy_0 dy_1 \dots dy_m, \end{aligned} \quad (78)$$

но

$$\frac{1}{W(\bar{x}_m)} \int_{y_0} \dots \int_{y_{m-1}} W(\bar{x}_m; \bar{y}_m) dy_0 dy_1 \dots dy_{m-1} = W(y_m, t_m) = W(y_m/\bar{x}_m). \quad (79)$$

Следовательно, если выделить в (78) сомножитель (79), то вместо (77) можно записать

$$W(y_{m+1}/\bar{x}_{m+1}) = W(y_{m+1}, t_{m+1}) = \frac{W(\bar{x}_m)}{W(\bar{x}_{m+1})} \int_{y_m} W(y_m/\bar{x}_m) \times \\ \times \int_{t_m}^{t_{m+1}} p(x_{m+1}, y_{m+1}, t_{m+1}/x_m, y_m, t_m - \theta_m) K(\theta_m) d\theta_m dy_m. \quad (80)$$

Воспользовавшись условием нормировки

$$\int W(y_{m+1}, t_{m+1}) dy_{m+1} = 1,$$

исключим множитель $W(\bar{x}_m)/W(\bar{x}_{m+1})$. Тогда вместо (80) получим

$$\int W(y_{m+1}, y_{m+1}) dy_{m+1} = 1 = \frac{W(\bar{x}_m)}{W(\bar{x}_{m+1})} \int_{y_{m+1}} \int_{y_m} W(y_m/\bar{x}_m) \times \\ \times \int_{t_m}^{t_{m+1}} p(x_{m+1}, y_{m+1}, t_{m+1}/x_m, y_m, t_m - \theta_m) K(\theta_m) d\theta_m dy_m dy_{m+1}, \quad (81)$$

и, следовательно,

$$W(y_{m+1}, t_{m+1}) = \\ = \frac{\int_{y_m} W(y_m/\bar{x}_m) \int_{t_m}^{t_{m+1}} p(x_{m+1}, y_{m+1}, t_{m+1}/x_m, y_m, t_m - \theta_m) K(\theta_m) d\theta_m dy_m}{\int_{y_m} \int_{y_{m+1}} W(y_m/\bar{x}_m) \int_{t_m}^{t_{m+1}} p(x_{m+1}, y_{m+1}, t_{m+1}/x_m, y_m, t_m - \theta_m) K(\theta_m) d\theta_m dy_m dy_{m+1}}. \quad (82)$$

Для процессов y_m с m состояниями интеграл необходимо заменить суммой по этим составляющим:

$$\int \Phi(y_k) dy_k = \sum_{k=0}^m \Phi(y_k). \quad (83)$$

В частном случае двух состояний имеем

$$\int \Phi(y_k) dy_k = \sum_{k=0}^1 \Phi(y_k). \quad (84)$$

При этом формула для апостериорной плотности (82) с учетом (84) принимает вид

$$W(y_{m+1}/\bar{x}_{m+1}) = W(y_{m+1}, t_{m+1}) = \\ = \frac{\sum_{y_m} W(y_m/\bar{x}_m) \int_{t_m}^{t_{m+1}} p(x_{m+1}, y_{m+1}, t_{m+1}/x_m, y_m, t_m - \theta_m) K(\theta_m) d\theta_m}{\sum_{y_m} \sum_{y_{m+1}} W(y_m/\bar{x}_m) \int_{t_m}^{t_{m+1}} p(x_{m+1}, y_{m+1}, t_{m+1}/x_m, y_m, t_m - \theta_m) K(\theta_m) d\theta_m}. \quad (85)$$

Рекуррентные соотношения (82) и (85) позволяют для двумерного квази-марковского процесса оценить условное распределение вероятно-

стей компоненты y_m , если наблюдается компонента x_m . В случае марковского процесса (без последствия) $K(0) = \delta(0)$ и из (82) и (85) следуют как частный случай уравнения для апостериорных плотностей, полученные в работах [17, 20].

6. Некоторые другие процессы, родственные квази-марковским процессам [4, 21, 22]

Рассмотрим стохастические процессы с последствием, с конечным множеством состояний $x_1, x_2, \dots, x_n$ и непрерывным временем. В этом случае полагают

$$P(x_i, t_1; x_j, t_2) = P_{ij}(t_1, t_2). \quad (86)$$

Так как для любого множества G будет, очевидно,

$$P(x_i, t_1; G, t_2) = \sum_{x_k \in G} P_{ik}(t_1, t_2), \quad (87)$$

то достаточно ограничиться рассмотрением вероятностей $P_{ij}(t_1, t_2)$. Для процессов с последствием рассматриваемого вида имеет место функциональное уравнение

$$L_t \{P_{ik}(t_1, t_2)\} = \sum_j P_{ij}(t_1, t_2) P_{jk}(t_2, t_3). \quad (88)$$

В случае, когда L_t является линейным дифференциальным оператором, (88) принимает вид

$$\begin{aligned} P_{ik}(t_1, t_2) &= \sum_j \left\{ \int_{t_1}^{t_2} P_{ij}(t_1, t_2 - t_m) K(t_m) dt_m \right\} P_{jk}(t_2, t_3) = \\ &= \sum_j \left\{ \int_{t_2}^{t_3} P_{jk}(t_2 - t_m, t_3) K(t_m) dt_m \right\} P_{ij}(t_1, t_2). \end{aligned} \quad (89)$$

Будем считать, что функции $P_{ij}(s, t)$ непрерывны и при $t \neq s$ имеют непрерывные производные по t и s . Тогда, используя (88), (89), можно получить первую систему дифференциальных уравнений для функций $P_{ik}(s, t)$, $s < t$:

$$L_t \left\{ \frac{dP_{ik}(s, t)}{dt} \right\} = \sum_j A_{jk} P_{ij}(s, t), \quad (90)$$

где

$$L_t = a_n \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} + \dots + a_2 \frac{d}{dt} + a_1,$$

$$A_{jk} = \left. \frac{dP_{jk}(t-u)}{du} \right|_{u=t}; \quad A_{jk} \geq 0; \quad i \neq k; \quad A_{kk} \leq 0, \\ \sum_k A_{jk} = 0.$$

Для $s > t$ можно получить вторую систему дифференциальных уравнений:

$$L_t \left\{ \frac{dP_{ik}(s, t)}{ds} \right\} = - \sum_j A_{ij} P_{jk}(s, t). \quad (91)$$

В случае стохастического процесса с последствием, со счетным множеством состояний и дискретным временем основное функциональное уравнение имеет вид

$$\begin{aligned} P_{ik}(m, n) &= \sum_i \left\{ \sum_{q=m}^r P_{ij}(m, r-q) K(q) \right\} P_{ik}(r, n) = \\ &= \sum_i \left\{ \sum_{q=r}^n P_{jk}(n, r-q) K(q) \right\} P_{ij}(m, r). \end{aligned} \quad (92)$$

Используя (92), можно получить первую систему разностных уравнений для функций $P_{ik}(m, n)$, $m < n$:

$$L_{\Delta} \{ \Delta P_{ik}(m, n) \} = \sum_j A_{jk} P_{ij}(m, n), \quad (93)$$

где разностный оператор

$$L_{\Delta} = a_n \Delta^{n-1} + \dots + a_2 \Delta + a_1.$$

Для $n > m$ имеем соответственно

$$L_{\Delta} \{ \Delta P_{ik}(m, n) \} = - \sum_j A_{jk} P_{ij}(m, n). \quad (94)$$

Можно также рассмотреть процессы с непрерывным множеством состояний и скачками. Пусть за бесконечно малый промежуток времени $(t, t + \Delta t)$ процесс с последствием $x(t)$ с вероятностью $1 - b(x) dt$ сохраняет прежнее значение и с вероятностью $p(x, z) dz dt$ принимает значение x' , где $z < x' < z + \Delta z$. При этом предполагается, что

$$\int p(x, z) dz = b(x). \quad (95)$$

Тогда для плотности распределения вероятностей $W(x, t)$ имеет место интегро-дифференциальное уравнение вида

$$L_t \left\{ \frac{dW(x, t)}{dt} \right\} = b(x) W(x, t) + \int_{-\infty}^{\infty} W(x, t) p(x, z) dz. \quad (96)$$

Если учесть помимо скачков и непрерывное изменение процесса $x(t)$, то имеем смешанный случай, для которого справедливо уравнение

$$\begin{aligned} L_t \left\{ \frac{dW(x, t)}{dt} \right\} &= b(x) W(x, t) + \int_{-\infty}^{\infty} W(x, t) p(x, z) dz - \\ &- \frac{\partial}{\partial x} [A(x) W(x, t)] + \frac{\partial^2}{\partial x^2} [B(x) W(x, t)], \end{aligned} \quad (97)$$

где L_t — линейный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами.

В заключение отметим, что полученные в работе уравнения могут быть использованы при решении прикладных задач (линейной и нелинейной фильтрации, оптимального управления и сглаживания результатов измерений, прогнозирования надежности, обнаружения и распознавания сигналов в шумах, экстраполяции и т. д.).

Авторы выражают признательность Г. Я. Любарскому за ряд полезных советов.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. С. Пугачев. Теория случайных функций. Физматгиз, М., 1960.
2. К. Кархунен. *Ann. Acad. Sci. Fennicae, ser. A, Math. Phys.*, 37, 3—79, 1947.
3. И. Е. Казаков, Б. Г. Доступов. Статистическая динамика нелинейных автоматических систем. Физматгиз, М., 1962.
4. А. Н. Колмогоров. Об аналитических методах в теории вероятностей. УМН, вып. 5, 1938.
5. С. Н. Бернштейн. Собр. соч., т. IV. Изд-во «Наука», 1964.
6. Н. Н. Боголюбов. О некоторых статистических методах в математической физике. Изд-во АН УССР, 1945.
7. А. А. Андронов, Л. С. Понтрягин, А. А. Витт. О статистическом рассмотрении динамических систем. Собр. соч. А. А. Андропова. Изд-во АН СССР, 1956.
8. А. Я. Хинчин. Теория корреляции стационарных стохастических процессов. УМН, вып. 5, 1938.
9. В. М. Дубровский. О чисто разрывных случайных процессах с последствием. Докл. АН СССР, т. XVII, № 2, 1945.
10. P. H. Roberts. Analytical theory of turbulent diffusion. *J. Fluid Mech.*, 11, 1961.
11. P. H. Roberts. On Bourret's hypothesis concerning turbulent diffusion. *Can. J. Phys.*, vol. 39, 1961.
12. А. С. Монин, А. М. Яглом. Статистическая гидромеханика. Изд-во «Наука», ч. I, 1965, ч. II, 1967.
13. А. А. Власов. Статистические функции распределения. Изд-во «Наука», М., 1966.
14. Дж. Л. Дуб. Вероятностные процессы. Изд-во иностр. лит., М., 1956.
15. В. И. Тихонов. Статистическая радиотехника. Изд-во «Сов. радио», М., 1966.
16. Р. Л. Стратонович. Избранные вопросы теории флуктуаций в радиотехнике. Изд-во «Сов. радио», М., 1961.
17. Р. Л. Стратонович. Условные марковские процессы и их применение к теории оптимального управления. Изд-во МГУ, М., 1966.
18. Б. В. Гнеденко. Курс теории вероятностей. ГИИТЛ, М., 1950.
19. И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилев. Обобщенные функции. Физматгиз, вып. 1—3, М., 1958.
20. Э. М. Хазен. Методы оптимальных статистических решений и задачи оптимального управления. Изд-во «Сов. радио», М., 1968.
21. В. Феллер. К теории стохастических процессов. УМН, вып. 5, 1938.
22. W. Feller. On Semi-Markov Processes. *Proc. of the Nat. Acad. of Sci. of the USA.*, v. 51, April 1964, № 4.

СОДЕРЖАНИЕ

	Стр.
Ю. А. Палант. Об одном методе получения признаков кратной полноты системы собственных и присоединенных векторов полиномиального пучка операторов	3
Е. Я. Хруслов. Задача Дирихле в области со случайной границей	14
Л. М. Глушкин. О простых операторах	38
Г. Н. Гестрин. О дифракции плоской электромагнитной волны на гребенчатой структуре	52
И. В. Ушакова. Асимптотические оценки разности субгармонических функций в плоскости	70
В. П. Петренко. Асимптотические свойства одного класса мероморфных функций	82
М. Д. Дольберг, Н. Н. Ясницкая. Равновесие балки конечной длины на упругой полуплоскости	99
Г. И. Карпиловский. О наименьшей степени точного представления абелевых групп	107
<u>В. Л. Герман</u> , А. С. Брюховецкий. К теории рассеяния волн неоднородной средой	116
В. Г. Бабский. О ветвлении решений уравнения $\Delta u + \lambda u + u^2 = 0$ на сфере	124
Ю. А. Александров, А. А. Янцевич. Об определении вероятности первого достижения одномерным случайным процессом фиксированных границ	130
Ю. А. Александров, А. А. Янцевич. Уравнения для одномерных плотностей распределения вероятностей в случае линейных динамических систем второго порядка	134
Ю. А. Александров, А. А. Янцевич. О некоторых классах случайных процессов с последствием	139

УДК 513.88

Об одном методе получения признаков кратной полноты системы собственных и присоединенных векторов полиномиального пучка операторов. Палант Ю. А. «Вестник Харьковского университета, серия механико-математическая», вып. 34, 1970, стр. 3—13.

Изучаются системы собственных и присоединенных векторов полиномиального пучка операторов. Получены теоремы, сводящие утверждение о полноте собственных и присоединенных векторов полиномиального пучка к теореме о линейном пучке.

Библиографических ссылок 8.

УДК 517.944/.947

Задача Дирихле в области со случайной границей. Хруслов Е. Я. «Вестник Харьковского университета, серия механико-математическая», вып. 34, 1970, стр. 14—37.

Рассматриваются вопросы, связанные с краевой задачей Дирихле для уравнений Лапласа и Гельмгольца в областях специального вида, которые образуются в результате выбрасывания некоторого случайным образом выбранного замкнутого множества. Изучается структура решения соответствующей краевой задачи.

Рисунок 1. Библиографических ссылок 6.

УДК 512;519.4

О простых операторах. Глушкин Л. М. «Вестник Харьковского университета, серия механико-математическая», вып. 34, 1970, стр. 38—51.

Изучаются операторы, представляющие собой обобщение полугрупп и полугрупп. Показано, что i -простой p -оператор можно разложить в объединение его двухсторонних идеалов, не имеющих отличных от нуля общих элементов.

Библиографических ссылок 4.

УДК 517.9.004.14:53

О дифракции плоской электромагнитной волны на гребенчатой структуре. Гестрин Г. Н. «Вестник Харьковского университета, серия механико-математическая», вып. 34, 1970, стр. 52—69.

Проведено строгое изучение известной задачи о рассеянии плоской электромагнитной волны периодической решеткой, встречающейся в литературе под названием «ножевой». Метод настоящей работы сходен с применяемыми Р. Миттра, Е. В. Авдеевым и Г. В. Воскресенским.

Исследованы бесконечные системы линейных уравнений, являющиеся основным средством решения задачи. Доказано, что волны длинные по сравнению с характерными размерами структуры (периодом и шириной ленты) почти полностью отражаются ею.

Рисунок 1. Библиографических ссылок 7.

УДК 517.52/.566

Асимптотические оценки разности субгармонических функций в плоскости. Ушакова И. В. «Вестник Харьковского университета, серия механико-математическая», вып. 34, 1970, стр. 70—81.

Получены асимптотические оценки для функций, представимых в виде разности субгармонических функций в плоскости, причем характеристическая функция удовлетворяет некоторому условию, характеризующему рост субгармонической функции.

Библиографических ссылок 7.

УДК 517.52/.566

Асимптотические свойства одного класса мероморфных функций. Петренко В. П. «Вестник Харьковского университета, серия механико-математическая», вып. 34, 1970, стр. 82—98.

Изучаются свойства величины дефектов для одного класса мероморфных функций. Вводится понятие углового роста для мероморфных функций. Получены оценки для величины дефектов.

Библиографических ссылок 10.

УДК 517.9.004.14:53

Равновесие балки конечной длины на упругой полуплоскости. Дольберг М. Д., Ясницкая Н. Н. «Вестник Харьковского университета, серия механико-математическая», вып. 34, 1970, стр. 99—106.

Исследуется задача о равновесии балки конечной длины, нагруженной нагрузкой и лежащей на упругой полуплоскости. Получено выражение для функций влияния в виде равномерно сходящихся рядов.

Библиографических ссылок 4.

УДК 519. 44

О наименьшей степени точного представления абелевых групп. Карпиловский Г. И. «Вестник Харьковского университета, серия механико-математическая», вып. 34, 1970, стр. 107—115.

Определяется наименьшая степень точного представления произвольной конечной абелевой группы над полями рациональных и вещественных чисел, над алгебраически замкнутым полем произвольной характеристики, а также наименьшая степень точного представления конечной абелевой p -группы над произвольным полем с характеристикой, отличной от p . На этом пути получается также простое доказательство теоремы А. Я. Повзнера о наименьшей степени точного представления конечной абелевой группы подстановками.

Библиографических ссылок 7.

УДК 517. 9. 004. 14:53

К теории рассеяния волн неоднородной средой. Герман В. Л., Брюховецкий А. С. «Вестник Харьковского университета, серия механико-математическая», вып. 34, 1970, стр. 116—123.

Рассмотрено приближенное решение волнового уравнения в неоднородной среде, полученное как строгое следствие из метода С. Л. Соболева в теории дифференциальных уравнений в частных производных. Установлены границы его применимости и связь с другими приближенными теориями.

Библиографических ссылок 12.

УДК 517. 9. 004. 14:53

О ветвлении решений уравнения $\Delta u + \lambda u + u^2 = 0$ на сфере. Бабский В. Г. «Вестник Харьковского университета, серия механико-математическая», вып. 34, 1970, стр. 124—129.

Рассматривается уравнение $\Delta u + \lambda u + u^2 = 0$ и методом Ляпунова-Шмидта изучаются те малые решения, которые отвечают от нулевого решения.

Библиографических ссылок 7

УДК 519. 2 004. 14

Об определении вероятности первого достижения одномерным случайным процессом фиксированных границ. Александров Ю. А., Янцевич А. А. «Вестник Харьковского университета, серия механико-математическая», вып. 34, 1970, стр. 130—133.

Получено уравнение гиперболического типа для одномерной плотности распределения вероятностей в случае динамической системы, описываемой дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами. Рассматривается решение задачи определения вероятности первого выхода случайного процесса из заданных границ.

Библиографических ссылок 8.

УДК 519. 2. 004. 14

Уравнения для одномерных плотностей распределения вероятностей в случае линейных динамических систем второго порядка. Александров Ю. А., Янцевич А. А. «Вестник Харьковского университета, серия механико-математическая», вып. 34, 1970, стр. 134—138.

Получено уравнение гиперболического типа, которому удовлетворяет одномерная плотность распределения вероятностей в случае динамической системы второго порядка. Рассматривается стационарное решение уравнения для одномерной плотности. Определено уравнение для характеристической функции одномерного процесса. Приводятся уравнения, позволяющие найти среднее время достижения границы и дисперсию времени достижения.

Библиографических ссылок 6.

УДК 519. 2. 004. 14

О некоторых классах случайных процессов с последствием. Александров Ю. А., Янцевич А. А. «Вестник Харьковского университета, серия механико-математическая», вып. 34, 1970, стр. 139—157.

Рассматривается классификация случайных процессов в порядке усложнения структуры плотностей распределения вероятностей. Вводятся случайные процессы, учитывающие эффекты последствия и являющиеся обобщением марковских процессов (без последствия). Получен аналог функционального уравнения Смолуховского — Чепмена — Колмогорова и соответствующие дифференциальные уравнения для плотностей распределения процессов с последствием. Приводятся уравнения для апостериорных распределений.

Библиографических ссылок 21.

331 1/2

Цена 97 коп.