ЗАПИСКИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА ХГУ И ХАРЬКОВСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

Том XXV 1957

О НЕКОТОРЫХ БИОРТОГОНАЛЬНЫХ РЯДАХ

Т. М. Карасева

Харьков

В различных областях прикладной и чистой математики играют существенную роль вопросы полноты системы функций вида

$$e^{i\lambda_n x} \tag{1}$$

в пространстве $L_2(0,1)$, где параметры λ_n выбираются из того или иного множества. В качестве примера достаточно назвать классическую теорию рядов Фурье, прикладная и теоретическая ценность которой обусловлена полнотой системы функций $e^{i\frac{n}{2\pi}x}$ $(n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

Вопрос о полноте системы (1) в зависимости от геометрической характеристики множества точек λ_n комплексной плоскости является весьма сложным. Наиболее далеко идущие результаты в этом направлении, насколько нам известно, получены Н. Левинсоном и А. Повзнером.

Однако в ряде случаев проще исследовать полноту системы (1), не опираясь на геометрическую структуру множества $\{\lambda_n\}$, а используя другие характеристики этого множества, непосредственно вытекающие из рассматриваемой задачи.

В предлагаемой работе исследуется полнота системы (1), у которой параметры λ_n являются нулями функции

$$p(\lambda)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^1 P(t)\,e^{-i\lambda t}\,dt \quad (P(t)\in L_2(0,1)). \tag{2}$$

Эта задача возникла из некоторых вопросов прикладного характера.

Заметим, что, если $P(t)\equiv 1$, то числа λ_n образуют арифметическую прогрессию. Поэтому теорема полноты теории рядов Фурье является частным случаем поставленной задачи.

Более того, к этой же задаче сводится вопрос о полноте системы собственных функций дифференциального оператора

$$L(y)\equiv y''+\rho(x)\,y,$$

удовлетворяющих граничным условиям

$$y'(0)-\theta y(0)=0; \quad y'(1)-\theta_1 y(1)=0,$$

где θ и θ_1 — произвольные комплексные числа. Подчеркнем, что граничные условия, вообще говоря, не являются самосопряженными.

В заключение отметим, что помимо исследования полноты системы (1) в работе дается эффективное построение биортогональной системы функций.

§ 1. Пусть $P(x)$ произвольная функция из $L_2(0,1)$ и $p(\lambda)$ — преобразование Фурье этой функции, определяемое равенством (2).

Перенумеруем все нули $p(\lambda)$:

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k, \ldots$$

и обозначим кратность нуля λ_k через m_k.

Рассмотрим совокупность функций

$$x^p e^{i\lambda_k x} (p = 0,1, \ldots, m_k - 1; \quad k = 1, 2, \ldots) \tag{3}$$

и обозначим замкнутую линейную оболочку этих функций через A. Для дальнейшего полезно получить другое определение этого множества. С этой целью рассмотрим уравнение

$$\int_0^1 P(t)\psi(x-t)\,dt = 0 \quad (-\infty < x < \infty) \tag{4}$$

вместе с начальным условием

$$\psi(x) = \psi_0(x) \quad (0 < x < 1), \tag{5}$$

предполагая, что функция $\psi_0(x)$ принадлежит $L_2(0,1)$.

Систему (4), (5) мы будем называть разрешимой, если существует функция

$$\psi(x) (-\infty < x < \infty),$$

обладающая следующими двумя свойствами:

1. $\psi(x)$ удовлетворяет соотношениям (4) и (5);
2. Существует столь большое число $c > 0$, что

$$e^{-c|x|}\psi(x) \in L_2(-\infty, \infty).$$

Обозначим через B линейное многообразие всех функций

$$\psi_0(x) \in L_2(0,1),$$

для которых система (4), (5) разрешима.

Связь между A и B устанавливает

Лемма. Пространство A совпадает с замыканием многообразия B.

Доказательство. $A \subset \overline{B}$. Действительно, каждая из функций (3) принадлежит B (если $\psi_0(x) = e^{i\lambda_n x}$ $(0 < x < 1)$, то функция $\psi(x) = e^{i\lambda_n x}$ $(-\infty < x < \infty)$ является решением системы (4) и (5)).

С другой стороны, $\overline{B} \subset A$, как это непосредственно вытекает из теоремы (см. [1], теорема 146):

Пусть $0 < c < c_1$ и $e^{c_1|x|}P(x)$ принадлежит к $L(-\infty, \infty)$, а $e^{-c|x|}\psi(x)$ — к $L_2(-\infty, \infty)$. Тогда, если $\psi(x)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} P(t)\psi(x-t)\,dt = 0 \quad (-\infty < x < \infty),$$

то она имеет вид

$$\psi(x) = \sum_{v=1}^{\infty}\sum_{p=1}^{m_v} c_{v,p}\, e^{i\lambda_v x} x^{p-1},$$

где λ_v пробегает все нули функции $p(\lambda)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}P(t)e^{-i\lambda t}\,dt$, для которых $|\operatorname{Im}\lambda_v|\leqslant c$, $c_{v,p}$—постоянные коэффициенты и m_v—кратность нуля λ_v.

В § 5 доказывается линейная независимость системы функций (3). Поэтому из приведенной теоремы вытекает также, что система функций (3) образует базис в B.

Итак, $A=B$, и лемма доказана.

Пусть $\psi_0(x)\in B$. Система (4), (5) при этом разрешима. Обозначим решение этой системы через $\psi(x)$.

Уравнение (4) можно переписать в виде

$$\int\limits_{x-1}^{x}P(x-s)\,\psi(s)\,ds=0\quad(-\infty<x<\infty).$$

Полагая здесь $x=1$, получаем в силу (5) соотношение

$$\int\limits_{0}^{1}P(1-s)\,\psi_0(s)\,ds=0. \tag{6}$$

Итак, каждая функция $\psi_0(x)\in B$ ортогональна $\overline{P(1-s)}$.

Таким образом, B содержится в ортогональном дополнении к функции $P(1-s)$ $(0\leqslant s\leqslant 1)$.

§ 2. Перейдем от однородного уравнения (4) с неоднородным начальным условием (5) к неоднородному интегральному уравнению с однородным начальным условием. С этой целью введем функцию $\psi_+(x)$ с помощью равенств

$$\psi_+(x)=0,\qquad (x\leqslant 0), \tag{7}$$

$$\psi_+(x)=\psi(x)\qquad (x<0). \tag{8}$$

Если функция $\psi(x)$ является решением системы (4), (5), то функция $\psi_+(x)$, очевидно, удовлетворяет следующему интегральному уравнению:

$$\int\limits_{x-1}^{x}P(x-s)\psi_+(s)\,ds=F(x), \tag{9}$$

где

$$F(x)=\begin{cases}0 & (x<0)\\ \int\limits_{0}^{x}P(x-s)\,\psi_0(s)\,ds & (0\leqslant x\leqslant 1)\\ 0 & (x>1).\end{cases} \tag{10}$$

Совершенно аналогичным образом введем функцию $\psi_-(x)$.

$$\psi_-(x)=\psi(x)\quad (x\leqslant 0), \tag{11}$$

$$\psi_-(x)=0\qquad (x>0). \tag{12}$$

Легко убедиться в том, что эта функция удовлетворяет уравнению

$$\int\limits_{x-1}^{x}P(x-s)\,\psi_-(s)\,ds=-F(x). \tag{13}$$

Ясно, что из разрешимости системы (4), (5) вытекает разрешимость каждой из систем (7), (9) и (12), (13).

Наоборот, из одновременной разрешимости этих двух систем вытекает разрешимость системы (4), (5). Действительно, складывая равенства (9) и (13), убеждаемся в том, что сумма $\psi_+(x)+\psi_-(x)$ удовлетворяет интегральному уравнению (4). Проверим теперь, что эта сумма удовлетворяет также начальному условию (5).

При $0<x<1$ функция $\psi_-(x)$ равна нулю в силу (12), а функция $\psi_+(x)$ совпадает (в смысле метрики $L_2(0,1)$) с функцией $\psi_0(x)$. Это непосредственно вытекает из теоремы 152 [1].

Отметим два свойства функции $F(x)$. Пусть $\psi_0(x)\in B$ и функция $F(x)$ определена равенством (10). Из этого равенства и из (6) вытекает, что

$$F(0)=0 \text{ и } F(1)=0. \tag{14}$$

Предположим теперь, что функция $P(x)$ дифференцируема в $(0,1)$ и ее производная принадлежит $L_2(0,1)$.

$$P'(x)\in L_2(0,1). \tag{15}$$

В этом случае функция $F(x)$ дифференцируема в том же интервале, причем

$$F'(x)=\int_0^x P'(x-s)\,\psi_0(s)ds+P(0)\,\psi_0(x) \quad (0<x<1). \tag{16}$$

Рассмотрим преобразование Фурье функции $F(x)$.

$$f(\lambda)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^1 F(t)e^{-i\lambda t}\,dt \quad (\lambda=\mu+i\sigma), \tag{17}$$

которое нам понадобится в дальнейшем. Интегрируя по частям интеграл, стоящий в правой части этого равенства и учитывая (14), получаем

$$f(\lambda)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{1}{i\lambda}\int_0^1 F'(t)\,e^{-i\lambda t}\,dt. \tag{18}$$

Из (16) следует, что функция $F'(x)$ принадлежит $L_2(0,1)$. Поэтому интеграл

$$\int_0^1 F'(t)\,e^{-i\lambda t}\,dt=\int_0^1 F'(t)\,e^{\sigma t}\,e^{-i\mu t}\,dt \quad (\lambda=\mu+i\sigma),$$

рассматриваемый как функция μ, принадлежит $L_2(0,1)$ при любом значении σ (согласно теореме Планшереля). Из (18) теперь следует:

$$(\mu+i\sigma)f(\mu+i\sigma)\in L_2(-\infty,\ \infty). \tag{19}$$

§ 3. В этом параграфе мы будем предполагать, что функция $P(x)$ не обращается в нуль на концах сегмента $[0,1]$

$$P(0)\neq 0;\quad P(1)\neq 0. \tag{20}$$

Кроме того, будем по-прежнему считать, что производная функции $P(x)$ существует и принадлежит $L_2(0,1)$.

При выполнении этих условий, как будет показано ниже, условие (6) принадлежности $\psi_0(x)$ к классу B является не только необходимым, но и достаточным. Это означает, что B совпадает с ортогональным дополнением в $L_2(0,1)$ к функции $\overline{P(1-x)}$.

Учитывая, что $\overline{B}=A$, мы приходим к следующей теореме.

Теорема 1. При выполнении условий (20), (15) совокупность функций (3) вместе с функцией $\overline{P(1-x)}$ образует базис в $L_2(0, 1)$.

Из теоремы 1 непосредственно вытекает

Следствие. При выполнении условий (20), (15) совокупность функций (3) вместе с функцией $e^{i\lambda_0 x}$ образует базис в $L_2(0, 1)$, если число λ_0 не совпадает ни с одним из чисел $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$

Для доказательства достаточно заметить, что условие $p(\lambda_0) \neq 0$ эквивалентно неравенству

$$\int_0^1 P(1-x)\, e^{i\lambda_0 x}\, dx \neq 0,$$

в силу которого функции $\overline{P(1-x)}$ и $e^{i\lambda_0 x}$ не ортогональны друг другу.

Прежде чем приступить к доказательству теоремы, выясним некоторые свойства функции $p(\lambda)$, вытекающие из условий (20), (15).

Интегрируя по частям интеграл, стоящий в правой части (2), находим

$$p(\lambda) = \frac{1}{i\lambda} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\int_0^1 P'(t)\, e^{-i\lambda t}\, dt + P(0) - P(1)\, e^{-i\lambda} \right]. \tag{21}$$

Для оценки интеграла $\int_0^1 P'(t)\, e^{-i\lambda t}\, dt$ воспользуемся неравенством Буняковского

$$\left| \int_0^1 P'(t)\, e^{-i\lambda t}\, dt \right|^2 \leqslant \int_0^1 |P'(t)|^2\, dt \int_0^1 e^{2\lambda t}\, dt =$$

$$= \frac{e^{2\lambda} - 1}{2\sigma} \cdot \int_0^1 |P'(t)|^2\, dt, \tag{22}$$

в силу которого модуль интеграла $\int_0^1 P'(t)\, e^{-i\lambda t}\, dt$ оказывается меньше, чем $\frac{1}{3} |P(0)|$, если только σ принимает достаточно большие по абсолютной величине отрицательные значения. Поэтому можно выбрать число $\sigma_1 < 0$ таким образом, чтобы при $\sigma \leqslant \sigma_1$ имело место неравенство

$$\left| \int_0^1 P'(t)\, e^{-i\lambda t}\, dt \right| + |P(1)\, e^{-i\lambda}| < \frac{1}{2} |P(0)|.$$

Опираясь на это неравенство и используя (21), получаем:

$$\frac{|P(0)|}{2\sqrt{2\pi}\,|\lambda|} < |p(\lambda)| < 3 \frac{|P(0)|}{2\sqrt{2\pi}\,|\lambda|} \quad (\sigma \leqslant \sigma_1 < 0). \tag{23}$$

Последнее неравенство показывает, что все нули функции $p(\lambda)$ лежат выше прямой $\operatorname{Im} \lambda = \sigma_1$.

Точно так же можно получить неравенства

$$\frac{|P(1)\, e^{\sigma}|}{2\sqrt{2\pi}\,|\lambda|} < |p(\lambda)| < 3 \frac{|P(1)|\, e^{\sigma}}{2\sqrt{2\pi}\,|\lambda|} \quad (\sigma \geqslant \sigma_2 > 0), \tag{24}$$

из которых вытекает, что все нули функции $p(\lambda)$ лежат ниже прямой $\operatorname{Im}\lambda = \sigma_2$.

Доказательство теоремы 1. Рассмотрим произвольную функцию $\psi_0(x) \in L_2(0, 1)$, удовлетворяющую условию (6). Покажем, что эта функция принадлежит классу B, построив решение системы (7), (9) и (12), (13) при условии, что функция $F(x)$ связана с функцией $\psi_0(x)$ соотношением (10).

С этой целью введем в рассмотрение интеграл

$$Q_\sigma(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{i\sigma-\infty}^{i\sigma+\infty} \frac{f(\lambda)}{p(\lambda)} e^{i\lambda x}\, d\lambda = \frac{e^{-\sigma x}}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\mu+i\sigma)}{p(\mu+i\sigma)} e^{i\mu x}\, d\mu, \qquad (25)$$

где функция $F(\lambda)$ определена равенством (17), и покажем, что этот интеграл сходится в смысле метрики $L_2(-\infty, \infty)$, если $\sigma \leqslant \sigma_1$ или $\sigma \geqslant \sigma_2$. Отношение $\dfrac{f(\mu+i\sigma)}{p(\mu+i\sigma)}$, рассматриваемое как функция μ, принадлежит $L_2(-\infty, \infty)$, если только $\sigma \leqslant \sigma_1$ или $\sigma \geqslant \sigma_2$. Это непосредственно вытекает из неравенств (19), (23) и (24). Поэтому, по теореме Планшереля преобразование Фурье этого отношения существует и принадлежит $L_2(-\infty, \infty)$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\mu+i\sigma)}{p(\mu+i\sigma)} e^{i\mu x}\, d\mu \in L_2(-\infty, \infty),$$

или, что то же

$$e^{\sigma x} Q_\sigma(x) \in L_2(-\infty, \infty) \quad (\sigma \leqslant \sigma_1 \text{ или } \sigma \geqslant \sigma_2).$$

Проверим, что и при $\sigma \leqslant \sigma_1$ и при $\sigma \geqslant \sigma_2$ функция $Q_\sigma(x)$ удовлетворяет уравнению (9).

Для этого вычислим интеграл

$$I(x) = \int\limits_{x-1}^{x} P(x-s)\, Q_\sigma(s)\, ds,$$

который можно переписать в виде

$$I(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} P(x-s)\, Q_\sigma(s)\, ds,$$

если положить

$$P(x) = 0 \quad (x \overline{\in} [0, 1]).$$

Представим последний интеграл в виде свертки двух функций из $L_2(-\infty, \infty)$.

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} P(x-s)\, Q_\sigma(s)\, ds = e^{-\sigma x}\int\limits_{-\infty}^{\infty} P(x-s)\, e^{\sigma(x-s)}\, Q_\sigma(s)\, e^{\sigma s}\, ds$$

$$(\sigma \leqslant \sigma_1 \text{ или } \sigma \geqslant \sigma_2).$$

Применяя теперь известную теорему о свертке (см [1], теорема 64), получаем

$$I(x) = e^{-\sigma x}\int\limits_{-\infty}^{\infty} p(\lambda)\, q(\mu)\, e^{i\mu x}\, d\mu, \qquad (26)$$

где $q(\mu)$ есть преобразование Фурье функции $Q_\sigma(x)e^{\sigma x}$. Последняя же функция согласно (25) является преобразованием Фурье функции

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{f(\mu+i\sigma)}{p(\mu+i\sigma)}.$$

Поэтому

$$q(\mu)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{f(\mu+i\sigma)}{p(\mu+i\sigma)}.$$

Подставляя это равенство в (26), будем иметь:

$$I(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\sigma x}\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(\mu+i\sigma)e^{i\mu x}d\mu.$$

Согласно (17) функция $f(\mu+i\sigma)$, рассматриваемая как функция μ, является преобразованием Фурье функции $F(x)e^{\sigma x}$ и, следовательно,

$$I(x)=F(x).$$

Таким образом, функция $Q_\sigma(x)$ действительно удовлетворяет уравнению (9), если только $\sigma\in(\sigma_1, \sigma_2)$.

Ясно, что функция $-Q_\sigma(x)$ удовлетворяет уравнению (13) при том же условии.

Проверим теперь, что функции $Q_{\sigma_1}(x)$ и $Q_{\sigma_2}(x)$ удовлетворяют также начальным условиям (7) и (12), соответственно. Рассмотрим, например, функцию $Q_{\sigma_1}(x)$, которую для краткости мы будем обозначать $Q_1(x)$, так что

$$Q_1(x)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{i\sigma_1-\infty}^{i\sigma_1+\infty}\frac{f(\lambda)}{p(\lambda)}e^{i\lambda x}d\lambda.$$

Чтобы убедиться в том, что функция $Q_1(x)$ обращается в нуль при $x<0$, рассмотрим интеграл

$$Q_1(x, b)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{i\sigma_1-b}^{i\sigma_1+b}\frac{f(\lambda)}{p(\lambda)}e^{ix\lambda}d\lambda \tag{27}$$

и покажем, что он стремится к нулю, если b стремится к бесконечности и $x<0$.

Числитель и знаменатель подинтегральной дроби последнего интеграла являются аналитическими функциями в любой конечной части плоскисти λ, знаменатель этой дроби не обращается в нуль ни в одной точке, лежащей ниже оси ннтегрирования.

В силу этого, прямолинейный путь интегрирования можно деформировать, превратив его в полуокружность радиуса b с центром в точке $\lambda=i\sigma_1$

$$Q_1(x, b)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\vee}\frac{f(\lambda)}{p(\lambda)}e^{ix\lambda}d\lambda. \tag{27}$$

Оценим величину дроби $\dfrac{f(\lambda)}{p(\lambda)}$ при $\sigma\leq\sigma_1$. В силу (18) и (23) получаем

$$\left|\frac{f(\lambda)}{p(\lambda)}\right|<\frac{2}{|P(0)|}\left|\int\limits_0^1 F'(t)e^{-i\lambda t}dt\right| \quad (\sigma\leq\sigma_1). \tag{29}$$

Как уже было указано, функция $F'(x)$ принадлежит $L_2(0, 1)$. Поэтому для любого положительного числа ε можно подобрать непрерывно дифференцируемую на интервале $(0,1)$ функцию $H(x)$ таким образом, чтобы

$$\int_0^1 \left| \frac{2}{|P(0)|} F'(t) - H(t) \right|^2 dt < \varepsilon^2.$$

Из неравенства (29) следует:

$$\left| \frac{f(\lambda)}{p(\lambda)} \right| < \int_0^1 \left| \frac{2}{|P(0)|} F'(t) - H(t) \right| \cdot |e^{-i\lambda t}| \, dt + \left| \int_0^1 H(t) e^{-i\lambda t} dt \right| \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon \sqrt{\int_0^1 e^{2\sigma t} dt} + \left| \int_0^1 H(t) e^{-i\lambda t} dt \right|.$$

Вычисляя интеграл под знаком радикала и интегрируя по частям второй интеграл в правой части последнего неравенства, будем иметь:

$$\left| \frac{f(\lambda)}{p(\gamma)} \right| < \varepsilon \sqrt{\frac{e^{2\sigma} - 1}{2\sigma}} + \frac{1}{|\lambda|} \int_0^1 |H'(t)| \, e^{\sigma t} dt + \frac{|H(1)|}{|\lambda|} e^{\sigma} + \frac{|H(0)|}{|\lambda|}.$$

Еще раз используя неравенство Буняковского, получим

$$\left| \frac{f(\lambda)}{p(\lambda)} \right| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2|\sigma|}} + \frac{1}{|\lambda|} \left\{ \sqrt{\int_0^1 |H'(t)^2 dt} \cdot \frac{1}{\sqrt{2|\sigma|}} + |H(1)| e^{\sigma} + |H(0)| \right\}.$$

Величина, стоящая в фигурной скобке последнего неравенства, является ограниченной, если $\sigma \leqslant \sigma_1$. Поэтому

$$\left| \frac{f(\lambda)}{p(\lambda)} \right| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2|\sigma|}} + \frac{c}{|\lambda|} \quad (\sigma \leqslant \sigma_1), \tag{30}$$

где c есть постоянная, зависящая только от ε и σ_1.

Используя неравенство (30), находим из (28) следующее:

$$|Q_1(x, b)| < \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{2|\sigma_1|}} + \frac{c}{b} \right) \int_{\gamma} |e^{ix\lambda} d\lambda| =$$

$$= \frac{e^{-x\sigma_1}}{2\pi} \left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{2|\sigma_1|}} + \frac{c}{b} \right) \int_0^{\pi} e^{bx \sin\varphi} b d\varphi.$$

Воспользуемся теперь неравенством

$$\int_0^{\pi} e^{-\alpha \sin\varphi} d\varphi < \frac{6\sqrt{2}}{\alpha} \quad (\alpha > 0),$$

в силу которого

$$|Q_1(x, b)| < \frac{3}{|x|} e^{-x\sigma_1} \frac{\varepsilon}{\sqrt{|\sigma_1|}} + \frac{c\sqrt{2}}{b} \Big) \quad (x < 0).$$

Устремляя в этом неравенстве b к бесконечности, находим

$$|Q_1(x)| \leqslant \frac{3}{|x|} e^{-x\sigma_1} \frac{\varepsilon}{\sqrt{|\sigma_1|}} \quad (x < 0).$$

Так как ε есть произвольное положительное число, то $Q_1(x)=0$, если $x<0$.

Совершенно аналогичным образом убеждаемся в том, что $Q_2(x)=0$, если $x>0$.

Таким образом, теорема 1 полностью доказана.

§ 4. Теорему 1 можно обобщить на тот случай, когда функция $P(x)$ обращается в нуль на концах интервала $(0, 1)$, если сделать при этом следующие предположения:

1. Точка $x=0$ и $x=1$ являются нулями $P(x)$ одинаковой кратности r.

2. Функция $P(x)$ дифференцируема $r+1$ раз и $P^{(r+1)}(x)\in L_2(0,1)$.

При выполнении этих условий имеет место следующая теорема.

Теорема 2. Система функций (3) вместе с функциями

$$e^{i\lambda_0 x},\ e^{i\lambda_{-1}x},\ e^{i\lambda_{-2}x},\ \ldots,\ e^{i\lambda_{-r}x} \tag{31}$$

образует базис в $L_2(0,1)$, если числа $\lambda_0, \lambda_{-1}, \ldots, \lambda_{-r}$ не равны друг другу и не являются нулями функции $p(\lambda)$.

Если $r=1$, то для доказательства теоремы достаточно рассмотреть функцию

$$P_1(x)=P'(x)-i\lambda_{-1}P(x).$$

Эта функция не обращается в нуль при $x=0$ и $x=1$, а ее преобразование Фурье равно

$$p_1(\lambda)=i(\lambda-\lambda_{-1})p(\lambda).$$

Применяя к $P_1(x)$ следствие из теоремы 1, мы приходим к теореме 2.

Если $r>1$, то следует воспользоваться этим приемом r раз.

§ 5. Из теоремы 2 вытекает, что каждая функция $g(x)\in L_2(0, 1)$ может быть разложена в ряд

$$g(x)=\sum_{-r}^{\infty}c_\nu\sum_{\rho=0}^{m_\nu-1}x^\rho e^{i\lambda_\nu x}, \tag{32}$$

сходящийся в среднем квадратичном.

В этом параграфе мы докажем, что коэффициенты этого разложения определяются единственным образом и укажем способ их вычисления. С этой целью построим систему функций

$$\varphi_{\nu,\rho}(x)=\int_0^{1-x}P(t)\,e^{-i\lambda_\nu(x+t)}P_{\nu,\rho}(x+t)\,dt, \tag{33}$$

где $R_{\nu,\rho}(x)$ полином степени ρ $(\rho=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ m_\nu-1)$.

Эту систему можно сделать биортогональной к системе (3), если выбрать полиномы $R_{\nu,\rho}(x)$ следующим образом.

Введем в рассмотрение функции

$$S_{\nu,l}(x)=\int_0^x P(t)\,e^{-i\lambda_\nu t}(x-t)^l\,dt \quad (l=1,\ 2,\ldots,\ m_\nu-1)$$

и подберем полиномы

$$R_{\nu,\rho}(x) \quad (\rho=1,\ 2,\ \ldots,\ m_\nu-1)$$

так, чтобы
$$\int_0^1 R_{\nu,\rho}(x)\,S_{\nu,l}S_{\nu,l}(x)\,dx=0 \quad (l<\rho).$$

Непосредственная проверка показывает, что при таком выборе полиномов $R_{\nu,\rho}(x)$ каждая из функций $\varphi_{\nu,\rho}(x)$ ортогональна всем функциям системы (3), за исключением функции $x^{m_\nu-\rho-1}$.

Итак, система (33) биортогональна системе (3).

Полученная биортогональная к (3) система функций позволяет элементарным путем построить систему функций, биортогональную ко всем функциям, входящим в (3) и (31).

Поэтому коэффициенты c_ν в разложении (32) определяются однозначно.

Из приведенных рассуждений вытекает также, что подпространство A, представляющее собой линейную замкнутую оболочку функций системы (3), имеет в качестве своего ортогонального дополнения подпространство $(r+1)$ измерения.

§ 6. Примеры. В заключение рассмотрим два примера.

1. Пусть
$$P(x)=1 \quad (0 \leqslant x \leqslant 1).$$
В этом случае
$$p(\lambda)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1-e^{-i\lambda}}{i\lambda}\,; \; \lambda_n=2\pi n \; (n=\pm 1, \pm 2, \ldots).$$
Так как для функции $P(x)=1$ число r равно нулю, то согласно теореме 1 совокупность функций
$$e^{i\pi x},\; e^{-i\pi x},\; e^{2i\pi x},\; e^{-2i\pi x}, \ldots$$
вместе с функцией $\overline{P(1-x)}=1$ образует базис. Мы получили, таким образом, новое доказательство одной из основных теорем теории рядов Фурье.

2. Положим теперь
$$P(x)=e^{iz\cos 2\pi x} \quad (0 \leqslant x \leqslant 1).$$
С помощью формулы (2) находим функцию $p(\lambda)$
$$p(\lambda)=\frac{e^{i\frac{\lambda}{4}}}{\sqrt{2\pi}} I_{-\frac{\lambda}{2\pi}}(z),$$
где $I_{-\frac{\lambda}{2\pi}}(z)$ есть функция Бесселя порядка $-\frac{\lambda}{2\pi}$.

Обозначим через $\qquad S_1(x),\; S_2(x), \ldots$

нули $I_s(z)$, рассматриваемой как функцию аргумента s. Тогда по доказанному система функций
$$\left\{e^{-2\pi i\, S_k(z)\, x}\right\}_{k=1}^{\infty}$$
становится полной, если к ней присоединить какую-либо функцию вида
$$e^{i\lambda_0 x} (\lambda_0 \neq -2\pi S_k(z), \quad k=1, 2, \ldots).$$
В качестве такой функции можно взять единицу, если только $I_0(z) \neq 0$.

§ 7. В качестве применения теоремы 2 рассмотрим вопрос о полноте совокупности собственных функций краевой задачи
$$z''-\rho(y)z+\lambda^2 z=0 \quad (\rho(y) \in L_2(0, 1)), \tag{34}$$
$$z(0)=1; \quad z'(0)=h; \tag{35}$$
$$z'(1)=h_1 z(1), \tag{36}$$
не предполагая соответствующий оператор эрмитовым.

Предварительно докажем лемму.

Лемма. Если функция $\omega(y, \lambda)$ удовлетворяет уравнению (34) и начальным условиям (35), то она может быть представлена в виде[1]

$$\omega(y, \lambda) = \cos\lambda y + \int_{-y}^{y} g(y, \xi)\cos\lambda\xi\, d\xi. \tag{37}$$

Если функция $\rho(y)$ дифференцируема k раз в интервале (0,1) то $g(y, \xi)$ дифференцируема по y столько же раз.

Доказательство. Рассмотрим уравнение в частных производных

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \rho(y)\, u = 0 \tag{38}$$

вместе с начальными условиями

$$u(x, 0) = \cos\lambda x, \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial y} = hu(x, 0). \tag{39}$$

Легко проверить, что функция

$$u(x, y) = \cos\lambda x \cdot \omega(y, \lambda)$$

является решением системы (38), (39).

Если воспользоваться теперь формулой Римана для решения задачи Коши (38), (39), то получим

$$u(x, y) = \cos\lambda x\omega(y, \lambda) = \frac{\cos\lambda(x-y) + \cos\lambda(x+y)}{2} - \frac{1}{2}\int_{x-y}^{x+y}\left\{\frac{\partial v(\xi, 0, x, y)}{\partial\eta} + hv(\xi, o, x, y)\right\}\cos\lambda\xi d\xi. \tag{40}$$

Здесь $v(\xi, \eta, x, y)$ — функция Римана, определяемая интегральным уравнением Вольтерра

$$v(t, s) = 1 + \int_{s_0}^{s}\int_{t_0}^{t}\rho(\sigma-\tau)\, v(\tau, \sigma)\, d\tau d\sigma \begin{pmatrix} t = \frac{\xi-\eta}{2}, & s = \frac{\xi+\eta}{2} \\ t_0 = \frac{x-y}{2}, & s_0 = \frac{x+y}{2}\end{pmatrix}. \tag{41}$$

Полагая в (40) $x = 0$ и обозначая

$$\frac{\partial v(\xi, 0, 0, y)}{\partial\eta} + hv(\xi, 0, 0, y) = g(y, \xi), \tag{42}$$

получим (37).

Последнее утверждение леммы непосредственно вытекает из (41) и (42).

Приведенная лемма позволяет написать уравнение, которому удовлетворяют все собственные числа краевой задачи (34), (35). (36). Действительно, подставляя (37) в уравнение (36), находим

$$-\lambda\sin\lambda + \int_{-1}^{1} g'_y(1, \xi)\cos\lambda\xi d\xi + g(1,1)\cos\lambda + g(1, -1)\cos\lambda = h_1\left(\cos\lambda + \int_{-1}^{1} g(1, \xi)\cos\lambda\xi d\xi\right).$$

[1] Этой формулой для других целей пользовались Дельсарт, Левитан и Повзнер. Приводимое ниже доказательство леммы заимствовано у Левитана.

Это уравнение естественно называть характеристическим. Обозначим корни характеристического уравнения через

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots$$

и кратность λ_k через m_k.

Теорема 3. Совокупность собственных функций (34) — (36) $\omega(y, \lambda_k)$ $(k=1, 2, \ldots)$ и их производных по λ $\frac{\partial^i \omega}{\partial \lambda^i}$ $(i=1, 2, \ldots m_k-1)$ является полной в L_2 (0,1).

При доказательстве этой теоремы мы ограничимся случаем, когда все корни характеристического уравнения просты, так как распространение доказательства на общий случай не представляет затруднений.

Доказательство теоремы 3. Вводя обозначения

$$\begin{aligned} q_1(\xi) &= g'_y(1, \xi) - h_1 g(1, \xi), \\ q(\xi) &= \frac{1}{2}[q_1(\xi) + q_1(-\xi)], \\ a &= \frac{1}{2}[g(1,1) + g(1, -1) - h_1], \end{aligned} \tag{43}$$

перепишем характеристическое уравнение в виде

$$M(\lambda) = \int_{-1}^{1} q(\xi)\, e^{i\xi\lambda} d\xi + \left(a + \frac{i\lambda}{2}\right) e^{i\lambda} + \left(a - \frac{i\lambda}{2}\right) e^{-i\lambda} = 0. \tag{44}$$

Обозначим через λ_0 и λ_1 какие-либо два корня уравнения (44). Тогда, как легко проверить, имеет место тождество

$$M(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)(\lambda - \lambda_1) \int_{-1}^{1} \nu(t)\, e^{i\lambda t} dt, \tag{45}$$

где

$$\nu(t) = -ie^{-i\lambda_1 t} \int_{-1}^{t} \mu(t)\, e^{i\lambda_1 t} dt - \frac{1}{2} e^{-i\lambda_1 (1+t)} \tag{46}$$

и

$$\mu(t) = -ie^{-i\lambda_0 t} \int_{-1}^{t} q(t)^{i\lambda_0 t} dt - i\left(a - \frac{\lambda_0 i}{2}\right) e^{-i\lambda_0 (1+t)}. \tag{47}$$

Преобразуем с помощью подстановки $t = 2y - 1$ полученное выражение для $M(\lambda)$.

$$M(\lambda) = 2(\lambda - \lambda_0)(\lambda - \lambda_1)\, e^{-i\lambda} \int_0^1 P(y)\, e^{2i\lambda y} dy \quad (P(y) \doteq \nu(2y-1)).$$

Нетрудно проверить с помощью равенств (46) и (47), что $P(0) = \frac{1}{2}$ и $P(1) = -\frac{1}{2}$, в то время как производная $P'(y)$ квадратично интегрируема в интервале (0,1).

Применяя следствие из теоремы (1), находим, что система функций

$$\left\{ e^{2i\lambda k y} \right\}_{k=1}^{\infty} \tag{48}$$

образует базис в пространстве $L_2(0,1)$. Здесь $\lambda_2, \lambda_3, \ldots$ суть нули функции $M(\lambda)$, отличные от λ_0 и λ_1.

Отсюда следует, что

$$\left\{ e^{i\lambda_k y} \right\}_{k=1}^{\infty}$$

образует базис в $L_2(-1,1)$.

Заметим, что уравнение (34) не изменяется при замене λ на $-\lambda$. Поэтому, если λ_k есть нуль функции $M(\lambda)$, то и $-\lambda_k$ также является нулем этой функции. Отсюда следует, что система (51) эквивалентна системе

$$e^{i\lambda_1 y}, \left\{\cos\lambda_k y,\ \sin\lambda_k y\right\}_{k=2}^{\infty} \tag{49}$$

(мы предположили, что в качестве λ_1 взят нуль $\lambda_1 = -\lambda_0$). Поэтому всякую функцию $\varphi(y) \in L_2(-1,1)$ можно разложить в ряд

$$\varphi(y) = a_1 e^{i\lambda_1 y} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\lambda_k y + \sum_{k=2}^{\infty} b_k \sin\lambda_k y.$$

Если функция $\varphi(y)$ четна, то последнее разложение можно переписать в виде

$$\varphi(y) = a_1 \cos\lambda_1 y + \sum_{k=2}^{\infty} a_k \cos\lambda_k y.$$

Отсюда следует, что система функций

$$\left\{ \cos\lambda_k y \right\}_{k=1}^{\infty} \tag{50}$$

образует базис в пространстве $L_2(0,1)$.

Теперь нетрудно доказать, что совокупность собственных функций краевой задачи (34), (35), (36)

$$\left\{ \omega(y,\ \lambda_k \right\}_{k=1}^{\infty}$$

образует базис в $L_2(0,1)$. Для доказательства воспользуемся формулой (37).

Пусть $f(y) \in L_2(0,1)$. Как известно из теории интегральных уравнений Вольтерра, существует $\varphi(y) \in L_2(0,1)$ такая, что

$$f(y) = \varphi(y) + \int_0^y g(y,\ t)\varphi(t)\,dt \quad (0 \leqslant y \leqslant 1). \tag{51}$$

Функцию $\varphi(y)$ можно разложить в ряд

$$\varphi(y) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \cos\lambda_k y.$$

Подставляя это разложение в (51), получим согласно (37) разложение $f(y)$ в ряд по функциям $\omega(y,\ \lambda_k)$, сходящееся в смысле метрики $L_2(0,1)$. Теорема доказана.

Заметим, что при доказательстве мы использовали теорему о существовании хотя бы одной собственной функции краевой задачи **(34)**, (35).

ЛИТЕРАТУРА

1. Е. Титчмарш. Введение в теорию интегралов Фурье. Гостехиздат, 1948 г.