

Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна  
Факультет математики і інформатики  
Кафедра прикладної математики

## Кваліфікаційна робота

освітньо-кваліфікаційний рівень: *бакалавр*

на тему «*Задача синтезу для однієї нелінійної  
керованої системи*»

*Виконала:* студентка групи МП41 IV курсу,  
(перший бакалаврський рівень),  
спеціальності 113  
“Прикладна математика”  
освітньої програми  
“Прикладна математика”  
**Дінабурська М.В.**

*Керівник:* кандидат фіз.-мат. наук  
доцент кафедри  
прикладної математики  
**Ревіна Т.В.**

*Рецензент:* professor of mathematics  
Institute of Physics and  
Mathematics,  
Michoacan University of Saint Ni-  
cholas of Hidalgo, Morelia, Mich.,  
Mexico  
**Abdon E. Choque-Rivero**

# Анотації

**Дінабурська М.В. Задача синтезу для однієї нелінійної керованої системи.**

У роботі розглянута задача позиційного синтезу для однієї нелінійної керованої системи. Розв'язок базується на методі функції керованості В. І. Коробова. Цей метод описує побудову обмеженого керування, яке переводить довільну початкову точку у початок координат за скінченний час. Система, яка розглядається, є некерованою за першим наближенням, ми не можемо використовувати перше (лінійне) наближення для дослідження задачі синтезу для початкової нелінійної системи. Ми користуємося підходом, запропонованим Choque Rivero A.E. Наведені графіки траєкторій та керування на траєкторії, які починаються із заданої початкової точки.

**Dinaburska M.V. On the synthesis problem for one nonlinear controllable system.**

The work considers the synthesis problem for one nonlinear controllable system. The solution is based on the method of the controllability function by V. I. Korobov. This approach describes the construction of a bounded control that shifts an arbitrary initial point to the origin in a finite time. Since the system we consider is uncontrollable in the first approximation, we cannot use the first (linear) approximation to solve the synthesis problem for the initial nonlinear system. We use the approach introduced by Choque

Rivero A.E. We provide graphs of the trajectories and the control function on the trajectories starting from a given initial point.

# Зміст

|   |           |
|---|-----------|
| <b>Анотації</b>   | <b>2</b>  |
| <b>Вступ</b>  | <b>5</b>  |
| <b>1. Метод функції керованості</b>                                 | <b>8</b>  |
| 1.1. Метод функції керованості для довільної системи . . . . .      | 8         |
| 1.2. Розв'язок задачі синтезу для однієї нелінійної системи . . . . | 9         |
| 1.3. Побудова траєкторії для конкретної початкової точки . . . . .  | 12        |
| 1.3.1. Вибір параметрів . . . . .                                   | 12        |
| 1.3.2. Пошук функції керованості $\Theta$ та керування $u(x)$ . . . | 13        |
| 1.3.3. Пошук траєкторії та побудова графіків . . . . .              | 14        |
| <b>2. Дослідження зміни часу відносно параметрів</b>                | <b>16</b> |
| 2.1. Параметр $f_{12}$ . . . . .                                    | 16        |
| 2.2. Параметр $a_1$ . . . . .                                       | 16        |
| 2.3. Параметр $a_2$ . . . . .                                       | 17        |
| 2.4. Параметр $a_3$ . . . . .                                       | 19        |
| <b>Висновки</b>   | <b>23</b> |
| <b>Список використаних джерел</b>                                   | <b>24</b> |

# Вступ

Розглянемо нелінійну систему

$$\dot{x} = f(x, u), \quad (0.1)$$

де  $x \in Q \subset \mathbb{R}^n$ ,  $u \in \Omega \subset \mathbb{R}^r$ , причому  $\Omega$  таке, що  $0 \in \text{int } \Omega$ ,  $f(0, 0) = 0$ .

**Означення 0.1.** Під локальним позиційним синтезом обмеженого керування будемо розуміти знаходження такого керування  $u = u(x)$ ,  $x \in Q$ , що:

- 1)  $u(x) \in \Omega$ ;
- 2) траєкторія  $x(t)$  замкненої системи

$$\dot{x} = f(x, u(x)), \quad (0.2)$$

що починається у довільній початковій точці  $x_0 \in Q$ , закінчується у початку координат в деякий скінченний момент часу  $T(x_0)$ .

Якщо  $Q = \mathbb{R}^n$ , то синтез є глобальним.

У роботі [5] вперше були сформульовані достатні умови розв'язку задачі синтезу для системи (0.1). Через 20 років після опублікування першої роботи про метод функції керованості, задача потрапляння з довільної початкової точки у початок координат отримала назву "finite-time stabilization" (стабілізація за скінченний час) [2].

Теорія керування почала свій бурхливий розвиток з 50-60 років 20 сто-

ліття. Підходи до дослідження керованих систем схожі на той, який запропонував Ляпунов щодо стійкості нелінійних систем ще набагато раніше. До речі, А. М. Ляпунов був професором Харківського університету з 1885 до 1902 року. Цей підхід базується на пошуку першого наближення системи. Якщо система першого наближення є керованою і задовільняє ще додатковим умовам, то і початкова нелінійна система є керованою. Але відомо, що багато систем, які описують фізичні явища, не є керованими за першим наближенням. Отже постає питання, як розв'язувати задачу керованості та синтезу для таких систем. Оскільки ми маємо справу з критичним випадком, ми не можемо використовувати перше (лінійне) наближення для дослідження задач керованості і синтезу для початкової нелінійної системи. Проблеми розв'язку задач керованості та синтезу нелінійних систем у критичному випадку є важливою проблемою нелінійної теорії керування. Роботи [9, 10] спираються на підхід backstepping, який базується на рекурсивній побудові функцій Ляпунова. Але керування, яке стабілізує систему, має досить складну структуру.

У кваліфікаційній роботі розглядається підхід до розв'язку задачі синтезу, запропонований Choque Rivero A.E. на основі методу функції керованості для системи

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = u, & |u| \leq 1 \\ \dot{x}_2 = x_1^3. \end{cases} \quad (0.3)$$

Ця система є прикладом нелінійної системи у критичному випадку. Одна з переваг підходу, запропонованого автором - це те, що керування неперервне і має структуру побудови, схожу на побудову синтезуючого керування для канонічної системи за допомогою методу функції керованості В. І. Коробова. Отже, в роботі [3] Choque Rivero A.E було доведено, що система є керованою.

Зауважимо, що якщо розглянути систему

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = u, & |u| \leq 1 \\ \dot{x}_2 = x_1^2, \end{cases} \quad (0.4)$$

то можемо побачити, що вона є некерована.

Зауважимо, що Choque Rivero A.E у своїй роботі [4] запропонував загальний підхід для розв'язку системи

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = u, & |u| \leq 1 \\ \dot{x}_2 = x_1^{2k+1}. \end{cases} \quad (0.5)$$

# Розділ 1. Метод функції керованості

## 1.1. Метод функції керованості для довільної системи

У роботі [5] вперше були сформульовані достатні умови розв'язку задачі синтезу для системи (0.1).

**Теорема 1.1.** (Коробов В. І. [5]) Розглянемо керований процес (0.1). Нехай,  $f(x, u)$  неперервна за сукупністю змінних та в області

$$\{(x, u) : 0 < \rho_1 \leq \|x\| \leq \rho_2, u \in \Omega\}$$

задовольняє умові Ліпшиця

$$\|f(x', u') - f(x'', u'')\| \leq L_1(\rho_1, \rho_2)(\|x'' - x'\| + \|u'' - u'\|).$$

Нехай у замкненій області  $G = \{x : \|x\| \leq R\}$  ( $0 < R \leq \infty$ ) існує функція  $\Theta(x)$ , що задовольняє умовам:

- 1)  $\Theta(x) > 0$  при  $x \neq 0$  и  $\Theta(0) = 0$ ;
- 2)  $\Theta(x)$  неперервна всюди і неперервно-дифференційована всюди, за винятком, можливо, точки  $x = 0$ ;
- 3) існує  $c > 0$  таке, що  $Q = \{x : \Theta(x) \leq c\}$  обмежена і

$Q \subset \{x : \|x\| < R\}$

4) існує функція  $u(x) \in \Omega$  при  $x \in Q$ , така, що справедливі нерівності

$$-\beta_1 \Theta^{1-\frac{1}{\alpha_1}}(x) \leq \sum_{i=1}^n \frac{\partial \Theta(x)}{\partial x_i} f_i(x, u(x)) \leq -\beta_2 \Theta^{1-\frac{1}{\alpha_2}}(x) \quad (1.1)$$

при деяких додатніх  $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$ , до того ж  $u(x)$  в області  $K(\rho_1, \rho_2) = \{x : 0 < \rho_1 \leq \|x\| \leq \rho_2\}$  задовольняє умові Ліпшиця

$$\|u(x'') - u(x')\| \leq L_2(\rho_1, \rho_2) \|x'' - x'\|.$$

Тоді траєкторія системи (0.2), що починається у довільній початковій точці  $x(0) = x_0 \in Q$ , закінчується у точці  $x_1 = 0$  в деякий скінченний момент часу  $T(x_0)$ , до того ж

$$\frac{\alpha_1}{\beta_1} \Theta(x_0)^{\frac{1}{\alpha_1}} \leq T(x_0) \leq \frac{\alpha_2}{\beta_2} \Theta^{\frac{1}{\alpha_2}}(x_0). \quad (1.2)$$

Метод також був розвинений в роботах Скляра Г. М. [7] та інших авторів [3, 6, 8]. Основним досягненням методу функції керуваності є те, що час руху скінченний. У роботі [11] досліджується задача приведення лінійно з'єднаних пружинами маятників у рівновагу за скінченний час.

## 1.2. Розв'язок задачі синтезу для однієї нелінійної системи

Для  $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$  розглянемо задачу синтезу для системи (0.3). Зауважимо, що ця система є некерованою за першим наближенням. Ми будемо користуватися підходом, запропонованим Choque Rivero A.E. у роботі [3]. Позначимо за  $\mathbb{R}_-$  множину дійсних від'ємних чисел. Будемо шука-

ти керування  $u(x)$  у наступному вигляді:

$$U := \left\{ u(x) : u(x) = \frac{a_1 x_1}{\Theta(x)} + \frac{a_2 x_2}{\Theta^4(x)} + \frac{a_3 x_1^3}{\Theta^3(x)}, \text{ де } a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}_- \right\}. \quad (1.3)$$

Функція  $\Theta(x)$  визначена, як єдиний додатній розв'язок рівняння:

$$2a_0 \Theta^8 = f_{11} \Theta^6 x_1^2 + 2f_{12} \Theta^3 x_1 x_2 + f_{22} x_2^2 \quad (1.4)$$

для деяких дійсних чисел  $(f_{jk})_{j,k=1}^2$  та для  $a_0 > 0$ .

Тоді замкнена система (0.3) з керуванням вигляду (1.3) являє собою

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = u(x) \\ \dot{x}_2 = x_1^3 \end{cases}. \quad (1.5)$$

Введемо позначення:

$$F := \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{12} & f_{22} \end{pmatrix}, \quad D_\Theta := \begin{pmatrix} \Theta^{-\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & \Theta^{-\frac{7}{2}} \end{pmatrix} \quad (1.6)$$

Переписавши рівняння на функцію керуваності  $\Theta$  (1.4) за допомогою  $F$  та  $D_\Theta$ , отримаємо наступне:

$$2a_0 \Theta = (D_\Theta F D_\Theta x, x). \quad (1.7)$$

Керування  $u(x) \in U$  прийме наступний вигляд:

$$u(x) = \Theta^{-\frac{1}{2}}(x) a^T D_{\Theta(x)} x + \frac{a_3 x_1^3}{\Theta^3(x)}, \text{ де } a^T := (a_1, a_2). \quad (1.8)$$

Також позначимо за  $S$  таку підмножину керувань  $U$ , що задовольняють умові:

$$25a_2 + 16a_1 a_3 > 0. \quad (1.9)$$

Крім того, нехай  $\mathcal{F}_S$  – множина матриць

$$\begin{pmatrix} \frac{a_1}{a_2} f_{12} & f_{12} \\ f_{12} & -f_{12} a_3 \end{pmatrix} \quad (1.10)$$

таких, що  $f_{12} > 0$  та  $a_1, a_2, a_3$  задовольняють умові (1.9).

**Теорема 1.2.** (Choque Rivero A.E. [3, Theorem 3] )

Нехай виконані умови:

1)  $a_0$  – додатній розв’язок рівняння

$$\frac{2a_0}{f_{12}} (a_1 a_2 + 4a_0 a_2 a_3 \eta + 4a_0^2 a_3^2 f_{12} \eta^3) - 1 = 0, \text{ де } \eta := \frac{a_2 a_3}{(a_2 + a_1 a_3) f_{12}}; \quad (1.11)$$

2)  $F \in \mathcal{F}_S$ ;

3)  $\Theta(x)$  – єдиний додатній розв’язок (1.4)

4)  $u(x) \in S$ .

Тоді траєкторія системи (1.5), що починається у довільній початковій точці  $x_0 \in Q$  в момент часу  $t = 0$  закінчується у точці  $x_1 = 0$  в деякий скінченний момент часу  $T(x_0)$ . До того ж, існує  $\gamma > 0$  таке, що

$$T \leq \frac{\Theta(x_0)}{\gamma}.$$

Нагадаємо, що функція  $\Theta$  визначена як єдиний додатній розв’язок рівняння (1.4). Продиференціюємо це рівняння по  $\Theta$ . Отримаємо:

$$\dot{\Theta} = \frac{\frac{a_1^2}{a_2} \Theta^6 x_1^2 + 2a_1 \Theta^3 x_1 x_2 + a_2 x_2^2 + \left(a_3 \frac{a_1}{a_2} + 1\right) \Theta^4 x_1^4}{\frac{a_1}{a_2} \Theta^6 x_1^2 + 5\Theta^3 x_1 x_2 + 4(-a_3) x_2^2}. \quad (1.12)$$

Для того, щоб знайти траєкторію, яка починається у довільній початковій точці  $x_0 = (x_1^0, x_2^0)$ , ми розв’язуємо рівняння (1.4) і знаходимо його єдиний додатній розв’язок  $\Theta_0$ . Покладемо  $\theta(t) = \Theta(x(t))$ . Тоді траєкторія

$x(t)$  системи (0.3) є розв'язком задачі Коші:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \frac{a_1 x_1}{\theta} + \frac{a_2 x_2}{\theta^4} + \frac{a_3 x_1^3}{\theta^3} \\ \dot{x}_2 = x_1^3 \\ \dot{\theta} = \frac{\frac{a_1^2}{a_2} \theta^6 x_1^2 + 2a_1 \theta^3 x_1 x_2 + a_2 x_2^2 + \left(a_3 \frac{a_1}{a_2} + 1\right) \theta^4 x_1^4}{\frac{a_1}{a_2} \theta^6 x_1^2 + 5\theta^3 x_1 x_2 + 4(-a_3) x_2^2}, \\ x_1(0) = x_1^0, x_2(0) = x_2^0, \theta(0) = \Theta_0 \end{cases} \quad (1.13)$$

Звертаємо увагу, що для того, щоб знайти  $\Theta_0$ , достатньо розв'язати рівняння (1.4) один раз.

Інший підхід до розв'язку задачі синтезу для системи (0.3) запропонований у [1].

### 1.3. Побудова траєкторії для конкретної початкової точки

Отже, проведемо побудову розв'язку задачі синтезу для системи (0.3).

#### 1.3.1. Вибір параметрів

У статті [3] автор Choque Rivero A.E. запропонував обрати наступні параметри:  $a_1 = -\frac{1}{10}$ ,  $a_2 = -\frac{1}{1000}$ ,  $a_3 = -\frac{1}{48}$  і  $f_{12} = 1$ . Перевіримо співвідношення (1.9). Воно справедливе:

$$25a_2 + 16a_1 a_3 = -\frac{1}{40} + \frac{1}{30} = \frac{1}{120} > 0. \quad (1.14)$$

Тоді знайдемо  $f_{11}$  та  $f_{22}$ . З умови (1.10) випливає наступне:

$$f_{11} = \frac{a_1}{a_2} f_{12} = 100, \quad f_{22} = -f_{12} a_3 = \frac{1}{48}.$$

$F$  з (1.6) має вигляд:

$$F := \begin{pmatrix} 100 & 1 \\ 1 & \frac{1}{48} \end{pmatrix}. \quad (1.15)$$

Співвідношення (1.11) набуває вигляд:

$$2a_0 \left( \frac{1}{10000} + \frac{a_0}{624000} + \frac{a_0^2}{80990208} \right) - 1 = 0. \quad (1.16)$$

Звідси знаходимо, що  $a_0 \approx 298.261$ . Зазначимо, що у оригінальній статті автором була припущена одруківка: було зазначено, що  $a_0 \approx 268.261$ , що не відповідає дійсності.

### 1.3.2. Пошук функції керованості $\Theta$ та керування $u(x)$

Нагадаємо, що функція  $\Theta$  визначена як єдиний додатний розв'язок рівняння (1.4). При  $a_0 = 298.261$  рівняння (1.4) набуває вигляд:

$$596.522\Theta^8 = 100\Theta^6 x_1^2 + 2\Theta^3 x_1 x_2 + \frac{x_2^2}{48}. \quad (1.17)$$

У статті Choque Rivego A.E. початкова точка  $x_0 = (1, 1)$ . Тоді рівняння (1.17) набуває наступного вигляду:

$$596.522\Theta^8 = 100\Theta^6 + 2\Theta^3 + \frac{1}{48}. \quad (1.18)$$

Тоді у цій точці єдиний додатний розв'язок рівняння (1.18) це  $\Theta \approx 0.455$ .

В силу попередньо визначених параметрів  $a_1$ ,  $a_2$  та  $a_3$  та формули (1.3), позиційне керування приймає наступний вигляд:

$$u(x) = -\frac{1}{10} \frac{x_1}{\Theta(x)} - \frac{1}{1000} \frac{x_2}{\Theta^4(x)} - \frac{1}{48} \frac{x_1^3}{\Theta^3(x)}. \quad (1.19)$$

### 1.3.3. Пошук траєкторії та побудова графіків

Траєкторія  $x(t)$  системи (0.3) є розв'язком задачі Коші (1.13), яка в нашому випадку набуває вигляд

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\frac{1}{10} \frac{x_1}{\theta} - \frac{1}{1000} \frac{x_2}{\theta^4} - \frac{1}{48} \frac{x_1^3}{\theta^3} \\ \dot{x}_2 = x_1^3 \\ \dot{\theta} = -\frac{10\theta^6 x_1^2 + \frac{1}{5}\theta^3 x_1 x_2 + \frac{x_2^2}{1000} + \frac{13}{12}\theta^4 x_1^4}{100\theta^6 x_1^2 + 5\theta^3 x_1 x_2 + \frac{x_2^2}{12}}, \end{cases} \quad (1.20)$$

з початковими умовами  $x_1(0) = 1$ ,  $x_2(0) = 1$  та  $\theta(0) = 0.455$ .

За результатами чисельних розрахунків час руху для цієї початкової точки  $T \approx 78.5$ . Час руху знаходиться з умови, що  $\sqrt{x_1^2(T) + x_2^2(T)} < 10^{-3}$ . Були отримані наступні графіки траєкторій:

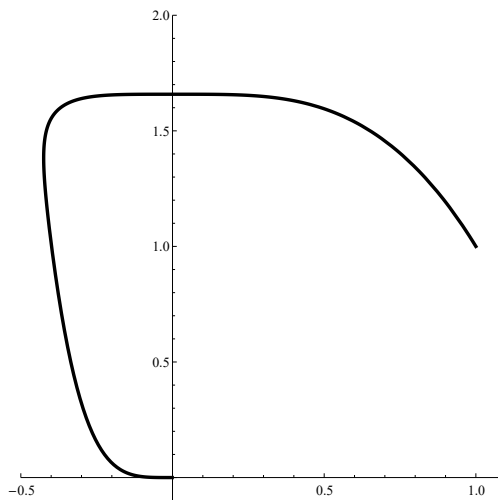
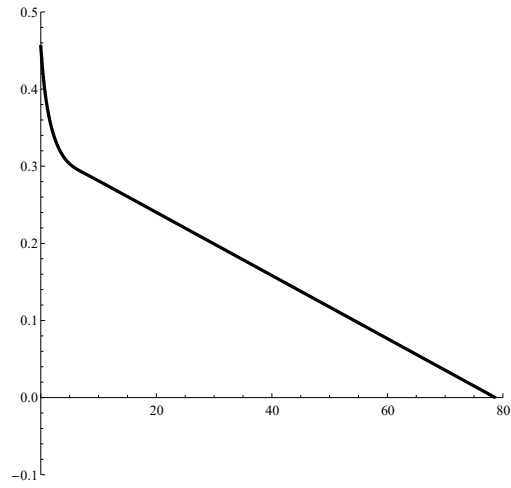
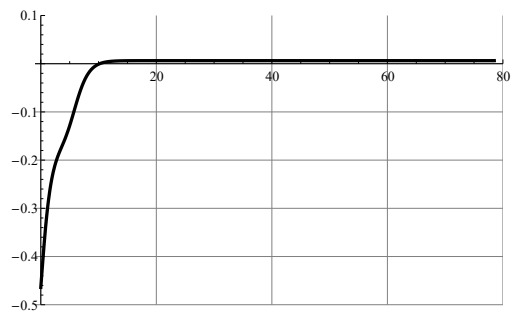


Рис. 1.1: Фазова траєкторія

Рис. 1.2: Функція керованості  $\Theta$ Рис. 1.3: Керування  $u(x)$

## Розділ 2. Дослідження зміни часу відносно параметрів

Залишимо початкову точку незмінною, а саме  $x_0 = (1, 1)$ . Нагадаємо, що для розв'язку системи на початку підбираються параметри  $a_1, a_2, a_3$  та  $f_{12}$ . Дослідимо розв'язок задачі, коли ми фіксуємо три параметри а змінюємо тільки четвертий. Початкова точка залишається незмінною.

### 2.1. Параметр $f_{12}$

Під час роботи було виявлено, що цей параметр не впливає на траєкторію, а значить і немає впливу на час. Це обумовлено тим, що  $f_{12}$  пропорційно впливає на параметри  $f_{11}$  та  $f_{22}$ . Так як ці параметри наявні у рівнянні на функцію керованості, то зміна параметру  $f_{12}$  ніяк не впливає на рівняння відносно  $\Theta$ .

### 2.2. Параметр $a_1$

Будемо змінювати параметр  $a_1$ , залишаючи інші два такими, як були напочатку. Нагадаємо, що згідно з умовою (1.9), повинна виконуватись наступна нерівність  $25a_2 + 16a_1a_3 > 0$ .

Тоді, щоб виконувалась умова (1.9), на параметр накладається обмеження  $a_1 < -\frac{1}{14}$  (так як при  $a_1 = -\frac{1}{14}$  умова не виконується:  $25a_2 + 16a_1a_3 =$

0).

Тоді було обрано наступні набори параметрів:

$$\begin{aligned}
 (0) : a_1 &= -\frac{1}{10}, a_2 = -\frac{1}{1000}, a_3 = -\frac{1}{48}, f_{12} = 1 \quad T \approx 78.6, \\
 (1) : a_1 &= -\frac{1}{12}, a_2 = -\frac{1}{1000}, a_3 = -\frac{1}{48}, f_{12} = 1 \quad T \approx 74, \\
 (2) : a_1 &= -\frac{1}{13}, a_2 = -\frac{1}{1000}, a_3 = -\frac{1}{48}, f_{12} = 1 \quad T \approx 73.5,
 \end{aligned}
 \tag{2.1}$$

де під номером (0) зазначено початковий набір без змін параметрів, (1) - набір параметрів для  $a_1 = -\frac{1}{12}$  а (2) - набір параметрів для  $a_1 = -\frac{1}{13}$ .

На наступних малюнках зображено отримані траєкторії:

— - для набору параметрів (0); — - для набору параметрів (1); — - для набору параметрів (2);

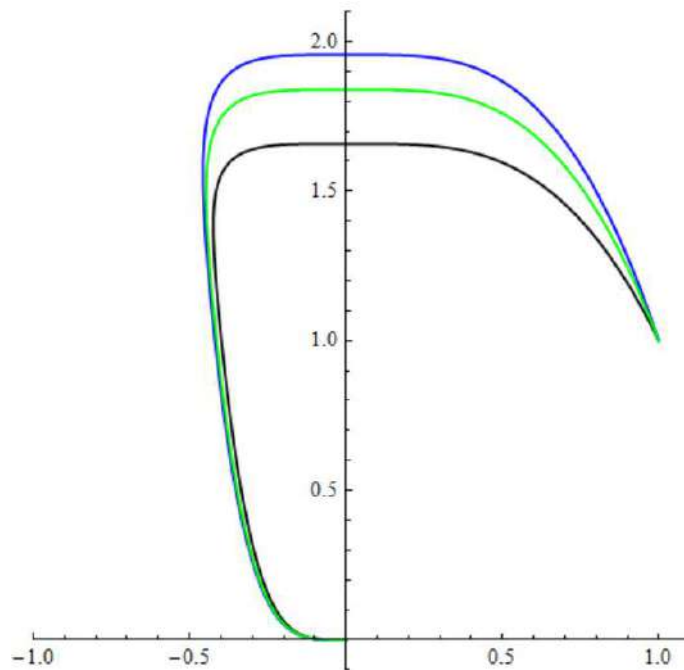
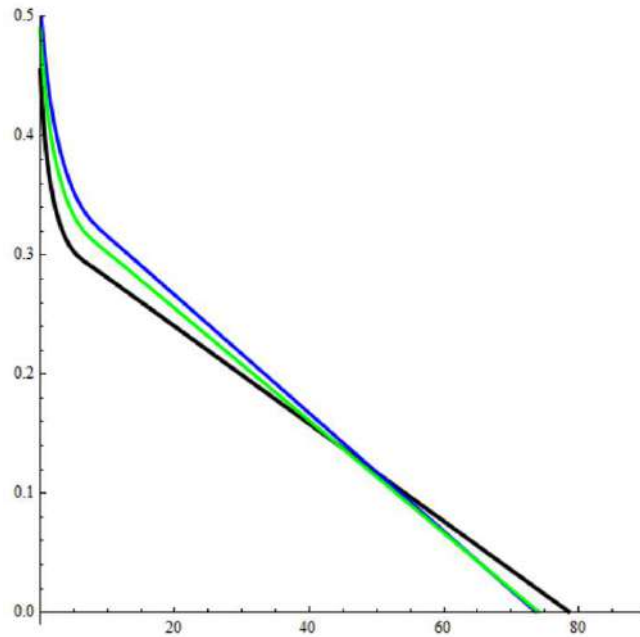
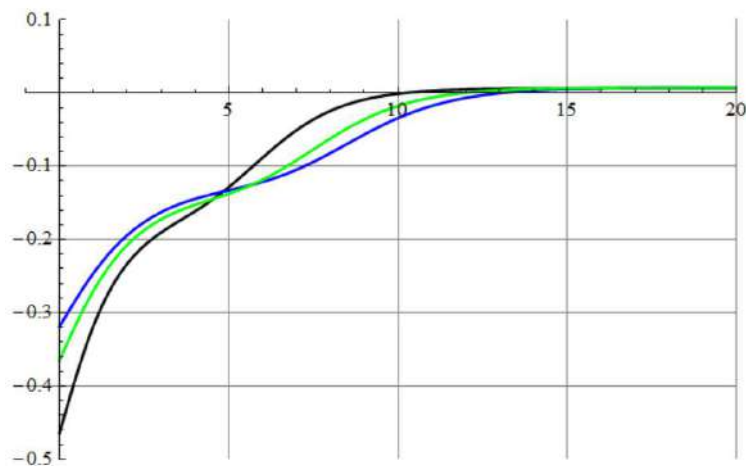


Рис. 2.1: Фазова траєкторія

### 2.3. Параметр $a_2$

Будемо змінювати параметр  $a_2$ , залишаючи інші два такими, як були напочатку.

Рис. 2.2: Функція керованості  $\Theta$ Рис. 2.3: Керування  $u(x)$ 

Щоб виконувалась умова (1.9), на параметр накладається обмеження  $a_2 > -\frac{1}{750}$  (так як при  $a_2 = -\frac{1}{750}$  умова не виконується:  $25a_2 + 16a_1a_3 = 0$ ). Тоді було обрано наступні набори параметрів:

$$\begin{aligned}
 (0) : a_1 &= -\frac{1}{10}, a_2 = -\frac{1}{1000}, a_3 = -\frac{1}{48}, f_{12} = 1 \quad T \approx 78.6, \\
 (1) : a_1 &= -\frac{1}{10}, a_2 = -\frac{1}{751}, a_3 = -\frac{1}{48}, f_{12} = 1 \quad T \approx 59.5, \\
 (2) : a_1 &= -\frac{1}{10}, a_2 = -\frac{1}{800}, a_3 = -\frac{1}{48}, f_{12} = 1 \quad T \approx 62.8,
 \end{aligned} \tag{2.2}$$

де під номером (0) зазначено початковий набір без змін параметрів, (1)

- набір параметрів для  $a_2 = -\frac{1}{751}$ , (2) - набір параметрів для  $a_2 = -\frac{1}{800}$ .

На наступних малюнках зображено отримані траєкторії:

— - для набору параметрів (0); — - для набору параметрів (1); — - для набору параметрів (2);

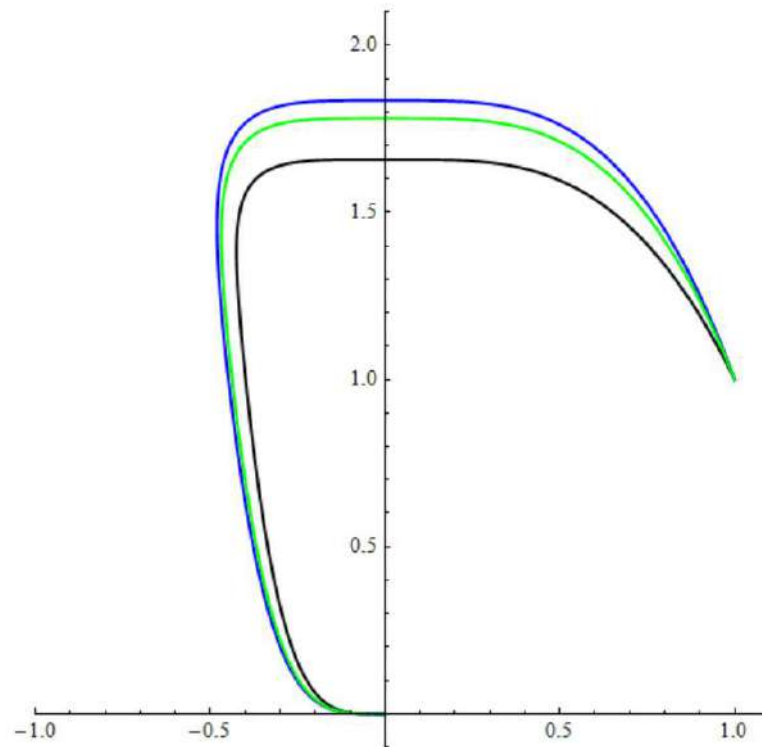
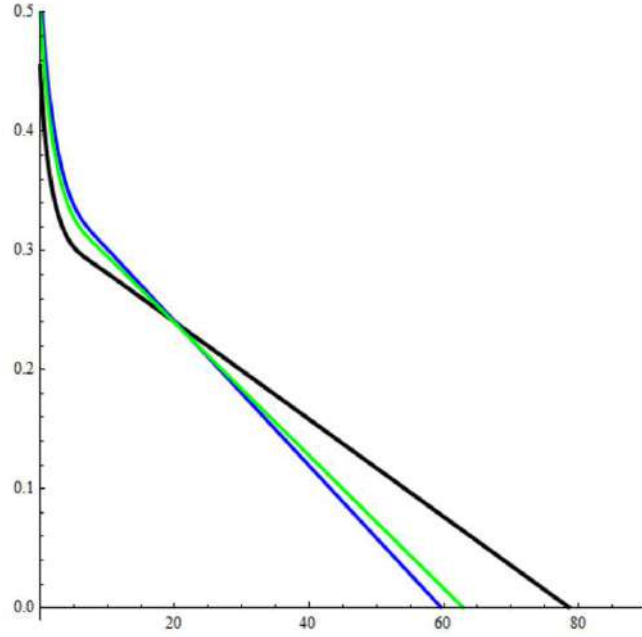
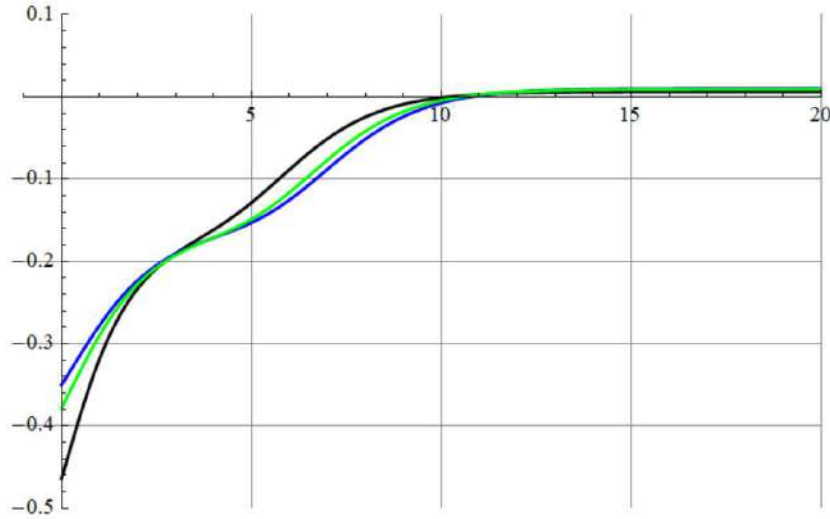


Рис. 2.4: Фазова траєкторія

## 2.4. Параметр $a_3$

Будемо змінювати параметр  $a_3$ , залишаючи інші два такими, як були напочатку. Щоб умова (1.9) виконувалась, на  $a_3$ , накладаємо умову  $a_3 < -\frac{1}{64}$  (так як при  $a_3 = -\frac{1}{64}$  умова не виконується:  $25a_2 + 16a_1a_3 = 0$ ). Тоді

Рис. 2.5: Функція керованості  $\Theta$ Рис. 2.6: Керування  $u(x)$ 

було обрано наступні набори параметрів:

$$\begin{aligned}
 (0) : a_1 &= -\frac{1}{10}, a_2 = -\frac{1}{1000}, a_3 = -\frac{1}{48}, f_{12} = 1 \quad T \approx 78.6, \\
 (1) : a_1 &= -\frac{1}{10}, a_2 = -\frac{1}{1000}, a_3 = -\frac{1}{60}, f_{12} = 1 \quad T \approx 59.75, \\
 (2) : a_1 &= -\frac{1}{10}, a_2 = -\frac{1}{1000}, a_3 = -\frac{1}{63}, f_{12} = 1 \quad T \approx 56.5,
 \end{aligned} \tag{2.3}$$

де під номером (0) зазначено початковий набір без змін параметрів, (1)

- набір параметрів для  $a_3 = -\frac{1}{60}$ , (2) - набір параметрів для  $a_3 = -\frac{1}{63}$ . На наступних малюнках зображено отримані траєкторії:

— - для набору параметрів (0); — - для набору параметрів (1); — - для набору параметрів (2);

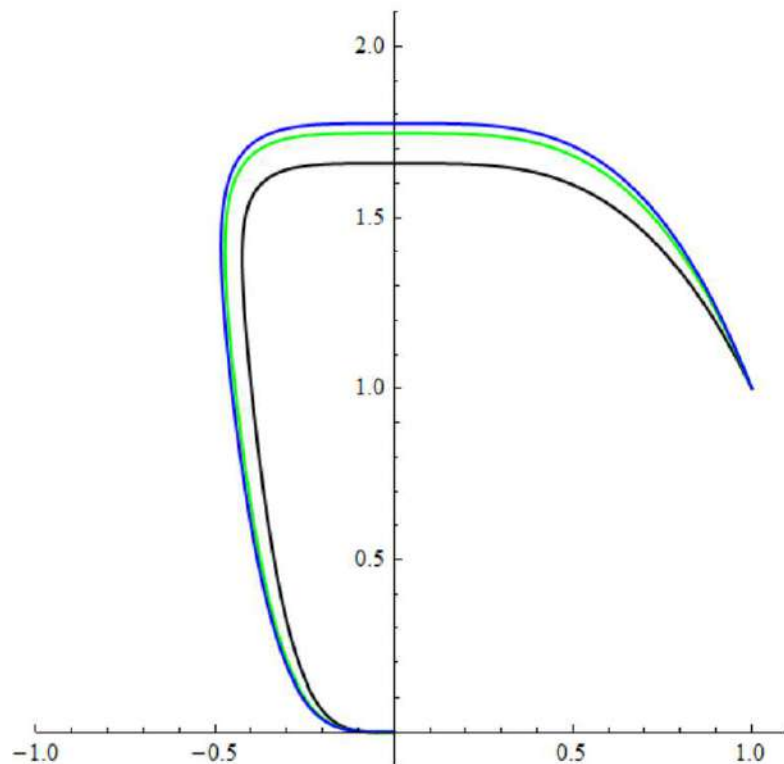
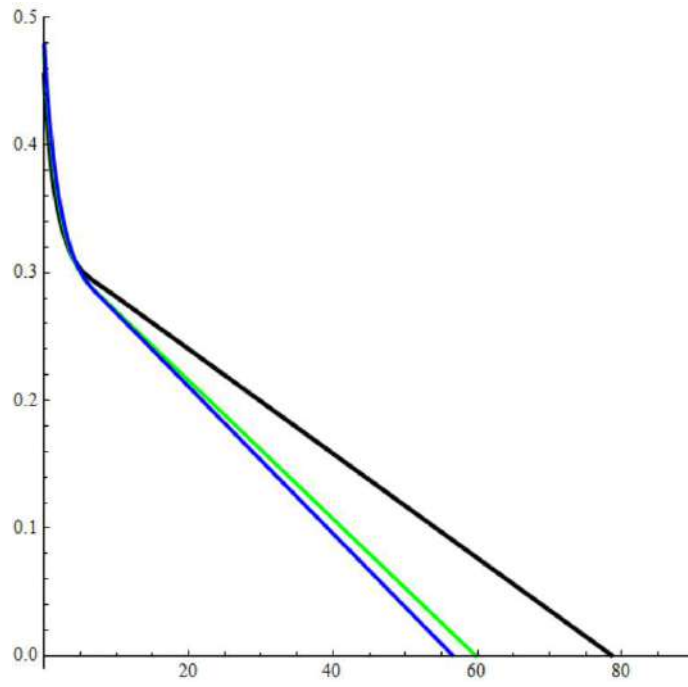
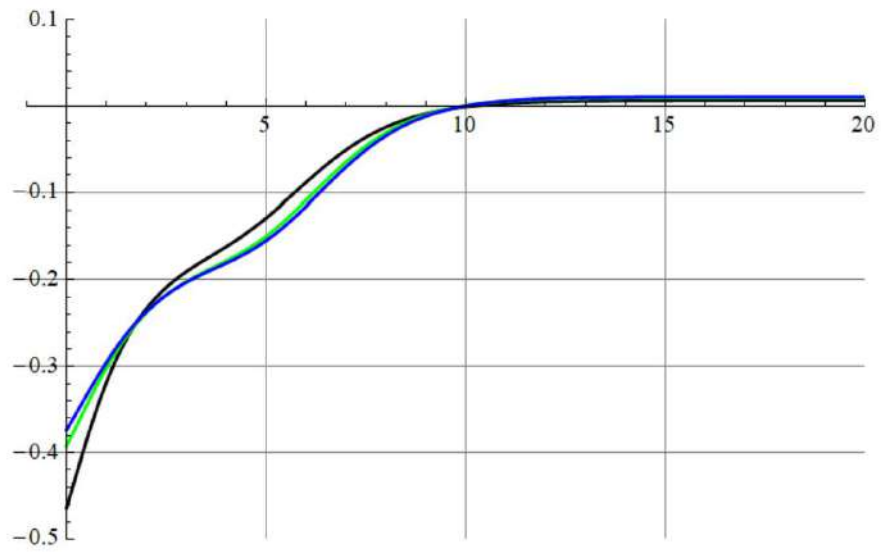


Рис. 2.7: Фазова траєкторія

Рис. 2.8: Функція керованості  $\Theta$ Рис. 2.9: Керування  $u(x)$

## Висновки

В роботі було розглянуто задачу позиційного синтезу для однієї нелінійної керованої системи. Був застосований метод функції керованості В. І. Коробова.

Так як розглянута система є некерованою за першим наближенням, то у роботі був висвітлений метод знаходження обмеженого керування за допомогою підходу, який запропонував Choque Rivero A.E. Були наведені графіки траєкторій та керування на траєкторії, які починаються із заданої початкової точки.

Під час роботи було знайдені та виправлені одруківки у початковій роботі Choque Rivero A.E. Також, в науковій роботі було проведено дослідження залежності вибору параметрів  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $a_3$  та  $f_{12}$ , та часу руху для цієї початкової точки. Знайдено такі набори параметрів, що час зменшився порівняно з тим, який запропонований в роботі Choque Rivero A.E.

## Список використаних джерел

- [1] Bebiya M. O. Global synthesis of bounded controls for systems with power nonlinearity// Visnyk of VN Karazin Kharkiv National University. Ser. Mathematics, Applied Mathematics and Mechanics 81 (2015): 36-51. <https://doi.org/10.26565/2221-5646-2015-81-04>
- [2] Bhat SP, Bernstein DS. Finite-time stability of continuous autonomous systems. SIAM J. Control Optim. 2000;38(3):751-766, <https://doi.org/10.1137/S0363012997321358>
- [3] Choque Rivero A. E. Solution of a synthesis problem of a nonlinear control system// Visnyk of VN Karazin Kharkiv National University. Ser. Mathematics, Applied Mathematics and Mechanics 59 (850) (2009): 45-51.
- [4] Choque Rivero A. E. The controllability function method for the synthesis problem of a nonlinear control system// International Review of Automatic Control, vol. 1, no. 4, pp. 441-445, 2008.
- [5] Korobov V. I. A general approach to the solution of the bounded control synthesis problem in a controllability problem. Math. USSR Sb. 1980, 37(4):535-557, <https://doi.org/10.1070/SM1980v037n04ABEH002094>
- [6] Korobov VI, Revina TV. On perturbation range in the feedback synthesis problem for a chain of integrators system.

IMA J. Math. Control and Information. 2021;38(1):396-416,  
<https://doi.org/10.1093/imamci/dnaa035>

- [7] Korobov V. I., Sklyar G. M. Methods for constructing positional controls, and a feasible maximum principle. *Dif. Equ.* 1990;26(11):1422-1431.
- [8] Korobov VI, Stiepanova K, The peculiarity of solving the synthesis problem for linear systems to a non-equilibrium point. *J. Math. Phys. Anal. Geom.* 2021;17(3):326-340, <https://doi.org/10.15407/mag17.03.326>
- [9] LI, Min; GUO, Jian; XIANG, Zhengrong. Global adaptive finite-time stabilization for a class of p-normal nonlinear systems via an event-triggered strategy. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2020, 30.10: 4059-4074. <https://doi.org/10.1002/rnc.4983>
- [10] Lin, W., Qian, C. (2000). Adding one power integrator: a tool for global stabilization of high-order lower-triangular systems. *Systems & Control Letters*, 39(5), 339-351. [https://doi.org/10.1016/S0167-6911\(99\)00115-2](https://doi.org/10.1016/S0167-6911(99)00115-2)
- [11] Ovseevich A, Ananievski I. Robust feedback control for a linear chain of oscillators. *J. Optim. Theory Appl.* 2021;188:307-316, <https://doi.org/10.1007/s10957-020-01765-z>