

К-14038

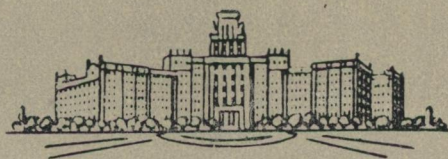
286914

ВЕСТНИК ХАРЬКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

№ 113

МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

ВЫПУСК 39



«ВИЩА ШКОЛА»

79 коп.

ONE

ANDREAS V. ALBRECHT

МИНИСТЕРСТВО
ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ УССР

ВЕСТНИК
ХАРЬКОВСКОГО
УНИВЕРСИТЕТА

№ 113

МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

ВЫПУСК 39

ИЗДАТЕЛЬСКОЕ ОБЪЕДИНЕНИЕ «ВИЩА ШКОЛА»
ИЗДАТЕЛЬСТВО ПРИ ХАРЬКОВСКОМ
ГОСУДАРСТВЕННОМ УНИВЕРСИТЕТЕ
Харьков — 1974

Печатается по решению Ученого совета механико-математического факультета (протокол № 1 от 20 декабря 1973 г.).

В вестник помещены статьи, посвященные вопросам общей алгебры, теории линейных операторов, теории функций, функциональному анализу, а также некоторым вопросам прикладной математики и механики сплошных сред.

Редакционная коллегия:

Н. И. Ахиезер (отв. редактор), *В. А. Марченко*,
А. В. Погорелов, *А. А. Янцевич* (отв. секретарь).

Адрес редакционной коллегии:

Харьков, 77, пл. Дзержинского, 4, Харьковский государственный университет.

О ЛИНЕЙНЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯХ

1. Изложение результатов

Пусть $F: R^n \rightarrow R^n$ — отображение класса C^∞ с неподвижной точкой $x=0$ и пусть $Q(x)$ — матрица-функция размера $p \times p$. Рассмотрим линейный оператор

$$(L\varphi)(x) = \varphi(Fx) - Q(x)\varphi(x),$$

действующий в пространстве отображений $\varphi: R^n \rightarrow R^p$ класса C^∞ . Будем заниматься вопросом о разрешимости в окрестности точки $x=0$ неоднородного уравнения

$$(L\varphi)(x) = \gamma(x) \quad (1)$$

и о нетривиальной разрешимости в окрестности точки $x=0$ соответствующего однородного уравнения

$$(L\varphi)(x) = 0. \quad (2)$$

Уравнения (1), (2) в случае конечной гладкости рассматривались в ряде работ (см., например, [1—3]). Отметим, что все эти работы были посвящены изучению одномерного случая: $n=p=1$. В ряде работ (см. обзор [4]) рассматривались уравнения вида (1), (2) в аналитическом случае.

Уравнение (1) называется формально разрешимым, если существует такое C^∞ -отображение $\varphi_0(x)$, что отображение

$$(L\varphi_0)(x) = \gamma(x)$$

является плоским в точке $x=0$ ¹. Отображение $\varphi_0(x)$ называется в этом случае формальным решением уравнения (1). Иными словами, формальная разрешимость уравнения (1) означает разрешимость алгебраической системы уравнений

$$[\varphi(Fx)]^{(k)}|_{x=0} = [Q(x)\varphi(x)]^{(k)}|_{x=0} + \gamma^{(k)}(0), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Любое C^∞ -отображение $\varphi(x)$, которое удовлетворяет этой системе, является формальным решением уравнения (1).

¹ Отображение $\varphi(x)$ называется плоским на множестве M , если $\varphi^{(k)}(x) = 0$, $x \in M$, $k = 0, 1, 2, \dots$

Очевидно, для локальной разрешимости уравнения (1) необходима его формальная разрешимость. С другой стороны, формальная разрешимость еще не обеспечивает локальной разрешимости. Дадим условия, при которых формальная разрешимость уравнения (1) влечет его разрешимость в некоторой окрестности точки $x=0$.

Пусть отображение F таково, что матрица $F'(0)$ невырождена и не имеет точек спектра на единичной окружности. Невырожденность матрицы $F'(0)$ означает, что F — локальный диффеоморфизм, а отсутствие точек спектра на единичной окружности, по определению, означает, что F — гиперболический диффеоморфизм. Пусть $R^n = L_0 + L_1$ — такое разложение в прямую сумму инвариантных подпространств, что ограничение матрицы $Q(0)$ на подпространство L_0 нильпотентно, а ограничение матрицы $Q(0)$ на подпространство L_1 — невырождено (каждое из этих подпространств может быть и нулевым).

Теорема 1. Пусть F — локальный гиперболический диффеоморфизм. Предположим, что подпространство L_0 инвариантно относительно $Q(x)$ в некоторой окрестности точки $x=0$. Тогда если уравнение (1) формально разрешимо, то оно имеет локальное решение класса C^∞ .

Теорема 2. Пусть F — локальный гиперболический диффеоморфизм, подпространство L_0 инвариантно относительно $Q(x)$ в некоторой окрестности точки $x=0$, а $\det Q(x)$ — не является плоской в нуле функцией. Рассмотрим два случая:

1°. $L_0 = \{0\}$, т. е. матрица $Q(0)$ невырожденная. Тогда если матрица $F'(0)$ имеет точки спектра по обе стороны от единичной окружности, то уравнение (2) имеет локальное нетривиальное решение класса C^∞ . Если же спектр матрицы $F'(0)$ не разделен единичной окружностью, то уравнение (2) имеет локальное нетривиальное решение класса C^∞ в том и только в том случае, когда оно имеет нетривиальное формальное решение.

2°. $L_0 \neq \{0\}$. Тогда если матрица $F'(0)$ имеет хотя бы одну точку спектра внутри единичного круга, то уравнение (2) имеет локальное нетривиальное решение класса C^∞ . Если же спектр матрицы $F'(0)$ целиком лежит вне единичного круга, то уравнение (2) имеет локальное нетривиальное решение класса C в том и только в том случае, когда оно имеет нетривиальное формальное решение.

Следствие 1. Предположим, что $p=1$, а F — локальный гиперболический диффеоморфизм. Тогда если уравнение (1) формально разрешимо, то оно имеет локальное решение класса C^∞ .

Следствие 2. Предположим, что $p=1$, F — локальный гиперболический диффеоморфизм, а $Q(x)$ — неплоская в нуле C^∞ -функция. Рассмотрим два случая:

1°. $Q(0) \neq 0$. Тогда если матрица $F'(0)$ имеет точки спектра по обе стороны от единичной окружности, то уравнение (2) имеет локальное нетривиальное решение класса C^∞ . Если же спектр матрицы $F'(0)$ не разделен единичной окружностью, то уравнение (2) имеет локальное нетривиальное решение класса C^∞ в том и только в том случае, когда оно имеет нетривиальное формальное решение.

2°. $Q(0) = 0$. Тогда если матрица $F'(0)$ имеет хотя бы одну точку спектра внутри единичного круга, то уравнение (2) имеет локальное нетривиальное решение класса C^∞ . Если же спектр матрицы $F'(0)$ целиком лежит вне единичного круга, то уравнение (2) имеет локальное нетривиальное решение класса C^∞ в том и только в том случае, когда оно имеет нетривиальное формальное решение.

Обозначим через K кольцо ростков в нуле вещественных функций класса C^∞ , а через $\hat{K}$ — кольцо формальных степенных рядов, т. е. фактор-кольцо K/K_0 , где K_0 — идеал ростков всех плоских в нуле функций класса C^∞ . Локальный диффеоморфизм F индуцирует в кольце K автоморфизм F^* по правилу

$$(F^*\tau)(x) = \tau(Fx),$$

а в кольце $\hat{K}$ — автоморфизм $\hat{F}$. Можно показать, что множества $M(\hat{F})$ собственных чисел автоморфизма F в гиперболическом случае принадлежат те и только те вещественные числа μ , которые удовлетворяют соотношению

$$\mu \lambda_1^{-p_1} \lambda_2^{-p_2} \dots \lambda_r^{-p_r} = 1,$$

где λ_i — собственные числа матрицы $F'(0)$; p_i — неотрицательные целые числа. В качестве приложения теоремы 2 опишем множество $M(F^*)$ собственных чисел автоморфизма F^* .

Следствие 3. Пусть F — локальный гиперболический диффеоморфизм. Если единичная окружность разделяет точки спектра матрицы $F'(0)$, то множество $M(F^*)$ совпадает со всей числовой осью без точки $x=0$. Если же точки спектра матрицы $F'(0)$ лежат по одну сторону от единичной окружности, то множество $M(F^*)$ совпадает с множеством $M(\hat{F})$.

Если F — линейный невырожденный оператор, то множество собственных чисел автоморфизма F^* удается полностью описать и в негиперболическом случае. Мы не приводим здесь эту теорему ввиду громоздкости ее доказательства.

2. Доказательство теорем

Доказательство теоремы 1. Будем искать решение уравнения (1) в виде $\varphi_0(x) + \psi(x)$, где $\varphi_0(x)$ — формальное ре-

шение уравнения (1), а $\psi(x)$ — неизвестное плоское в нуле отображение. Тогда для отображения $\psi(x)$ получим уравнение

$$\psi(Fx) = Q(x)\psi(x) + \gamma_0(x), \quad (3)$$

где $\gamma_0(x) = Q(x)\varphi_0(x) + \gamma(x) - \varphi_0(Fx)$ — плоское в нуле отображение.

Возможны три случая: а) все собственные числа матрицы $F'(0)$ лежат вне единичного круга; б) все собственные числа матрицы $F'(0)$ лежат внутри единичного круга; в) единичная окружность разделяет точки спектра матрицы $F'(0)$.

В случае а преобразуем уравнение (3) к виду

$$\psi(x) = Q(F^{-1}x)\psi(F^{-1}x) + \gamma_0(F^{-1}x). \quad (4)$$

Пусть δ — такое число, что для некоторой нормы вектора в R^n в шаре $\|x\| \leq \delta$ выполняется неравенство

$$\|F^{-1}x\| \leq \rho\|x\|, \quad \rho < 1.$$

Обозначим через $t_\delta(x)$ функцию класса C^∞ , равную единице в некоторой малой окрестности точки $x=0$ и равную нулю вне δ -окрестности нуля. Для доказательства локальной разрешимости уравнения (4) достаточно решить уравнение

$$\psi(x) = \tilde{Q}(F^{-1}x)\psi(F^{-1}x) + \tilde{\gamma}_0(F^{-1}x), \quad (5)$$

где $\tilde{Q}(F^{-1}x) = t_\delta(x)Q(F^{-1}x)$, а $\tilde{\gamma}_0(F^{-1}x) = t_\delta(x)\gamma_0(F^{-1}x)$. Положим

$$\psi(x) = \tilde{\gamma}_0(F^{-1}x) + \sum_{n=1}^{\infty} \prod_{k=1}^n \tilde{Q}(F^{-k}x) \tilde{\gamma}_0(F^{-n-1}x). \quad (6)$$

Покажем, что отображение (6) принадлежит классу C^∞ . Так как отображение $\tilde{\gamma}_0(x)$ плоское в нуле, то для любых неотрицательных целых чисел v и k можно указать такую положительную константу $C_{v,k}$, что

$$\|\tilde{\gamma}_0^{(k)}(x)\| \leq C_{v,k}\|x\|^v.$$

Здесь под нормой тензора понимается максимум модуля координат. Выберем v так, чтобы $C\rho^v < 1$, где $C = \max_{\|x\| < \delta} \|Q(x)\|$. Тогда ряд (6) мажорируется сходящимся рядом

$$\|\psi(x)\| \leq C_{v,0} \left(\rho^v + \sum_{n=1}^{\infty} C^n \rho^{nv} \right), \quad \|x\| \leq \delta,$$

и, следовательно, равномерно сходится в δ -окрестности нуля. Точно так же можно показать, что ряд, полученный из (6) почленным дифференцированием любого порядка, равномерно схо-

дится в δ -окрестности нуля. Следовательно, $\psi(x)$ является отображением класса C^∞ и, кроме того, удовлетворяет уравнению (5).

Таким образом, в случае *a* уравнение (3) имеет локальное решение класса C^∞ .

Рассмотрим случай *b*. По условию матрицу $Q(x)$ можно записать в виде

$$Q(x) = \begin{pmatrix} Q_1(x) & 0 \\ T(x) & Q_2(x) \end{pmatrix},$$

где $Q_1(0)$ — нильпотентная матрица, $Q_2(0)$ — невырожденная матрица, $T(0) = 0$. Уравнение (3) эквивалентно системе

$$\psi_1(Fx) = Q_1(x)\psi_1(x) + \gamma_1(x), \quad (7)$$

$$\psi_2(Fx) = Q_2(x)\psi_2(x) + T(x)\psi_1(x) + \gamma_2(x), \quad (8)$$

где

$$\begin{pmatrix} \gamma_1(x) \\ \gamma_2(x) \end{pmatrix} = \gamma_0(x), \quad \begin{pmatrix} \psi_1(x) \\ \psi_2(x) \end{pmatrix} = \psi(x).$$

Найдем сначала решение уравнения (7). Мы снова можем считать, что $Q_1(x)$ — финитная матрица-функция, а $\gamma_1(x)$ — финитное отображение. Преобразуем уравнение (7) следующим образом:

$$\psi_1(x) = Q_1(F^{-1}x)\psi_1(F^{-1}x) + \gamma_1(F^{-1}x). \quad (9)$$

Положим

$$\psi_1(x) = \gamma_1(F^{-1}x) + \sum_{n=1}^{\infty} \prod_{k=1}^n Q_1(F^{-k}x) \gamma_1(F^{-n-1}x). \quad (10)$$

Для каждой точки $x \neq 0$ существует такая окрестность v и такое число $N(v)$, что

$$\text{supp } Q_1(F^{-k}x) \cap v = \emptyset, \quad k > N(v).$$

Поэтому ряд (10) для всех точек из окрестности v содержит не более чем $N(v)$ членов. Значит, отображение $\psi_1(x)$, заданное формулой (10), принадлежит классу C^∞ при любом $x \neq 0$. Кроме того, при $x \neq 0$ отображение (10), очевидно, удовлетворяет уравнению (7).

Покажем, что в действительности отображение (10) принадлежит классу C^∞ всюду в R^n . Пусть

$$U = \{x \mid \rho_2 \leq \|x\| \leq \rho_1 < \delta\},$$

где ρ_1 и ρ_2 выбраны так, что образ сферы $\|x\| = \rho_1$ под действием F лежит в U . Рассмотрим последовательность криволинейных колец: $\{F^n U\}_{n=0}^{\infty}$. Эта последовательность стягивается к точке $x=0$ при $n \rightarrow \infty$. Положим

$$t_n(\rho_1, \rho_2) = \max_{x \in F^n U} \|\psi_1(x)\|.$$

Так как отображение $\psi_1(x)$ принадлежит классу C^∞ при любом x , отличном от нуля, то $t_n(\rho_1, \rho_2) < \infty$ при любом фиксированном n . Из уравнения (7) следует

$$t_n(\rho_1, \rho_2) \leq \max_{\|x\| < \rho_1} \|Q_1(x)\| \cdot t_{n-1}(\rho_1, \rho_2) + \max_{\|x\| < \rho_1} \|\gamma_1(x)\|.$$

Поскольку спектральный радиус матрицы $Q_1(0)$ равен нулю, для любого $\varepsilon > 0$ можно выбрать такое число ρ_1 и такую норму вектора в R^n , что $\|Q_1(x)\| \leq \varepsilon$, если $\|x\| \leq \rho_1$.

Тогда

$$t_n(\rho_1, \rho_2) \leq \varepsilon t_{n-1}(\rho_1, \rho_2) + C$$

и, следовательно,

$$t_n(\rho_1, \rho_2) \leq \frac{C}{1 - \varepsilon},$$

если

$$C > \max_{\|x\| < \rho_1} \{\max \|\gamma_1(x)\|; t_0(\rho_1, \rho_2)\}.$$

В силу выбора чисел $\rho_1, \rho_2 \bigcup_n F^n U$ является ρ_1 -окрестностью точки $x=0$. Следовательно, $\|\psi_1(x)\| \leq \frac{C}{1 - \varepsilon}$ при $\|x\| \leq \rho_1$, т. е.

$$M = \overline{\lim}_{x \rightarrow 0} \|\psi_1(x)\| < \infty.$$

Далее, из уравнения (7) следует

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow 0} \|\psi_1(Fx)\| \leq \overline{\lim}_{x \rightarrow 0} \{\|Q_1(x)\| \cdot \|\psi_1(x)\| + \|\gamma_1(x)\|\}.$$

Поэтому выполняется неравенство $M \leq \varepsilon M$, откуда следует, что $M=0$.

Дифференцируя уравнение (7) и рассуждая аналогичным образом, можно показать, что отображение $\psi_1(x)$ имеет равные нулю производные всех порядков при $x=0$. Значит, отображение (10) представляет собой локальное C^∞ -решение уравнения (7).

Решим теперь уравнение (8). Так как матрица $Q_2(x)$ обратима в некоторой окрестности нуля, уравнение (8) можно переписать так:

$$\psi_2(x) - Q_2^{-1}(x) \psi_2(Fx) = -Q_2^{-1}(x) \gamma_2(x) - Q_2^{-1}(x) T(x) \psi_1(x).$$

Правая часть этого уравнения является плоским отображением. Рассуждая так же, как в случае a , покажем, что это уравнение имеет C^∞ -решение.

Таким образом, и в случае b построено локальное C^∞ -решение уравнения (3).

Осталось рассмотреть случай c . Обозначим через L_+ инвариантное подпространство, отвечающее точкам спектра матрицы $F'(0)$, лежащим внутри единичного круга, а через L_- — инвариантное подпространство, отвечающее точкам спектра матрицы $F'(0)$, лежащим вне единичного круга. Представим R^n в виде $R^n = L_+ + L_-$. Согласно теореме Адамара-Перрона, можно считать, что F такой диффеоморфизм, для которого L_+ и L_- являются инвариантными подпространствами.

В уравнении (3) положим $x_- = 0$. Согласно случаю b , уравнение

$$\psi(F(x_+, 0)) = Q(x_+, 0)\psi(x_+, 0) + \gamma_0(x_+, 0)$$

имеет локальное C^∞ -решение. Дифференцируя уравнение (3) k раз и полагая x_- равным нулю, получим уравнение для $\psi^{(k)}(x_+, 0)$. Это уравнение также имеет локальное C^∞ -решение. Пусть теперь $\xi(x)$ — такое C^∞ -отображение, что $\xi^{(k)}(x_+, 0) = \psi^{(k)} \times (x_+, 0)$ для всех $k \geq 0$ ¹. Будем искать решение уравнения (3) в виде $\xi(x) + \eta(x)$, где $\eta(x)$ — отображение, плоское на подпространстве L_+ . Тогда для $\eta(x)$ получим уравнение

$$\eta(Fx) = Q(x)\eta(x) + \zeta(x), \quad (11)$$

где $\zeta(x) = Q(x)\xi(x) + \gamma_0(x) - \xi(Fx)$ — плоское на L_+ отображение. Это означает, что для любых целых неотрицательных чисел k и v можно указать такие положительные числа $C_{k,v}$, что при $\|x\| \leq \delta$ выполняется неравенство

$$\|\zeta^{(k)}(x)\| \leq C_{k,v} \|x_-\|^v.$$

Выберем норму вектора в R^n так, чтобы при $\|x\| \leq \delta$ выполнялось неравенство

$$\|F^{-1}x_-\| \leq \rho \|x_-\|, \quad \rho < 1.$$

Кроме того, снова можно считать, что отображения $\gamma_0(x)$ и $Q(x)$ равны нулю вне δ -окрестности нуля.

Положим

$$\eta(x) = \zeta(F^{-1}x) + \sum_{n=1}^{\infty} \prod_{k=1}^n Q(F^{-k}x) \zeta(F^{-n-1}x). \quad (12)$$

Выберем v так, чтобы $C\rho^v < 1$, где $C = \max \|Q(x)\|$. Тогда ряд (12) мажорируется сходящимся рядом

$$\|\eta(x)\| \leq C_{0,v} \left(\rho^v + \sum_{n=1}^{\infty} C^n \rho^{nv} \right)$$

и, следовательно, равномерно сходится в δ -окрестности нуля.

¹ Такое отображение существует, согласно известной теореме Уитни о продолжении.

Аналогично, ряд, полученный из (12) почленным дифференцированием k раз ($k=1, 2, \dots$), равномерно сходится. Значит, отображение $\eta(x)$, заданное формулой (12), принадлежит классу C^∞ и удовлетворяет уравнению (11).

Таким образом, теорема 1 доказана.

Замечание. Пусть F и $Q(x)$ удовлетворяют условиям теоремы 1, а $\gamma(x)$ — произвольное отображение, плоское на некотором замкнутом множестве D , инвариантном относительно F . Из доказательства видно, что уравнение

$$\varphi(Fx) = Q(x)\varphi(x) + \gamma(x)$$

имеет локальное C^∞ -решение, плоское на множестве D .

Доказательство теоремы 2. Как и при доказательстве теоремы 1, будем разделять случаи a , b и c .

Сначала рассмотрим случай a . Покажем, что уравнение (2) не имеет плоского в нуле нетривиального решения. Пусть δ — такое число, что для некоторой нормы вектора в R^n при $\|x\| \leq \delta$ выполняется неравенство $\|F^{-1}x\| \leq \rho\|x\|$, $\rho < 1$.

Выберем ε столь малым, чтобы уравнение (2) выполнялось в шаре $\|x\| \leq \varepsilon < \delta$. Тогда при некоторых $C_\nu > 0$ выполняется следующее неравенство

$$\|\varphi(x)\| \leq C^n C_\nu \rho^{n\nu}, \quad \|x\| \leq \varepsilon,$$

где $C = \max_{\|x\| \leq \varepsilon} \|Q(x)\|$. Выберем ν так, чтобы $C\rho^\nu < 1$.

При таком выборе ν правая часть этого неравенства стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$. Значит, $\varphi(x) \equiv 0$. Таким образом, уравнение (2) не имеет плоского в нуле нетривиального C^∞ -решения. Но тогда для существования локального нетривиального C^∞ -решения уравнения (2) необходимо, чтобы уравнение (2) имело формальное нетривиальное решение.

Предположим, что существует нетривиальное формальное решение $\varphi_0(x)$ уравнения (2). Будем искать решение уравнения (2) в виде $\varphi_0(x) + \psi(x)$, где $\psi(x)$ — плоское в нуле отображение. Тогда для отображения $\psi(x)$ получим уравнение

$$\psi(Fx) = Q(x)\psi(x) + \gamma(x),$$

где $\gamma(x) = Q(x)\varphi_0(x) - \varphi_0(Fx)$ — плоское в нуле отображение. Согласно теореме 1, это уравнение имеет C^∞ -решение $\psi(x)$. Так как $\varphi_0(x)$ — неплатное, а $\psi(x)$ — платное в нуле отображение, то сумма $\varphi_0(x) + \psi(x)$ является нетривиальным решением уравнения (2).

Рассмотрим теперь случай b . Предположим сначала, что $L_0 = \{0\}$. Это означает, что в некоторой окрестности нуля матрица-функция $Q(x)$ обратима и уравнение (2) можно переписать так:

$$\varphi(x) = Q^{-1}(x)\varphi(Fx).$$

Рассуждая так же, как и в предыдущем случае, получаем, что это уравнение имеет локальное нетривиальное C^∞ -решение тогда и только тогда, когда оно имеет формальное нетривиальное решение.

Пусть теперь $L_0 \neq \{0\}$. Тогда, согласно условию теоремы, матрицу $Q(x)$ можно записать в виде

$$Q(x) = \begin{pmatrix} Q_1(x) & 0 \\ T(x) & Q_2(x) \end{pmatrix},$$

где $Q_1(0)$ — нильпотентная матрица, $Q_2(0)$ — невырожденная матрица, а матрица $T(x)$ обладает свойством $T(0) = 0$. Найдем локальное нетривиальное решение уравнения

$$\varphi_1(Fx) = Q_1(x) \varphi_1(x). \quad (13)$$

Пусть x_0 — какая-нибудь точка из δ -окрестности нуля. Положим $D(x_0) = \{F^n x_0\}_{n=0}^\infty$. Так как $\det Q_1(x)$ — неплюская в нуле функция, то существует такая точка x_0 , что $\det Q_1(x)$ отличен от нуля на множестве $D(x_0)$. Зададим произвольное значение отображения φ_1 в точке x_0 , отличное от нуля. Тогда из уравнения (13) будут известны значения отображения φ_1 на последовательности точек $D(x_0)$:

$$\varphi_1(F^n x_0) = \prod_{k=0}^{n-1} Q_1(F^k x_0) \varphi_1(x_0). \quad (14)$$

Продолжая этот процесс, зададим произвольно значения всех производных отображения φ_1 в точке x_0 , а затем получим из уравнения (13) значения $\varphi_1^{(k)}(x)$ на множестве $D(x_0)$, ($k=1, 2, \dots$). Так как спектральный радиус матрицы $Q_1(0)$ равен нулю, то для любого $\varepsilon > 0$ можно так выбрать δ -окрестность нуля и норму вектора в R^n , что $\|Q_1(x)\| \leq \varepsilon$, если $\|x\| \leq \delta$. Из равенства (14) следует, что

$$\|\varphi_1(F^n x_0)\| \leq \varepsilon^n \|\varphi_1(x_0)\| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Таким же образом можно доказать, что $\|\varphi_1^{(k)}(F^n x_0)\| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty, k=1, 2, \dots$. Пусть теперь $\xi(x)$ — такое отображение класса C^∞ , что

$$\xi^{(k)}(x) = \varphi_1^{(k)}(x), \quad x \in D(x_0), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Будем искать решение уравнения (13) в виде $\xi(x) + \eta(x)$, где $\eta(x)$ — плоское на $D(x_0)$ отображение. Тогда для $\eta(x)$ получим уравнение

$$\eta(Fx) = Q_1(x) \eta(x) + \gamma(x), \quad (15)$$

где $\gamma(x) = Q_1(x) \xi(x) - \xi(Fx)$ — плоское на $D(x_0)$ отображение. Согласно теореме 1 и замечанию, уравнение (15) имеет C^∞ -решение, плоское на $D(x_0)$. Значит, сумма $\xi(x) + \eta(x)$ представ-

ляет собой локальное нетривиальное решение уравнения (13), принадлежащее классу C^∞ .

Решим теперь уравнение

$$\varphi_2(Fx) = Q_2(x)\varphi_2(x) + T(x)\varphi_1(x).$$

Согласно теореме 1, это уравнение имеет локальное C^∞ -решение, так как $\varphi_1(x)$ — плоское в нуле отображение. Следовательно, отображение $\varphi(x) = \begin{pmatrix} \varphi_1(x) \\ \varphi_2(x) \end{pmatrix}$ является нетривиальным C^∞ -решением уравнения (2).

Осталось рассмотреть случай c .

Если подпространство $L_0 \neq \{0\}$, то мы можем, рассуждая так же, как в случае b , доказать существование локального нетривиального C^∞ -решения уравнения (2).

Предположим теперь, что $L_0 = \{0\}$. Так как нас интересует локальное решение уравнения (2), мы можем считать, что $Q(x) \equiv 1$ вне некоторой δ -окрестности точки $x=0$. Пусть снова $R^n = L_+ \dot{+} L_-$, где L_+ (соответственно, L_-) — инвариантное подпространство, отвечающее точкам спектра матрицы $F'(0)$, лежащим внутри (соответственно, вне) единичного круга. Пусть $e \neq 0$ — любой вектор из R^n . Положим

$$\psi(x) = \prod_{k=1}^{\infty} Q(F^{-k}x)e. \quad (16)$$

Для каждой точки x , не принадлежащей подпространству L_- , существует такая ее окрестность v и такой номер $N(v)$, что $F^{-k}(v) \cap U_\delta = \emptyset$ при всех $k > N(v)$. (Здесь через U_δ обозначена δ -окрестность нуля). Значит, для всех точек из v произведение в формуле (16) будет содержать не более чем $N(v)$ сомножителей, отличных от единицы. Следовательно, отображение $\psi(x)$ бесконечно дифференцируемо, если x не принадлежит подпространству L_- .

Пусть отображение F записано в виде $Fx = \Lambda x + f(x)$, где $f(0) = f'(0) = 0$ и $f(x)$ — финитное отображение. Найдем нетривиальные, непрерывные, но не обязательно принадлежащие классу C^∞ функции, являющиеся решениями уравнений

$$\varphi_1(Fx) = \lambda_1 \varphi_1(x), \quad (17)$$

$$\varphi_2(Fx) = \lambda_2 \varphi_2(x), \quad (18)$$

где λ_1, λ_2 — собственные числа матрицы Λ , причем λ_1 — наибольшее по абсолютной величине из собственных чисел матрицы Λ , лежащих внутри единичного круга, а λ_2 — наименьшее по абсолютной величине из собственных чисел матрицы Λ , лежащих вне единичного круга.

Будем искать решение уравнения (17) в виде

$$\varphi_1(x) = h_1(x) + A_1(x_+, 0) + B_1(x),$$

где $h_1(x)$ — линейный (вообще говоря, комплекснозначный) функционал, удовлетворяющий условию $h_1(\Lambda x) = \lambda_1 h_1(x)$, а функции $A_1(x_+, 0)$ и $B_1(x)$ обладают свойствами

$$A_1(0) = A'_1(0) = 0, B_1(x_+, 0) = 0.$$

Тогда для $A_1(x_+, 0)$ получим уравнение

$$A_1(F(x_+, 0)) = \lambda_1 A_1(x_+, 0) - h_1(f(x_+, 0)). \quad (19)$$

Так как λ_1 — наибольшее по модулю из собственных чисел матрицы Λ , лежащих внутри единичного круга, то уравнение (19) формально разрешимо. В силу следствия 1, уравнение (19) имеет решение $A_1(x_+, 0)$, обладающее требуемыми свойствами.

Для $B_1(x)$ получим уравнение

$$B_1(Fx) = \lambda_1 B_1(x) + h_1(f(x_+, 0)) - h_1(fx). \quad (20)$$

Функция

$$B_1(x) = - \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_1^{k-1} \{ h_1[f(F^{-k}x)] - h_1[f(F^{-k}(x_+, 0))] \}$$

удовлетворяет уравнению (20), непрерывна для всех $x \in R^n$ и бесконечно дифференцируема в каждой точке x , не принадлежащей подпространству L_- . Кроме того, $B_1(x_+, 0) = 0$.

Таким образом, функция $\varphi_1(x) = h_1(x) + A_1(x_+, 0) + B_1(x)$ является искомым решением уравнения (17).

Покажем, что $\varphi_1(x)$ — нетривиальное решение уравнения (17). Предположим, что $h_1(x) + A_1(x_+, 0) + B_1(x) \equiv 0$. Полагая $- = 0$, получаем $h_1(x_+, 0) + A_1(x_+, 0) \equiv 0$. Но это невозможно, так как $h'_1(x_+, 0) \neq 0$, а $A'_1(0) = 0$.

Аналогично строится функция $\varphi_2(x)$, удовлетворяющая уравнению (18) и принадлежащая классу C^∞ всюду, кроме подпространства L_+ .

Рассмотрим теперь функцию

$$\sigma(x) = |\varphi_1(x)|^\alpha \cdot |\varphi_2(x)|^\beta,$$

где α и β выбраны так, что $|\lambda_1|^\alpha \cdot |\lambda_2|^\beta = 1$. Функция $\sigma(x)$ принадлежит классу C^∞ всюду, кроме множества $P = L_+ \cup L_- \cup S$, где S — множество тех точек, принадлежащих $R^n / (L_+ \cup L_-)$, в которых $\sigma(x) = 0$.

Из уравнения (17), полагая $x_+ = 0$, получаем, что $\varphi_1(x) = 0$, если $x \in L_-$. Аналогично, $\varphi_2(x_+, 0) = 0$. Значит, функция $\sigma(x) = 0$, если $x \in P$.

Пусть $g(t)$ — функция класса C^∞ , стремящаяся к нулю при $t \rightarrow 0$ настолько быстро, что $\{g(\sigma(x))\}^{(m)} \rightarrow 0$ при $x \rightarrow P$, ($m=0, 1, 2, \dots$). Это означает, что $g(\sigma(x))$ является бесконечно дифференцируемой функцией, плоской на P .

Рассмотрим теперь отображение

$$\varphi(x) = \begin{cases} M^{-[\lg(\sigma(x))]} \cdot \prod_{k=1}^{\infty} Q(F^{-k}x) e, & x \in L_-, \\ 0, & x \in L_+, \end{cases} \quad (21)$$

где $M > \max_{1, x \in \bigcup \delta} \{ \|Q(x)\| \}$. Ясно, что дополнительно увеличивая, если это понадобится, скорость стремления $g(t)$ к нулю, можно добиться того, чтобы $\|\varphi^{(k)}(x)\| \rightarrow 0$ при $x \rightarrow L_+$, ($k=0, 1, 2, \dots$).

Следовательно, отображение (21) является нетривиальным отображением класса C^∞ , удовлетворяющим уравнению (2). Теорема 2 доказана.

В заключение приношу глубокую благодарность Г. Р. Белицкому за руководство работой.

ЛИТЕРАТУРА

1. Kordylewski J., Kuczma M. On some linear functional equations. — „Ann. polon. math.“, 1960, Vol. 9, N 2, p. 119—136.
2. Choczewski B., Kuczma M. On the „indeterminate case“ in the theory of a linear functional equation. — „Fundam. math.“ 1966, Vol. 58, N 2, p. 163—175.
3. Choczewski B. Topological methods in the theory of functional equations in a single variable. — „Zesz. nauk. UJ Pr. mat.“, 1970, Vol. 223, N 14, p. 67—74.
4. Kuczma M. Analytic solutions of a linear functional equation. — Ann. polon. math.“, 1969, Vol. 21, N 3, p. 297—303.

УДК 513.88

А. Г. РУТКАС, канд. физ.-мат. наук

ОБ ОДНОЙ ФУНКЦИИ ОПЕРАТОРНОГО УЗЛА

Пусть H, E — гильбертовы пространства; C, T, Γ, J — линейные ограниченные операторы; $C, T \in [H, H]$; $\Gamma \in [E, H]$; $J \in [E, E]$. Если $T - T^* = i\Gamma J \Gamma^*$ и $J = J^* = J^{-1}$, то совокупность $M = [HT\Gamma J E]$ называется операторным узлом [1, 2]. В различных несамосопряженных задачах, исходные уравнения которых содержат пучок операторов $T - \lambda C$, возникает оператор

$$S(M, C, \lambda) = I - i\Gamma \Gamma^* (T - \lambda C)^{-1} \Gamma. \quad (1)$$

Например, вид (1) имеет коэффициент отражения волны с частотой λ от начала полубесконечной дискретной структуры, со-

ставленной лестничным соединением осцилляторов (см. [2, гл. VI, § 4]). В случае конечномерных H, E функция (1) и ее приложения изучались в [3, 4]. При $C=I$ формула (1) задает характеристическую функцию узла M [1, 2].

Обозначим $F(\lambda) = (T - \lambda C)^{-1}$ и будем говорить, что $\lambda \in \rho(C, T)$, если $F(\lambda) \in [H, H]$; $\lambda \in \tilde{\rho}(C, T)$ — если оператор $F(\lambda)$ ограничен (и, следовательно, определен на подпространстве из H); $\lambda \in P_\circ(C, T)$ — если $Tf = \lambda Cf$ при $f \neq 0$. Множества ρ и $\tilde{\rho}$ открыты. Оператор-функция $F(\lambda)$ голоморфна на $\rho(C, T)$ и при $\forall a \in \rho(C, T)$ в пространстве операторов $[H, H]$ сходится ряд

$$F(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda - a)^n [F(a)C]^n F(a) \quad (2)$$

в круге $|\lambda - a| \cdot \|F(a)C\| < 1$. Справедливо также тождество

$$F(\lambda) - F(\mu) = (\lambda - \mu)F(\lambda)CF(\mu); \lambda, \mu \in \rho(C, T).$$

Если $b \in \tilde{\rho}(C, T)$, то существует окрестность $\varepsilon(b)$ точки b и голоморфная на $\varepsilon(b)$ оператор-функция $v(\lambda)$, такие, что $F(\lambda) \subset v(\lambda)$ при $\forall \lambda \in \varepsilon(b)$. Следовательно, оператор-функция $S(M, C, \lambda)$ (1) голоморфна на $\rho(C, T)$ и в тех областях $\{\lambda\}$ множества $\rho(C, T)$, в которых тождественно выполнено включение $\Delta_\Gamma \subset \Delta_{\Gamma-\lambda C}$ (через Δ_A здесь обозначается область значений оператора A , через D_A — область определения).

Внося в доказательство теоремы умножения характеристических функций [1, 2] небольшую корректировку (лучок $T - \lambda C$ вместо $T - \lambda I$), получаем следующую.

Теорема 1. Пусть $M = [HT\Gamma JE]$ — узел, а подпространство H_2 является инвариантным для оператора T и приводящим для оператора $C \in [H, H]$. Тогда при

$$\lambda \in \rho(C_1, T_1) \cap \rho(C_2, T_2)$$

$$S(M, C, \lambda) = S(M_2, C_2, \lambda) \cdot S(M_1, C_1, \lambda),$$

где в узлах $M_k = [H_k T_k \Gamma_k J E]$ ($k = 1, 2$),

$$T_k = P_k T P_k, \Gamma_k = P_k \Gamma, P_2 — \text{ортонормированный проектор из } H \text{ на } H_2, P_1 = I - P_2, C_k = C P_k.$$

Теорема 2. При $C \geq 0$ оператор $S(M, C, \lambda) = S(\lambda)$ является J -несжимающим в верхней полуплоскости λ , J — нерастягивающим в нижней и J — унитарным на вещественной оси.

Действительно, если $\lambda \in P_\circ(C, T)$ и $\varphi \in D_{S(\lambda)}$, то $(JS(\lambda)\varphi, S(\lambda)\varphi) - (J\varphi, \varphi) = 2 \operatorname{Im} \lambda (Cf, f)$, где $f = (T - \lambda C)^{-1} \Gamma \varphi$.

Обозначим через $H(M, C, G)$ линейную замкнутую оболочку векторов вида $(T - \lambda C)^{-1} \Gamma \varphi$, где φ пробегает E , λ — некоторое множество $G \subset \rho(C, T)$,

Теорема 3. Пусть для узлов $M_k = [H_k T_k \Gamma_k J E]$ ($k=1, 2$)

$$S(M_1, C_1, \lambda) = S(M_2, C_2, \lambda), \quad (3)$$

где операторы C_k строго положительны ($C_k > 0$) и λ — любая точка открытого множества

$$G \subset \rho(C_1, T_1) \cap \rho(C_2, T_2).$$

Если при этом $H(M_k, C_k, G) = H_k$, то существует унитарное отображение U пространства H_1 на H_2 , такое, что

$$\sqrt{C_2}^{-1} T_2 \sqrt{C_2}^{-1} = U \sqrt{C_1}^{-1} T_1 \sqrt{C_1}^{-1} U^{-1}, \sqrt{C_2}^{-1} \Gamma_2 = U \sqrt{C_1}^{-1} \Gamma_1. \quad (4)$$

Наоборот, если унитарный оператор $U: H_1 \rightarrow H_2$ удовлетворяет соотношениям (4) и, кроме того,

$$U(\Delta_{\sqrt{C_1}}) = \Delta_{\sqrt{C_2}}, \overline{D_{\sqrt{C_2}^{-1} \Gamma_2}} = E,$$

то равенство (3) справедливо при всяком

$$\lambda \in \rho(C_1, T_1) \cap \rho(C_2, T_2).$$

Доказательство. Из (2) в обозначениях $Q_n^{(k)} =$

$$= [(T_k - a C_k)^{-1} C_k]^n (T_k - a C_k)^{-1} \text{ вытекает } (a \in G)$$

$$(T_k - \lambda C_k)^{-1} \Gamma_k \varphi, f) = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda - a)^n (Q_n^{(k)} \Gamma_k \varphi, f).$$

Поэтому линейная замкнутая оболочка векторов вида $Q_n^{(k)} \Gamma_k \varphi$ ($\forall \varphi \in E, n=0, 1, 2, \dots$) и, следовательно, вида $\sqrt{C_k} Q_n^{(k)} \Gamma_k \varphi$ совпадает с H_k . Из равенства (3) можно получить, что

$$(C_1 Q_n^{(1)} \Gamma_1 \varphi_1, Q_m^{(1)} \Gamma_1 \varphi_2) = (C_2 Q_n^{(2)} \Gamma_2 \varphi_1, Q_m^{(2)} \Gamma_2 \varphi_2).$$

Оператор $U: U \sqrt{C_1} Q_n^{(1)} \Gamma_1 \varphi = \sqrt{C_2} Q_n^{(2)} \Gamma_2 \varphi$ ($n=0, 1, 2, \dots$) изометричен, и потому его можно расширить до линейного унитарного отображения пространства H_1 на H_2 . Переход к обратным операторам в равенстве

$$\sqrt{C_2} Q_0^{(2)} \sqrt{C_2} U = U \sqrt{C_1} Q_0^{(1)} \sqrt{C_1}$$

(полученном с учетом соотношения $Q_{n+1}^{(k)} = Q_0^{(k)} C_{(k)} Q_n^{(k)}$, $k=1, 2$) и затем равенство $U \sqrt{C_1} Q_0^{(1)} \Gamma_1 = \sqrt{C_2} Q_0^{(2)} \Gamma_2$ приводят к условиям

(4) Обратное утверждение теоремы сразу следует из того, что

$$\Gamma_2^* \sqrt{C_2}^{-1} = \Gamma_1^* \sqrt{C_1}^{-1} U^{-1}; \quad \Gamma_k^* (T_k - \lambda C_k)^{-1} \Gamma_k \varphi = \\ = \Gamma_k^* \sqrt{C_k}^{-1} (\sqrt{C_k}^{-1} T_k \sqrt{C_k}^{-1} - \lambda I)^{-1} \sqrt{C_k}^{-1} \Gamma_k \varphi,$$

где $\varphi \in D \sqrt{C_2}^{-1} \Gamma_2$, $k = 1, 2$.

Замечание. В частном случае, когда операторы C_k^{-1} ограничены, скалярное произведение $[f, g] = (C_k f, g)$ в H_k позволяет свести теорему 3 к известной теореме об унитарной эквивалентности операторных узлов (ср. [3, 4]).

ЛИТЕРАТУРА

1. Бродский М. С. Треугольные и жордановы представления линейных операторов. М., «Наука», 1969. 287 с.
2. Лившиц М. С. Операторы, колебания, волны. М., «Наука», 1966. 298 с.
3. Руткас А. Г., Чаусовский Д. М. Об одном классе линейных автоматов на графах. — «Кибернетика», 1969, № 3, с. 11—15.
4. Руткас А. Г. Пары несамосопряженных операторов и операторные гиперузлы. — УМЖ, 1970, т. 22, № 1, с. 37—52.

УДК 513.88

РАДБЕЛЬ Н. И.

РАСЩЕПЛЕНИЕ СПЕКТРА И НОРМАЛЬНЫЕ ТОЧКИ ЛИНЕЙНОГО ПУЧКА ОПЕРАТОРОВ В В-ПРОСТРАНСТВАХ

Пусть X, Y — изоморфные банаховы пространства и операторы $A, B \in [X, Y]$. Точка λ комплексной плоскости называется регулярной точкой пучка $A\lambda + B/\lambda \in \rho(A, B)$, если $(A\lambda + B)^{-1} \in [Y, X]$. Через $\sigma(A, B)$ (спектр пучка) обозначается дополнение к открытому множеству $\rho(A, B)$ до комплексной плоскости [3, 4].

Ниже предполагается, что $\rho(A, B) \neq \emptyset$.

1. Предположим, что спектр σ пучка $A\lambda + B$ состоит из двух непересекающихся изолированных частей σ_1 и σ_2 , причем σ_1 — множество ограниченное. Найдется такая область G с границей Γ , что спрямляемый контур $\Gamma \subset \rho(A, B)$, $\sigma_1 \subset G$, $G \cap \sigma_2 = \emptyset$. По отношению к соответствующим равномерным операторным топологиям существуют интегралы

$$P_{r\sigma_1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} (A\lambda + B)^{-1} A d\lambda, \quad (1)$$

$$P_{l\sigma_1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} A (A\lambda + B)^{-1} d\lambda. \quad (2)$$

Теорема 1. При сделанных выше предположениях операторы $P_{r\sigma_1} \in [X, X]$ и $P_{l\sigma_1} \in [Y, Y]$ являются проекторами и порождают прямые суммы

$$X = P_{r\sigma_1} X + (I_X - P_{r\sigma_1}) X = M_{\sigma_1 X} + N_{\sigma_1 X}; \quad (3)$$

$$Y = P_{l\sigma_1} Y + (I_Y - P_{l\sigma_1}) Y = M_{\sigma_1 Y} + N_{\sigma_1 Y}.$$

Пучок $A\lambda + B$ отображает подпространство $M_{\sigma_1 X}$ в $M_{\sigma_1 Y}$, $N_{\sigma_1 X}$ — в $N_{\sigma_1 Y}$, т. е. приводится разложением пространств (3). При этом пучок, индуцированный в $M_{\sigma_1 X}(N_{\sigma_1 X})$, имеет спектр $\sigma_1(\sigma_2)$.

Доказательство теоремы аналогично доказательству теоремы Ф. Рисса [1], если учесть равенство $B(A\mu + B)^{-1}A = A(A\mu + B)^{-1}B$, $\mu \in \rho(A, B)$. Последнее проверяется непосредственно с использованием «тождества Гильберта» [3, 4].

Пример. Рассмотрим пучок операторов $A\lambda + B \in [X, X]$, где $X = L_2[0, 1] \times L_2[0, 1]$,

$$B = \begin{pmatrix} I & I + A_1 \\ I - A_2 & 0 \end{pmatrix}; \quad A = \begin{pmatrix} 0 & I - A_1 \\ A_3 & 0 \end{pmatrix},$$

A_i — интегральные операторы Фредгольма в $L_2[0, 1]$ с ядрами вида

$$K_{A_i}(x, t) = \begin{cases} f_i(t), & t < x, \\ 0, & t = x, \\ a_i f_i(t), & t > x, \end{cases}$$

причем $a_3 = a_2$, $f_1 = \frac{\ln a_1}{1 - a_1}$.

Спектр σ пучка $A\lambda + B$ состоит из двух частей:

$$\sigma_1: \left\{ \lambda_k = \frac{2k\pi i}{2k\pi i - \ln a_1}; \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \right\},$$

$$\sigma_2: \left\{ \lambda_n = \frac{-\ln a_2 + 2n\pi i + (a_2 - 1) \int_0^1 f_2(t) dt}{(a_2 - 1) \int_0^1 f_3(t) dt}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \right\}.$$

По формулам (1) и (2) находим

$$P_{r\sigma_1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ QA_3 & I \end{pmatrix}; \quad P_{l\sigma_1} = \begin{pmatrix} I & (I - A_1)Q \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где $Q = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma(\sigma_1)} [A_\lambda + I + \lambda(I - A_1)]^{-1} [I - A_2 + \lambda A_3]^{-1} d\lambda$.

В силу теоремы 1 пучок, индуцированный в $M_{\sigma_1 X}$, имеет вид

$$A_{1\sigma_1}\lambda + B_{1\sigma_1} = \begin{pmatrix} [I + A_1 + \lambda(I - A_1)]QA_3 & [I + A_1 + \lambda(I - A_1)] \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

и $\sigma(A_{1\sigma_1}, B_{1\sigma_1}) = \sigma_1$,

2. Определение 1. Вектор $\varphi \in X$ назовем *корневым вектором пучка* $A\lambda + B \in [X, Y]$, отвечающим собственному числу λ_0 [3], если

$$[(A\lambda + B)^{-1}(A\lambda_0 + B)]^n \varphi = 0 \quad (4)$$

при некотором натуральном n и некотором $\lambda \in \rho(A, B)$.

Индукцией по n доказывается

Лемма. Решения уравнения (4) не зависят от выбора точки $\lambda \in \rho(A, B)$. Множество решений уравнения (4), выполненное вектором $\varphi = 0$, образует *линеал* $L_{\lambda_0} \subset X$ (корневой *линеал* пучка). Корневой *линеал* L_{λ_0} пучка $A\lambda + B$ совпадает с корневым *линеалом*¹ $L_{\frac{1}{\lambda - \lambda_0}}$ оператора $(A\lambda + B)^{-1}A$ [2] независимо от выбора $\lambda \in \rho(A, B)$.

Определение 2. Собственное число λ_0 пучка $A\lambda + B$ назовем *нормальным собственным числом* (н. с. ч.) пучка, если $\frac{1}{\lambda - \lambda_0}$ является н. с. ч. для оператора $(A\lambda + B)^{-1}A$ [2].

Теорема 2. Для того, чтобы точка спектра λ_0 пучка $A\lambda + B$ была н. с. ч., необходимо и достаточно, чтобы она была изолированной точкой спектра пучка $A\lambda + B$ и отвечающий ей проектор $P_{r\lambda_0}$ (а следовательно, и $P_{l\lambda_0}$) был конечномерным. Если λ_0 — н. с. ч., то $P_{r\lambda_0}$ проектирует все пространство X на корневое подпространство L_{λ_0} .

Доказательство можно получить сведением к теореме 2.1 из [2].

Сформулированные ниже предложения являются следствиями теоремы 2 для случая гильбертовых пространств X и Y (ср. [2]): а) Если λ_0 — н. с. ч. пучка $A\lambda + B$, то $\bar{\lambda}_0$ — н. с. ч. пучка $A^*\mu + B^*$ и $\dim L_{\lambda_0}^-(A, B) = \dim L_{\lambda_0}(A^*, B^*)$. б) Пусть λ_0 — н. с. ч. пучка $A\lambda + B$ и пусть ему отвечают разложения

$$X = L_{X\lambda_0} + N_{X\lambda_0}, \quad Y = L_{Y\lambda_0} + N_{Y\lambda_0}.$$

Тогда н. с. ч. $\bar{\lambda}_0$ пучка $A^*\lambda + B^*$ отвечают разложения

$$Y = L_{Y\bar{\lambda}_0}^* + N_{Y\bar{\lambda}_0}^*, \quad X = L_{X\bar{\lambda}_0}^* + N_{X\bar{\lambda}_0}^*,$$

где

$$L_{Y\bar{\lambda}_0}^* = N_{Y\lambda_0}^\perp; \quad N_{Y\bar{\lambda}_0}^* = L_{Y\lambda_0}^\perp,$$

$$L_{X\bar{\lambda}_0}^* = N_{X\lambda_0}^\perp; \quad N_{X\bar{\lambda}_0}^* = L_{X\lambda_0}^\perp.$$

¹ Оператор $(A\lambda + B)^{-1}A$ в X имеет собственное число $\frac{1}{\lambda - \lambda_0}$.

в) Если λ_0 — н. с. ч. пучка $A\lambda + B$ то уравнения

$$(A\lambda_0 + B)\varphi = 0 \quad \text{и} \quad (\bar{\lambda}_0 A^* + B^*)\psi = 0$$

имеют одинаковое число линейно независимых решений.

3. Определяя нормальные точки пучка $A\lambda + B$ как множество, состоящее из регулярных и н. с. ч., можно убедиться в справедливости (ср. [2]) следующей теоремы.

Теорема 3. Область G_Γ (Γ — граница области) состоит из нормальных точек пучка $A\lambda + B$ в том и только в том случае, когда проектор $P_{\Gamma\Gamma}$ конечномерен.

ЛИТЕРАТУРА

1. Рисс Ф., Секефальви-Надь Б. Лекции по функциональному анализу. М., ИЛ, 1954, с. 447—452.
2. Гохберг И. Ц., Крейн М. Г. Введение в теорию линейных несамоприсоединенных операторов. М., «Наука», 1965, с. 23—29.
3. Руткас А. Г. Об одной функции операторного узла. (См. статью в настоящем выпуске).
4. Радбель Н. И., Руткас А. Г. Об линейных операторных пучках и неканонических системах. — Сб. «Теория функций, функциональный анализ и их приложения». Вып. 17, Харьков, 1973, с. 3—14.

УДК 519.44

А. Л. ВИШНЕВЕЦКИЙ

О РАЗРЕШИМЫХ ГРУППАХ, ОБЛАДАЮЩИХ ТОЧНЫМ НЕПРИВОДИМЫМ РАЦИОНАЛЬНЫМ ПРЕДСТАВЛЕНИЕМ ПРОСТОЙ СТЕПЕНИ

Одна из основных задач абстрактной кристаллографии состоит в описании так называемых кристаллографических групп n -й степени, т. е. конечных групп, обладающих точными рациональными представлениями степени n (n — натуральное число, ≥ 3). Для случая $n=3$ эта задача была решена Федоровым и Шенфлисом (1890—1891 гг.). Частичное ее решение при $n=4$ было получено Дейдом [1]. Полное решение задачи в случаях $n=4$ и $n=5$ получил Г. И. Карпиловский [2, 3]. Он же рассматривал случай $n=7$: в [3] были описаны конечные разрешимые группы, обладающие точными неприводимыми рациональными представлениями степени 7. В настоящей работе изучаются конечные разрешимые группы, обладающие точными неприводимыми рациональными представлениями простой степени $p \neq 2$ ¹.

¹ Аналогичный вопрос для поля вещественных чисел рассматривался в [5].

Основным результатом работы является следующее утверждение.

Теорема 1. Пусть G — конечная разрешимая группа, обладающая точным неприводимым рациональным представлением простой степени $p \neq 2$. Если группа G не имеет центра, то $G = A \rtimes (P \rtimes W)$, где A — элементарная абелева 2-группа, отличная от $\{1\}$; P — циклическая группа порядка p , W — циклическая группа порядка, делящего $p-1$. Если группа G имеет центр Z , то $|Z|=2$ и $G = Z \times G_1$, где G_1 — группа того же типа, что и G , но без центра.

Сформулированный результат справедлив также для p -разрешимых групп.

Как видно из теоремы 1, простейшие разрешимые группы, обладающие точными неприводимыми рациональными представлениями степени p , имеют вид $A \rtimes P$. В работе дается полное описание таких групп. Число неизоморфных среди них оказалось равным

$$\frac{1}{e} \sum_{d|e} \varphi(d) 2^{\frac{e}{d}} - 1,$$

где $e = \frac{p-1}{f}$; f — показатель числа 2 по модулю p ; $\varphi(\cdot)$ — функция Эйлера.

В работе приняты следующие обозначения и терминология: Q — поле рациональных чисел, Π — простое поле характеристики 2, $(K:L)$ — степень поля K над своим подполем L , $|H|$ — порядок группы H , $C_H(F)$ и $N_H(F)$ — соответственно централизатор и нормализатор подгруппы F в группе H , $Z(H)$ — центр H , $\text{Aut } H$ — группа автоморфизмов группы H , $H \leq G$ означает, что H — подгруппа группы G , $H \triangleleft G$ означает, что H — нормальный делитель группы G , $\langle x \rangle$ — циклическая группа, порожденная элементом $x \in G$, $H \rtimes F$ — полупрямое произведение групп H и F , $\text{rg } A$ — ранг абелевой группы A , т. е. число элементов ее минимального базиса, Q -представление — рациональное представление группы, $\deg \Gamma$ — степень представления Γ , $\Gamma \downarrow H$ — ограничение представления Γ на $H \leq G$, $\sim$ — символ эквивалентности представлений и подобия матриц, E_n — единичная матрица n -го порядка, $\text{diag} \{e_1, \dots, e_n\}$ — диагональная матрица с элементами $e_1, \dots, e_n$ на главной диагонали, p — простое число, $\neq 2$.

На протяжении всей работы, если не оговорено противное, G — конечная группа, обладающая точным неприводимым Q -представлением Γ степени p .

1. Строение группы G

Лемма 1 [4]. Если $N \triangleleft G$, то либо $\Gamma \downarrow N$ неприводимо, либо N — элементарная абелева 2-группа.

Лемма 2 [4]. Если $N \triangleleft G$ и $\Gamma \downarrow N$ неприводимо, то $\Gamma \downarrow N$ абсолютно неприводимо.

Следствие 1. Если N — неабелев нормальный делитель группы G , то $p \nmid |N|$.

Следствие 2. Если N — абелев нормальный делитель группы G , то N — элементарная абелева 2-группа.

Следствие 3. Группа G обладает единственным максимальным абелевым нормальным делителем.

Доказательство. Так как все абелевы нормальные делители группы G являются 2-группами, то их композит A — инвариантная 2-группа. Поскольку $p \nmid |A|$, то, в силу следствий 1 и 2 леммы 2, A — элементарная абелева 2-группа. Очевидно, A — максимальный абелев нормальный делитель группы G .

Лемма 3 [4]. $|Z(G)| \leq 2$, $G = G_1 \times Z(G)$.

Так как G_1 — неабелев нормальный делитель группы G , то $G \ntriangleleft G_1$ неприводимо. Поэтому в дальнейшем можно ограничиться тем случаем, когда $Z(G) = \{1\}$. В дальнейшем, если не оговорено противное, это условие всегда предполагается выполненным.

Лемма 4. Если N — неабелев нормальный делитель группы G , то $Z(N) = \{1\}$.

Доказательство. Так как $G \ntriangleleft N$ абсолютно неприводимо (лемма 2), то $G \ntriangleleft Z(N)$ скалярно. Поэтому $G \ntriangleleft Z(N) \subseteq \Gamma(Z(G)) = \{1\}$, откуда, в силу точности Γ , вытекает, что $Z(N) = \{1\}$.

Лемма 5. Если $H \triangleleft G$, $H \neq \{1\}$, $H \subseteq A$, то $C_G(H) = A$.

Доказательство. Очевидно, $C_G(H) \supseteq A$. Если $C_G(H) \supsetneq A$, то $C_G(H)$ — неабелев нормальный делитель группы G . Так как $H \subseteq Z(C_G(H))$, то, в силу леммы 4, $H = \{1\}$ — противоречие.

Лемма 6 [6]. Если Γ — точное Q -представление конечной группы G порядка $p^v g$ ($(p, g) = 1$) и $\deg \Gamma = n$, то

$$v \leq \left\lfloor \frac{n}{p-1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p(p-1)} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^2(p-1)} \right\rfloor + \dots$$

Лемма 7. $p \nmid |G|$, $p^2 \nmid |G|$.

Доказательство. Первое утверждение вытекает из абсолютной неприводимости Γ , второе — из леммы 6.

С этого момента предполагается, что группа G разрешима и, следовательно, $A \neq \{1\}$.

Лемма 8. Нормальный делитель A покрывается¹ единственным нормальным делителем B , причем $|B:A| = p$.

Доказательство. Если $B \triangleleft G$ и B покрывает A , то B — неабелев. Поэтому $p \nmid |B|$. Минимальный нормальный делитель

¹ Нормальный делитель N_1 покрывается нормальным делителем N_2 , если для любого нормального делителя N из $N_1 \leq N \leq N_2$ следует, что $N = N_1$ либо $N = N_2$.

B/A разрешимой группы G/A является элементарной абелевой q -группой (q — простое число). Следовательно, $|B| = q^{2r}$, где $2r = |A|$. В силу леммы 7 $q = p$ и $\lambda = 1$, т. е. $|B:A| = p$.

Если B_1 — отличный от B нормальный делитель группы G , покрывающий A , то B_1/A — минимальный нормальный делитель группы G/A , отличный от B/A , причем $|B_1:A| = p$. Так как $|B_1/A \times B/A| = p^2$, то $p^2 \nmid |G|$, что невозможно.

Лемма 9. Если B — нормальный делитель группы G , покрывающий A , то $B = A \rtimes P$, где P — любая силовская p -подгруппа группы G .

Доказательство вытекает из леммы 8 и теоремы Шура о расщеплении.

Лемма 10. $C_G(P) = P$.

Доказательство. Пусть $c \in C_G(P)$. Если $c \in B$, $c = ay$ ($a \in A$, $y \in P$), то $a \in C_B(P)$. Следовательно, $a \in Z(B)$, откуда $a = 1$. Таким образом, $c = y \in P$. Если $c \notin B$, образуем подгруппу $G_1 = B \rtimes \langle c \rangle$. Группа G_1 содержит нормальный делитель $A \rtimes \langle c \rangle$. В силу леммы 7 p не делит его порядок. Так как $G \downarrow G_1$ неприводимо, то к группе G_1 применимо следствие 1 леммы 2, в силу которого группа $A \rtimes \langle c \rangle$ абелева. Поэтому $c \in C_G(A) = A$. Таким образом, $c \in B$ — противоречие.

Лемма 11. $N_G(P) = P \rtimes W$, где W — циклическая подгруппа, удовлетворяющая условию $|W| \mid p-1$.

Доказательство. Из теоремы Шура о расщеплении вытекает, что $N_G(P) = P \rtimes W$, где $W \leq N_G(P)$. Действие группы $N_G(P)$ сопряжениями на группе P задает гомоморфизм $\sigma: N_G(P) \rightarrow \text{Aut } P$. Так как, в силу леммы 10, $\text{Ker } \sigma = P$, то группа W изоморфно отображается в группу $\text{Aut } P$. Поскольку $\text{Aut } P$ — циклическая группа порядка $p-1$, то группа W циклическа и $|W| \mid p-1$.

Лемма 12. $G = A \rtimes (P \rtimes W)$.

Доказательство. Воспользуемся известной леммой Фраттини: если $N \triangleleft H$ и P — силовская подгруппа группы N , то $H = N \cdot N_H(P)$. В силу этой леммы $G = B \cdot N_G(P) = (A \rtimes P) \cdot N_G(P) = A \cdot P \cdot N_G(P) = A \cdot N_G(P) = A \cdot (P \rtimes W)$. Поэтому достаточно доказать, что $A \cap N_G(P) = \{1\}$. Если $a \in N_G(P) \cap A$, то $a^{-1}xa = x^\beta$ ($1 \leq \beta \leq p-1$), поэтому $(a^x)^{-1}xa^x = x^\beta$ (здесь $a^x = x^{-1}ax$). Следовательно, $(a^x)^{-1}xa^x = a^{-1}xa$, откуда $a^x a^{-1} \in C_G(x) = P$. Так как $a^x a^{-1} \in A$, то $a^x a^{-1} = 1$. Поэтому $a \in C_G(x)$, и, следовательно, $a = 1$.

Из лемм 3 и 12 вытекает следующее утверждение.

Теорема 1. Пусть G — конечная разрешимая группа, обладающая точным неприводимым рациональным представлением простой степени $p \neq 2$. Если группа G не имеет центра, то $G = A \rtimes (P \rtimes W)$, где A — элементарная абелева 2-группа, отличная от $\{1\}$, P — циклическая группа порядка p , W — циклическая группа порядка, делящего $p-1$. Если группа G имеет

центр Z , то $|Z|=2$ и $G=Z \times G_1$, где G_1 — группа того же типа, что и G , но без центра.

Примечание. С помощью приведенных выше соображений нетрудно показать, что утверждение теоремы 1 остается справедливым для p -разрешимых групп.

2. Строение группы В

1. Теорема 2. *Группа В является группой Фробениуса с ядром А.*

Доказательство. Если $a \in B$, то либо $C_B(a)=A$, либо $C_B(a)=B$. Так как $Z(B)=\{1\}$, то во втором случае $a=1$. Поэтому, если $a \neq 1$, то $C_B(a)=A$. Следовательно, B — группа Фробениуса с ядром A .

Группу A , очевидно, можно рассматривать как PR -модуль, где P — простое поле характеристики 2. Действие группы P на A определяется естественным образом: если $a \in A$, $y \in P$, то $y \cdot a = ya y^{-1}$. Этот модуль порождает некоторое линейное P -представление τ группы P : $\tau(y)a = y \cdot a$. Представление τ вполне приводимо, а его неприводимые компоненты, в силу леммы 10, точны.

Как известно, степень каждого точного неприводимого P -представления циклической группы порядка p равна показателю f числа 2 по модулю p . Поэтому PR -модуль A разлагается в прямую сумму некоторого числа неприводимых подмодулей, каждый из которых имеет P -ранг f . Это означает, если вновь перейти на мультипликативный язык, что группа A разлагается в прямое произведение минимальных нормальных делителей группы B , ранг каждого из которых равен f :

$$A = F_1 \times F_2 \times \dots \times F_k. \quad (1)$$

Отметим очевидное равенство, вытекающее из (1):

$$\text{rg } A = f \cdot k. \quad (2)$$

Лемма 13. $f \leq \text{rg } A \leq p-1$.

Доказательство. Неравенство $f \leq \text{rg } A$ следует из (2). Для доказательства неравенства $\text{rg } A \leq p-1$ заметим, что поскольку A — абелева группа, а представление Γ точно, то $\deg(\Gamma \downarrow A) \geq \text{rg } A$. Следовательно, $\text{rg } A \leq p$. Выбрав Γ так, чтобы $\Gamma \downarrow A$ имело диагональный вид, для любого $a \in A$ будем иметь $\Gamma(a) = \text{diag} \{ \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p \}$, где $\varepsilon_i = \pm 1$ ($i=1, \dots, k$). Из равенства $\text{rg } A = p$ вытекало бы, что множество $\Gamma(A)$ содержит любую из 2^p матриц такого вида, что противоречит тривиальности центра группы B .

В дальнейшем подгруппа A будет рассматриваться как B -группа, т. е. как группа с областью операторов B : действие эле-

мента $u \in B$ на A сводится к действию соответствующего внутреннего автоморфизма. Как видно из (1), A разлагается в прямое произведение некоторого числа своих минимальных допустимых подгрупп, т. е. является вполне приводимой B -группой. Напомним, что вполне приводимая группа с операторами называется однородной, если все содержащиеся в ней минимальные допустимые подгруппы операторно изоморфны. Каждая конечная вполне приводимая группа H с операторами допускает единственное (с точностью до порядка следования сомножителей) разложение в прямое произведение максимальных однородных допустимых подгрупп — однородных компонент группы H .

Всякая конечная неприводимая абелева группа с операторами является элементарной и имеет порядок q^r , где q — простое число. Эндоморфизмы такой группы образуют поле Галуа $GF(q^r)$, причем $\gamma|p$. Приведем следующее утверждение, принадлежащее Шода¹: группа N допускает точное неприводимое представление тогда и только тогда, когда для каждой однородной компоненты K группы N имеет место неравенство $s \leq \frac{p}{\gamma}$, где s — число минимальных допустимых подгрупп группы K .

Лемма 14. *B -группа A совпадает с цоколем группы B . Минимальные нормальные делители F_i ($i=1, \dots, k$), входящие в разложение (1), совпадают с однородными компонентами цоколя.*

Доказательство 1. Так как все минимальные нормальные делители группы B абелевы, то ее цоколь содержится в A . Обратное включение вытекает из (1). Тем самым первое утверждение доказано.

2. Пусть K — однородная компонента цоколя A группы B , F — содержащийся в K минимальный нормальный делитель группы B , $|F| = 2^f$, Λ — поле B -эндоморфизмов неприводимой B -группы F ; $\gamma = (\Lambda : \mathbb{P})$. На основании сказанного выше $\gamma|f$.

Так как группа B обладает точным неприводимым представлением, то, в силу теоремы Шода

$$\frac{\text{rg } K}{\text{rg } F} \leq \frac{f}{\gamma}. \quad (3)$$

Переходя на аддитивный язык, будем рассматривать F как $\mathbb{P}\mathbb{R}$ -модуль, порождающий линейное представление Δ группы P . Поскольку A действует на F тривиально, то F остается неприводимым и как $\mathbb{P}\mathbb{R}$ -модуль, поэтому представление Δ неприводимо.

Так как $\Lambda \cong$ кольцу эндоморфизмов модуля F , то $\Lambda \cong$ коммутаторной алгебре представления Δ . Поскольку $P = \langle x \rangle$, то $\Lambda \cong$ коммутаторной алгебре матрицы $\Delta(x)$. Последняя подобна клетке Фробениуса Φ_p , отвечающей минимальному полиному

¹ См. [7] или, например, [8].

$\psi(\lambda)$ первообразного корня α r -й степени из 1. Так как коммутаторная алгебра матрицы Φ_ψ совпадает с алгеброй полиномов $\Pi[\Phi_\psi] \cong \Pi(\alpha)$, то $\Lambda = \Pi(\alpha)$. Следовательно $\gamma = (\Lambda : \Pi) = (\Pi(\alpha) : \Pi) = f$. Поэтому из неравенства (3) следует, что $F = K$. Итак, все однородные компоненты цоколя A группы B являются ее минимальными нормальными делителями. Разложение (1) тем самым является разложением B -группы A на однородные компоненты.

Следствие 1. Минимальные нормальные делители F_i ($i = 1, \dots, k$) в разложении (1) образуют полную систему минимальных нормальных делителей группы B . Группы F_i ($i = 1, \dots, k$) попарно операторно неизоморфны (как B -группы).

Следствие 2. Неприводимые компоненты Π -представления τ группы P , порожденного PR -модулем A , попарно неэквивалентны.

2. Полученные в п. 1 результаты дают возможность получить полное описание групп рассматриваемого типа. Сначала покажем, что лемма 14 допускает обращение.

Лемма 15. Пусть A — элементарная абелева 2-группа, P — циклическая группа порядка p , $B = A \rtimes P$. Если A совпадает с цоколем группы B и если однородные компоненты F_i ($i = 1, \dots, k$) B -группы A являются минимальными нормальными делителями группы B , то последняя обладает точным неприводимым Q — представлением степени p .

Для доказательства введем понятие отмеченного характера подгруппы A .

Определение. Характер ψ подгруппы A группы B назовем отмеченным, если $\text{Ker } \psi$ не содержит ни одного нормального делителя группы B .

Легко видеть, что неприводимые компоненты характера ψ^B группы B , индуцированного отмеченным характером ψ подгруппы A , являются точными.

Приступая к доказательству леммы 15, заметим, что группа A обладает отмеченными характерами. Действительно, так как $A = F_1 \times \dots \times F_k$, то, объединив базисы подгрупп $F_1, \dots, F_k$, получим базис $\{a_1, \dots, a_r\}$ группы A . Характер ψ группы A , заданный, например, равенствами $\psi(a_i) = -1$ ($i = 1, \dots, r$), является отмеченным, ибо его ядро не содержит ни одной из подгрупп F_j ($j = 1, \dots, k$), а последние образуют полную систему минимальных нормальных делителей группы B .

Пусть Ψ — представление, соответствующее отмеченному характеру ψ группы A , и пусть $\Gamma = \Psi^B$. Все абсолютно неприводимые компоненты Γ представления Γ точны. По теореме Ито их степени делят $|B : A| = p$, а поскольку группа B неабелева, то $\deg \Gamma_i = p$. Так как $\deg \Gamma = |B : A| \deg \psi = p$, то представление Γ абсолютно неприводимо. Наконец, Γ вместе с Ψ — Q -представление.

Группы, удовлетворяющие условиям леммы 15, будем называть группами типа B . Полученные выше результаты приводят к следующему утверждению.

Теорема 3. *Двуступенно разрешимая группа без центра тогда и только тогда обладает точными неприводимыми Q -представлениями степени p , когда она является группой типа B .*

Группы типа B легко строятся. Пусть A — элементарная абелева 2-группа ранга $r \leq p-1$, причем $f|r$. Полагая $e = \frac{p-1}{f}$, будем иметь $r = fk$, где $1 \leq k \leq e$.

Заметим теперь, что циклическая группа P порядка p имеет e попарно не эквивалентных точных неприводимых представлений; обозначим их $T_1, \dots, T_e$. Пусть $T \sim T_1 + \dots + T_k$. Так как $\deg T = kf = r$, то с помощью представления T можно построить полупрямое произведение $B = A \ltimes P$. В дальнейшем будем считать, что A и P уже погружены в B . Группа B разрешима, поэтому ее цокль S абелев. Из построения видно, что A разлагается в прямое произведение k минимальных нормальных делителей F_i группы B , причем $\text{rg } F_i = f (i=1, \dots, k)$. Следовательно, A содержится в S . Из $S \neq A$ вытекало бы, что $S=B$, и группа B была бы абелевой. Поэтому $A=S$. Таким образом, построенная группа B является группой типа B . В силу леммы 15 B обладает точным неприводимым Q -представлением степени p .

3. Найдем число групп типа B . Предполагая группу $B = A \ltimes P$ типа B заданной, обозначим через T_i неприводимое Π -представление группы $P = \langle x \rangle$, порожденное ΠP -модулем F_i (см. п. 1), через $\tilde{T}$ обозначим одно из представлений $T_i (i=1, \dots, k)$. Пусть $\psi_i(\lambda)$ и $\tilde{\psi}(\lambda)$ — соответственно характеристические полиномы матриц $T_i(x)$ и $\tilde{T}(x)$, а $R_i, \tilde{R}$ — множества корней этих полиномов, взятых в алгебраическом замыкании поля Π . Если ξ — фиксированный представитель $\tilde{R}$, то

$$\tilde{R} = \{\xi^\sigma, \sigma \in \text{Gal}(\Pi(\xi)/\Pi)\} = \{\xi^\sigma, \sigma^f \equiv 1 \pmod{p}\}.$$

(Здесь $\text{Gal}(\Pi(\xi)/\Pi)$ — группа Галуа поля $\Pi(\xi)$ над полем Π).

Если g — первообразный корень по модулю p , то

$$\tilde{R} = \{\xi, \xi g^e, \xi g^{2e}, \dots, \xi g^{(f-1)e}\}.$$

Аналогично, если ξ_i — фиксированный представитель R_i то

$$R_i = \{\xi_i, \xi_i g^e, \xi_i g^{2e}, \dots, \xi_i g^{(f-1)e}\}.$$

Полагая $\xi_i = \xi^{s_i}$, где $(s_i, p) = 1$, получаем

$$R_i = \{\xi^{s_i}, \xi^{s_i g^e}, \xi^{s_i g^{2e}}, \dots, \xi^{s_i g^{(f-1)e}}\}.$$

Так как множество R_i совпадает с множеством характеристических корней матрицы $\hat{T}(x^{s_i}) = [\hat{T}(x)]^{s_i}$, то $[\hat{T}(x)]^{s_i} \sim T_i(x)$.

Следовательно, в некотором базисе $\{a_{ij}\}$ ($1 \leq j \leq f$) подгруппы F_i матрица линейного оператора $T_i(x): a \rightarrow x^{-1}ax$ ($a \in F_i$) совпадает с $[\hat{T}(x)]^{s_i}$. Если $T = T_1 + \dots + T_k$, то в базисе $\{a_{ij}\}$ ($1 \leq i \leq k$, $1 \leq j \leq f$) группы A оператору $T(x): a \rightarrow x^{-1}ax$ ($a \in A$) отвечает матрица $\text{diag} \{[\hat{T}(x)]^{s_1}, \dots, [\hat{T}(x)]^{s_k}\}$. Положим $s_i \equiv q^{m_i} \pmod{p}$ ($i=1, \dots, k$). Тем самым расширению B группы A поставлен в соответствие набор целых чисел $\{m_1, \dots, m_k\}$, определенных по модулю e и попарно не сравнимых по этому модулю. Неупорядоченный набор $\{m_1, \dots, m_k\}$ классов вычетов по модулю e чисел $m_1, \dots, m_k$ определяет, с точностью до эквивалентности, представление T . Следовательно, этим набором группа B определяется однозначно с точностью до изоморфизма. Назовем набор $\{\bar{m}_1, \dots, \bar{m}_k\}$ определяющим множеством группы B .

Если заменить элемент x другим образующим x^t группы P , то полином $\psi_i(\lambda)$ заменится характеристическим полиномом матрицы $[T_i(x)]^t$ ($i=1, \dots, k$). Следовательно, множество R_i перейдет в

$$R_{i'} = \{\xi_i^{t_i}, \xi_i^{t_i g^e}, \dots, \xi_i^{t_i g^{(f-1)e}}\} = \{\xi^{ts_i}, \xi^{ts_i g^e}, \dots, \xi^{ts_i g^{(f-1)e}}\}.$$

Полагая $t \equiv g^m \pmod{p}$, получаем

$$R_{i'} = \{\xi^{g^{m+m_i}}, \xi^{g^{m+m_i+e}}, \dots, \xi^{g^{m+m_i+(f-1)e}}\}.$$

Таким образом, замена образующего элемента группы P вызывает аддитивный сдвиг определяющего множества: $\{\bar{m}_1, \dots, \bar{m}_k\}$ переходит в $\{\bar{m}_1 + \bar{m}, \dots, \bar{m}_k + \bar{m}\}$ ($\bar{m}$ — класс вычетов числа m по модулю e). Легко видеть, что замена корня ξ другим корнем ξ' полинома $\psi(\lambda)$ также приводит к сдвигу определяющего множества, а перестановка подгрупп $F_1, \dots, F_k$ в группе B не меняет его.

Два множества классов вычетов по модулю e , получающиеся одно из другого сдвигом, назовем эквивалентными. Каждой группе типа B , таким образом, соответствует вполне определенный класс эквивалентных множеств.

Каждый класс M эквивалентных множеств отвечает единственной, с точностью до изоморфизма, группе типа B . Действительно, каждому элементу $\bar{m}_i$ множества $\mu = \{\bar{m}_1, \dots, \bar{m}_k\} \in M$ можно сопоставить неприводимый круговой полином

$$\psi_i(\lambda) = \prod_{j=0}^{f-1} (\lambda - \xi^{g^{m_i + je}}).$$

Так как классы вычетов $\overline{m_i}$ попарно различны, то среди полиномов $\psi_i(\lambda)$ нет одинаковых. Сопоставим полиному $\psi_i(\lambda)$ не приводимое Π -представление T_i группы $P = \langle x \rangle$. Полагая $T = T_1 + \dots + T_k$, получаем Π -представление группы P , имеющее степень kf . Так как представления T_i ($i=1, \dots, k$) попарно не эквивалентны, то с помощью конструкции, описанной в п. 2, можно построить группу типа B . Этой группе, очевидно, соответствует заданное множество μ .

Тем самым установлено взаимно-однозначное соответствие между классами изоморфных групп типа B и классами эквивалентных подмножеств аддитивной группы Z_e классов вычетов по модулю e .

При этом классам k -элементных подмножеств отвечают группы, шюколь A которых имеет ранг kf . Число таких групп поэтому равно числу N_e^k классов k -элементных подмножеств группы Z_e .

Лемма 16.

$$N_e^k = \frac{1}{e} \sum_{d|(k,e)} \varphi(d) C_e^{\frac{k}{d}}. \quad (4)$$

Доказательство. Обозначим через S_k множество k -элементных подмножеств группы Z_e . Действие группы Z_e сдвигами на множестве S_k порождает представление R этой группы подстановками S_k . Орбиты представления R совпадают с классами k -элементных подмножеств. Поэтому N_e^k равно числу орбит, и, следовательно,

$$N_e^k = \frac{1}{e} \sum_{g \in Z_e} \chi(g), \quad (5)$$

где χ — характер представления R .

Если $g \in Z_e$, то, очевидно, $\chi(g) = \{M \in S_k, gM = M\}$. Условие $gM = M$ означает, что подмножество M является объединением орбит элемента g , а так как длина каждой орбиты равна порядку d элемента g , то $d|k$. Очевидно, $d|e$ и элемент g имеет $\frac{e}{d}$ орбит. Поэтому

$$\chi(g) = \begin{cases} 0, & d \nmid k \\ C_e^{\frac{k}{d}}, & d | k, \end{cases} \quad (6)$$

а так как для любого делителя d числа e группа Z_e содержит $\varphi(d)$ элементов порядка d , то соотношения (5) и (6) приводят к (4).

Пусть N_e — общее число классов определяющих множеств, т. е. общее число всех неизоморфных групп типа B .

Теорема 4.

$$N_e = \frac{1}{e} \sum_{d|e} \varphi(d) 2^{\frac{e}{d}} - 1.$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} N_e &= \sum_{k=1}^e N_e^k = \frac{1}{e} \sum_{k=1}^e \sum_{d|(e,k)} \varphi(d) C_{\frac{k}{d}}^{\frac{e}{d}} = \frac{1}{e} \sum_{d|e} \varphi(d) \sum_{i=1}^{\frac{e}{d}} C_{\frac{e}{d}}^i = \\ &= \frac{1}{e} \sum_{d|e} \varphi(d) (2^{\frac{e}{d}} - 1) = \frac{1}{e} \left(\sum_{d|e} \varphi(d) 2^{\frac{e}{d}} - e \right) = \\ &= \frac{1}{e} \sum_{d|e} \varphi(d) 2^{\frac{e}{d}} - 1. \end{aligned}$$

4. Пусть $B = (F_1 \times \dots \times F_k) \rtimes P$ — произвольная группа типа B . Определим число ν_k ее точных неприводимых Q -представлений степени p .

Теорема 5.

$$\nu_k = \frac{(2^f - 1)^k}{p}.$$

Доказательство. Так как B -группа Фробениуса, то каждое ее точное неприводимое комплексное представление Γ индуцируется некоторым представлением ядра Фробениуса A . Точно так же, как при доказательстве леммы 15, можно показать, что представление Γ эквивалентно рациональному, причем $\deg \Gamma = p$. Следовательно, ν_k равно числу всех точных неприводимых представлений группы B . Пусть $\Gamma_1, \dots, \Gamma_{\nu_k}$ — совокупность всех неэквивалентных точных неприводимых комплексных представлений группы B . Как известно ([8]),

$$\sum_{i=1}^{\nu_k} (\deg \Gamma_i)^2 = \sum_{\mu} \mu(T) |B/C_T|, \quad (7)$$

Суммирование в правой части (7) производится по всевозможным совокупностям T минимальных нормальных делителей группы B ; $\mu(T) = (-1)^t$, где t — число подгрупп, входящих в T , C_T — композит этих подгрупп. Так как $\deg \Gamma_i = p$ ($i=1, \dots, \nu_k$), то левая часть (7) равна $p^2 \nu_k$. Подгруппы $F_1, \dots, F_k$ обра-

зуют полный набор минимальных нормальных делителей группы B , поэтому суммирование в правой части (7) происходит по всевозможным подмножествам множества $\{F_1, \dots, F_k\}$. Так как $|F_i| = 2^i$ ($i=1, \dots, k$), а St является прямым произведением порождающих его нормальных делителей, то $|C_T| = 2^{f_t}$. Поэтому

$$\sum_T (T) |B/C_T| = \sum_T (T) |B| 2^{-f_t} = |B| [1 - C_k^1 2^{-f} + C_k^2 2^{-2f} - \dots + (-1)^k C_k^k 2^{-kf}] = 2^{kf} p (1 - 2^{-f})^k = p (2^{kf} - 1).$$

Следовательно, $p^2 \gamma_k = p (2^{kf} - 1)$, откуда $\gamma_k = \frac{(2^f - 1)^k}{p}$.

Автор выражает глубокую благодарность Э. М. Жмудю за постановку задачи и руководство работой.

ЛИТЕРАТУРА

1. Dade. The maximal finite groups of 4×4 integral matrices, III., J. Math., vol. 9, N 1, 1965, p. 99—122.
2. Карпиловский Г. И. Точные линейные представления некоторых классов конечных групп. Автореф. канд. дис., Харьков, 1970.
3. Карпиловский Г. И. О конечных группах, допускающих точное неприводимое представление степени 5 и 7 над полем рациональных чисел. ДАН БССР, 1970, т. 14, № 5, с. 396—399.
4. Карпиловский Г. И. Конечные группы, допускающие точное неприводимое представление степени 5 над полем рациональных чисел. — «Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат.», 1969, № 5, с. 9—16.
5. Супруненко Д. А. О конечных неприводимых разрешимых линейных группах. — «Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат.», 1971, № 3, с. 5—16.
6. Speiser A. Die Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung, 3 rd ed., Berlin, 1937, s. 410.
7. Shoda K. Über direkt zerlegbare Gruppe, Jour N. Fac. Sci. Univ., Tokyo, (1, 2), 1929, p. 51—72.
8. Жмудь Э. М. Об изоморфных линейных представлениях конечных групп. — «Мат... сб.», 1956, вып. 38(80), с. 417—430.

УДК 511.6+517.56

В. И. КРУТИНЬ

ЗАМЕЧАНИЕ О РОСТЕ И РАСПРЕДЕЛЕНИИ ЗНАЧЕНИЙ p -МЕРНЫХ ЦЕЛЫХ КРИВЫХ

1. Пусть $\vec{G}(z) = \{q_k(z)\}_{k=1}^p$ — p -мерная ($p \geq 2$) целая кривая [1—3]. Всюду далее в работе мы используем известные термины и обозначения теории целых кривых [4—6].

Пусть $\beta(\vec{a}, \vec{G})$ — величина отклонения [5—7], $\delta(\vec{a}, \vec{G})$ — величина дефекта [1, 3, 4] целой кривой $\vec{G}(z)$ относительно фик-

сированного вектора $\vec{a}$, A — фиксированная допустимая система векторов [4].

Обозначим

$$\Omega_A(\vec{G}) = \{\vec{a} \in A : \beta(\vec{a}, \vec{G}) > 0\},$$

$$E_A(\vec{G}) = \{\vec{a} \in A : \delta(\vec{a}, \vec{G}) > 0\}.$$

Множество $\Omega_A(\vec{G})$ называется множеством положительных отклонений целой кривой, а множество $E_A(\vec{G})$ — множеством ее дефектных значений относительно фиксированной допустимой системы A . Известны следующие результаты о структуре множеств $E_A(\vec{G})$ и $\Omega_A(\vec{G})$ и о величинах $\delta(\vec{a}, \vec{G})$, $\beta(\vec{a}, \vec{G})$ [1, 3, 5, 6, 9, 11, 16].

Теорема А. Для произвольной p -мерной целой кривой $\vec{G}(z)$ множество $E_A(\vec{G})$ всегда не более, чем счетно и

$$\sum_{\vec{a} \in A} \delta(\vec{a}, \vec{G}) \leq p. \quad (1)$$

Теорема Б. Пусть $\vec{G}(z)$ — p -мерная целая кривая и λ — ее нижний порядок:

1) если $\lambda = 0$, то $\Omega_A(\vec{G})$ содержит самое большое $p-1$ вектор;

2) если $0 < \lambda < \infty$, то $\Omega_A(\vec{G})$ не более, чем счетно и величины отклонений относительно фиксированной допустимой системы A удовлетворяют соотношению¹

$$\sum_{\vec{a} \in A} \beta(\vec{a}, \vec{G}) \leq K(p!)^3(1 + \lambda); \quad (2)$$

3) если $\lambda = \infty$, то $\Omega_A(\vec{G})$ может быть несчетным.

Для двумерных целых кривых конечного нижнего порядка λ (мероморфный случай) величины дефектов и величины отклонений удовлетворяют еще некоторым дополнительным соотношениям [7, 10, 12].

Теорема В. Пусть $f(z)$ — мероморфная функция конечного нижнего порядка λ . Тогда

$$\sum_{(a)} \delta^{\alpha}(a, f) \leq \frac{K(1 + \lambda^3)}{(3\alpha - 1)^{1/3}} \quad (3)$$

при $\alpha > \frac{1}{3}$;

¹ Буквами K здесь и далее мы будем обозначать абсолютные положительные константы, не обязательно равные.

$$\sum_{(a)} \delta^{1/2}(a, f) \leq \frac{C(\lambda)}{\max_a \delta(a, f)}, \quad (4)$$

$$\sum_{(a)} \beta^{\alpha}(a, f) \leq \frac{K(1+\lambda^3)}{(2\alpha-1)^{1/2}} \quad (5)$$

при $\alpha > \frac{1}{2}$.

При этом ряд (3) при $\alpha < \frac{1}{3}$, а ряд (5) при $\alpha < \frac{1}{2}$ может расходиться.

Кроме величин отклонений и величин дефектов, удобно исследовать рост мероморфных функций с помощью следующих величин [13, 14]. Пусть $\varphi(x)$ — непрерывная монотонная возрастающая выпуклая функция на положительной полуоси. Положим

$$m_{\varphi}(r, a, f) = \varphi^{-1} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi \left(\ln^+ \frac{1}{|f(re^{i\theta}) - a|} \right) d\theta \right\}, \quad a \neq \infty$$

$$m_{\varphi}(r, \infty, f) = \varphi^{-1} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi (\ln^+ |f(re^{i\theta})|) d\theta \right\},$$

$$\delta_{\varphi}(a, f) = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{m_{\varphi}(r, a, f)}{T(r, f)}, \quad (6)$$

$$D_{\varphi}(f) = \{a: \delta_{\varphi}(a, f) > 0\}.$$

При этом, если $\varphi(x) = x^{\nu}$ ($\nu > 1$), то во всех обозначениях (6) вместо индекса φ будем писать индекс ν .

Справедлива

Теорема Г. Пусть $f(z)$ — мероморфная функция нижнего порядка λ :

1) если $\lambda < \infty$, то множество $D_{\nu}(f)$ не более, чем счетно и величины ν -дефектов $\delta_{\nu}(a, f)$ удовлетворяют соотношению

$$\sum_a \delta_{\nu}^{\alpha}(a, f) \leq \frac{K(1+\lambda^3)}{\left[\left(2 + \frac{1}{\nu} \right)^{\alpha} - 1 \right] 1 / \left(2 + \frac{1}{\nu} \right)} \quad (7)$$

при $\alpha > 1 / \left(2 + \frac{1}{\nu} \right)$.

При $\alpha < 1/(2 + \frac{1}{\nu})$ ряд (7) может расходиться;

2) если $\lambda = \infty$, то множество $D_\nu(f)$ может быть несчетным.

II. Сформулируем теперь основные результаты работы, которые являются некоторым обобщением на случай p -мерных целых кривых теорем В и Г.

Теорема 1. Если целая кривая $\vec{G}(z)$ имеет конечный нижний порядок λ , то ее величины дефектов и величины отклонений относительно фиксированной допустимой системы векторов A удовлетворяют соотношениям:

$$\sum_{\vec{a} \in A} \delta_\alpha(\vec{a}, \vec{G}) \leq \frac{Kp^{7p+1}}{(3\alpha - 1)^{1/3}} (1 + \lambda^3) \quad (8)$$

при $\alpha > \frac{1}{3}$,

$$\sum_{\vec{a} \in A} \beta_\alpha(\vec{a}, \vec{G}) \leq \frac{Kp^{7p}}{(2\alpha - 1)^{1/2}} (1 + \lambda^3) \quad (9)$$

при $\alpha > \frac{1}{2}$,

где p — размерность $\vec{G}(z)$.

То, что наши утверждения являются в некотором смысле точными, характеризует такое утверждение [9]: при $\alpha < \frac{1}{3}$ ряд

(8), а при $\alpha < \frac{1}{2}$ ряд (9) могут быть расходящимися.

Пусть $\varphi(x)$ — непрерывная монотонно-возрастающая выпуклая функция на положительной полуоси. Определим

$$m_\varphi(r, \vec{a}, \vec{G}) = \varphi^{-1} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi \left(\ln \frac{\|\vec{G}(re^{i\theta})\| \|\vec{a}\|}{|(\vec{G}(re^{i\theta})\vec{a})|} \right) d\theta \right\},$$

$$\delta_\varphi(\vec{a}, \vec{G}) = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{m_\varphi(r, \vec{a}, \vec{G})}{T(r, \vec{G})}, \quad (10)$$

$$D_\varphi(\vec{G}) = \{ \vec{a} \in A : \delta_\varphi(\vec{a}, \vec{G}) > 0 \},$$

как и в обозначениях (6), при $\varphi(x) = x^\nu$ ($\nu > 1$) вместо индекса φ будем писать индекс ν . Имеют место следующие утверждения,

Теорема 2. Пусть $\vec{G}(z)$ имеет конечный нижний порядок λ . Тогда

$$\sum_{\vec{a} \in A} \delta_{\vec{a}}(\vec{a}, G) \leq \frac{K p^{7p+1} (1 + \lambda^3)}{\left[\left(2 + \frac{1}{\nu} \right) \alpha - 1 \right]^{1/(2 + \frac{1}{\nu})}} \quad (11)$$

при $\alpha > 1 / \left(2 + \frac{1}{\nu} \right)$. При $\alpha < 1 / \left(2 + \frac{1}{\nu} \right)$ ряд (11) может быть расходящимся.

Теорема 3. Существует множество C мощности континуума и существует целая кривая $\vec{G}(z, C) = \vec{G}(z)$ бесконечного нижнего порядка, что для любого вектора

$$\vec{a}(w) = \{1, \dots, (-1)^k C_{p-1}^k \bar{w}^k, \dots, (-1)^{p-1} \bar{w}^{p-1}\}, \quad (w \in C)$$

$$\delta_{\vec{a}}(\vec{a}(w), \vec{G}) = \infty.$$

III. В основе доказательства оценок (8), (9), (11) лежит метод В. П. Петренко, использованный им для доказательства оценки (2). Пусть $\{g_n(z)\}_{n=1}^p$ — координаты целой кривой. Выберем произвольный набор различных натуральных чисел

$$n_{p-1}, n_{p-2}, \dots, n_0 \quad (1 \leq n_j \leq p, j = 0, 1, \dots, p-1).$$

Положим

$$f_{n_1, n_0}(z) = \frac{g_{n_1}(z)}{g_{n_0}(z)};$$

$$g_{n_1, n_0}(z) = (f_{n_1, n_0}(z))' g_{n_0}^2(z); \quad f_{n_2, n_1, n_0}(z) = \frac{g_{n_2, n_0}(z)}{g_{n_1, n_0}(z)};$$

$$\dots; \quad f_{n_{p-1}, n_{p-2}, \dots, n_0}(z) = \frac{g_{n_{p-1}, n_{p-2}, \dots, n_0}(z)}{g_{n_{p-2}, n_{p-3}, \dots, n_0}(z)}.$$

Оказывается, что производные от этих функций оценивают величину $L(r, \vec{a}, \vec{G})$ целой кривой $\vec{G}(z)$, и если множество $\Omega_A(\vec{G})$ содержит много ($\geq 2p$) векторов, то $f'_{n_{t-1}}, \dots, n_0(z)$ ($t=1, \dots, p$) обладают такими же свойствами, как и производные от мероморфных функций со многими дефектными значениями [15].

Дальнейшие свойства производных от мероморфных функций, обладающих многими дефектными значениями, были установлены У. Хейманом [10]. Мы установили аналогичные свойства для мероморфных функций

$$f'_{n_{t-1}, \dots, n_0}(z) \quad (t = 1, 2, \dots, p),$$

соответствующих целой кривой $\vec{G}(z)$, множество $\Omega_A(\vec{G})$ которой содержит не менее $2p$ векторов. Используя затем асимптотические свойства функций $f'_{n_{t-1}}, \dots, n_o(z) (t=1, \dots, p)$ и методы работ [7, 10], мы получили соотношения (8), (9), (11).

В заключение выражаю благодарность В. П. Петренко за его интерес к этой работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Cartan H. Sur le zéro des combinaisons linéaires de p fonctions holomorphes données. — *Mathematica*, Vol. 7, 1933, p. 5—33.
2. Ahlfors L. The theory of meromorphic curves. *Acta Soc. Sci. Fenn.* Vol. 3, 1941, N 4, p. 1—33.
3. Weyl H. Meromorphic functions and analytic curves. Princeton, 1943. 326 p.
4. Гольдберг А. А. Дополнение к книге Виттих Г. «Новейшие исследования по однозначным аналитическим функциям. М., «Мир», 1960. 46 с.
5. Петренко В. П. О величинах отклонений целых кривых нижнего порядка $\lambda < 1$. — *ДАН СССР*, 1972, т. 207, № 3, с. 538—540.
6. Петренко В. П., Хуссейн М. О росте целых кривых. — *Изв. АН СССР. Математика*, 1973, т. 37, № 2, с. 466—480.
7. Петренко В. П. Рост мероморфных функций конечного нижнего порядка. — *Изв. АН СССР. Математика*, 1969, т. 33, № 2, с. 414—454.
8. Петренко В. П. Изучение структуры множества положительных отклонений мероморфных функций. Часть I. — *Изв. АН СССР. Математика*, 1969, т. 33, № 6, с. 1336—1368.
9. Хуссейн М. Сб. «Теория функций, функциональный анализ и их приложения». Вып. 20. Харьков, 1974, с. 161—171.
10. Хейман У. Мероморфные функции. М., «Мир», 1969. 286 с.
11. Петренко В. П. О росте Q -квазиконформных целых кривых. — *ДАН СССР*, 1974, т. 38, № 5, с. 1350—1352.
12. Weitsman A. A theorem on Nevanlinna's deficiencies. *Acta Math.* 1972, Vol. 128, N 1—2, p. 41—52.
13. Проскурня И. П. О росте мероморфных функций бесконечного нижнего порядка. — *ДАН СССР*, 1973, т. 209, № 3, с. 462—465.
14. Проскурня И. П. Исследование роста мероморфных функций с использованием метрики $L^p_{[0, 2\pi]}$. — Сб. «Теория функций, функциональный анализ и их приложения». Вып. 16, Харьков, 1972, с. 79—98.
15. Fuchs W. H. A theorem on the Nevanlinna's deficiencies of meromorphic functions of finite order. *Am. of Math.* 1958, Vol. 68, N 2, p. 203—209.
16. Петренко В. П. Рост Q -псевдомероморфных функций. — *Сибирский математический журнал*, 1974, т. 38, № 1, с. 76—87.

УДК 517.6

А. С. СОХИН, канд. физ.-мат. наук

ОБ ОПЕРАТОРАХ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ С ОСОБЕННОСТЬЮ ОДНОГО ВИДА

В обратной задаче рассеяния для уравнения

$$-y'' + q(x)y = \lambda^2 y, \quad 0 < x < \infty \quad (1)$$

с потенциалом $q(x)$, удовлетворяющим условию
 $xq(x) \in L_1(0, \infty)$,

важную роль играют введенные Б. Я. Левиным [1] операторы преобразования

$$y(x, \lambda) = e^{t\lambda x} + \int_x^\infty K(x, t) dt, \quad (2)$$

дающие представления решения $y(x, \lambda)$ уравнения (1) через решение $e^{t\lambda x}$ простейшего уравнения $y'' + \lambda^2 y = 0$ (см. [2]). При исследовании обратной задачи с потенциалом $q(x)$, имеющим особенность вида $a(a+1)x^{-2}$ при $x \rightarrow 0$ и $b(b+1)x^{-2}$ при $x \rightarrow \infty$ и удовлетворяющим условию

$$\int_0^1 t |q(t) - \frac{a(a+1)}{t^2}| dt + \int_1^\infty t^{1+b} |q(t) - \frac{b(b+1)}{t^2}| dt < \infty \quad (3)$$

(a, b — любые вещественные числа из интервала $(0, \infty)$), возникает необходимость в обобщении формулы (2). Можно ожидать, что ограниченные решения $y_{a,b}(x, \lambda)$ уравнения (1) выражаются через ограниченные решения $z_{a,b}(x, \lambda)$ простейшего в этом случае уравнения

$$-z'' + q_{a,b}(x)z = \lambda^2 z, \quad 0 < x < \infty;$$

$$q_{a,b}(x) = \begin{cases} a(a+1)x^{-2}, & 0 < x < 1 \\ b(b+1)x^{-2}, & x > 1 \end{cases}$$

такой формулой:

$$y_{a,b}(x, \lambda) = z_{a,b}(x, \lambda) + \int_x^\infty K_{a,b}(x, y) z_{a,b}(y, \lambda) dy, \quad (4)$$

которая является обобщением равенства (2). При использовании формулы (4) существенно иметь как можно более точную оценку для ядра $K_{a,b}(x, y)$ при $x \rightarrow 0$. Целью настоящей заметки является обоснование представления (4) и получение необходимых оценок для ядра $K_{a,b}(x, y)$. Заметим, что случай $a=b$ рассмотрен ранее [3].

Теорема. При условии (3) на потенциал уравнение (1) имеет решение, представимое в виде (4) для каждого $x > 0$. Функция $K_{a,b}(x, y)$ абсолютно непрерывна, удовлетворяет условию

$$K_{a,b}(x, x) = \frac{1}{2} \int_x^\infty \{q(t) - q_{a,b}(t)\} dt$$

и имеет оценку

$$|K_{a,b}(x, y)| \leq A_{a,b} \sigma\left(\frac{x+y}{2}\right) \exp \left[A_{a,b} \int_x^{(x+y)/2} \sigma(s) ds \right] \times$$

$$\times \begin{cases} x^{-a} (x+y)^a, & 0 < x \leq y \leq 1 \\ x^{-a} (x+y)^b, & 0 < x < 1, y \geq 1 \\ x^{-b} (x+y)^b, & 1 \leq x \leq y, \end{cases}$$

$$\sigma(x) = \int_x^{\infty} |q(t) - q_{a,b}(t)| dt,$$

$A_{a,b}$ — некоторая постоянная.

Доказательство. Подставляя правую часть равенства (4) в уравнение (1) и интегрируя по частям, получаем, что функция $K_{a,b}(x, y)$ удовлетворяет уравнению

$$-\frac{\partial^2}{\partial x^2} K_{a,b} + q(x) K_{a,b} = -\frac{\partial^2}{\partial y^2} K_{a,b} + q(y) K_{a,b}, \quad 0 < x < y \quad (5)$$

и граничным условиям

$$2 \frac{d}{dx} K_{a,b}(x, x) + q(x) - q_{a,b}(x) = 0, \quad (5')$$

$$\lim_{y \rightarrow \infty} K_{a,b}(x, y) = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{\partial}{\partial y} K_{a,b}(x, y) = 0. \quad (5'')$$

Обратно, нетрудно видеть, что решение задачи (5) — (5'') при помощи формулы (4) задает решение уравнения (1). Полагая

$$s = \frac{y+x}{2}, \quad t = \frac{y-x}{2}, \quad U_{a,b}(s, t) = K_{a,b}(s-t, s+t),$$

получаем, что функция $U_{a,b}(s, t)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2}{\partial s \partial t} U_{a,b} + [q_{a,b}(s-t) - q_{a,b}(s+t)] U_{a,b} = -[q(s-t) - q_{a,b}(s-t)] \bar{U}_{a,b}, \quad 0 < t < s \quad (7)$$

и граничным условиям

$$U_{a,b}(s, 0) = \frac{1}{2} \int_s^{\infty} \{q(t) - q_{a,b}(t)\} dt, \quad (7')$$

$$\lim_{s \rightarrow \infty} U_{a,b}(s, t) = 0, \quad (t \geq 0). \quad (7'')$$

Равенства (7') и (7'') — это условия на характеристике $t=0$ и на бесконечно удаленной характеристике $s=C$ ($C \rightarrow \infty$). Принимая во внимание, что

$$q_{a,b}(s-t) - q_{a,b}(s+t) =$$

$$= \begin{cases} \frac{b(b+1)}{(s-t)^2} - \frac{b(b+1)}{(s+t)^2}, & s-t > 1, \quad t > 0 \\ \frac{a(a+1)}{(s-t)^2} - \frac{b(b+1)}{(s+t)^2}, & 0 < s-t < 1, \quad s+t > 1 \\ \frac{a(a+1)}{(s-t)^2} - \frac{a(a+1)}{(s+t)^2}, & 0 < s-t < 1, \quad 0 < s+t < 1, \end{cases}$$

будем иметь при $\xi - \eta \geq 1, \eta > 0$ равенство

$$U_{a,b}(\xi, \eta) = U_{b,b}(\xi, \eta).$$

Из этого равенства и оценки для $U_{b,b}(\xi, \eta)$, полученной в работе [3], следует

$$U_{a,b}(\xi, \eta) = C_b \frac{\xi^b}{(\xi - \eta)^b} \sigma(\xi) \exp \left[C_b \int_{s=\eta}^{\xi} \sigma(s) ds \right],$$

$$\xi - \eta \geq 1, \eta > 0,$$

где

$$C_b = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(-b) \dots (-b+n-1)}{n!} \right]^2.$$

Пусть теперь $0 < \xi - \eta < 1, \eta > 0$. Функцию $U_{a,s}(\xi, \eta)$ можем найти как решение уравнения (7) в области

$$s > \xi, \max(0, \xi - 1) < t < \eta,$$

принимая известное значение на характеристиках

$$t = \max(0, \xi - 1) \text{ и } s = C \quad (C \rightarrow +\infty);$$

$$U_{a,b}(s, \max(0, \xi - 1)) = U_{b,b}(s, \max(0, \xi - 1)), \quad s \geq \xi, \quad (9)$$

$$\lim_{s \rightarrow \infty} U_{a,b}(s, t) = 0, \quad \max(0, \xi - 1) \leq t \leq \eta.$$

Уравнение (7) перепишем в форме с выделенной особенностью при $s = t$:

$$\frac{\partial^2}{\partial s \partial t} U_{a,b} + \frac{a(a+1)}{(s-t)^2} U_{a,b} + v(s, t) U_{a,b} = 0, \quad \xi < s,$$

$$\max(0, \xi - 1) < t < \eta \quad (0 < \xi - \eta < 1, \eta > 0), \quad (9')$$

где

$$v(s, t) =$$

$$= \begin{cases} -\frac{a(a+1)}{(s+t)^2} + \left[q(s-t) - \frac{a(a+1)}{(s-t)^2} \right], & 0 < s-t < 1, \\ & 0 < t, s+t < 1 \\ -\frac{b(b+1)}{(s+t)^2} + \left[q(s-t) - \frac{a(a+1)}{(s-t)^2} \right], & 0 < s-t < 1, \\ & s+t > 1 \\ -\frac{b(b+1)}{(s+t)^2} + \frac{(b-a)(b+a-1)}{(s-t)^2} + \left[q(s-t) - \right. \\ \left. -\frac{b(b+1)}{(s-t)^2} \right], & s-t > 1, \max(0, \xi-1) < t < \eta. \end{cases}$$

Применяя метод Римана к уравнению (9¹) и учитывая равенства (9), приходим к следующему интегральному уравнению относительно функции $U_{a,b}(\xi, \eta)$:

$$U_{a,b}(\xi, \eta) = U_{b,b}(\xi, \max(0, \xi-1)) + \int_{\xi}^{\infty} U_{b,b}(s, \max(0, \xi-1)) \times \\ \times \frac{\partial}{\partial s} R_a(s);$$

$$\max(0, \xi-1); \xi, \eta) ds + \int_{\xi}^{\infty} ds \int_{\max(0, \xi-1)}^{\eta} v(s, t) R_a(s, t; \xi, \eta) U_{a,b}(s, t) dt \quad (10)$$

Здесь $R_a(s, t; \xi, \eta)$ — функция Римана уравнения (9¹) при $v(s, t) \equiv 0$, т. е. функция, удовлетворяющая уравнению

$$\frac{\partial^2}{\partial s \partial t} R_a + \frac{a(a+1)}{(s-t)^2} R_a = 0, \quad \xi < s < \infty, t < \eta$$

и условию

$$R_a(s, t; \xi, \eta) = 1$$

на характеристиках $s = \xi$ и $t = \eta$. Как следует из [3],

$$R_a(s, t; \xi, \eta) = \left(\frac{s-\eta}{s-t} \cdot \frac{\xi-t}{\xi-\eta} \right)^a \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(-a) \dots (-a+n-1)}{n!} \right]^2 \times \right. \\ \left. \times \left(\frac{s-\xi}{s-\eta} \cdot \frac{\eta-t}{\xi-t} \right)^n \right\}.$$

Видим, что имеют место следующие свойства:

$$1) \frac{\partial}{\partial s} R_a(s, t; \xi, \eta) > 0,$$

$$2) 0 < R_a(s, t; \xi, \eta) < C_a \left(\frac{\xi - t}{\xi - \eta} \right)^a,$$

$$C_a = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(-a) \dots (-a + n - 1)}{n!} \right]^2,$$

из которых вытекает, что свободный член f в интегральном уравнении (10) удовлетворяет неравенству

$$|f| \leq \max_{s \in [\xi, \infty]} |U_{b,b}(s, \max(0, \xi - 1))| R_a(\infty, \max(0, \xi - 1); \xi, \eta) = m_f(\xi, \eta).$$

Будем решать интегральное уравнение (10) методом последовательных приближений. Положим

$$F(\xi, \eta) = \int_{\xi}^{\infty} ds \int_{\max(0, \xi - 1)}^{\eta} |v(s, t)| dt.$$

Функция $F(\xi, \eta)$ обладает свойствами

$$1) F(s, t) \leq F(\xi, t), \quad \xi \leq s,$$

$$2) |F(\xi, \eta)| \leq [a(a+1) + b(b+1) + |b-a|(a+b+1)] \times$$

$$\ln 2 + \int_{\xi - \eta}^{\xi} \sigma(s) ds.$$

Следуя [3], находим

$$|U_{a,b}(\xi, \eta)| \leq m_f(\xi, \eta) \exp[C_a F(\xi, \eta)].$$

Из последнего неравенства, свойства 2 функции R_a и неравенства (8) вытекает

$$|U_{a,b}(\xi, \eta)| \leq C_{a,b}^{(1)} \frac{(\xi - \max(0, \xi - 1))^a \xi^b}{(\xi - \eta)^a (\xi - \max(0, \xi - 1))^b} \times \\ \times \sigma(\xi) \exp \left[C_{a,b}^{(2)} \int_{\xi - \eta}^{\xi} \sigma(s) ds \right], \quad 0 < \xi - \eta < 1, \quad \eta > 0,$$

где

$$C_{a,b}^{(1)} = C_a C_b \exp \{ [a(a+1) + b(b+1) + |a-b|(a+b+1)] \times \\ \times C_a \ln 2 \}, \\ C_{a,b}^{(2)} = C_a + C_b.$$

Таким образом,

$$|U_{a,b}(\xi, \eta)| \leq C_{a,b}^{(1)}(\sigma(\xi) \exp \left[C_{a,b}^{(2)} \int_{\xi-\eta}^{\xi} \sigma(s) ds \right] \times \\ \times \begin{cases} \xi^a (\xi - \eta)^{-a}, & 0 < \xi < 1, \quad 0 < \xi - \eta < 1, \quad \eta > 0 \\ \xi^b (\xi - \eta)^{-a}, & \xi > 1, \quad 0 < \xi - \eta < 1 \\ \xi^b (\xi - \eta)^{-b}, & \xi - \eta > 1, \quad \eta > 0. \end{cases}$$

Принимая во внимание обозначение (6), получим нужное неравенство. Абсолютную непрерывность функции $K_{a,b}(x, y)$ нетрудно получить аналогично [3]. Теорема доказана.

В заключение автор выражает признательность профессору В. А. Марченко за обсуждение работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Левин Б. Я. Преобразования типа Фурье и Лапласа при помощи решений дифференциального уравнения второго порядка. — ДАН СССР, 1956, т. 106, № 2, с. 187—190.
2. Марченко В. А. Спектральная теория операторов Штурма-Лиувилля. Киев, «Наукова думка», 1972, 217 с.
3. Сохин А. С. Об одном классе операторов преобразования. — Сб. «Математическая физика и функциональный анализ». Вып. 1, Харьков, 1969, с. 117—125.

УДК 511.6

НГУЕН ТХЫОНГ УЕН

ТЕОРЕМА О ФАКТОРИЗАЦИИ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

По известной теореме Фейера-Рисса неотрицательный тригонометрический многочлен

$$T(x) = \sum_{k=-n}^n C_k e^{ikx}, \quad -\infty < x < \infty$$

можно представить в форме

$$T(x) = |S(x)|^2, \quad -\infty < x < \infty,$$

где все корни тригонометрического многочлена

$$S(x) = \sum_{k=0}^n b_k e^{ikx}$$

лежат в замкнутой верхней полуплоскости.

М. Г. Крейн [1] обобщил эту теорему на произвольные целые функции экспоненциального типа, ограниченные и неотрицательные на вещественной оси. Н. И. Ахиезер [2] установил критерий представимости на вещественной оси неотрицательной целой функции экспоненциального типа в виде квадрата модуля другой целой функции экспоненциального типа, не имеющей корней в полуплоскости $\text{Im } z < 0$. Для формулировки этого критерия нам понадобится следующее

Определение 1. Мы говорим, что целая функция $f(z)$ принадлежит классу A , если для ее корней $\{a_v\}_{v=0}^{\infty}$ выполняется условие

$$\sum_{v=0}^{\infty} \left| \text{Im} \frac{1}{a_v} \right| < \infty.$$

Теорема (Н. И. Ахиезер [2]). Для того, чтобы целая функция $f(z)$ экспоненциального типа σ_f , неотрицательная на вещественной оси, представлялась в форме

$$f(x) = |\varphi(x)|^2, \quad (0.1)$$

где $\varphi(z)$ — целая функция экспоненциального типа σ_φ с корнями в одной из полуплоскостей $\text{Im } z > 0$ или $\text{Im } z \leq 0$, необходимо и достаточно, чтобы $f(z) \in A$.

Заметим, что при этом целая функция экспоненциального типа $\varphi(z)$ определяется однозначно с точностью до множителя вида $\exp(imz)$, где m — вещественная постоянная. Н. И. Ахиезер доказал также, что правильно подобрав постоянную m , можно добиться того, чтобы имело место равенство

$$\sigma_\varphi = \frac{1}{2} \sigma_f, \quad (0.2)$$

в котором σ_f и σ_φ — типы соответствующих функций.

В настоящей работе мы исследуем вопрос, в какой мере результат М. Г. Крейна и Н. И. Ахиезера обобщается на случай целых функций целого порядка, большего единицы.

Определение 2. Мы говорим, что целая функция $f(z)$ принадлежит классу A_p , если

$$\sum_{v=1}^{\infty} \left| \text{Im} \frac{1}{a_v^p} \right| < \infty,$$

где $\{a_v\}_{v=0}^{\infty}$ — корни функции $f(z)$. Ясно, что класс A_p при $p=1$ совпадает с классом A .

Введем следующее обозначение

$$E_p^+ = \{z : \sin(\operatorname{parg} z) > 0\} \bigcup_{k=0}^{\left[\frac{p}{2}\right]-1} \left\{z : \arg z = \frac{2k+1}{p} \pi\right\},$$

$$\bigcup_{k=\left[\frac{p}{2}\right]+1}^{p-1} \left\{z : \arg z = \frac{2k}{p} \pi\right\},$$

где $[x]$ — целая часть числа x .

В этой статье мы доказываем следующий аналог критерия Н. И. Ахиезера.

Теорема 1 (теорема о факторизации). Пусть $f(z)$ — целая функция нормального типа при целом порядке p , и пусть $f(x) \geq 0$ при вещественных x . Тогда функция $f(z)$ представляется в форме

$$f(z) = |\varphi(z)|^2, \quad (0.3)$$

где $\varphi(z)$ — целая функция нормального типа при порядке p , корни которой принадлежат множеству E_p^+ и вещественной оси тогда и только тогда, когда $f(z) \in A_p$.

Легко видеть, что типы функций $f(z)$ и $\varphi(z)$ связаны соотношением

$$\sigma_\varphi \geq \frac{1}{2} \sigma_f. \quad (0.4)$$

Принципиальным моментом, отличающий случай $p > 1$ от случая $p = 1$, является то, что неравенство (0.4) может быть строгим, как бы ни нормировать функцию $\varphi(z)$ с помощью множителя вида $\exp(i\mu z p^p)$. Это мы показываем построением соответствующего примера.

Нами получено одно достаточное условие того, что в соотношении (0.4) имеет место знак равенства. Кроме того, оказывается, что

$$\sigma_\varphi \leq C(p) \sigma_f,$$

где величина $C(p) < \infty$ зависит лишь от p .

Теорема 1 указывает на важность класса A_p . При $p = 1$, т. е. для целых функций экспоненциального типа Н. И. Ахиезер установил следующий критерий принадлежности функции классу A .

Для того, чтобы целая функция экспоненциального типа была функцией класса A , необходимо и достаточно, чтобы при некотором фиксированном $\lambda > 0$ и произвольном $R > \lambda$ выполнялось неравенство

$$\int_{\lambda}^R \frac{\ln |f(x)f(-x)|}{x^2} dx < M_{f,\lambda},$$

или, что эквивалентно,

$$\left| \int_{\lambda}^R \frac{\ln |f(x)f(-x)|}{x^2} dx \right| < M_{f,\lambda}^{(1)}.$$

Мы даем в этой статье два обобщения этого критерия на функции произвольного целого порядка p и нормального типа.

1. Доказательство теоремы 1. Доказательство основывается на следующей теореме Линделефа [3, с. 42]:

Пусть $f(z)$ — целая функция целого порядка p , представленная в форме

$$f(z) = z^m e^{P(z)} \prod_{v=1}^{\infty} G\left(\frac{z}{a_v}; p\right).$$

Тогда существуют постоянные величины $C_1(p)$ и $C_2(p)$, отличные от 0 и ∞ , зависящие лишь от p , такие, что

$$C_2(p) \gamma_f \leq \sigma_f \leq C_1(p) \gamma_f, \quad (1.1)$$

где σ_f — тип функции $f(z)$; $\gamma_f = \max(\Delta_f; \delta_f)$;

$$\delta_f = \lim_{r \rightarrow \infty} \left| \alpha_p + \frac{1}{p} \sum_{|a_v| < r} a_v^{-p} \right|; \quad \Delta_f = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{n(r)}{r^p};$$

α_p — коэффициент при z^p в многочлене $P(z)$.

Приступим теперь к доказательству нашей теоремы.

Необходимость. Из представления (0.3) вытекает неотрицательность функции $f(z)$ на вещественной оси. По теореме Линделефа $\sigma_f < \infty$. Отсюда и из того, что все корни функции $\varphi(z)$ лежат в $\{z: \sin(\operatorname{parg} z) \geq 0\}$ следует, что $\varphi(z) \in A_p$. Поскольку корни функции $f(z)$ совпадают с корнями функции $\varphi(z)$ и величинами, им сопряженными, то имеет место включение $f(z) \in A_p$.

Достаточность. Не нарушая общности, считаем, что $f(0) \neq 0$. Тогда $f(z)$ допускает представление

$$f(z) = e^{2P_p(z)} \prod_{v=1}^{\infty} G\left(\frac{z}{a_v}, p\right),$$

$$K_f = \{a_v\}_{v=1}^{\infty}.$$

Неотрицательность функции $f(z)$ на вещественной оси показывает, что все вещественные корни $f(z)$ имеют четкую кратность, а множество остальных корней симметрично (с учетом кратностей) относительно вещественной оси, и все коэффициенты полинома $P_p(z)$ вещественны.

По определению положим

$$\varphi(z) = e^{P_p(z) + iz^p \gamma} \prod_{v=1}^{\infty} G\left(\frac{z}{a_v^+}, p\right),$$

где множество $\{a_v^+\}_{v=1}^\infty \subset K_f$ определяется следующим образом: если $a_v^+ \in K_f \cap E^+_{p^+}$, то считаем a_v^+ столько раз, какова кратность соответствующего корня функции $f(z)$. Кроме того, ко множеству $\{a_v^+\}_{v=1}^\infty$ мы относим и вещественные корни функции $f(z)$, которые считаем вдвое меньше число раз, чем кратности соответствующих корней функции $f(z)$. Определим величину γ равенством

$$\gamma = \frac{1}{p} \sum_{v=1}^{\infty} \left| \operatorname{Im} \frac{1}{a_v^{+p}} \right|.$$

Далее положим

$$\bar{\varphi}(z) = e^{p_p(z) - i\gamma z^p} \sum_{v=1}^{\infty} G\left(\frac{z}{a_v^+}; p\right).$$

Очевидно, что $f(z) = \varphi(z) \bar{\varphi}(z)$, т. е. $f(x) = |\varphi(x)|^2$.

Покажем, что $\varphi(z)$ имеет нормальный тип при порядке p . Поскольку

$$\left| \sum_{|a_v| < R} \operatorname{Re} \frac{1}{a_v^p} \right| \leq \left| \sum_{|a_v| < R} \frac{1}{a_v^p} \right| = 0(1); (R \rightarrow \infty),$$

то

$$\left| \sum_{|a_v| < R} \operatorname{Re} \frac{1}{a_v^p} \right| = 0(1); (R \rightarrow \infty).$$

Так как множество корней функции $f(z)$ симметрично относительно вещественной оси, то

$$\sum_{|a_v^+| < R} \operatorname{Re} \frac{1}{a_v^{+p}} = \frac{1}{2} \sum_{|a_v| < R} \operatorname{Re} \frac{1}{a_v^p},$$

а значит

$$\left| \sum_{|a_v^+| < R} \operatorname{Re} \frac{1}{a_v^{+p}} \right| = 0(1); (R \rightarrow \infty).$$

Из последнего соотношения и принадлежности $\varphi(z) \in A_p$ следует, что

$$\left| \sum_{|a_v^+| < R} \frac{1}{a_v^{+p}} \right| = 0(1); (R \rightarrow \infty).$$

Таким образом, $\delta_\varphi < \infty$. Легко видеть, что $\Delta_\varphi = \frac{1}{2} \Delta_f$.

Мы показали, что $0 < \gamma_\varphi < \infty$, а значит, в силу (1.1), $0 < \sigma_\varphi < \infty$.

Итак, $\varphi(z)$ — целая функция порядка p нормального типа, кроме того, $\varphi(z) \in A_p$. Теорема 1 доказана.

Как связаны между собой величины типов функций $f(z)$ и $\varphi(z)$, фигурирующих в теореме 1? Из определения функций $\varphi(z)$ и $\bar{\varphi}(z)$ следует, что $\sigma_\varphi = \sigma_{\bar{\varphi}}$, а значит $\frac{1}{2} \sigma_f \leq \sigma_\varphi$. Оценку с другой стороны дает следующая

Теорема 2. Пусть выполняется условие теоремы 1. Тогда между величинами σ_f и σ_φ имеется следующая связь:

$$\frac{1}{2} \sigma_f \leq \sigma_\varphi \leq C(p) \sigma_f,$$

где величина $C(p) < \infty$ зависит лишь от p .

Доказательство. Из определения функции $\varphi(z)$ непосредственно следует, что $\Delta_\varphi = \frac{1}{2} \Delta_f$ и $\delta_\varphi = \frac{1}{2} \delta_f$. Значит, $\gamma_\varphi = \frac{1}{2} \gamma_f$. В силу (1.1) справедливо

$$\sigma_\varphi \leq C_1(p) \gamma_\varphi = \frac{1}{2} C_1(p) \gamma_f \leq \frac{C_1(p)}{2C_2(p)} \sigma_f$$

и, следовательно,

$$\frac{1}{2} \sigma_f \leq \sigma_\varphi \leq C(p) \sigma_f,$$

где $C(p) = \frac{C_1(p)}{2C_2(p)}$. Тем самым показано существование такой константы $C(p)$, что $\sigma_\varphi \leq C(p) \sigma_f$. Можно показать [3, с. 42], что

$$C(p) = \frac{1}{2} (1 + 2K_p) [14K_p (4e^2)^p + 1],$$

причем

$$K_p = 3e(p+1)(2 + \ln p).$$

Приведем достаточное условие того, что в (0.4) имеет место знак равенства. Для доказательства соответствующей теоремы нам понадобится следующая

Лемма. Пусть $B = \{b_n\}$ — последовательность комплексных чисел со свойством $n(t; B) < Ct^p$. Тогда верна оценка

$$|\ln E_\varepsilon(z)| < \frac{\varepsilon C}{1-\varepsilon} r^p, \quad (1.2)$$

где

$$0 < \varepsilon < 1; \quad r = |z|, \\ E_\varepsilon(z) = \prod_{\left|\frac{z}{b_n}\right| < \varepsilon} G\left(\frac{z}{b_n}; p\right).$$

Доказательство. Имеем

$$\ln E_\varepsilon(z) = \sum_{\left|\frac{z}{b_n}\right| < \varepsilon} \left\{ \ln \left(1 - \frac{z}{b_n}\right) + \sum_{j=1}^p \frac{z^j}{j b_n^j} \right\} = - \sum_{\left|\frac{z}{b_n}\right| < \varepsilon} \sum_{j=p+1}^{\infty} \frac{z^j}{j b_n^j},$$

откуда получаем

$$|\ln E_\varepsilon(z)| \leq \sum_{\left|\frac{z}{b_n}\right| < \varepsilon} \sum_{j=p+1}^{\infty} \frac{1}{j} \left|\frac{z}{b_n}\right|^j \leq \frac{1}{p+1} \sum_{\left|\frac{z}{b_n}\right| < \varepsilon} \frac{1}{1 - \left|\frac{z}{b_n}\right|} \left|\frac{z}{b_n}\right|^{p+1}, \\ |\ln E_\varepsilon(z)| < \frac{r^{p+1}}{(p+1)(1-\varepsilon)} \sum_{\left|\frac{z}{b_n}\right| < \varepsilon} \frac{1}{|b_n|^{p+1}} = \frac{r^{p+1}}{(p+1)(1-\varepsilon)} \int_{\frac{r}{\varepsilon}}^{\infty} \frac{dn(t; B)}{t^{p+1}} < \\ < \frac{r^{p+1}}{1-\varepsilon} \int_{\frac{r}{\varepsilon}}^{\infty} \frac{n(t; B) dt}{t^{p+2}} < \frac{\varepsilon C}{1-\varepsilon} r^p,$$

что и требовалось доказать.

Теорема 3. Пусть $f(z)$ — целая функция целого порядка p , нормального типа и $f(x) \geq 0$ при вещественных x и пусть, кроме того, выполняется условие

$$\sum_{v=1}^{\infty} \frac{|\sin \theta_v|}{r_v^p} < \infty, \quad (1.3)$$

где $a_v = r_v e^{i\theta_v}$ — корни функции $f(z)$. Тогда $f(x)$ допускает представление (0.3) и справедливо соотношение

$$\sigma_p = \frac{1}{2} \sigma_f. \quad (1.4)$$

Доказательство. Из сходимости ряда (1.3) вытекает принадлежность $f(z) \in A_p$. По теореме 1 имеем

$$f(z) = \bar{\varphi}(z) \bar{\varphi} z = \varphi^2(z) \kappa(z),$$

где

$$\kappa(z) = e^{-2i\gamma z^p} \prod_{v=1}^{\infty} \frac{G\left(\frac{z}{a_v^+}; p\right)}{G\left(\frac{z}{a_v^+}; p\right)}.$$

Покажем, что

$$\lim_{r \rightarrow \infty}^* \frac{\ln |\kappa(re^{i\theta})|}{r^p} = 0^*, \quad (1.5)$$

т. е. $h_f(\theta) = 2h_{\varphi}(\theta)$, откуда мы получим (1.4).

Приступим к доказательству (1.5). В силу сходимости ряда (1.3) имеем

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_{\varepsilon}: \sum_{|\sin \theta_v| < \delta_{\varepsilon}} \frac{|\sin \theta_v|}{r_v^p} < \varepsilon^{2p}.$$

Представим $\kappa(z)$ в виде

$$\kappa(z) = \kappa_1(z) \kappa_2(z),$$

где

$$\kappa_1(z) = \prod_{|\sin \theta_v^+| > \delta_{\varepsilon}} \frac{G\left(\frac{z}{a_v^+}; p-1\right)}{G\left(\frac{z}{a_v^+}; p-1\right)}; \quad \kappa_2(z) = e^{-2i\gamma_{\varepsilon} z^p} \prod_{|\sin \theta_v^+| < \delta_{\varepsilon}} \frac{G\left(\frac{z}{a_v^+}; p\right)}{G\left(\frac{z}{a_v^+}; p\right)};$$

$$\gamma_{\varepsilon} = \frac{1}{p} \sum_{|\sin \theta_v^+| < \delta_{\varepsilon}} \left| \operatorname{Im} \frac{1}{a_v^{+p}} \right|; \quad a_v^+ = r_v^+ e^{i\theta_v^+}.$$

Легко видеть, что

$$\lim_{r \rightarrow \infty}^* \frac{\ln |\kappa_1(re^{i\theta})|}{r^p} = 0. \quad (1.6)$$

Перепишем $\kappa_2(z)$ так:

$$\kappa_2(z) = e^{-2i\gamma_{\varepsilon} z^p} \kappa'_2(z) \kappa''_2(z).$$

* Понятие $\lim^*$ дано в книге [3].

Здесь

$$\kappa_2'(z) = \prod \frac{G\left(\frac{z}{a_v^+}; p\right)}{G\left(\frac{z}{a_v^+}; p\right)}; \quad \kappa_2''(z) = \prod \frac{G\left(\frac{z}{a_v^+}; p\right)}{G\left(\frac{z}{a_v^+}; p\right)};$$

Π' (Π'') — произведение по всем a_v^+ , удовлетворяющим условиям $|\sin \theta_v^+| < \delta_\varepsilon$; $\frac{r}{r_v^+} \geq \varepsilon^2$ (соответственно по всем a_v^+ : $|\sin \theta_v^+| < \delta_\varepsilon$; $\frac{r}{r_v^+} < \varepsilon^2$). В силу леммы имеет место неравенство

$$|\ln |\kappa_2''(z)|| < \frac{\varepsilon^2 C}{1 - \varepsilon^2} r^p,$$

где $n(t) < Ct^p$. Следовательно,

$$|\ln |\kappa_2(z)|| \leq \left(\varepsilon^{2p} + \frac{\varepsilon^2 C}{1 - \varepsilon^2} \right) r^p + |\ln |\kappa_2'(z)||. \quad (1.7)$$

Теперь оценим сверху второе слагаемое правой части (1.7)

$$|\ln |\kappa_2'(z)|| \leq I_1 + I_2.$$

Здесь

$$I_1 = \left| \sum' \ln \left| 1 + \frac{2iz \operatorname{Im} \frac{1}{a_v^+}}{1 - \frac{z}{a_v^+}} \right| \right|,$$

$$I_2 = 2 \sum' \sum_{j=1}^p \frac{r^j}{j} \frac{|\sin j\theta_v^+|}{r_v^{+j}}.$$

Применяя известный прием [3, с. 308], можно показать, что вне сколько угодно малых углов, содержащих отрицательный и положительный лучи, справедливо неравенство

$$I_1 \leq \varepsilon^2 C_1 r^p \quad \forall r > R_\varepsilon.$$

Далее, I_2 оценивается таким образом:

$$I_2 \leq 2 \sum' \sum_{j=1}^p \frac{r^j}{r_v^{+j}} |\sin \theta_v^+| \leq \frac{2r^p}{\varepsilon^{2p}} \sum_{j=1}^p \varepsilon^{2j} \sum' \frac{|\sin \theta_v^+|}{r_v^{+j}} \leq \frac{\varepsilon^2 (1 - \varepsilon^{2p})}{1 - \varepsilon^2} r^p$$

Оценки для I_1 и I_2 вместе с (1.7) показывают, что при $0 < |\arg z| < \pi$ выполняется неравенство

$$|\ln |x_2(z)|| \leq \varepsilon^2 C_2 r^p < \varepsilon r^p \quad \forall r > R_1.$$

Последнее соотношение вместе с (1.6) доказывает справедливость (1.5) при значениях Θ , лежащих вне окрестностей точек 0 и π . В силу непрерывности индикатора (1.5) имеет место всюду. Тем самым наша теорема доказана.

2. В этом параграфе мы покажем, что при выполнении условий теоремы 1 равенство

$$\sigma_\varphi = \frac{1}{2} \sigma_f,$$

вообще говоря, не имеет места, как бы ни нормировать функцию $\varphi(z)$ с помощью множителя вида $\exp(i\mu z^p)$.

Теорема 4. Для любого целого числа $p \geq 2$ существует целая функция $f(z)$ вполне регулярного роста при порядке p , удовлетворяющая условиям теоремы 1, и такая, что имеет место соотношение

$$\sigma_\varphi > \frac{1}{2} \sigma_\varphi, \quad (2.1)$$

как бы ни нормировать функцию $\varphi(z)$ с помощью множителя вида $\exp(i\mu z^p)$.

Доказательство. Покажем, что искомой функцией является следующая:

$$f(z) = \left(\frac{\sin z^p}{z^p} \right)^2.$$

Ясно, что

$$h_f(\theta) = 2 |\sin p\theta|,$$

следовательно,

$$\sigma_f = 2. \quad (2.2)$$

По теореме 1 функция $f(z)$ допускает представление

$$f(x) = |\varphi(x)|^2,$$

где

$$\varphi(z) = \prod_{v=1}^{\infty} G\left(\frac{z}{a_v^+}; p\right);$$

$\{a_v^+\}$ — корни функции $f(z)$ на лучах $\theta = \frac{2k+1}{p} \pi$, $k=0, 1, \dots$, $\left[\frac{p}{2}\right] - 1$; $\theta = \frac{2k}{p} \pi$, $k = \left[\frac{p}{2}\right] + 1, \dots, p-1$, и вещественные корни функции $f(z)$ с вдвое меньшей кратностью.

По известной теореме Б. Я. Левина [3, с. 121] имеем

$$h_{\varphi}(\theta) = - \int_{\theta-2\pi}^{\theta} \vartheta \sin p(\vartheta - \theta) d\Delta_{\varphi}(\vartheta).$$

Учитывая, что на каждом луче $\theta = \frac{\pi}{p}k$, $k=0, 1, \dots, 2p-1$ число корней функции $f(z)$ асимптотически эквивалентно $\frac{2}{\pi}t^p$, получим

$$\begin{aligned} h_{\varphi}\left(\frac{\pi}{2p}\right) &= - \int_{-\frac{4p-1}{2p}\pi}^{\frac{\pi}{2p}} \vartheta \sin\left(p\vartheta - \frac{\pi}{2}\right) d\Delta_{\varphi}(\vartheta) = \\ &= - \left\{ (-1)^p + \sum_{k=0}^{\left[\frac{p}{2}\right]-1} \left(\frac{2k+1}{p} - 2 \right) - 4 \sum_{k=\left[\frac{p}{2}\right]+1}^{p-1} \left(\frac{k}{p} - 1 \right) \right\} = \\ &= - \left\{ (-1)^p + \left[\frac{p}{2} \right] \left(\frac{2}{p} - 8 \right) + \frac{4}{p} \left[\frac{p}{2} \right]^2 + 2(p-1) \right\} = p. \end{aligned}$$

Итак, мы показали, что

$$h_{\varphi}\left(\frac{\pi}{2p}\right) = p. \quad (2.3)$$

аналогично можно получить, что при четном p

$$h_{\varphi}\left(\pi - \frac{\pi}{2p}\right) = p \quad (2.4)$$

и при нечетном p

$$h_{\varphi}\left(\pi + \frac{\pi}{2p}\right) = p. \quad (2.5)$$

В силу (2.2) и (2.3) мы имеем

$$\sigma_{\varphi} > \frac{1}{2} \sigma_f.$$

Покажем, что при любом вещественном μ функция $\psi(z) = \varphi(z) \exp(i\mu z^p)$ имеет тип строго больший, чем $\frac{1}{2} \sigma_f$. Для этого достаточно заметить, что (2.3) и (2.4), (2.3) и (2.5) показывают соответственно

$$\sigma_{\psi} \geq \frac{1}{2} \left\{ h_{\psi}\left(\frac{\pi}{2p}\right) + h_{\psi}\left(\pi - \frac{\pi}{2p}\right) \right\} = h_{\varphi}\left(\frac{\pi}{2p}\right) = p$$

при четном p ,

$$\sigma_\psi \geq \frac{1}{2} \left\{ h_\psi \left(\frac{\pi}{2p} \right) + h_\psi \left(\pi + \frac{\pi}{2p} \right) \right\} = h_\psi \left(\frac{\pi}{2p} \right) = p$$

при нечетном p .

Тем самым показано

$$\sigma_\psi > \frac{1}{2} \sigma_f.$$

3. В этом параграфе мы даем критерии принадлежности целых функций нормального типа порядка p к классу A_p , аналогичные указанному во введении критерию Н. И. Ахиезера. Для доказательства соответствующих теорем нам понадобятся два обобщения известной формулы Карлемана [3, с. 291].

Теорема 5 (формула Карлемана для угла). Пусть функция $f(z)$ голоморфна в замкнутом секторе

$$\left\{ z: 0 < \lambda \leq |z| \leq R; \arg z \in \left[\frac{j\pi}{p}; \frac{j+1}{p}\pi \right] \right\}, \quad 0 \leq j \leq 2p-1,$$

p — целое число. Тогда имеет место формула

$$\begin{aligned} \sum_{\lambda < r_v < R} \left(\frac{1}{r_v^p} - \frac{r_v^p}{R^{2p}} \right) |\sin p\vartheta_v| &= \frac{p}{\pi R^p} \int_{\frac{j\pi}{p}}^{\frac{j+1}{p}\pi} \ln |f(Re^{i\theta})| |\sin p\theta| d\theta + \\ &+ \frac{p}{2\pi} \int_{\lambda}^R \left(1 - \frac{x^{2p}}{R^{2p}} \right) \frac{\ln |f(xe^{i\frac{j\pi}{p}}) f(xe^{i\frac{j+1}{p}\pi})|}{x^{p+1}} dx + \\ &+ O(1) \quad (R \rightarrow \infty), \end{aligned} \quad (3.1)$$

где $a_v = r_v e^{i\vartheta_v}$ — корни функции $f(z)$.

Доказательство. Напишем формулу Карлемана [3, с. 291] для функции $F(w) = f(w^{\frac{1}{p}} e^{i\frac{\pi}{p}j})$, которая голоморфна в замкнутом полукольце:

$$U_{\lambda^p, R^p}^+ = \{w: \lambda^p \leq |w| \leq R^p; \operatorname{Im} w \geq 0\},$$

$$\begin{aligned} \sum_{\lambda^p < t_v < R^p} \left(\frac{1}{t_v} - \frac{t_v}{R^{2p}} \right) \sin \vartheta_v &= \frac{1}{\pi R^p} \int_0^\pi \ln |F(R^p e^{i\theta})| \sin \vartheta d\theta + \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int_{\lambda^p}^{R^p} \left(1 - \frac{x^2}{R^{2p}} \right) \frac{\ln |F(x) F(-x)|}{x^2} dx + O(1) (R \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

Здесь $b_v = t_v e^{i\theta_v} = a_v^\rho e^{-i\lambda \pi}$. Производя соответствующую замену, получаем (3.1).

Заметим, что аналогичная формула (3.1) для полукольца была получена Б. Я. Левиным и Н. О. Хачатряном в [4].

Теорема 6 (Обобщенная формула Карлемана). Пусть функция $f(z)$ голоморфна в замкнутом полукольце

$$U_{\lambda, R}^+ = \{z : 0 < \lambda \leq |z| \leq R < \infty; \operatorname{Im} z \geq 0\}.$$

Тогда при любом $\rho > 0$ справедлива формула

$$\begin{aligned} & \sum_{a_v \in \overset{\circ}{U}_{\lambda, R}^+} \left(\frac{\sin \rho \theta_v}{\rho r_v^2} - \frac{\sin (\rho - 2) \theta_v}{(\rho - 2) R^2} \right) \frac{1}{r_v^{\rho-2}} + \\ & + \frac{1}{2} \sum_{a_v \in \partial U_{\lambda, R}^+} \left(\frac{\sin \rho \theta_v}{\rho r_v^2} + \frac{\sin (\rho - 2) \theta_v}{(\rho - 2) R^2} \right) \frac{1}{r_v^{\rho-2}} = \\ & = \frac{1}{\pi R^\rho} \int_0^\pi \operatorname{Re} \{ e^{-i(\rho-1)\theta} \ln f(R e^{i\theta}) \} \sin \theta d\theta + \\ & + \frac{1}{2\pi} \int_\lambda^R \left(1 - \frac{x^2}{R^2} \right) \left[\frac{\ln |f(x)| + \cos(\rho-1)\pi \ln |f(-x)| + \right. \\ & \quad \left. + \sin(\rho-1)\pi \arg f(-x) \right] \frac{1}{x^{\rho+1}} dx + \\ & \quad + A(\lambda, R, \rho, f), \end{aligned} \quad (3.2)$$

где $A(\lambda, R, \rho, f) = O(1)$ при $R \rightarrow \infty$; $a_v = r_v e^{i\theta_v}$ — корни функции $f(z)$; $\partial U_{\lambda, R}^+$ — граница полукольца $U_{\lambda, R}^+$; $\overset{\circ}{U}_{\lambda, R}^+ = U_{\lambda, R}^+ \setminus \partial U_{\lambda, R}^+$.

При $\rho = 2$ левая часть (3.2) понимается как предел этого выражения при $\rho \rightarrow 2$.

Доказательство. Сначала докажем справедливость нашей формулы в предположении, что корни функции $f(z)$ лежат внутри полукольца $U_{\lambda, R}^+$. Введем в рассмотрение следующие функции:

$$\varphi(z) = \left(\frac{1}{R^2} - \frac{1}{z^2} \right) \frac{1}{z^{\rho-1}}; \quad \psi(z) = \left(\frac{1}{\rho z^2} - \frac{1}{(\rho-2)R^2} \right) \frac{1}{z^{\rho-2}}.$$

Рассмотрим интеграл

$$\frac{1}{2\pi i} \int \varphi(z) \ln f(z) dz.$$

С одной стороны,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial U_{\lambda, R}^+} \varphi(z) \ln f(z) dz &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial U_{\lambda, R}^+} \psi(z) \ln f(z) - \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial U_{\lambda, R}^+} \psi(z) \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \\ &= \psi(\lambda) n(\lambda; R) - \sum_{a_v \in \bar{U}_{\lambda, R}^+} \psi(r_v e^{i\theta_v}). \end{aligned} \quad (3.3)$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial U_{\lambda, R}^+} \varphi(z) \ln f(z) dz &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\lambda}^R \varphi(x) \ln f(x) dx + \\ &+ \frac{R}{2\pi} \int_0^{\pi} e^{i\theta} \varphi(Re^{i\theta}) \ln f(Re^{i\theta}) d\theta + \frac{1}{2\pi i} \int_{-R}^{-\lambda} \varphi(x) \ln f(x) dx + \\ &+ \frac{\lambda}{2\pi} \int_{\pi}^0 e^{i\theta} \varphi(\lambda e^{i\theta}) \ln f(\lambda e^{i\theta}) d\theta = \\ &= -\frac{i}{\pi} \int_{\lambda}^R \varphi(x) \{ \ln f(x) + e^{-i(\rho-1)\pi} \ln f(-x) \} dx + \\ &+ \frac{R}{2\pi} \int_0^{\pi} e^{i\theta} \varphi(Re^{i\theta}) \ln f(Re^{i\theta}) d\theta + \\ &+ \frac{\lambda}{2\pi} \int_{\pi}^0 e^{i\theta} \varphi(\lambda e^{i\theta}) \ln f(\lambda e^{i\theta}) d\theta. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Приравнивая (3.3) и (3.4) и вспоминая определение функций $\varphi(z)$ и $\psi(z)$, получаем

$$\begin{aligned} \frac{i}{\pi R^{\rho}} \int_0^{\pi} e^{-i(\rho-1)\theta} \ln f(Re^{i\theta}) \sin \theta d\theta + \\ + \frac{i}{2\pi} \int_{\lambda}^R \left(1 - \frac{x^2}{R^2} \right) \frac{\ln f(x) + e^{-i(\rho-1)\pi} \ln f(-x)}{x^{\rho+1}} dx + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\lambda}{2\pi} \int_{\pi}^0 \left(\frac{1}{R^2} - \frac{e^{-2i\theta}}{\lambda^2} \right) \frac{e^{-i(\rho-2)\theta}}{\lambda^{\rho-1}} \ln f(\lambda e^{i\theta}) d\theta = \\
& = \left(\frac{1}{\rho \lambda^2} - \frac{1}{(\rho-2)R^2} \right) \frac{n(\lambda; R)}{\lambda^{\rho-2}} - \sum_{a_v \in \bar{U}_{\lambda, R}^+} \left\{ \frac{e^{-i\rho\theta_v}}{\rho r_v^2} - \frac{e^{-i(\rho-2)\theta_v}}{(\rho-2)R^2} \right\} \frac{1}{r_v^{\rho-2}}.
\end{aligned}$$

Если обозначить через $A(\lambda, R, \rho, f)$ мнимую часть последнего слагаемого левой части предыдущего равенства, то, отделив в этом равенстве мнимые части, мы убеждаемся в справедливости формулы (3.2). Из явного вида

$$A(\lambda, R, \rho, f) = \frac{\lambda}{2\pi} \int_{\pi}^0 \operatorname{Im} \left\{ \left(\frac{1}{R^2} - \frac{e^{-2i\theta}}{\lambda^2} \right) \frac{e^{-i(\rho-2)\theta}}{\lambda^{\rho-1}} f(\lambda e^{i\theta}) \right\} d\theta$$

вытекает ограниченность величины $A(\lambda, R, \rho, f)$ при $R \rightarrow \infty$.

Для $\rho=2$ мы введем $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ таким образом:

$$\varphi(z) = \left(\frac{1}{R^2} - \frac{1}{z^2} \right) \frac{1}{z}; \quad \psi(z) = \frac{1}{2z^2} + \frac{\ln z}{R^2}.$$

Рассуждая точно так же, как и в случае $\rho \neq 2$, приходим к формуле, левая часть которой — это предел при $\rho \rightarrow 2$ левой части формулы (3.2). Мы доказали формулу (3.2) в предположении отсутствия корней функции $f(z)$ на границе полукольца $U_{\lambda, R}^+$.

В том, что эта формула верна, убеждаемся, применяя известную теорему о вкладе в контурный интеграл простого полюса, лежащего на контуре интегрирования.

В дальнейшем нам понадобится

Следствие. Пусть функция $f(z)$ голоморфна в замкнутом кольце $U_{\lambda, R} = \{z: 0 < \lambda \leq |z| \leq R < \infty\}$. Тогда при любом целом $\rho \geq 1$ справедливы формулы:

$$\begin{aligned}
& \sum_{a_v \in \bar{U}_{\lambda, R}^+} \left\{ \frac{\sin p\theta_v}{\rho r_v^2} - \frac{\sin(p-2)\theta_v}{(p-2)R^2} \right\} \frac{1}{r_v^{\rho-2}} + \\
& + \frac{1}{2} \sum_{a_v \in \partial U_{\lambda, R}^+} \left\{ \frac{\sin p\theta_v}{\rho r_v^2} - \frac{\sin(p-2)\theta_v}{(p-2)R^2} \right\} \frac{1}{r_v^{\rho-2}} = \\
& = \frac{1}{\pi R^{\rho}} \int_0^{\pi} \operatorname{Re} \{ e^{-i(p-1)\theta} \ln f(\operatorname{Re} e^{i\theta}) \} \sin \theta d\theta +
\end{aligned}$$

$$+ \frac{1}{2\pi} I_p(R, \lambda, f) + O(1) (R \rightarrow \infty), \quad (3.5)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{a_v \in \overset{\circ}{U}_{\lambda, R}^-} \left\{ \frac{\sin p \theta_v}{p r_v^2} - \frac{\sin (p-2) \theta_v}{(p-2) R^2} \right\} \frac{1}{r_v^{p-2}} + \\ & + \frac{1}{2} \sum_{a_v \in \partial U_{\lambda, R}^-} \left\{ \frac{\sin p \theta_v}{p r_v^2} - \frac{\sin (p-2) \theta_v}{(p-2) R^2} \right\} \frac{1}{r_v^{p-2}} = \\ & = \frac{(-1)^p}{\pi R^p} \int_0^\pi \operatorname{Re} \{ e^{-i(p-1)\theta} \ln f(-R e^{i\theta}) \} \sin \theta d\theta - \\ & - \frac{1}{2\pi} I_p(R, \lambda, f) + O(1) (R \rightarrow \infty); \end{aligned} \quad (3.6)$$

где $U_{\lambda, R}^-$ получается из $U_{\lambda, R}^+$ поворотом на угол π :

$$I_p(R, \lambda, f) = \int_{\lambda}^R \left(1 - \frac{x^2}{R^2} \right) \frac{\ln |f(x)| + (-1)^p \ln |f(-x)|}{x^{p+1}} dx.$$

Доказательство. (3.5) — это (3.2) при $\rho = p$. (3.6) получается из (3.5) поворотом комплексной плоскости на угол π . Для дальнейшего нам удобно ввести обозначения

$$P_p(R, \lambda, f) = \int_{\lambda}^R \frac{1}{x^{p+1}} \ln \left| \prod_{j=0}^{2p-1} f(x e^{i \frac{j\pi}{p}}) \right| dx,$$

$$Q_p(R, \lambda, f) = \int_{\lambda}^R \left(1 - \frac{x^{2p}}{R^{2p}} \right) \frac{1}{x^{p+1}} \ln \left| \prod_{j=0}^{2p-1} f(x e^{i \frac{j\pi}{p}}) \right| dx,$$

$$S_p(R, f) = \frac{1}{R^p} \int_0^{2\pi} \ln |f(R e^{i\theta})| \cdot |\sin p \theta| d\theta.$$

Теорема 7. Для того, чтобы целая функция $f(z)$ нормально-го типа при порядке p была функцией класса A_p , необходимо и достаточно, чтобы при всех $R \geq \lambda > 0$ выполнялось неравенство

$$P_p(R, \lambda, f) < M_{f, \lambda}.$$

Доказательство. Достаточность. Записывая формулу Карлемана (3.1) для каждого угла и суммируя по j от 0 до $2p-1$, получаем

$$\sum_{\lambda < r_v < R} \left| \operatorname{Im} \frac{1}{a_v^p} \right| = \frac{p}{\pi} S_p(R, f) + \frac{p}{\pi} Q_p(R, \lambda, f) + \frac{1}{R^{2p}} \sum_{\lambda < r_v < R} |\operatorname{Im} a_v^p| + o(1) \quad (R \rightarrow \infty). \quad (3.7)$$

Имеем далее

$$\frac{1}{R^{2p}} \sum_{\lambda < r_v < R} |\operatorname{Im} a_v^p| \leq \frac{n(R)}{R^p} = o(1) \quad (R \rightarrow \infty). \quad (3.8)$$

По предположению $P_p(R, \lambda, f) < M_{f, \lambda}$, поэтому второе слагаемое в правой части (3.7) допускает оценку

$$Q_p(R, \lambda, f) = \frac{2p}{R^{2p}} \int_{\lambda}^R x^{2p-1} P_p(x, \lambda, f) dx < M_{f, \lambda}.$$

Последнее неравенство и (3.8) вместе с условием нормальности типа при порядке p функции $f(z)$ показывает, что каждое слагаемое в правой части (3.7) ограничено сверху при $R \rightarrow \infty$. Следовательно, $f(z) \in A_p$. Тем самым достаточность нашего условия доказана.

Необходимость. Пусть $f(z)$ — целая функция нормального типа при порядке p , принадлежащая классу A_p . Тогда из (3.7) и (3.8) получаем

$$\begin{aligned} P_p(R, \lambda, f) &\leq \frac{1}{R^{2p}} \left| \int_{\lambda}^R x^{p-1} \ln \left| \prod_{i=0}^{2p-1} f(xe^{i\frac{\pi}{p}}) \right| dx \right| + o(1) \leq \\ &\leq \frac{C}{R^{2p}} \int_{\lambda}^R x^{2p-1} dx + o(1) = o(1) \quad (R \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

Теорема 7 доказана.

Введем обозначения для некоторых подмножеств комплексной плоскости. Положим

$$G_p^+ = \{z : \operatorname{Im} z \geq 0; \sin(p \arg z) \geq 0\} \cup \{z : \operatorname{Im} z \leq 0; \sin(p \arg z) \geq 0\}$$

$$G_p^- = \{z : \operatorname{Im} z \geq 0; \sin(p \arg z) \leq 0\} \cup \{z : \operatorname{Im} z \leq 0; \sin(p \arg z) \leq 0\}$$

Через K_f мы обозначаем множество корней функции $f(z)$

$$B_p(R, \lambda, f) = \int_{\lambda}^R \frac{1}{x^{p+1}} \{ \ln |f(x)| + (-1)^{p-1} \ln |f(-x)| \} dx.$$

Теорема 8. Пусть $f(z)$ — целая функция нормального типа при целом порядке p , и пусть $K_f \subset G_p^+$ или $K_f \subset G_p^-$. Тогда необходимым и достаточным условием того, что $f(z) \in A_p$, является ограниченность сверху $B_p(R, \lambda, f)$ при $R \rightarrow \infty$.

Доказательство. Сначала мы докажем эту теорему в предположении, что $p \neq 2$ и $K_f \subset G_p^+$.

Не нарушая общности, будем считать, что $f(0) = 1$. Из формул (3.5) и (3.6) выводим

$$\begin{aligned} \frac{1}{2p} \sum_{\lambda < r_v < R} \left| \operatorname{Im} \frac{1}{a_v^p} \right| &\leq \frac{1}{\pi R^p} \int_0^\pi \operatorname{Re} \{ e^{-i(p-1)\theta} [\ln f(Re^{i\theta}) + (-1)^{p-1} \ln f \times \\ &\times (-Re^{i\theta})] \} \sin \theta d\theta + \frac{1}{\pi} I_p(R, \lambda, f) + \frac{1}{(p-2)R^2} \left\{ \sum_{a_v \in \dot{U}_{\lambda, R}^+} + \frac{1}{2} \times \right. \\ &\times \sum_{a_v \in \partial U_{\lambda, R}^+} - \sum_{a_v \in \dot{U}_{\lambda, R}^-} - \frac{1}{2} \sum_{a_v \in \partial U_{\lambda, R}^-} \left\{ \frac{\sin(p-2)\theta_v}{r_v^{p-2}} + O(1) \right\} \leq \frac{1}{p} \sum_{\lambda < r_v < R} \times \\ &\times \left| \operatorname{Im} \frac{1}{a_v^p} \right|. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Поскольку $f(z)$ имеет нормальный тип при порядке p , то по теореме Линделефа выполняется оценка $n(t) = O(t^p)$ ($t \rightarrow \infty$). Имеем

$$\begin{aligned} &\left| \frac{1}{(p-2)R^2} \left\{ \sum_{a_v \in \dot{U}_{\lambda, R}^+} + \frac{1}{2} \sum_{a_v \in \partial U_{\lambda, R}^+} - \sum_{a_v \in \dot{U}_{\lambda, R}^-} - \frac{1}{2} \sum_{a_v \in \partial U_{\lambda, R}^-} \right\} \times \right. \\ &\times \frac{\sin(p-2)\theta_v}{r_v^{p-2}} \left. \right| \leq \frac{1}{|p-2|R^2} \int_0^R \frac{dn(t)}{t^{p-2}} \leq \frac{n(R)}{|p-2|R^p} + \frac{1}{R_2} \times \\ &\times \int_0^R \frac{n(t)}{t^{p-1}} dt = O(1) \quad (R \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} &\frac{1}{(p-2)R^2} \left\{ \sum_{a_v \in \dot{U}_{\lambda, R}^+} + \frac{1}{2} \sum_{a_v \in \partial U_{\lambda, R}^+} - \sum_{a_v \in \dot{U}_{\lambda, R}^-} - \frac{1}{2} \sum_{a_v \in \partial U_{\lambda, R}^-} \right\} \times \\ &\times \frac{\sin(p-2)\theta_v}{r_v^{p-2}} = O(1) \quad (R \rightarrow \infty). \end{aligned} \quad (3.10)$$

Перейдем к оценке первого слагаемого центральной части (3.9). В силу того, что $f(0)=1$, по известной формуле Шварца имеем при $S>R$

$$\begin{aligned} \ln f(\pm Re^{i\theta}) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln |f(Se^{i\varphi})| \frac{Se^{i\varphi} \pm Re^{i\theta}}{Se^{i\varphi} \mp Re^{i\theta}} d\varphi + \\ &+ \sum_{rv < S} \ln \frac{S(\pm Re^{i\theta} - a_v)}{S^2 \mp \bar{a}_v Re^{i\theta}}. \end{aligned}$$

Следовательно [5, с. 58], выполняется неравенство

$$\begin{aligned} |\ln f(\pm Re^{i\theta})| &\leq \frac{2(S+R)}{S-R} m(S, f) + \sum_{rv < S} \ln \frac{2S}{|\pm Re^{i\theta} - a_v|} + \\ &+ \sum_{rv < S} |\arg(S^2 \mp \bar{a}_v Re^{i\theta}) - \arg(\pm Re^{i\theta} - a_v)|, \end{aligned}$$

где

$$m(S, f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln |f(Se^{i\varphi})| d\varphi.$$

Если в этом неравенстве положим $S=2R$, получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi R^p} \int_0^\pi (|\ln f(Re^{i\theta})| + |\ln f(-Re^{i\theta})|) \sin \theta d\theta &\leq \\ &\leq \frac{24}{\pi R^p} m(2R, f) + \frac{16}{R^p} n(2R) + \frac{1}{\pi R^p} \sum_{rv < 2R} \int_0^\pi \left(\ln \frac{4R}{|Re^{i\theta} - a_v|} + \right. \\ &\quad \left. + \ln \frac{4R}{|Re^{i\theta} + a_v|} \right) \sin \theta d\theta. \end{aligned}$$

Известным приемом [5, с. 58] можно показать

$$\int_0^\pi \ln \frac{4R}{|Re^{i\theta} \pm a_v|} \sin \theta d\theta \leq 2\pi \ln 4e,$$

откуда получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi R^p} \int_0^\pi (|\ln f(Re^{i\theta})| + |\ln f(-Re^{i\theta})|) \sin \theta d\theta &\leq \\ &\leq \frac{24}{\pi} \frac{m(2R, f)}{R^p} + (16 + 4 \ln 4e) \frac{n(2R)}{R^p}. \end{aligned}$$

Из этого неравенства следует, что

$$\frac{1}{\pi R^p} \int_0^\pi \operatorname{Re} \{ e^{-i(p-1)\theta} [\ln f(Re^{i\theta}) + (-1)^{p-1} \ln f(-Re^{i\theta})] \} \sin \theta d\theta = \\ = O(1) (R \rightarrow \infty). \quad (3.11)$$

Легко видеть также

$$\frac{1}{R^2} \int_\lambda^R \frac{\ln |f(x)| + (-1)^{p-1} \ln |\tilde{f}(-x)|}{x^{p-1}} dx = O(1) (R \rightarrow \infty). \quad (3.12)$$

Оценки (3.9), (3.10), (3.11) и (3.12) показывают в совокупности, что

$$\frac{1}{2p} \sum_{\lambda < r_\nu < R} \left| \operatorname{Im} \frac{1}{a_\nu^p} \right| \leq \frac{1}{\pi} B_p(R, \lambda, f) + O(1) \leq \frac{1}{p} \sum_{\lambda < r_\nu < R} \times \\ \times \left| \operatorname{Im} \frac{1}{a_\nu^p} \right|, (R \rightarrow \infty).$$

В свою очередь последнее соотношение показывает, что принадлежность функции $f(z)$ к классу A_p эквивалентна ограниченности сверху $B_p(R, \lambda, f)$ при $R \rightarrow \infty$.

Мы доказали теорему в предположении, что $p \neq 2$. В случае, когда $p=2$, наша теорема доказывается точно таким же образом, как и при $p \neq 2$, если в (3.5) и (3.6) совершить предельный переход при $p \rightarrow 2$.

Легко видеть также, что доказательство в случае, когда $K_f \subset (G_p^-)$ полностью аналогично приведенному. Итак, можно считать, что теорема 8 доказана.

Теоремы 7 и 8 дают различные обобщения критерия Н. И. Ахиезера [3, с. 293] принадлежности целой функции экспоненциального типа классу A . Заметим, что в теореме 7 нет никаких ограничений на положение корней функции $f(z)$ в плоскости, но зато интегрирование ведется по $2p$ лучам в комплексной плоскости, в теореме 8 интегрировать нужно лишь по вещественной оси, но налагается ограничение на расположение корней функции

$$f(z) : K_f \subset G_p^+ (K_f \subset G_p^-).$$

Даем еще некоторые варианты, эквивалентные теоремам 7 и 8 соответственно. Доказательств соответствующих теорем мы не приводим.

Теорема 9. Пусть условия теоремы 7 выполнены. Тогда условия

$$P_p(R, \lambda, f) < M_{f, \lambda}^{(0)}$$

равносильно каждому из следующих условий:

$$|P_p(R, \lambda, f)| < M_{f, \lambda}^{(1)},$$

$$P_p(R, f) < M_f^{(0)},$$

$$|P_p(R, f)| < M_f^{(1)},$$

где

$$P_p(R, f) = \int_0^R \frac{1}{1+x^{p+1}} \ln \left| \prod_{j=0}^{2p-1} f\left(xe^{i\frac{j\pi}{p}}\right) \right| dx.$$

Теорема 10. Пусть выполнены условия теоремы 8. Тогда условия

$$B_p(R, \lambda, f) < N_{f, \lambda}^{(0)}$$

равносильно каждому из следующих условий:

$$|B_p(R, \lambda, f)| < N_{f, \lambda}^{(1)},$$

$$B_p(R, f) < N_f^{(0)},$$

$$|B_p(R, f)| < N_f^{(1)},$$

где

$$B_p(R, f) = \int_0^R \frac{\ln |f(x)| + (-1)^{p-1} \ln |f(-x)|}{1+x^{p+1}} dx.$$

Автор пользуется случаем выразить глубокую благодарность профессору Б. Я. Левину, руководившему настоящей работой, и В. Н. Лопвиненко за ценные замечания и помощь при написании этой статьи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Крейн М. Г. О представлении функций интегралами Фурье—Стилтьеса. — Уч. зап. Куйбышевск. пед. ин-та, 1934, вып. 7, с. 5—12.
2. Ахиезер Н. И. К теории целых функций конечной степени. — ДАН СССР, т. 63, № 5, с. 475—478.
3. Левин Б. Я. Распределение корней целых функций М., ГИТТЛ, 1956. 632 с.
4. Левин Б. Я., Хачатрян И. О. Об обобщении одной теоремы Винера—Пэли для функций произвольного целого порядка и нормального типа в полуплоскости. — ДАН Арм. ССР, 1965, т. 41, № 1, с. 3—9.
5. Гольдберг А. А., Островский И. В. Распределение значений мероморфных функций. М., «Наука», 1970. 591 с.