

Спектральный анализ открытых и закрытых резонаторов

И. В. Митина

Харьковский Национальный Университет им. В. Н. Каразина,
Украина

Предложены численные модели для спектрального анализа электромагнитных колебаний открытого и закрытого конечных цилиндрических резонаторов с поперечным сечением сложной формы. Приведены результаты сравнительного анализа рассчитанных спектров.

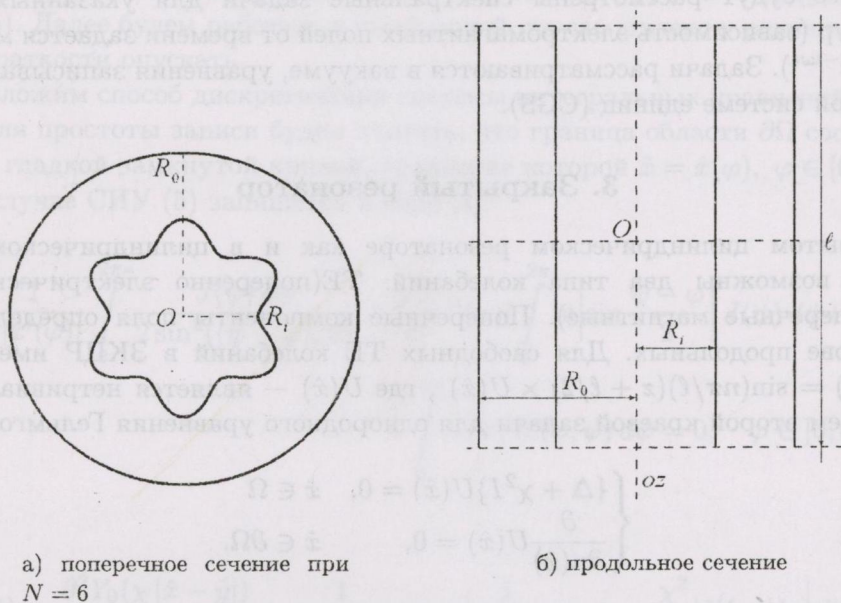
2000 *Mathematics Subject Classification* 45F99.

1. Введение

В настоящее время, в связи с развитием вычислительной техники, появились широкие возможности моделирования различных радиофизических процессов. Основной задачей, возникающей при проектировании колебательных систем радиотехнических устройств, является спектральный анализ резонаторов. Особая роль в приложениях принадлежит открытым резонаторным структурам. Это связано, прежде всего, с удобством ввода-вывода энергии. Открытый резонатор — колебательная система и, одновременно, передающая антенна.

В данной работе рассматриваются открытый и закрытый резонаторы на основе отрезка регулярного коаксиального секторного волновода с синусными гофрами. Для проведения численного спектрального анализа резонаторов используется метод граничных интегральных уравнений. В случае закрытого резонатора этот метод опирается на третью формулу Грина и ранее с успехом применялся для решения плоских задач дифракции [1]. Для открытого резонатора используется метод [2], который применялся ранее для анализа симметричных электромагнитных колебаний экрана на основе поверхности вращения [3].

Настоящая работа суммирует и дополняет результаты предыдущих исследований автора [4, 5, 6].

а) поперечное сечение при $N = 6$

б) продольное сечение

Рис. 1: Сечения резонатора

2. Геометрия задачи

Открытый резонатор представляет собой открытый с обоих торцов конечный отрезок коаксиального регулярного волновода с идеально проводящими стенками (ОКЦР — открытый коаксиальный цилиндрический резонатор). Продольное и поперечное сечения изображены на рисунке 1. Если закрыть торцы идеально проводящими крышками и рассмотреть резонатор, рабочей областью которого будет пространство между крышками и двумя коаксиальными проводниками, то мы получим закрытый коаксиальный цилиндрический резонатор (ЗКЦР).

Выберем цилиндрическую систему координат с началом O и осью oz как показано на рисунке 1. Тогда радиус внутреннего проводника как функция цилиндрического угла φ запишется в виде $R_i = R_1 + 0.5d \sin(N\varphi)$, где N — число гофр на внутреннем проводнике, d — высота гофра. Высота резонатора определяется параметром l . Базисный вектор декартовой системы координат e_3 направим по оси oz . Вектор в пространстве будем представлять в виде $x = \hat{x} + ze_3$, \hat{x} — проекция вектора x на плоскость поперечного сечения.

Следует отметить, что поперечное сечение рассматриваемых резонаторов, область Ω , обладает свойством циклической симметрии

$$P_\alpha \Omega = \Omega, \quad (1)$$

где P_α — оператор поворота на угол $\alpha = 2\pi/N$ против часовой стрелки.

Далее будут рассмотрены спектральные задачи для указанных двух структур (зависимость электромагнитных полей от времени задается множителем $e^{-i\omega t}$). Задачи рассматриваются в вакууме, уравнения записываются в гауссовой системе единиц (CGS).

3. Закрытый резонатор

В закрытом цилиндрическом резонаторе как и в цилиндрическом волноводе возможны два типа колебаний: ТЕ (поперечно электрические) и ТМ (поперечные магнитные). Поперечные компоненты поля определяются на основе продольных. Для свободных ТЕ колебаний в ЗКЦР имеем [7]: $H_z(z, \hat{x}) = \sin(n\pi/\ell)(z + \ell/2) \times U(\hat{x})$, где $U(\hat{x})$ — является нетривиальным решением второй краевой задачи для однородного уравнения Гельмгольца

$$\begin{cases} \{\Delta + \chi^2 I\}U(\hat{x}) = 0, & \hat{x} \in \Omega \\ \frac{\partial}{\partial n(\hat{x})}U(\hat{x}) = 0, & \hat{x} \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (2)$$

I — единичный оператор, χ — поперечное волновое число (как известно, вещественное), $n(\hat{x})$ — внешняя нормаль к $\partial\Omega$ в точке \hat{x} . Собственные частоты закрытого резонатора определяются по формуле $\omega = pc$, где c — скорость света в вакууме,

$$p = \sqrt{\chi^2 + (n\pi/\ell)^2} \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (3)$$

Воспользуемся методом граничных интегральных уравнений. Решение задачи (2) будем искать в виде

$$U(\hat{x}) = \int_{\partial\Omega} J(\hat{y}) \frac{\partial}{\partial n(\hat{y})} Y_0(\chi|\hat{x} - \hat{y}|) dS_y, \quad \hat{x} \in \Omega, \quad (4)$$

где Y_0 — функция Неймана. Такое представление для решения следует из третьей формулы Грина. Очевидно, функция (4) удовлетворяет однородному уравнению Гельмгольца в области Ω . Условие на границе порождает интегральное уравнение с сильной особенностью ядра

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial\Omega} J(\hat{y}) \frac{\partial^2 Y_0(\chi|\hat{x}_\varepsilon - \hat{y}|)}{\partial n(\hat{x}) \partial n(\hat{y})} dS_y = 0, \quad \hat{x} \in \partial\Omega, \quad (5)$$

где $\hat{x}_\varepsilon = \hat{x} - \varepsilon \cdot n(\hat{x})$.

При переходе от краевой задачи (2) к граничному интегральному уравнению (5) возникают [4] ложные решения, которые можно отсеять, потребовав от решения интегрального уравнения $J(\hat{y})$ дополнительного свойства, а именно $U(\hat{x}) \neq 0$, $\hat{x} \in \Omega$, где функция U строится по формуле (4).

Свойство циклической симметрии области (1) позволяет [4] разбить решение на отдельные моды с номерами $m = 0, \dots, N - 1$. Для каждого m

требуется найти квазипериодическое решение $J_m(P_\alpha \hat{y}) = e^{im\alpha} J_m(\hat{y})$ уравнения (5). Далее будем работать с m -ой модой, но сам индекс у решения будем для краткости опускать.

Изложим способ дискретизации системы интегральных уравнений (СИУ) (5). Для простоты записи будем считать, что граница области $\partial\Omega$ состоит из одной гладкой замкнутой кривой, уравнение которой $\hat{x} = \hat{x}(\varphi)$, $\varphi \in [0, 2\pi]$. В этом случае СИУ (5) запишется в виде [4]:

$$-\frac{1}{\pi|\hat{x}'(\varphi)|} \int_0^{2\pi*} \frac{J(\psi) d\psi}{2 \sin^2((\psi - \varphi)/2)} + \frac{\chi^2}{\pi} |\hat{x}'(\varphi)| \int_0^{2\pi} \ln \left| \sin \frac{\psi - \varphi}{2} \right| J(\psi) d\psi + \int_0^{2\pi} J(\psi) K(\varphi, \psi) d\psi = 0, \quad \varphi \in [0, \alpha]. \quad (6)$$

Здесь

$$K(\varphi, \psi) = \frac{\partial^2 Y_0(\chi|\hat{x} - \hat{y}|)}{\partial n(\hat{x}) \partial n(\hat{y})} + \frac{1}{\pi|\hat{x}'(\varphi)|} \frac{1}{2 \sin^2((\psi - \varphi)/2)} - \frac{\chi^2}{\pi} |\hat{x}'(\varphi)| \ln \left| \sin \frac{\psi - \varphi}{2} \right|;$$

$$J(\psi) = J(\hat{y}(\psi)); \quad \hat{x} = \hat{x}(\varphi), \hat{y} = \hat{x}(\psi).$$

Первый интеграл (со звездочкой) в уравнении (6) следует понимать в смысле конечной части по Адамару [8].

Разложим решение в ряд Фурье. С учетом квазипериодичности запишем:

$$J(\psi) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n e^{i(m+nN)\psi}, \quad J_n = \frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha J(\psi) e^{-i(m+nN)\psi} d\psi. \quad (7)$$

Подставим это представление в СИУ (6) и воспользуемся известными соотношениями [8]:

$$\int_0^{2\pi*} \frac{e^{in\psi}}{2 \sin^2((\psi - \varphi)/2)} d\psi = -2\pi|n| e^{in\varphi},$$

$$\int_0^{2\pi} e^{in\psi} \ln \left| \sin \frac{\psi - \varphi}{2} \right| d\psi = -\frac{\pi}{|n|} e^{in\varphi}, \quad n \neq 0, \quad (8)$$

$$\int_0^{2\pi} \ln \left| \sin \frac{\psi - \varphi}{2} \right| d\psi = -2\pi \ln 2,$$

задающими действие гиперсингулярного оператора и оператора с логарифмической особенностью на элементах базиса. После чего полученное равенство

домножим на $e^{-i(m+fN)\varphi}$ и проинтегрируем по φ в пределах от 0 до α . В результате получим СЛАУ с бесконечной матрицей

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left\{ 2|m+nN|W_{f-n} - \chi^2 \left[\frac{1 - \delta_{0,m+nN}}{|m+nN|} + 2 \ln 2 \cdot \delta_{0,m+nN} \right] M_{f-n} + K_{fn}(\chi) \right\} J_n = 0, \quad f = -\infty, +\infty, \quad (9)$$

где $\delta_{0,m+nN}$ — символ Кронекера, и обозначено

$$W_{f-n} = \int_0^\alpha \frac{e^{i(n-f)N\psi}}{|\hat{x}'(\psi)|} d\psi,$$

$$M_{f-n} = \int_0^\alpha |\hat{x}'(\psi)| e^{i(n-f)N\psi} d\psi,$$

$$K_{fn}(\chi) = \int_0^\alpha d\varphi e^{-i(m+fN)\varphi} \int_0^{2\pi} d\psi e^{i(m+nN)\psi} K(\varphi, \psi).$$

Переход к дискретному аналогу, т.е. к СЛАУ с матрицей конечных размеров осуществляется с помощью вырезания центральной квадратной части у бесконечной матрицы в (9) и отбрасывании всех остальных частей. Другими словами, считая высокие гармоники решения достаточно слабыми, мы отбрасываем бесконечные хвосты в (7), оставляя только конечное число слагаемых с номерами $|n| \leq q$ (q — некоторое натуральное число). Аналогичную операцию нужно проделать и с матрицей в (9), отбрасывая части с $|n| > q$ или $|f| > q$. Таким образом, получим СЛАУ: $A(\chi)J = 0$. Нас интересуют значения χ , при которых СЛАУ имеет нетривиальное решение. Таким образом, условием для поперечных волновых чисел будет равенство нулю определителя системы.

Покажем, что определитель матрицы вещественен. Элементы матрицы имеют вид:

$$a_{fn}(\chi) = K_{fn}(\chi) + 2|m+nN|W_{f-n} - \chi^2 \left[\frac{1 - \delta_{0,m+nN}}{|m+nN|} + 2 \ln 2 \cdot \delta_{0,m+nN} \right] M_{f-n}.$$

Запишем такое преобразование

$$\begin{aligned}
 K_{fn}(\chi) &= \int_0^\alpha d\varphi e^{-i(m+fN)\varphi} \int_0^\alpha d\psi e^{i(m+nN)\psi} \left\{ \sum_{j=0}^{N-1} K(\varphi, \psi + \alpha j) e^{im\alpha j} \right\} = \\
 &= \int_0^\alpha d\varphi e^{i(m+fN)\varphi} \int_0^\alpha d\psi e^{-i(m+nN)\psi} \left\{ \sum_{j=0}^{N-1} K(\psi + \alpha j, \varphi) e^{im\alpha j} \right\} = \\
 &= \int_0^\alpha d\varphi e^{i(m+fN)\varphi} \int_0^\alpha d\psi e^{-i(m+nN)\psi} \left\{ \sum_{j=0}^{N-1} K(\psi, \varphi - \alpha j) e^{im\alpha j} \right\} = \\
 &= \int_0^\alpha d\varphi e^{i(m+fN)\varphi} \int_0^\alpha d\psi e^{-i(m+nN)\psi} \left\{ \sum_{j=0}^{N-1} K(\psi, \varphi + \alpha j) e^{im\alpha j} \right\} = \overline{K_{nf}(\chi)}.
 \end{aligned}$$

Во втором равенстве мы воспользовались очевидным свойством $K(\varphi, \psi) = K(\psi, \varphi)$. В третьем равенстве использовали свойство $K(\varphi + \alpha, \psi) = K(\varphi, \psi - \alpha)$, которое вытекает из идентичности гофр (1). И в четвертом равенстве сделали замену $j = N - j$, и воспользовались свойством 2π -периодичности функции $K(\varphi, \psi)$ по переменной ψ (это следствие замкнутости контура). Для W_{f-n} и M_{f-n} соответствующее свойство очевидно.

Из этого следует, что матрица системы — самосопряженная: $a_{fn} = \overline{a_{nf}}$. А значит, ее определитель вещественный.

Элементы матрицы являются непрерывными функциями параметра χ и процедура нахождения поперечных волновых чисел из условия $\det A(\chi) = 0$ не встречает особых вычислительных трудностей (нахождение вещественных корней вещественной функции).

Теперь опишем построение квадратурных формул для вычисления величин W_{f-n} , M_{f-n} , $K_{fn}(\chi)$. Пусть $q(\varphi)$ — α -периодическая функция. Построим для нее интерполяционный тригонометрический полином:

$$\frac{1}{2n_\varphi + 1} \sum_{k=0}^{2n_\varphi} q(\varphi_k^{n_\varphi}) \sum_{l=-n_\varphi}^{n_\varphi} e^{i(1N)(\varphi - \varphi_k^{n_\varphi})}, \quad (10)$$

по системе точек $\varphi_k^{n_\varphi} = k\alpha/(2n_\varphi + 1)$, $k = \overline{0, 2n_\varphi}$. Заменяя далее в интеграле функцию $q(\varphi)$ на этот полином, получаем квадратурную формулу

$$\int_0^\alpha e^{i(n-f)N\varphi} q(\varphi) d\varphi \approx \frac{\alpha}{2n_\varphi + 1} \sum_{k=0}^{2n_\varphi} q(\varphi_k^{n_\varphi}) e^{i(n-f)N\varphi_k^{n_\varphi}}. \quad (11)$$

Получим квадратурную формулу для вычисления интеграла

$$\int_0^\alpha d\varphi e^{-i(m+fN)\varphi} \int_0^{2\pi} d\psi e^{i(m+nN)\psi} T(\varphi, \psi),$$

где подынтегральная функция обладает свойством

$$T(\varphi + \alpha, \psi) = T(\varphi, \psi - \alpha) \quad (12)$$

и является 2π -периодической по переменным ψ и φ . Воспользуемся этими свойствами и запишем такие равенства

$$e^{-im(\varphi+\alpha)} \int_0^{2\pi} T(\varphi + \alpha, \psi) e^{i(m+nN)\psi} d\psi = e^{-im\varphi} \int_0^{2\pi} T(\varphi, \psi) e^{i(m+nN)\psi} d\psi,$$

$$\int_0^{2\pi} T(\varphi, \psi) e^{i(m+nN)\psi} e^{-im\varphi} d\psi = \int_0^{\alpha} \left\{ \sum_{j=0}^{N-1} T(\varphi - \alpha j, \psi) e^{im\psi} e^{-im(\varphi - \alpha j)} \right\} e^{inN\psi} d\psi.$$

Первое равенство означает α -периодичность функции справа по переменной φ . Это значит, что для нее мы можем построить интерполяционный тригонометрический полином (10). Второе равенство позволяет преобразовать указанный интеграл к более удобному для построения квадратур виду. Заметим, что функция, стоящая в скобках в последнем интеграле, а именно $\sum_{j=0}^{N-1} T(\varphi - \alpha j, \psi) e^{im\psi} e^{-im(\varphi - \alpha j)}$, является α -периодической по переменной ψ , для нее мы построим интерполяционный тригонометрический полином по системе точек $\varphi_{0s}^{n\varphi} = (s + 0.5)\alpha / (2n_\varphi + 1)$, $s = \overline{0, 2n_\varphi}$ (берутся сетки с перемежающимися узлами для того, чтобы не вычислять предельное значение $T(\varphi, \varphi)$).

Итак, производя замену указанных функций на их интерполлянты, мы получаем следующую квадратурную формулу

$$\int_0^{\alpha} d\varphi e^{-i(m+fN)\varphi} \int_0^{2\pi} d\psi e^{i(m+nN)\psi} T(\varphi, \psi) \approx \left(\frac{\alpha}{2n_\varphi + 1} \right)^2 \times$$

$$\times \sum_{l=0}^{2n_\varphi} \sum_{s=0}^{2n_\varphi} \left(\sum_{j=0}^{N-1} T(\varphi_l^{n\varphi} - \alpha j, \varphi_{0s}^{n\varphi}) e^{im\alpha j} \right) e^{i(m+nN)\varphi_{0s}^{n\varphi}} e^{-i(m+fN)\varphi_l^{n\varphi}}, \quad (13)$$

которая может быть использована для любой 2π -периодической по обеим переменным функции $T(\varphi, \psi)$, удовлетворяющей свойству (12).

С помощью формул (11) и (13) элементы матрицы СЛАУ можно вычислить с любой степенью точности.

4. Открытый резонатор

Рассмотрим задачу дифракции "первичного" поля $E_0(x)$ на поверхности S открытого резонатора. В работе [2] искомое возмущение электрического поля

$E_1(x)$, являющееся решением такой краевой задачи

$$\begin{cases} \Delta E_1(x) + p^2 E_1(x) = 0, & x \in \mathbb{R}^3 \setminus S, \quad p = \omega/c, \\ (\nabla, E_1(x)) = 0, & x \in \mathbb{R}^3 \setminus S, \\ E_1(x) \times n(x) = -E_0(x) \times n(x), & x \in S, \\ E_1(x) = \frac{e^{ip|x|}}{|x|} \left(C_0 \left(\frac{x}{|x|} \right) + O \left(\frac{1}{|x|} \right) \right), & |x| \rightarrow \infty, \end{cases} \quad (14)$$

предлагается искать в виде

$$E_1(x) = \nabla \times A(x), \quad (15)$$

где

$$A(x) = \int_S [J(y) \frac{\partial}{\partial n(y)} - KJ(y)] \frac{e^{ip|x-y|}}{|x-y|} dS_y.$$

Здесь $J(y) = J_1(y)\tau_1(y) + J_2(y)\tau_2(y)$, $KJ(y) = k_1(y)J_1(y)\tau_1(y) + k_2(y)J_2(y)\tau_2(y)$, $\tau_i(y)$ — орт направления, отвечающего главной кривизне $k_i(y)$ поверхности S в точке y , $n(x)$ — нормаль к S в точке x . Такой выбор поля обеспечивает непрерывность при переходе через экран [2].

Поле (15) автоматически удовлетворяет всем условиям краевой задачи (14), кроме третьего. Третье условие порождает граничное интегральное уравнение (ГИУ) с сильной особенностью

$$\sum_{i=1}^2 \int_S^* J_i(y) A_{ki}(x, y) dS_y = F_k(x), \quad x \in S, \quad k = 1, 2 \quad (16)$$

где правая часть $F_k(x) = -(E_0(x) \times n(x), \tau_k(x))$, а ядро

$$A_{ki}(x, y) = \left\{ (\tau_i(y), \tau_k(x)) \left[\frac{\partial^2}{\partial n(x) \partial n(y)} - k_i(y) \frac{\partial}{\partial n(x)} \right] - \right. \\ \left. (n(x), \tau_i(y)) \left[\frac{\partial^2}{\partial \tau_k(x) \partial n(y)} - k_i(y) \frac{\partial}{\partial \tau_k(x)} \right] \right\} \frac{e^{ip|x-y|}}{|x-y|}.$$

Символ \int^* означает предельное значение интеграла при $\epsilon \rightarrow 0$, если в выражении $e^{ip|x-y|}/|x-y|$ заменить $x \rightarrow x_\epsilon = x + \epsilon n(x)$. Доказательство эквивалентности краевой задачи (14) и ГИУ (16) для осесимметричного случая проведено в работе [2]. В нашем случае можно говорить лишь о решениях краевой задачи, представимых в виде (15).

Свойства открытого резонатора определяются функцией $C_0(x/|x|, p)$ из (14) (диаграмма направленности), поскольку плотность потока энергии, рассеиваемой в направлении $q = x/|x|$, пропорциональна $|C_0(q, p)|^2$. Полная энергия, рассеиваемая резонатором в единицу времени, называется спектральной

мощностью излучения (интегральный поперечник рассеяния) и определяется по формуле

$$N(p) = \int_{|q|=1} |C_0(q, p)|^2 dS_q.$$

Частоты $\omega = p \cdot c$, отвечающие локальным максимумам функции $N(p)$, называются резонансными.

Сформулируем теперь спектральную задачу для открытого резонатора. Требуется найти значения параметра p и отвечающие им решения $J(y)$ для ГИУ (16), при которых спектральная мощность $N(p)$, найденная для поля (15) достигает локального максимума.

Введем унитарный оператор T , действие которого на скалярную функцию задается равенством $Tu(y) = u(P_\alpha y)$ (P_α — оператор поворота в плоскости поперечного сечения). Собственными числами оператора T будут $\lambda_m = e^{im\alpha}$, $m = 0, \dots, N-1$. Как и в случае закрытого резонатора, вследствие циклической симметрии, решение разбивается на отдельные моды [6]. Для m -ой моды нужно найти квазипериодическое решение $J_m(P_\alpha x) = \lambda_m J_m(x)$ интегрального уравнения (16) с правой частью $F_k^m(x) = -N_m^T([E_0(x), n(x)], \tau_k(x))$, где

$$N_m^T = \prod_{k=0, k \neq m}^{N-1} (T - \lambda_k I) / \prod_{k=0, k \neq m}^{N-1} (\lambda_m - \lambda_k)$$

— оператор проектирования на собственное подпространство оператора T , отвечающее собственному значению λ_m . Далее индекс моды опускаем.

Поскольку рассматриваемые поверхности цилиндричны, положим $\tau_2 = e_3$. Тогда, вследствие ортогональности $\tau_2(y) \perp \tau_1(x)$, $\tau_2(y) \perp n(x)$, $x, y \in S$, ядро $A_{12}(x, y) \equiv 0$, $x, y \in S$.

Пусть первичное поле E_0 таково, что $F_1(x) = -(E_0(x) \times n(x), \tau_1(x)) = -(E_0(x), e_3) \equiv 0$, $x \in S$. Таким свойством будет обладать, в частности, поперечно электрическое поле (ТЕ). Введем в рассмотрение интегральные операторы

$$A_{ki} J_i = \int_S^* J_i(y) A_{ki}(x, y) dS_y, \quad k = 1, 2; \quad i = 1, 2.$$

Тогда уравнение (16) можно записать в матричном виде

$$\begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_1 \\ J_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ F_2 \end{pmatrix}.$$

При условии, что для данного значения p уравнение $A_{11} J_1 = 0$ имеет только тривиальное решение, уравнение (16) будет эквивалентно уравнению $A_{22} J_2 = F_2$. При этом, рассеянное поле E_1 также как и возбуждающее E_0 будет поперечно электрическим и в этом случае можно говорить о ТЕ колебаниях открытого резонатора. Как показывает численный эксперимент, для

рассматриваемых далее интервалов изменения параметра p , вышеуказанное условие будет выполнено, поэтому далее вместо задачи (16) будем рассматривать задачу

$$\int_S^* J(y) \frac{\partial^2}{\partial n(x) \partial n(y)} \frac{e^{ip|x-y|}}{|x-y|} dS_y = F(x), \quad x \in S, \quad (17)$$

где решение J и правая часть F — квазипериодические скалярные функции (для простоты нижний индекс, равный двум, опущен).

Перейдем к дискретизации интегрального уравнения (17). Снова, для простоты изложения, считаем, что S включает в себя только один цилиндр.

Как и в случае закрытого резонатора, воспользуемся Фурье представлением для квазипериодической функции и заменим с достаточной степенью точности

$$J(\psi, \zeta) \approx \sum_{n=-n_\varphi}^{n_\varphi} J_n(\zeta) \cdot e^{i(m+nN)\psi}, \quad (18)$$

аналогичное представление можно записать и для F . Домножим обе части (17) на $e^{-i(m+fN)\varphi}$ и проинтегрируем по φ в пределах от 0 до α . В результате получим такую систему

$$\sum_{n=-n_\varphi}^{n_\varphi} \int_{-\ell/2}^{\ell/2} J_n(\zeta) K_{nf}(z, \zeta) d\zeta = \alpha F_f(z), \quad z \in [-\ell/2, \ell/2], \quad f = \overline{-n_\varphi, n_\varphi}, \quad (19)$$

ядро

$$K_{nf}(z, \zeta) = \int_0^\alpha d\varphi e^{-i(m+fN)\varphi} \int_0^{2\pi} d\psi e^{i(m+nN)\psi} \frac{\partial^2}{\partial n(x) \partial n(y)} \frac{e^{ip|x-y|}}{|x-y|} \cdot |\dot{y}'(\psi)|.$$

Переход к дискретному аналогу уравнения (19), т.е. к СЛАУ осуществляется посредством замены решения $J_n(\zeta)$ его кусочно-полиномиальным интерполянтном. На отрезке $[-\ell/2, \ell/2]$ выбираются две равномерные сетки с перемежающимися узлами

$$a_k = -\ell/2 + kh, \quad k = \overline{0, n_z}$$

$$t_k = a_k - h/2, \quad k = \overline{1, n_z}$$

$h = \ell/n_z$, n_z — количество точек сетки. Для функции $J_n(\zeta)$ на отрезке $[a_{k-1}, a_k]$ строится интерполяционный полином Лагранжа с узлами $\{t_{k-1}, t_k, t_{k+1}\}$ при $k = \overline{2, n_z - 1}$; $\{t_1, t_2\}$ при $k = 1$ и $\{t_{n_z-1}, t_{n_z}\}$ при $k = n_z$. Таким образом, для аппроксимации используются многочлены не выше второго порядка.

После замены искомой функции интерполянтном уравнение (19), записанное в узлах $z \in \{t_i\}_{i=1}^{n_z}$ даст СЛАУ. Элементы матрицы будут содержать интегралы с сильной особенностью

$$\int_0^\alpha d\varphi e^{-i(m+fN)\varphi} \int_0^{2\pi} d\psi e^{i(m+nN)\psi} |\hat{y}'(\psi)| \int_{-h/2}^{h/2} s^{m_0} \frac{\partial^2}{\partial n(x) \partial n(y)} \frac{e^{ip|x-y|}}{|x-y|} ds, \quad (20)$$

$m_0 = 0, 1, 2$. Далее будет изложен метод построения квадратурных формул для их вычисления.

Вынесем из ядра наиболее проблемные слагаемые и запишем

$$\frac{\partial^2}{\partial n(x) \partial n(y)} \frac{e^{ipt}}{t} = \frac{\partial^2}{\partial n(x) \partial n(y)} \left\{ \frac{1}{t} - \frac{p^2}{2!} t + \frac{p^4}{4!} t^3 \right\} + M(x, y),$$

где $t = |x - y| = \sqrt{(z - \zeta)^2 + |\hat{x} - \hat{y}|^2}$, а $M(x, y)$ — очень гладкая, хорошая для расчетов функция. В соответствии с этим представлением интеграл (20) разобьем на две части

$$|\hat{y}'(\psi)| \int_{-h/2}^{h/2} s^{m_0} \frac{\partial^2}{\partial n(x) \partial n(y)} \frac{e^{ip|x-y|}}{|x-y|} ds = \int_{-h/2}^{h/2} s^{m_0} M(x, y) |\hat{y}'(\psi)| ds + f(\psi, \varphi), \quad (21)$$

$$f(\psi, \varphi) = |\hat{y}'(\psi)| \frac{\partial^2}{\partial n(x) \partial n(y)} \int_{-h/2}^{h/2} s^{m_0} \left\{ \frac{1}{\sqrt{(s - d_{ik})^2 + b^2}} - \frac{p^2}{2!} \sqrt{(s - d_{ik})^2 + b^2} + \frac{p^4}{4!} \left\{ (s - d_{ik})^2 + b^2 \right\}^{3/2} \right\} ds,$$

$$b = |\hat{x} - \hat{y}|, \quad d_{ik} = t_i - t_k.$$

В полученном равенстве вторая производная по нормали вынесена за знак интеграла, поскольку нормаль не зависит от координаты z , т.е. для цилиндра $n(x) = n(\hat{x})$.

Как несложно показать, первый интеграл справа в (21) по переменным ψ и φ является 2π -периодической функцией типа (12), поэтому для вычисления от него двойного интеграла типа (20) по переменным ψ и φ можно использовать квадратурную формулу (13). Для вычисления интеграла по s можно воспользоваться, к примеру, формулой трапеций.

Рассмотрим второе слагаемое справа в (21). Интегралы по переменной s являются табличными. Вычислим их и проанализируем полученное выражение при $\psi = \varphi$. После указанных операций можем записать

$$f(\psi, \varphi) = B_0 |\hat{x}'(\psi)| \frac{\partial^2}{\partial n(x) \partial n(y)} \ln |\hat{x} - \hat{y}|^2 + B_1 \ln \left| \sin \frac{\psi - \varphi}{2} \right| + O\left(\sin \frac{\psi - \varphi}{2} \right).$$

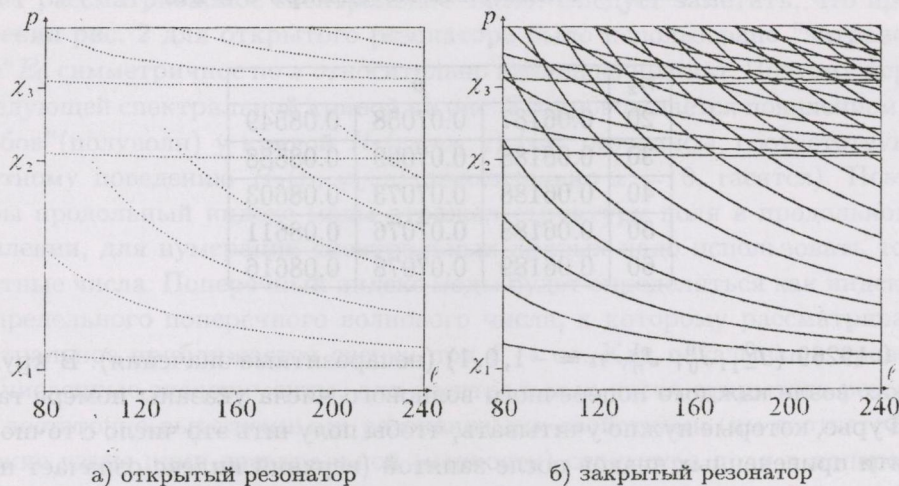


Рис. 2: Зависимость спектра от высоты резонатора

B_0 и B_1 — константы. Со второй производной от логарифма поступим аналогично [4] в двумерном случае, а именно

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{2\pi} G(\psi) |\hat{y}'(\psi)| \frac{\partial^2}{\partial n(\hat{x}) \partial n(\hat{y})} \ln |\hat{x}_\varepsilon - \hat{y}|^2 d\psi = -\frac{1}{|\hat{x}'(\varphi)|} \int_0^{2\pi^*} \frac{G(\psi) d\psi}{2 \sin^2((\psi - \varphi)/2)} + \int_0^{2\pi} G(\psi) \left\{ |\hat{y}'(\psi)| \frac{\partial^2}{\partial n(\hat{x}) \partial n(\hat{y})} \ln |\hat{x} - \hat{y}|^2 + \frac{1}{|\hat{x}'(\varphi)|} \frac{1}{2 \sin^2((\psi - \varphi)/2)} \right\} d\psi. \quad (22)$$

Первый интеграл справа надо понимать в смысле конечной части по Адамару, второй интеграл особенностей не имеет.

Используя далее квадратурные формулы (11) и (13), а также соотношения (8) интегралы (20) а, значит, и элементы матрицы можно посчитать с любой степенью точности.

5. Результаты численных экспериментов

Выберем параметры резонаторов: $R_0 = 26.38425$, $R_1 = 7.71946$, $d = 0.45$ — высота гофра, $N = 4$ — количество гофр, $m = 1$ — номер моды. Высоту резонатора ℓ будем менять в пределах от 80 до 240.

На рисунке 2 приведены графики зависимости спектров открытого и закрытого резонаторов в интервале $p \in [0.05, 0.22]$ от высоты ℓ .

Проанализируем полученные картинки. Спектр закрытого резонатора строился на основании (3). Первые три поперечных волновых числа (считая от нуля): $\chi_1 = 0.06069$ (J_0^0 ; J_n^1 , $n = -1, 0, 1$), $\chi_2 = 0.15863$ (J_{-1}^0 ; J_1^1),

Таблица 1. Сходимость метода при $\ell = 240$

n_z	p		
20	0.06187	0.07058	0.08549
30	0.06188	0.07069	0.08588
40	0.06188	0.07073	0.08603
50	0.06188	0.07076	0.08611
60	0.06189	0.07078	0.08616

$\chi_3 = 0.19269 (J_{-1}^0, J_0^0; J_n^1, n = -1, 0, 1)$ (непаразитные значения). В круглых скобках возле каждого поперечного волнового числа указаны номера гармоник Фурье, которые нужно учитывать, чтобы получить это число с точностью до пяти приведенных знаков после запятой (верхний индекс означает номер поверхности: 0 — внешний цилиндр, 1 — внутренний).

Для классификации колебаний в закрытом резонаторе введем продольный и поперечный индексы мод. Продольный индекс моды для спектрального числа p выбирается равным номеру n из (3) — он описывает число полуволн, которое укладывается по высоте резонатора. Поперечный индекс моды для p выбирается равным индексу моды соответствующего поперечного волнового числа χ — он описывает структуру поля в поперечном сечении резонатора (не останавливаясь подробно на правиле введения поперечного индекса моды, скажем только, что он является составным и включает в себя азимутальный и радиальный индексы мод).

Спектральные кривые на рисунке 2 распадаются на три группы, каждая из которых соответствует своему поперечному волновому числу χ_i . Поперечный индекс моды, таким образом, определяет группу, к которой относится данное спектральное число, продольный индекс моды определяет номер спектральной кривой, на которой это спектральное число находится, если считать от горизонтальной асимптоты $p = \chi_i$. Переход на следующую спектральную кривую в текущей группе сопровождается появлением еще одного "горба" (полуволны) у кривой $H_3(r_0, \varphi_0, z)$ (как функции переменной z).

Теперь рассмотрим график для открытого резонатора. Для построения этого графика использовались сведения о сходимости процесса поиска спектральных чисел для некоторых "опорных" значений высоты резонатора (см. пример сходимости в таблице). Причем, для получения спектрального числа, соответствующего группе χ_i с точностью до пяти знаков после запятой, нужно учитывать гармоники Фурье с теми же номерами, что и в случае закрытого резонатора.

По аналогии с закрытым резонатором введем в случае открытого резонатора продольный и поперечный индексы моды. Эта процедура может быть проведена чисто формально на основании поведения спектральных кривых на рис. 2. Продольный индекс моды будет равен номеру спектральной кривой (считая от горизонтальной асимптоты) в выбранной группе, на которой

лежит рассматриваемое спектральное число. Следует заметить, что при построении рис. 2 для открытого резонатора было использовано "затравочное поле" E_0 симметричное по z относительно начала координат. Поэтому переход к следующей спектральной кривой на рис. 2 сопровождается появлением двух "горбов" (полуволн) у кривой $H_3(r_0, \varphi_0, z)$ (т.е. резонансы, соответствующие нечетному поведению $H_3(r_0, \varphi_0, z)$ относительно $z = 0$, гасятся). Поэтому, чтобы продольный индекс моды отражал структуру поля в продольном направлении, для нумерации спектральных кривых надо использовать только нечетные числа. Поперечный индекс моды будет определяться как индекс моды предельного поперечного волнового числа, к которому рассматриваемое спектральное приближается сверху при $\ell \rightarrow \infty$. Как показывают проведенные численные эксперименты, для спектральных чисел открытого резонатора с достаточно выраженными резонансными свойствами (им соответствуют высокие узкие пики спектральной мощности) структура поля в поперечном сечении резонатора на достаточном удалении от его открытых торцов будет близка структуре решения закрытого резонатора с аналогичным поперечным индексом моды.

Вычислительные эксперименты проводились для различных "затравочных" полей $E_0(x)$ и это практически не сказывалось на положении резонансов, но существенно сказывалось на мощности излучения $N(p)$.

Изучение поведения спектральной мощности вблизи найденных резонансов, а также сравнительный анализ спектров открытого и закрытого резонаторов позволяет сделать следующий вывод. Резонансы ТЕ колебаний открытого резонатора группируются вблизи частот собственных ТЕ колебаний соответствующего закрытого резонатора с некоторой сдвижкой в сторону меньших значений. Их добротности так же, как и амплитуды возбуждаемых колебаний, ввиду наличия излучения из открытых торцов резонатора являются конечными величинами. При этом значения энергетических характеристик в резонансных частотах растут с увеличением высоты резонатора, с ростом радиального индекса моды (часть поперечного индекса) и резко падают при увеличении продольного индекса моды (обрыв спектральных кривых из группы χ_1 на рисунке 2 соответствует полной потере резонансных свойств соответствующего колебания). Аналогичные закономерности для симметричных электрических колебаний (ТМ) отрезка круглого волновода описаны в работе [9].

Следует заметить, что в отличие от рассмотренного закрытого резонатора у открытого резонатора имеются две резонансные области — это область между двумя коаксиальными проводниками и область "внутри" внутреннего проводника. Но "дифракционное" взаимодействие двух резонансных областей открытого резонатора начинает проявляться в области более высоких частот, чем те, что были рассмотрены в данной работе.

6. Заключение

В данной работе предложены численные модели для спектрального анализа открытых и закрытых резонаторов на основе отрезка регулярного коаксиального секторного волновода с гладкими гофрами. Устойчивость вычислительного процесса, высокая скорость сходимости и точность получаемого результата — свойства, которые демонстрируют предложенные методы при проведении вычислений, делают их эффективным инструментом моделирования даже на рядовом персональном компьютере.

В дальнейшем предполагается развить предложенный в данной работе численный метод для проведения спектрального анализа открытого резонатора на основе отрезка слабонерегулярного секторного волновода. Эта задача имеет большое значение, в частности, для строгого исследования спектральных характеристик коаксиальных гиротронов [10].

Автор выражает свою благодарность научному руководителю проф. Щербине В. А. за постановку актуальной задачи и постоянный интерес к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гандель Ю. В., Еременко С. В., Полянская Т. С. Математические вопросы метода дискретных токов. Обоснование численного метода дискретных особенностей решения двумерных задач дифракции электромагнитных волн: Учеб. пособие. Ч. II. — Харьков: ХГУ, — 1992. — 145 с.
2. Щербина В. А. Дифракция электромагнитных волн на разрезе в \mathbb{R}^3 // Электромагнитные явления. — 1998. — Т. 1, 4. — С. 1–4.
3. Жученко С. В. Численное моделирование осесимметричного решения задачи о дифракции электромагнитного поля в открытом гофрированном резонаторе // Электромагнитные явления. — 2005. — Т. 5, 1(14). — С. 21–25.
4. Митина И. В. Численно аналитический метод для спектрального анализа электромагнитного поля в плоском резонаторе // Вестник ХНУ им. В. Н. Каразина. Сер. "Математика, прикладная математика и механика", — 2005. — Т. 711, 55. — С. 104–120.
5. Митина И. В. Метод численного моделирования собственных колебаний электромагнитного поля в цилиндрическом резонаторе // Вестник Херсонского национального технического университета. — 2006. — 2(25). — С. 341–345.
6. Митина И. В. Численный анализ спектра открытого цилиндрического резонатора конечной высоты // Вестник Харьковского национального университета. Сер. "Математическое моделирование. Информационные технологии. Автоматизированные системы управления", — 2006. — 733. — С. 174–185.

7. Пановский В., Филиппс М. Классическая электродинамика. – М.: ГИФМЛ, – 1963. – 432 с.
8. Гандель Ю. В. Лекции о численных методах для сингулярных интегральных уравнений. Уч. пособие, ч. 1. Введение в методы вычисления сингулярных и гиперсингулярных интегралов. – Харьков–Херсон, – 2000. – 92 с.
9. Мисюра Н. Н., Сологуб В. Г., Возбуждение симметричных электрических колебаний в системе двух отрезков круглого волновода различной длины и диаметра. – Х.: ИРЭ АН УССР, – 1986. – 44 с.
10. Гандель Ю. В., Загинайлов Г. И., Стешенко С. А. Строгий электродинамический анализ резонаторных систем коаксиальных гиротронов // Журнал технической физики. – 2004. – Т.74, 7. – С. 81–89.

Обобщенные канонические произведения в комплексной ПЛОСКОСТИ

К.Г. Малютин, В.А. Герасименко

Сумской национальной аграрный университет, Сумы, Украина

В статье вводится определение обобщенного канонического произведения точек комплексной плоскости. Доказано для случая, когда точки являются нулями целой функции конечного порядка, что это произведение совпадает с каноническим произведением Вейерштрасса.

2000 Mathematics Subject Classification 30D15, 30D20.

Введение

В теории целых функций многие важные результаты получаются с помощью различных представлений этих функций. Наиболее известная из них – формула Адамара [1, Глава 1, Теорема 13], на которую опирается значительная часть теории целых функций конечного порядка. Обобщение этой формулы для функций бесконечного порядка и функций нерегулярно растущих в окрестности бесконечности было получено Л. Рубелом и Б. Тейлором [2]. При этом Л. Рубел и Б. Тейлор опирались на разработанный ими метод рядов Фурье целых функций. Метод рядов Фурье позволил А. Кондратюку [3] построить обобщение известной теории Левина-Пфлюгера целых функций вполне регулярного роста для мероморфных функций и целых функций с нерегулярным ростом. Обобщение этого метода на суб- и дельта-субгармонические функции получило свое развитие в работах Я. Василькива и первого автора этой статьи [4]. Целью настоящей статьи является получение аналога формулы Адамара для целых функций более общего роста $\gamma(r)$, чем конечный порядок.

1. Основные понятия и определения

В настоящей статье мы будем пользоваться терминологией работ [3], [5].

Определение 1 *Положительная, непрерывная, возрастающая и неограниченная функция $\gamma(r)$, определенная для всех $r > 0$, называется функцией роста.*

В случае необходимости будем считать значения функции $\gamma(r)$ на полуинтервале $(0,1]$ должным образом измененными (в частности, $\lim_{r \rightarrow +0} \gamma(r) = 1$).

Определение 2 Пусть $\gamma(r)$ – функция роста. Целая функция $f(z)$ называется функцией конечного γ -типа, если существуют положительные постоянные A и B такие, что

$$M(r, f) := \max_{|z|=r} \ln |f(z)| \leq A\gamma(Br).$$

Класс данных целых функций при фиксированной функции роста $\gamma(r)$ обозначим через $\mathcal{E}(\gamma)$.

Заметим [3, Предложение 2.2], что класс $\mathcal{E}(\gamma)$ является областью целостности с обычными операциями.

Через $C(a, r)$ будем обозначать открытый круг радиуса r с центром в точке a . Пусть $D = \{a_k, q_k\}_{k=1}^{\infty}$ – дивизор, (т.е. множество различных комплексных чисел a_k вместе с их кратностями q_k , $q_k \geq 1$ – натуральное число). Не ограничивая общности, в дальнейшем будем считать, что $a_1 \neq 0$, $a_1 \leq a_k$ при $k \geq 2$, и $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = \infty$. Если G – множество в комплексной плоскости \mathbb{C} , то обозначим через $n_D(G) = \sum_{a_k \in G} q_k$. В частности, при $r > 0$

$n_D(r) = n_D(C(0, r))$. Положим $|D| = \bigcup_{k=1}^{\infty} a_k$. Включение $D \subset D' = \{b_n, p_n\}_{n=1}^{\infty}$ означает, что $|D| \subset |D'|$ и, если $a_k = b_n$, то $q_k \leq p_n$. Если $f(z)$ – целая функция, то через D_f будем обозначать дивизор ее корней, через $n_f(G)$ – величины, построенные с помощью дивизора D_f .

При $n \in \mathbb{N}$ и $r > 0$ определим

$$S(r; n, D) = \frac{1}{n} \sum_{|a_k| \leq r} q_k \left(\frac{1}{a_k} \right)^n,$$

$$S(r_1, r_2; n, D) = S(r_2; n, D) - S(r_1; n, D), \quad r_1 \leq r_2.$$

Если понятно о каком дивизоре D идет речь, то во всех обозначениях индекс D иногда будем опускать.

Определение 3 Пусть $\gamma(r)$ – функция роста. Дивизор D имеет конечную γ -плотность, если существуют положительные постоянные A и B такие, что

$$N_D(r) := \int_0^r \frac{n_D(t)}{t} dt \leq A\gamma(Br), \quad r > 0.$$

Заметим [3, Предложение 2.3], что если дивизор D имеет конечную γ -плотность, то

$$n_D(r) \leq A\gamma(Br)$$

при некоторых (возможно других) положительных постоянных A и B и всех $r > 0$.

Определение 4 Дивизор D называется γ -сбалансированным, если существуют постоянные $A, B > 0$, при которых

$$|S(r_1, r_2; n, D)| \leq \frac{A\gamma(Br_1)}{r_1^n} + \frac{A\gamma(Br_2)}{r_2^n}$$

для всех $0 < r_1 < r_2$ и $n \in \mathbb{N}$, и строго γ -сбалансированным, если

$$|S(r_1, r_2; n, D)| \leq \frac{A\gamma(Br_1)}{nr_1^n} + \frac{A\gamma(Br_2)}{nr_2^n}.$$

Определение 5 Дивизор D называется γ -допустимым, если он γ -сбалансирован и имеет конечную γ -плотность.

Условия γ -сбалансированности и конечной γ -плотности независимы (соответствующие примеры можно найти в [3]. Справедлива следующая теорема [5, Теорема 13.5.2]:

Теорема А. Для того, чтобы дивизор D был дивизором нулей целой функции $f(z)$ конечного γ -типа, необходимо и достаточно, чтобы дивизор D был γ -допустимым.

2. Обобщенные канонические произведения

Как следует из теоремы А, γ -допустимые дивизоры (и только они) являются дивизорами нулей целых функций класса $\mathcal{E}(\gamma)$. Наличие одной только γ -плотности еще не гарантирует, что $D = D_f$ для некоторой целой функции $f \in \mathcal{E}(\gamma)$ даже в случае целых функций конечного порядка, т.е. когда $\gamma(r) = r^\rho$ ($\rho > 0$). Это справедливо в случае нецелого ρ . В случае же целого $\rho \geq 1$ можно лишь утверждать, что $D \subset D_f$. В различных приложениях важную роль играют функции, дивизоры нулей которых совпадают с заданным дивизором. При этом желательно подобрать наиболее простую функцию, обладающую таким свойством. В теории целых функций таковыми являются канонические произведения Вейерштрасса. Для целых функций класса $\mathcal{E}(\gamma)$ обобщение этого понятие дано Рубелом и Тейлором [5]. Мы дадим другое обобщение, которое, на наш взгляд, является более удобным, чем в [5]. Предварительно напомним некоторые определения из [5].

Определение 6 Коэффициентами Фурье целой функции $f(z)$ называются числа

$$c_k(r, f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-ik\theta} \ln |f(re^{i\theta})| d\theta, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Для дивизора $D = \{a_k, q_k\}_{k=1}^{\infty}$ и $n \in \mathbb{N}$ обозначим через

$$S'(r; n, D) = S'(r; n) = \frac{1}{n} \sum_{|a_k| \leq r} q_k \left(\frac{\bar{a}_k}{r} \right)^n.$$

Определение 7 Пусть $\alpha = \{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty}$ некоторая последовательность комплексных чисел. Функции

$$c_0(r; D, \alpha) = N_D(r);$$

$$c_n(r; D, \alpha) = \frac{r^n}{2} \{\alpha_n + S(r; n, D)\} - \frac{1}{2} S'(r; n, D)$$

при $n \in \mathbb{N}$ и $c_n = \bar{c}_{-n}$ при $-n \in \mathbb{N}$ называются коэффициентами Фурье пары (D, α) .

Определение 8 Пара (D, α) называется γ -допустимой, если существуют положительные постоянные A и B , при которых

$$|c_n(r; D, \alpha)| \leq \frac{A\gamma(Br)}{|n|+1}, \quad n \in \mathbb{Z},$$

для всех $r > 0$.

Справедлива следующая теорема [5, Теорема 13.5.4]:

Теорема Б. Дивизор D является γ -допустимым тогда и только тогда, когда существует такая последовательность α , что пара (D, α) γ -допустима.

Пусть γ - функция роста. Положим $p[\gamma] = \infty$, если для всех $p \in \mathbb{N}$ выполняется

$$\liminf_{r \rightarrow \infty} \gamma(r)r^{-p} > 0,$$

и

$$p[\gamma] = \min\{p : p \in \mathbb{N}, \liminf_{r \rightarrow \infty} \gamma(r)r^{-p} = 0\}$$

в противном случае.

Пусть дивизор D является γ -допустимым. Для $1 \leq n < p[\gamma] \leq \infty$, $n \in \mathbb{N}$, имеем

$$\inf\{\gamma(Br)r^{-n} : r > 0\} > 0.$$

Поэтому для таких n существует $r'_n > 0$ такое, что

$$\frac{\gamma(Br'_n)}{(r'_n)^n} \leq 2 \frac{\gamma(Br)}{(r)^n}, \quad r > 0.$$

Положим $r_n = \max\{|a_1|/2; \inf\{r'_n\}\}$, и для таких n определим

$$\alpha_n = -S(r_n; n, D). \quad (1)$$

Если $p[\gamma] < \infty$, то для $n \geq p[\gamma]$ существует последовательность чисел $\{r_{jn}\}_{j=1}^{\infty}$, $r_{jn} \uparrow \infty$ при $j \rightarrow \infty$ такая, что

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \gamma(Br_{jn})r_{jn}^{-n} = 0.$$

Тогда для $n \geq p[\gamma]$ положим

$$\alpha_n = - \lim_{j \rightarrow \infty} S(r_{jn}; n, D) \quad (2)$$

(предел существует см. доказательство предложения 13.1.14 в [5]).

Обозначим через $\alpha = \{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$. Как показывает Теорема 13.2.5 из [5] пара (D, α) является γ -допустимой.

Пусть $c_n(r) = c_n(r; D, \alpha)$ – коэффициенты Фурье пары (D, α) . Определим

$$\Phi(re^{i\theta}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(r) e^{in\theta},$$

$$P_r(z) = \prod_{|a_k| < r} \left(\frac{\bar{a}_k r(a_k - z)}{|a_k| r^2 - \bar{a}_k z} \right)^{q_k},$$

$$Q_r(z) = \exp \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=r} \frac{\zeta + z}{\zeta - z} \Phi(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta} \right\},$$

и положим $E_r(z) = P_r(z)Q_r(z)$.

Обозначим через $E_D(z)$ целую функцию, которая при $|z| < r$ совпадает с $E_r(z)$. По теореме 13.5.1 из [5]: 1) $E_D = D$, 2) коэффициенты Фурье функции $E_D(z)$ совпадают с коэффициентами Фурье пары (D, α) , 3) функция $E_D(z)$ единственная целая функция, которая обладает свойствами 1), 2) и $E_D(0) = 1$.

Определение 9 Пусть дивизор D является γ -допустимым, тогда функция $E_D(z)$ называется обобщенным каноническим произведением дивизора D .

3. Произведения Вейерштрасса

Для целого $p \geq 0$ определим множитель Вейерштрасса:

$$E(u, 0) = 1 - u,$$

$$E(u, p) = (1 - u) \exp \left(u + \frac{u^2}{2} + \dots + \frac{u^p}{p} \right), \quad p \geq 1.$$

Пусть функция роста $\gamma(r) = r^\rho$ ($\rho > 0$) и $D = \{a_k, q_k\}_{k=1}^{\infty}$ – какой-нибудь дивизор. Справедливы следующие утверждения [3, Предложение 3.2]:

1) дивизор D имеет конечную γ -плотность тогда и только тогда, когда

$$n(r, D) \leq Ar^\rho, \quad r > 0,$$

при некотором $A > 0$;

2) если ρ – нецелое и дивизор D имеет конечную γ -плотность, то он является γ -допустимым;

3) если ρ – целое, то дивизор D γ -допустим тогда и только тогда, когда он имеет конечную γ -плотность и $S(r; \rho, D)$ является ограниченной функцией от r .

Если дивизор D γ -допустим, то функция

$$E(z) = \frac{1}{c} \prod_{k=1}^{\infty} \left[E\left(\frac{z}{a_k}, p\right) \right]^{q_k}, \quad p = [\rho] \quad (3)$$

называется каноническим произведением Вейерштрасса дивизора D (здесь c – нормирующий множитель такой, что $E(0) = 1$). В случае же произвольной функции роста понятие обобщенного канонического произведения введено нами выше. Связь этих двух определений, для функций конечного порядка раскрывается следующей теоремой.

Теорема 1 Пусть функция роста $\gamma(r) = r^\rho$ ($\rho > 0$), а дивизор $D = \{a_k, q_k\}_{k=1}^{\infty}$ является γ -допустимым. Тогда обобщенное каноническое произведение дивизора D совпадает с его каноническим произведением Вейерштрасса.

Доказательство. Так как нули функций $E(z)$ и $E_D(z)$ совпадают с точностью до кратностей, то по Теореме 13.5.1 [5] достаточно доказать, что их коэффициенты Фурье совпадают.

Из формул (1) и (2) для функции роста $\gamma(r) = r^\rho$ получаем

$$\alpha_n = -S\left(\frac{|a_1|}{2}; n\right) = 0, \quad 1 \leq n \leq p, \quad (4)$$

$$\alpha_n = -S(\infty; n, D), \quad n > p, \quad (5)$$

где $p = [\rho]$.

Пусть

$$\ln E(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n z^n$$

разложение функции $E(z)$ в некоторой окрестности точки $z = 0$ (здесь и ниже мы рассматриваем однозначную ветвь $\ln z$ в комплексной плоскости с разрезом вдоль отрицательной вещественной полуоси).

Для коэффициентов Фурье функции $E(z)$ справедливы формулы [5, Лемма 13.4.1]:

$$c_0(r; E) = N_E(r),$$

$$c_n(r; E) = \frac{r^n}{2} \{ \beta_n + S(r; n, D_E) \} - \frac{1}{2} S'(r; n, E_D).$$

при $n \in \mathbb{N}$ и $c_n = \bar{c}_{-n}$ при $-n \in \mathbb{N}$. Поэтому в силу определения 6 коэффициентов Фурье пары достаточно доказать, что $\beta_n = \alpha_n$, при $n \in \mathbb{N}$.

Из разложения

$$\ln E(u, p) = -\frac{u^p + 1}{p + 1} - \frac{u^p + 2}{p + 2} + \dots,$$

которое имеет место при $|u| \leq q < 1$ и $\arg(1 - u) \leq \pi$, и равномерной сходимости на компактах канонического произведения получаем, что

$$\beta_n = 0, \quad 1 \leq n \leq p$$

и

$$\beta_n = -S(\infty; n, D), \quad n > p.$$

Требуемое утверждение следует тогда из (4) и (5).

Замечание. В работе [5] вводится другое определение обобщенного канонического произведения дивизора, которое в общем случае отличается от нашего. На наш взгляд, оно является менее удобным, так как в качестве обобщенного канонического произведения берется некоторое семейство функций. При таком определении затруднительно его практическое применение. Кроме того, в общем случае в работе [5] дивизор D (несмотря на то, что он является γ -допустимым) дополняется еще некоторым множеством точек, обеспечивающим равномерную γ -сбалансированность остатков. Заметим также, что в случае когда $\gamma(r) = r^\rho$ эти определения совпадают между собой и, как следует из доказанной теоремы 1, с определением Вейерштрасса.

Теорема 1 дает возможность сформулировать теорему о представлении целой функции конечного γ -типа, что является обобщением Теоремы Адамара.

Теорема 2 Целая функция конечного γ -типа представляется в форме

$$f(z) = z^m E_f(z) Q_f(z),$$

где m — кратность нулевого корня, $E_f(z)$ — обобщенное каноническое произведение, соответствующее дивизору D_f отличных от нуля корней функции $f(z)$, $Q_f(z)$ — функция класса $\mathcal{E}(\gamma)$, не имеющая корней.

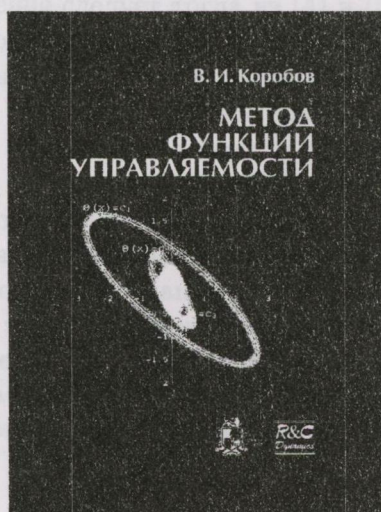
Доказательство. Пусть функция $f(z)$ принадлежит классу $\mathcal{E}(\gamma)$. По Теореме А дивизор D_f является γ -допустимым. Тогда обобщенное каноническое произведение $E_f(z)$ дивизора D_f принадлежит классу $\mathcal{E}(\gamma)$. Следовательно, функция $Q_f(z) = f(z)/z^m E_f(z)$ является целой и, нетрудно видеть, принадлежит классу $\mathcal{E}(\gamma)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Левин Б.Я. Распределение корней целых функций. — М.: ГИТТЛ, 1956.
2. Rubel L.A., Taylor B.A. Fourier series method for meromorphic and entire functions // Bull. Soc. Math. France.- 1968. 96. — P. 53-96.

НОВЫЕ КНИГИ

- Автор: **Коробов В. И.**
профессор Харьковского национального университета
им. В.Н. Каразина
- Название: **Метод функции управляемости**
- Издательство: М.–Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика"
- Объем: 576 стр.



Монография посвящена методу функции управляемости, который является развитием метода функции Ляпунова на управляемые системы. Дается применение метода функции управляемости к задаче допустимого синтеза управления для различных классов систем дифференциальных уравнений. Проводится построение управления в виде функции фазовых координат, удовлетворяющего заданным ограничениям, такого, что траектории замкнутой системы попадают в заданную конечную точку за конечное время. Результаты проиллюстрированы примерами, рисунками.

Книга будет полезна математикам и механикам – специалистам в области теории управления. Материал доступен аспирантам и студентам университетов, которые специализируются по прикладной математике.

Книга посвящена 150-летию со дня рождения А. М. Ляпунова.

- Коробов В.И.** Метод функции управляемости:
К68 Монография / В.И. Коробов. – М.–Ижевск: НИЦ
"Регулярная и хаотическая динамика", 2007. – 576 с.

АНОТАЦІЇ

УДК 517.9

О.М. Ляпунов – творець сучасної теорії стійкості

К о р о б о в В. І. – Вісн. Харк. нац. ун-ту., 2007, № 790. Математика, прикладна математика і механіка, с. 4–40 .

Робота присвячена 150-річчю з дня народження всесвітньо відомого вченого, академіка Санкт-Петербурзької Академії Наук, професора Харківського університету Олександра Михайловича Ляпунова. Наведено основні результати О.М. Ляпунова зі стійкості руху, які є основою сучасної теорії стійкості. Простежено шляхи розвитку цієї теорії – частинна стійкість, векторні функції Ляпунова, стійкість у банахових просторах. Наведено розвиток метода функцій Ляпунова для керованих систем – метод функції керованості. На основі цього метода розв'язані задачі припустимого синтезу керування для різних класів систем. Результати проілюстровані прикладами.

Мал.: 10. Бібліогр.: 76 найм.

УДК 514

О.М. Ляпунов (1857-1918) (до 150 річчя з дня народження)

Б о р и с е н к о О. А. – Вісн. Харк. нац. ун-ту., 2007, № 790. Математика, прикладна математика і механіка, с. 41–52 .

В статті надано опис життя і наукової діяльності О.М. Ляпунова. Показано вплив ідей Ляпунова в доведенні гіпотези Пуанкаре і геометричної гіпотези Терстона.

Мал.: 3. Бібліогр.: 19 найм.

УДК 532.5.013.4+532.54

Стійкість руху рідини навколо деформівних поверхонь, в трубах, що схлопуються, та каналах

К і з і л о в а Н. М., Х а м а д і ш М. – Вісн. Харк. нац. ун-ту., 2007, № 790. Математика, прикладна математика і механіка, с. 53–82 .

Наведено огляд експериментальних та теоретичних результатів, які присвячені дослідженню абсолютної та конвективної нестійкості течій в'язкої рідини у деформівних поверхонь, в трубах та каналах з піддатливими стінками. Нестійкість проявляє себе у схлопуванні трубки, зниженні витрати, осциляціях стінки, звукогенерації та, наприкінці, зруйнуванні системи. Наведено результати дослідження стійкості течій рідин у багатошарових ізотропних та анізотропних трубах при різних умовах на зовнішній поверхні трубки. Показано, що при різних значеннях параметрів є одна або декілька абсолютно нестійких рідинних мод. За рахунок підбору в'язких та пружних коефіцієнтів та товщин окремих шарів стінки можна підвищити стійкість найбільш нестійкої моди та стабілізувати систему. У прикладенні до трубок технічних при-

строїв це дає можливість запобігати витрати енергії, схлопування трубки та виникнення небажаних шумів. У прикладенні до кровоносних судин моделі, які запропоновані, дають можливість проводити біомеханічну інтерпретацію параметрів шумів та кривих коливань стінки судин, які реєструються над артеріями та венами.

Мал.: 10. Бібліогр.: 67 найм.

УДК 51-72:531/533, 51-72:530.145

Власні значення оператора ангармонічного осцилятора

Ф л о р и н с ь к и й В. В. – Вісн. Харк. нац. ун-ту., 2007, № 790. Математика, прикладна математика і механіка, с. 83–88.

За допомогою методу Ліндштедта-Пуанкаре отримано спектр ангармонічного осцилятора четвертого, шостого й восьмого степенів нелінійності. Для розв'язання цього завдання розроблена комп'ютерна програма. Отримана формула спектра осцилятора четвертого степеня нелінійності повністю співпадає з аналогічною формулою, отриманою методом квантових нормальних форм.

Табл.: 2. Бібліогр.: 14 найм.

УДК 517.977.1+517.935.4

Узагальнена координатно-інваріантна трикутна форма: глобальна керованість та зводність до трикутного вигляду

П а в л и ч к о в С. С. – Вісн. Харк. нац. ун-ту., 2007, № 790. Математика, прикладна математика і механіка, с. 89–114.

Досліджено новий клас керованих систем звичайних диференціальних рівнянь, які не зводяться до канонічного вигляду у загальному випадку. Клас систем що розглядається узагальнює добре відомий клас систем, які зводяться до лінійних (критерий Якубчика-Респондека-Ханта-Меєра-Сю), і більш того він узагальнює класи трикутних систем, які було відомі раніше. Ми опишемо нашу "узагальнену трикутну форму" інваріантно відносно вибору системи координат в термінах вкладених інтегруємих розподілів. Більш того, наші умови є глобальним аналогом умов Якубчика-Респондека-Ханта-Меєра-Сю. Таким чином, проблему зводності системи к нашому узагальненому трикутному вигляду розв'язано глобально, в усьому фазовому просторі за означенням класу що розглядається. Далі ми застосуємо специфічну процедуру (яку, згідно з термінологією адаптивної теорії керування можна назвати "backstepping"), та розв'язуємо проблему глобальної керованості. Наш "backstepping algorithm", в свою чергу, ґрунтується на побудові керувань у формі зворотнього зв'язка. Таким чином, в роботі пропонується розглядати, наш клас як нелінійний глобальний аналог канонічних форм Бруновського, а з іншого боку, як глобальне, інваріантне відносно координат узагальнення

трикутних систем.

Бібліогр.: 24 найм.

УДК 517.9:535.4

Електростатичне поле сферичного сегменту та секційного заокруглення конуса

Резуненко В. О. – Вісн. Харк. нац. ун-ту., 2007, № 790. Математика, прикладна математика і механіка, с. 115–124 .

Вилучена і обернена сингулярна частина оператора задачі електростатики для сферичного сегменту та секційного заокруглення конуса. Перетворення оператора задачі виконуються на допомогу контурного інтегрування та знаходження розв'язку інтегрального рівняння типу Абеля. Одержано ефективно розв'язуване інтегральне рівняння Фредгольма II роду з компактним оператором у гільбертовому просторі $L_2(0, \gamma)$. Розглянуті деякі узагальнення проблеми.

Бібліогр.: 18 найм.

УДК 519.41/47

Про існування максимального нормалізатора у періодичній FC-групі

Савочкіна Т. І. – Вісн. Харк. нац. ун-ту., 2007, № 790. Математика, прикладна математика і механіка, с. 125–131 .

У роботі доведено, що в усякій недедекіндовій примарній періодичній FC-групі існує підгрупа, нормалізатор якої є максимальною підгрупою.

Бібліогр.: 21 найм.

УДК 517.5

Мультиплікативна структура резольвентної матриці проблеми моментів на компактному проміжку (випадок парної кількості моментів)

Серікова І. Ю. – Вісн. Харк. нац. ун-ту., 2007, № 790. Математика, прикладна математика і механіка, с. 132–139 .

У цій статті отримано розклад на прості множники Бляшке-Поталова резольвентної матриці повністю невизначеної проблеми моментів на компактному проміжку.

Бібліогр.: 6 найм.

УДК 514.76

Об умовах приналежності поверхні тривимірній сфері

Т а н д у р а Я. С. – Вісн. Харк. нац. ун-ту., 2007, № 790. Математика, прикладна математика і механіка, с. 140–145 .

У роботі розглянуті умови при яких двовірна поверхня з виродженим еліпсом нормальної кривини не належить жодній тривимірній сфері.

Бібліогр.: 2 найм.

УДК 517.542

Побудова конформного відображення кільцевих секторів на одиничне коло

А н п і л о г о в Д. І. – Вісн. Харк. нац. ун-ту., 2007, № 790. Математика, прикладна математика і механіка, с. 146–157 .

Побудовано конформне відображення перерізів ушкодженої та неушкодженої циліндричної оболонки на одиничне коло. Однаковість побудови відображень обох областей досягається за допомогою застосування інтегралу Кристофеля-Шварца. Результат роботи - побудова функцій, які дозволяють одержати розв'язок відповідних задач теорії пружності у порівняних умовах.

Мал.: 5. Бібліогр.: 6 найм.

УДК 517.982.22

When $\text{Lip}(K)$ satisfies the ADP or is isometric to l_{∞}^n

Б о й к о К., І в а х н о Є. – Вісн. Харк. нац. ун-ту., 2007, № 790. Математика, прикладна математика і механіка, с. 158–181 .

В этой работе представлена характеристизация конечных метрических пространств K , для которых банахово пространство $\text{Lip}(K)$ всех вещественных функций на K обладает альтернативным свойством Даугавета или, эквивалентно, имеет числовой индекс $n(\text{Lip}(K)) = 1$. Также в работе представлена характеристизация метрических пространств K , для которых $\text{Lip}(K)$ изометрично l_{∞}^n .

Бібліогр.: 8 найм.

УДК 517.968.519.6

Спектральний аналіз відкритих та закритих резонаторів

М и т и н а І.В. – Вісн. Харк. нац. ун-ту., 2007, № 790. Математика, прикладна математика і механіка, с. 182–197 .

Запропоновано чисельні моделі для спектрального аналізу електромагнітних коливань відкритого та закритого скінчених циліндричних резонаторів з поперечним перерізом складної форми. Наведено результати порівняльного аналізу обчислених спектрів.

Табл.: 1. Мал.: 2. Бібліогр.: 10 найм.

УДК 517.535.4

Узагальнені канонічні добутки у комплексній площині

М а л ю т і н К. Г., Г е р а с и м е н к о В. О. – Вісн. Харк. нац. ун-ту., 2007, № 790. Математика, прикладна математика і механіка, с. 198–205 .

У статті введено визначення узагальненого канонічного добутку точок комплексної площини. Доведено для випадку, коли точки є нулями цілої функції скінченного порядку, що цей добуток співпадає з канонічним добутком Вейерштрасса.

Бібліогр.: 5 найм.

- Крижова Н.Н., Хамидов М. Устойчивость течения жидкости в деформированных пористых структурах // Вестник Харьковского национального университета. – 2007. – № 790. – С. 198–205.
- Федоринский В.В. Собственные значения оператора вращений в пространстве // Вестник Харьковского национального университета. – 2007. – № 790. – С. 198–205.
- Pavlichkov S.S. Generalized coordinate-free triangular form: controllability and feedback stabilization // Вестник Харьковского национального университета. – 2007. – № 790. – С. 198–205.
- Резушко В.А. Электродинамическое поле сферического сегмента в центрированной закрытой координатной системе // Вестник Харьковского национального университета. – 2007. – № 790. – С. 198–205.
- Савокина Т.И. Проблема максимизации нормального оператора в пространстве РС-триплет // Вестник Харьковского национального университета. – 2007. – № 790. – С. 198–205.
- Сорочина Н.Ю. Мультиязычная структура резонансной системы: проблема моментов на компактном интервале (случай резонанса между моментами) // Вестник Харьковского национального университета. – 2007. – № 790. – С. 198–205.
- Гандур Р.С. Об условиях принадлежности поверхности треммерной поверхности // Вестник Харьковского национального университета. – 2007. – № 790. – С. 198–205.
- Алилуев Д.Н. Построение канонического отображения координат на единичной сфере // Вестник Харьковского национального университета. – 2007. – № 790. – С. 198–205.
- Бойко К., Івахно Ю. When $\text{lip}(A)$ satisfies the ADR or is monotone // Вестник Харьковского национального университета. – 2007. – № 790. – С. 198–205.
- Митина М.В. Спектральный анализ открытых и закрытых резонансных систем // Вестник Харьковского национального университета. – 2007. – № 790. – С. 198–205.

ЗМІСТ

Коробов В.И. А.М. Ляпунов – создатель современной теории устойчивости	4
Борисенко А.А. А.М. Ляпунов (1857-1918) (к 150-летию со дня рождения)	41
Кизилова Н.Н., Хамадиш М. Устойчивость течения жидкости у деформирующихся поверхностей, в трубах и каналах	53
Флоринский В.В. Собственные значения оператора ангармонического осциллятора	83
Pavlichkov S.S. Generalized coordinate-free triangular form: global controllability and feedback triangulation	89
Резуненко В.А. Электростатическое поле сферического сегмента и секционированного закругления конуса	115
Савочкина Т.І. Про існування максимального нормалізатора у періодичній FC-групі	125
Серикова И.Ю. Мультипликативная структура резольвентной матрицы проблемы моментов на компактном интервале (случай четного числа моментов)	132
Тандура Я.С. Об условиях принадлежности поверхности трехмерной сфере	140
Анпилогов Д.И. Построение конформного отображения кольцевых секторов на единичный круг	146
Boyko K., Ivakhno Y. When $Lip(K)$ satisfies the ADP or is isometric to l_{∞}^n	158
Митина И.В. Спектральный анализ открытых и закрытых резонаторов	182

Малютин К.Г., Герасименко В.А. Обобщенные канонические произведения в комплексной плоскости 198

Новые книги 206

АНОТАЦІЇ 207

53 Kizilova N.N., Hamadish M. Stability of the fluid flows past deformable surfaces in collapsible tubes and channels

83 Florinsky V.V. Eigenvalues of the Operator of Anharmonic Oscillator

89 Pavlichkov S.S. Generalized coordinate-free triangular form: global controllability and feedback transposition

115 Raxmanenko V.A. Electrostatic field of a spherical segment and a sectional rounding of a cone

125 Zavoichina T.I. About existence maximal normalizer in periodic FC group

132 Serikova I.Yu. The multiplicative structure of the resolvent matrix of the moment problem on finite interval (the case of the odd number of given moments)

140 Tandura Ya. S. On conditions the surface belongs to any three-dimensional sphere

146 Apollonov D.I. Conformal mappings of ring sectors on unit circle

158 Boyko K., Ivakhno Y. When $\text{Isp}(A)$ satisfies the ADP or is isometric to L^∞

182 Mitina I.V. Open and closed resonances spectrum analysis

198 Maljutin K.G., Gerasimenko V.A. Generalized canonical product in complex plane

206 New books

CONTENTS

Korobov V.I. A.M. Lyapunov is a Creator of the Modern Stability Theory	4
Borisenko A.A. A. M. Lyapunov (1857-1918) (On his 150th birthday)	41
Kizilova N.N., Hamadish M. Stability of the fluid flows past deformable surfaces, in collapsible tubes and channels	53
Florinsky V.V. Eigenvalues of the Operator of Anharmonic Oscillator	83
Pavlichkov S.S. Generalized coordinate-free triangular form: global controllability and feedback triangulation	89
Rezunenko V.A. Electrostatic field of a spherical segment and a sectional rounding of a cone	115
Savochkina T.I. About existence maximal normalizer in periodic FC-group	125
Serikova I.Yu. The multiplicative structure of the resolvent matrix of the moment problem on finite interval (the case of the odd number of given moments)	132
Tandura Ya. S. On conditions the surface belongs to any three-dimensional sphere	140
Anpilogov D.I. Conformal mappings of ring sectors on unit circle	146
Boyko K., Ivakhno Y. When $Lip(K)$ satisfies the ADP or is isometric to l_{∞}^n	158
Mitina I.V. Open and closed resonators spectrum analysis	182
Malyutin K.G., Gerasimenko V.A. Generalized canonical product in complex plane	198
New books	206

SUMMARY

Visit our Web-page

207

<http://www.mechmath.univer.kharkov.ua/vebnik/>

to find

- Information for Manuscript Preparation
- Abstracts
- Editorial Board

формат рукописи статьи

Вісник Харківського національного університету імені Ф.Х.Ковалевського № 700

Підприємство: Харківський національний університет імені Ф.Х.Ковалевського
Формат: 70 x 108/16
Умови друку: офсетний
Одн. вид. арк.: 12
Насвідк.: 100 арк.
Лінійна доповідь: 12

81077 Харків, м. Олександрівська площа, 14
ім. Ф.Х.Ковалевського
Бібліотека ФОНТ
81044 Харків-144, м. Олександрівська, 14-а, к. 12, тел. 810-04-53
Сторінки: 12

Visit our Web-page

<http://www-mechmath.univer.kharkov.ua/vestnik/>

to find

- Information for Manuscript Preparation
- Abstracts
- Editorial Board

Збірник наукових праць

Вісник Харківського національного університету імені В.Н.Каразіна
№ 790 Серія "Математика, прикладна математика і механіка"

Підписано до друку 28.12.07 р.

Формат 70 × 108/16. Папір офсетний. Друк ризограф.

Умовн.- друк. арк. – 11,6

Обл.- вид. арк. – 13,5

Наклад 100 прим.

Ціна договірна

21-40

61077, Харків, м. Свободи, 4, Харківський національний університет
імені В.Н.Каразіна

Відруковано ФОП "Петрова"

61144 Харків-144, вул. Гв. Широнінців, 79 -в, к. 137. тел. 362-01-52

Свідоцтво про державну реєстрацію ВОО № 948011 від 03.01.2003 р.

ОБОВ'ЯЗКОВИЙ
ПРИМІРНИК

зін

