

Міністерство освіти і науки України

ВІСНИК

Харківського національного
університету
імені В.Н. Каразіна



№ 1081

Харків
2013

K-14038

П336232

V.N. Karazin Kharkiv National University



01074983

4

2448.4 (4412K) 708.25

ВІСНИК

Харківського національного
університету імені В. Н. Каразіна



№ 1081

Серія

**«Математика, прикладна математика
і механіка»**

Випуск 68

Заснована у 1965 р.

**Харків
2013**

18

До Віснику включено статті з математичного аналізу, диференціальних рівнянь, математичної теорії керування та механіки, які містять нові теоретичні результати у зазначених галузях і мають прикладне значення.

Для викладачів, наукових працівників, аспірантів, працюючих у відповідних або суміжних сферах.

Затверджено до друку рішенням Вченої ради Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна (протокол №11 від 25 листопада 2013 р.).

Редакційна колегія:

Головний редактор – Коробов В.І. – д-р ф.-м. наук, Україна

Члени редакційної колегії:

Борисенко О.А. – д-р ф.-м. наук, чл.-кор. НАН України, Україна

Гандель Ю.В. – д-р ф.-м. наук, Україна

Гришин А.П. – д-р ф.-м. наук, Україна

Дабровски А. – д-р ф.-мат. наук, Польща

Золотарьов В.О. – д-р ф.-м. наук, Україна

Карлович Ю. – д-р ф.-м. наук, Мексика

Пацегон М.Ф. – д-р ф.-м. наук, Україна

Руткас А.Г. – д-р ф.-м. наук, Україна

Скляр Г.М. – д-р ф.-м. наук, Україна

Солдатов О.П. – д-р ф.-м. наук, Росія

Фаворов С.Ю. – д-р ф.-м. наук, Україна

Чуешов І.Д. – д-р ф.-м. наук, чл.-кор. НАН України, Україна

Щербина В.О. – д-р ф.-м. наук, Україна

Янцевич А.А. – д-р ф.-м. наук, Україна

Відповідальний секретар – канд. ф.-м. наук Резуненко О.В., Україна

Адреса редакційної колегії: 61022, Харків, майдан Свободи, 4,
ХНУ імені В.Н. Каразіна, механіко-математичний факультет, к.7-27.

Тел. 7075240, 7075135, Email: vestnik@univer.kharkov.ua

Интернет:

<http://vestnik-math.univer.kharkov.ua/>

Статті пройшли внутрішнє та зовнішнє рецензування.

Свідчення суб'єкта видавничої справи ДК № 3367 від 13.01.09
ОБОВ'ЯЗКОВИЙ ПРИМІРНИК

©Харківський національний університет
імені В.Н. Каразіна, оформлення, 2013



ЗМІСТ

Нгуен Ван Куинь , Об одном свойстве функции $\ x - y\ ^{2-m}$.	4
Костянко А. Г. , Множество предельных точек интегральных сумм Хенстока-Курцвейля векторнозначной функции.	10
Массалітіна Є.В. , Задача Гурса з імпульсними збуреннями.	21
Марченко В.А. , Симметрически-спектральные операторы в пространствах ℓ_p ($1 \leq p < \infty$) и c_0 .	33
Штефан Т. О., Величко О. В. , Дослідження потенційної енергії формозміни в прямокутній плиті, на яку тисне опуклий штамп.	45
Сыровацкий В.Н. , Функциональные модели коммутативных систем операторов близких к унитарным.	54
Коробов В.И., Луценко А.В. , Экспоненциальная стабилизация одного класса нелинейных систем с ограниченным управлением.	67
Скорик В. А. , О множестве позиционных управлений, решающих задачу глобального синтеза для линейного уравнения в гильбертовых пространствах.	76

CONTENTS

Nguyen Van Quynh , About one property of the function $\ x - y\ ^{2-m}$.	4
A.G. Kostianko , The limit set of the Henstock-Kurzweil integral sums of a vector-valued function.	10
E.V. Massalitina , The Goursat problem with impulse perturbations.	21
V.A. Marchenko , Symmetrically-spectral operators on ℓ_p ($1 \leq p < \infty$) and c_0 spaces.	33
T. A. Shtefan, H. V. Velichko , Research the potential energy of forming a rectangular plate, which pushes convex stamp.	45
V.N. Syrovatskyi , Functional models of commutative systems of operators close to the unitary.	54
V.I. Korobov, A.V. Lutsenko , Exponential stabilization of a class of nonlinear systems with constrained control.	67
V. A. Skoryk , On a set of positional controls which solve the global synthesis problem for a linear equation in Hilbert spaces.	76

Об одном свойстве функции $\|x - y\|^{2-m}$

Нгуен Ван Куинь

Харьковский национальный университета имени В.Н. Каразина,
пл. Свободы, 4, 61022, Харьков, Украина
quynhsonla1988@gmail.com, quynh_sonla032@yahoo.com

Ядро $h_m(x - y) = \|x - y\|^{2-m}$ играет важную роль в теории субгармонических в пространстве $\mathbb{R}^m$ ($m \geq 3$) функций. Мы рассматриваем ядро $h_m(x - y)$ при любом $y \in \mathbb{R}^m$ как элемент пространства $L_p(\gamma, \mathbb{R}^m)$. В статье приводится достаточное условие на меру γ для того, чтобы функция $h_m(x - y) \in L_p(\gamma, \mathbb{R}^m)$ была равномерно непрерывной по параметру y в $\mathbb{R}^m$. Приводятся примеры конкретных мер γ , которые удовлетворяют приведенному условию.

Ключевые слова: $(m - 1)$ -мерная мера Хаусдорфа, равномерная непрерывность.

Нгуен Ван Куинь, Про одну властивість функції $\|x - y\|^{2-m}$. Ядро $h_m(x - y) = \|x - y\|^{2-m}$ відіграє важливу роль в теорії субгармонічних у просторі $\mathbb{R}^m$ ($m \geq 3$) функцій. Ми розглядаємо ядро $h_m(x - y)$ для будь-якого $y \in \mathbb{R}^m$ як елемент простору $L_p(\gamma, \mathbb{R}^m)$. У статті наводиться достатня умова на міру γ для того, щоб функція $h_m(x - y) \in L_p(\gamma, \mathbb{R}^m)$ була рівномірно неперервною за переметром y у $\mathbb{R}^m$. Наводяться приклади конкретних мір γ , які задовольняють наведену умову.

Ключові слова: $(m - 1)$ -мірна міра Хаусдорфа, рівномірна неперервність.

Nguyen Van Quynh, **About one property of the function $\|x - y\|^{2-m}$.** The kernel $h_m(x - y) = \|x - y\|^{2-m}$ is important in the theory of subharmonic functions in the space $\mathbb{R}^m$ ($m \geq 3$). For any $y \in \mathbb{R}^m$ we consider the kernel $h_m(x - y)$ as an element of the spaces $L_p(\gamma, \mathbb{R}^m)$. In this article we give a sufficient condition on a measure γ the function $h_m(x - y) \in L_p(\gamma, \mathbb{R}^m)$ to be uniformly continuous in the parameter y in $\mathbb{R}^m$. We give examples of measures γ , which satisfy this condition.

Keywords: $(m - 1)$ -dimensional Haysdorff measure, uniform continuity.

2000 Mathematics Subject Classification 31B10, 46E27.

В статье рассматривается функция $h_m(x-y) = (\sum_{i=1}^m (x_i - y_i)^2)^{(2-m)/2}$ как отображение из пространства $\mathbb{R}_y^m$ в пространство $L_p(\mathbb{R}^m, d\gamma(x))$, где γ – некоторая положительная мера в пространстве $\mathbb{R}_x^m$.

Теорема. Пусть $p \geq 1$ – произвольное фиксированное число. Пусть γ – положительная конечная борелевская мера такая, что

$$\sup \left\{ \int_{B(y,\delta)} |h_m(x-y)|^p d\gamma(x) : y \in \mathbb{R}^m \right\} \rightarrow 0 \quad (\delta \rightarrow 0). \quad (1)$$

Тогда функция $h_m(x-y) : \mathbb{R}^m \rightarrow L_p(\gamma)$ является равномерно непрерывной по переменной y в $\mathbb{R}^m$.

Доказательство.

1. Обозначим

$$\psi(y_1, y_2) = \left(\int |h_m(x-y_1) - h_m(x-y_2)|^p d\gamma(x) \right)^{\frac{1}{p}},$$

$$F(y) = \left(\int |h_m(x-y)|^p d\gamma(x) \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Так как ядро $h_m(x-y)$ как функция из $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$ в $\mathbb{R}$ не ограничена, то нужно доказать сходимость введенных интегралов. Из неравенства Минковского следует, что

$$F(y) \leq \left(\int_{B(y,\delta)} |h_m(x-y)|^p d\gamma(x) \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_{CB(y,\delta)} |h_m(x-y)|^p d\gamma(x) \right)^{\frac{1}{p}} = J_1 + J_2,$$

где $CB(y,\delta) = \mathbb{R}^m \setminus B(y,\delta)$. При $x \in CB(y,\delta)$ выполняется неравенство

$$|h_m(x-y)| \leq \delta^{2-m}.$$

Из этого неравенства следует, что $J_2 \leq \delta^{2-m}(\gamma(\mathbb{R}^m))^{\frac{1}{p}}$. По условию теоремы $J_1 \leq 1$ при достаточно малых δ . Отсюда получаем конечность $F(y)$. Доказанное можно формулировать и так: при любом $y \in \mathbb{R}^m$ ядро $h_m(x-y)$ есть элемент пространства $L_p(\gamma)$. Из неравенства $\psi(y_1, y_2) \leq F(y_1) + F(y_2)$ следует конечность $\psi(y_1, y_2)$.

2. Докажем, что при $\|x-y\| \geq \delta$, выполняется неравенство

$$\|\nabla_y h_m(x-y)\| \leq \frac{m-2}{\delta^{m-1}}. \quad (2)$$

Имеем

$$(h_m(x-y))'_{y_i} = (m-2) \frac{y_i - x_i}{\|x-y\|^m} \quad (i = 1, 2, \dots, m).$$

Из этой формулы легко получается неравенство (2).

3. Теперь докажем, что выполняется соотношение

$$\psi(y, y_0) \rightarrow 0 \quad (y \rightarrow y_0).$$

Пусть $\delta > 0$ – произвольное число. Будем считать, что выполняется неравенство $\|y - y_0\| \leq \delta$. Последовательное применение неравенства Минковского и включения $B(y_0, 2\delta) \subset B(y, 3\delta)$ даёт

$$\begin{aligned} \psi(y, y_0) &\leq \left(\int_{CB(y_0, 2\delta)} |h_m(x - y) - h_m(x - y_0)|^p d\gamma(x) \right)^{\frac{1}{p}} + \\ &+ \left(\int_{B(y_0, 2\delta)} |h_m(x - y_0)|^p d\gamma(x) \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_{B(y, 3\delta)} |h_m(x - y)|^p d\gamma(x) \right)^{\frac{1}{p}} = \\ &= J_1 + J_2 + J_3. \end{aligned}$$

Если $x \notin B(y_0, 2\delta)$, $\|y - y_0\| \leq \delta$, то для любого $w \in B(y_0, \|y - y_0\|)$ будут выполняться неравенства $\|x - w\| \geq \delta$, $\|\nabla_y h_m(x - w)\| \leq \frac{m-2}{\delta^{m-1}}$. Из оценки градиента следует, что

$$|h_m(x, y) - h_m(x, y_0)| \leq \frac{m-2}{\delta^{m-1}} \|y - y_0\|, \quad J_1 \leq \frac{m-2}{\delta^{m-1}} (\gamma(\mathbb{R}^m))^{\frac{1}{p}} \|y - y_0\|.$$

Из условий теоремы получаем: $J_2 \Rightarrow 0, J_3 \Rightarrow 0 \quad (\delta \rightarrow 0)$, что доказывает требуемое утверждение.

4. Предположим, что утверждение теоремы неверно. Тогда существуют число $\varepsilon > 0$, последовательности y_{2n}, y_{1n} такие, что $y_{2n} - y_{1n} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$, $\psi(y_{2n}, y_{1n}) \geq \varepsilon$. Не ограничивая общности, можно считать, что $y_{1n} \rightarrow y_0 \in \mathbb{R}^m \cup \{\infty\} \quad (n \rightarrow \infty)$.

Так как мера γ конечна, то существует число R такое, что $\gamma(CB(0, R)) < \varepsilon$. Имеем

$$\begin{aligned} F(y_{1n}) &\leq \left(\int_{B(0, R)} |h_m(x - y_{1n})|^p d\gamma(x) \right)^{\frac{1}{p}} + \\ &+ \left(\int_{B(y_{1n}, \delta)} |h_m(x - y_{1n})|^p d\gamma(x) \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_E |h_m(x - y_{1n})|^p d\gamma(x) \right)^{\frac{1}{p}} = \\ &= J_1 + J_2 + J_3, \end{aligned}$$

где $E = CB(0, R) \setminus B(y_{1n}, \delta)$. При $x \in E$ выполняется неравенство

$$h_m(x - y) \leq \delta^{2-m}.$$

Из этого неравенства следует, что $J_3 \leq \delta^{(2-m)p} \gamma(CB(0, R)) < \delta^{(2-m)p} \varepsilon$. По условию теоремы $J_2 < \varepsilon$ при достаточно малых δ . Имеется очевидное соотношение $J_1 < \varepsilon$ при достаточно больших $\|y_{1n}\|$. Отсюда получаем, что $F(y_{1n}) \rightarrow 0$ ($y_{1n} \rightarrow \infty$ ($n \rightarrow \infty$)). Аналогично $F(y_{2n}) \rightarrow 0$ ($y_{2n} \rightarrow \infty$ ($n \rightarrow \infty$)). Из неравенства $\psi(y_{2n}, y_{1n}) \leq F(y_{1n}) + F(y_{2n})$ следует, что $\psi(y_{2n}, y_{1n}) \rightarrow 0$ ($y_{2n} - y_{1n} \rightarrow 0, y_{1n} \rightarrow \infty, (n \rightarrow \infty)$). Это противоречит принятому предположению $\psi(y_{2n}, y_{1n}) \geq \varepsilon$ и, тем самым, $y_0 \neq \infty$.

Из неравенства Минковского следует, что

$$\psi(y_{2n}, y_{1n}) \leq \psi(y_{2n}, y_0) + \psi(y_{1n}, y_0).$$

Набор полученных нами утверждений в совокупности противоречив. Тем самым теорема доказана.

Отметим, что случай $m = 2$, изучался в работе [1].

Далее приведем примеры конкретных мер γ , для которых справедливо условие (1).

Пример 1. Пусть λ – мера Лебега в пространстве $\mathbb{R}^m$. Мы будем использовать стандартное обозначение $d\lambda = dx$. Рассматриваем интеграл, входящий в условие (1) и, сделав параллельный перенос, получаем равенство:

$$J_1 = \int_{B(y, \delta)} \|x - y\|^{p(2-m)} dx = \int_{B(0, \delta)} \|x\|^{p(2-m)} dx.$$

Введём полярные координаты:

$$\begin{cases} x_1 = r \cos \varphi_1, \\ x_2 = r \sin \varphi_1 \cos \varphi_2, \\ \dots, \\ x_{m-1} = r \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \cdots \sin \varphi_{m-2} \cos \varphi_{m-1}, \\ x_m = r \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \cdots \sin \varphi_{m-2} \sin \varphi_{m-1}. \end{cases} \quad (3)$$

Получаем равенство

$$\int_{B(0, \delta)} \|x\|^{p(2-m)} dx = \sigma_{m-1} \int_0^\delta r^{(m-1)+p(2-m)} dr,$$

где σ_{m-1} – площадь единичной сферы в пространстве $\mathbb{R}^m$. Из этого следует, что при $p \in [1, \frac{m}{m-2})$ интеграл J_1 стремится к нулю при $\delta \rightarrow 0$ равномерно относительно $y \in \mathbb{R}^m$.

Пример 2. Пусть γ – ограничение $(m-1)$ -мерной меры Хаусдорфа на сферу $S(0, R) = \{x : \|x\| = R\}$. Имеем

$$J_2 = J_2(y, \delta) = \int_{B(y, \delta)} \|x - y\|^{p(2-m)} d\gamma(x) = \int_{B(y, \delta) \cap S(0, R)} \|x - y\|^{p(2-m)} dS(x).$$

Обозначим $R_1 = \|y\|$, $y_0 = (R_1, 0, \dots, 0)$, $\tilde{x} = (x_2, \dots, x_m)$, $\sigma = B(y_0, \delta) \cap S(0, R)$. Функция $J_2(y, \delta)$ является радиально симметрической функцией по переменной y . Поэтому

$$\begin{aligned} J_2 &= \int_{\sigma} \|x - y_0\|^{p(2-m)} dS(x) = \\ &= \int_{\sigma} \frac{1}{((x_1 - R_1)^2 + \|\tilde{x}\|^2)^{\frac{p(m-2)}{2}}} dS(x) \leq \int_{\sigma} \frac{dS(x)}{\|\tilde{x}\|^{p(m-2)}}. \end{aligned} \quad (4)$$

Если $|R_1 - R| \geq \delta$, то $J_2 = 0$. Поэтому в дальнейшем можно считать, что $R_1 \in (R - \delta, R + \delta)$. Введём на сфере $S(0, R)$ полярные координаты (3) с $r = R$. Выполняется равенство

$$dS(x) = R^{m-1} \sin^{m-2} \varphi_1 \dots \sin \varphi_{m-2} d\varphi_1 \dots d\varphi_{m-1}. \quad (5)$$

Кроме того,

$$\|\tilde{x}\|^2 = R^2 - x_1^2 = R^2 - R^2 \cos^2 \varphi_1 = R^2 \sin^2 \varphi_1. \quad (6)$$

Если $x \in \sigma$, то выполняются неравенства $R - 2\delta < R_1 - \delta \leq x_1 \leq R$. Поэтому

$$\begin{aligned} R - 2\delta &\leq R \cos \varphi_1 \leq R, \quad \left(\frac{R - 2\delta}{R}\right)^2 \leq \cos^2 \varphi_1 \leq 1, \\ 0 &\leq \sin^2 \varphi_1 \leq \frac{4\delta(R - \delta)}{R^2} \leq \frac{4\delta}{R}, \quad 0 \leq \varphi_1 \leq \arcsin 2\sqrt{\frac{\delta}{R}}. \end{aligned} \quad (7)$$

Из соотношений (4) – (7) следует неравенство

$$J_2 \leq 2R^{m-1-p(m-2)} \pi^{m-1} \int_0^{\arcsin 2\sqrt{\frac{\delta}{R}}} \frac{\sin^{m-2} \varphi_1}{\sin^{p(m-2)} \varphi_1} d\varphi_1.$$

Из этого неравенства, в свою очередь, следует, что при $p \in [1, \frac{m-1}{m-2})$ величина $J_2(y, \delta)$ равномерно относительно $y \in \mathbb{R}^m$ стремится к нулю при $\delta \rightarrow 0$.

Пример 3. Пусть γ – ограничение $(m-1)$ -мерной меры Хаусдорфа на гиперплоскость $L = \{x : x_m = 0\}$. Рассматриваем следующую величину

$$J_3 = J_3(y, \delta) = \int_{B(y, \delta)} \|x - y\|^{p(2-m)} d\gamma(x) = \int_{B(y, \delta) \cap L} \|x - y\|^{p(2-m)} dS(x).$$

Пусть $y = (y_1, y_2, \dots, y_m)$. Заметим, что если $|y_m| \geq \delta$, то $J_3 = 0$. Поэтому мы будем считать, что $y_m \in (-\delta, \delta)$. Имеем

$$J_3 = \int_{B(y, \delta) \cap L} \frac{1}{\left(\sum_{i=1}^{m-1} (x_i - y_i)^2 + y_m^2\right)^{\frac{p(m-2)}{2}}} dS(x),$$

$$J_3 \leq \int_{B(y,\delta) \cap L} \frac{1}{\left(\sum_{i=1}^{m-1} (x_i - y_i)^2 \right)^{\frac{p(m-2)}{2}}} dS(x). \quad (8)$$

Введём на L новые координаты $x = (\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_{m-1}, 0)$. Тогда

$$dS(x) = d\tilde{x}_1 \dots d\tilde{x}_{m-1}. \quad (9)$$

Более того имеем

$$\begin{aligned} B(y, \delta) \cap L &= \left\{ (\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_{m-1}, 0) : \sum_{i=1}^{m-1} (\tilde{x}_i - y_i)^2 \leq \delta^2 - y_m^2 \right\} \subset \\ &\subset \left\{ (\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_{m-1}, 0) : \sum_{i=1}^{m-1} (\tilde{x}_i - y_i)^2 \leq \delta^2 \right\} = B^{m-1}(y, \delta). \end{aligned} \quad (10)$$

Из соотношений (8) – (10) следует неравенство

$$J_3 \leq \int_{B^{m-1}(y, \delta)} \frac{1}{\left(\sum_{i=1}^{m-1} (\tilde{x}_i - y_i)^2 \right)^{\frac{p(m-2)}{2}}} d\tilde{x}_1 \dots d\tilde{x}_{m-1}.$$

Заметим, что последний интеграл можно рассмотреть, как и в примере 1, но теперь в случае пространства $\mathbb{R}^{m-1}$. Отсюда следует, что при $p \in [1, \frac{m-1}{m-2})$ величина $J_3(y, \delta)$ стремится к нулю при $\delta \rightarrow 0$ равномерно относительно $y \in \mathbb{R}^m$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гришин А.Ф., Шуиги А. Различные виды сходимости последовательностей δ -субгармонических функций. // Матем. сб., – 2008. – 199:6. – С. 27-48.

Статья получена: 9.09.2013; окончательный вариант: 2.10.2013;
принята: 3.10.2013.

The limit set of the Henstock-Kurzweil integral sums of a vector-valued function

A.G. Kostianko

V.N. Karazin Kharkiv National University
Svobody Sq. 4, 61022, Kharkiv, Ukraine
anna.kostianko@gmail.com

We introduce the notion of the limit set $I_{H-K}(f)$ of the Henstock-Kurzweil integral sums of a function $f : [0, 1] \rightarrow X$, where X is a Banach space, and study its properties. In particular, we construct an example of function f , which is not integrable, but its limit set consists exactly of one point. We find sufficient conditions that guarantee the convexity of the limit set.

Keywords: Henstock-Kurzweil integral, Banach space, limit set of integral sums.

Костянко А. Г., Множина граничних точок інтегральних сум Хенстока-Курцвейля векторнозначної функції. Ми вводимо поняття множини граничних точок $I_{H-K}(f)$ інтегральних сум Хенстока-Курцвейля функції $f : [0, 1] \rightarrow X$, де X - банахів простір, і вивчаємо його властивості. Зокрема, ми будемо приклад неінтегрованої функції f , множина граничних точок котрої складається рівно з однієї точки. Також ми знаходимо достатні умови, що гарантують опуклість множини граничних точок.

Ключові слова: інтеграл Курцвейля-Хенстока, банахів простір, множина граничних точок інтегральних сум.

Костянко А. Г., Множество предельных точек интегральных сумм Хенстока-Курцвейля векторнозначной функции. Мы вводим понятие множества предельных точек $I_{H-K}(f)$ интегральных сумм Хенстока-Курцвейля функции $f : [0, 1] \rightarrow X$, где X - банахово пространство, и изучаем его свойства. В частности, мы строим пример неинтегрируемой функции f , множество предельных точек которой состоит ровно из одной точки. Также мы находим достаточные условия, которые гарантируют выпуклость множества предельных точек.

Ключевые слова: интеграл Курцвейля-Хенстока, банахово пространство, множество предельных точек интегральных сумм.

2000 Mathematics Subject Classification 46B20, 28B05.

1. Introduction

The Henstock-Kurzweil integral was discovered in 1957. It generalizes Riemann integral and is used for integration of highly oscillatory functions which occur in quantum theory and nonlinear analysis (see [8, Chapter 4]). Moreover, all Lebesgue integrable functions are Henstock-Kurzweil integrable, and one of the advantages of the latter is that it does not rely on measure theory. Also one may consider integral and differential equations using Henstock-Kurzweil integral (see [2]). For functions which are not integrable we introduce the notion of the limit set of the Henstock-Kurzweil integral sums $I_{H-K}(f)$ and study its properties. Similar notion of a limit set $I(f)$ for Riemann integral and its properties is studied in [4, Appendix].

Our main result is construction of a function for which limit set $I_{H-K}(f)$ contains only 1 point but the function is not Henstock-Kurzweil integrable (see Theorem 3). Similar result for Riemann integral is established in [4, Appendix]. However in our case construction of such an example is more sophisticated. It appears that properties of the limit set of Riemann integral sums (as well as Henstock-Kurzweil integral sums) depend significantly on the properties of the space of values of a function under consideration. For example, if function takes values in a separable space then its limit set $I(f)$ associated with Riemann integral is not empty (see [1]). However the full description of such spaces is not known. Also for bounded functions with values in separable spaces it is known that $I(f)$ is a star-shaped set (see [5] and [4]). Conditions for convexity for $I(f)$ in the case of Riemann integral are given in [6] (see also [4]). In particular there are conditions which can be easily described when a considered function takes values in so called B-convex space. We establish analogues of these results for the limit set of Henstock-Kurzweil integral $I_{H-K}(f)$ (see Theorem 4, Theorem 5). In general situation we can not expect convexity of the limit set (see [3]).

The work is organised as follows. In Section 2 we recall the notion of Henstock-Kurzweil integral and introduce a notion of a limit set for Henstock-Kurzweil integral. In the beginning of Section 3 we reformulate basic definitions in terms of net convergence and give basic properties of the limit set $I_{H-K}(f)$ (see Theorem 1, Theorem 2). The main result is stated in Theorem 3. Results concerning convexity of the limit set $I_{H-K}(f)$ that generalize results obtained in [6] are given in Theorems 4 and 5.

2. Basic definitions

We consider functions $f : [0, 1] \rightarrow X$, where X is a Banach space. Let P be a tagged partition of $[0, 1]$, i.e.

$$P = \{(\xi_i, (t_{i-1}, t_i)), \text{ where } 0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1, \xi_i \in [t_{i-1}, t_i]\};$$

and $\delta : [0, 1] \in (0, \infty)$ be a positive function, which is called gauge. We say, that P is δ -fine if $\xi_i \in [t_{i-1}, t_i] \subset (\xi_i - \delta(\xi_i), \xi_i + \delta(\xi_i))$ for all $i = 1, \dots, n$. We denote this

by writing P is a δ -fine tagged partition of $[0, 1]$. We define the Henstock-Kurzweil integral sums of the function f as

$$S(f, P) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(t_i - t_{i-1}).$$

These integral sums are the same as for the Riemann integral, but they are considered in context of a very different convergence definition:

Definition 1 A function $f : [0, 1] \rightarrow X$ is said to be Henstock-Kurzweil integrable on $[0, 1]$ if there is $x \in X$ such that for every $\varepsilon > 0$ there is a gauge δ on $[0, 1]$ such that for every δ -fine tagged partition P of $[0, 1]$

$$\|S(f, P) - x\| < \varepsilon.$$

This x is called the Henstock-Kurzweil integral of f .

For functions that are not Henstock-Kurzweil integrable the role of an integral may be played by the limit set of the Henstock-Kurzweil integral sums.

Definition 2 We say, that for $f : [0, 1] \rightarrow X$ a vector $x \in X$ is a Henstock-Kurzweil point (H-K point) if for every $\varepsilon > 0$ and for every gauge δ on $[0, 1]$ there is a δ -fine tagged partition P of $[0, 1]$ such that

$$\|S(f, P) - x\| < \varepsilon.$$

The set of all H-K points of a function $f : [0, 1] \rightarrow X$, where X is a Banach space, we denote by $I_{H-K}(f)$. For a nonintegrable function its limit set $I_{H-K}(f)$ may be empty or contain many points.

3. Properties of the limit set $I_{H-K}(f)$

We start with reformulation of Definition 1 and Definition 2 in terms of net convergence.

Let $(\Gamma, \succ)$ be the directed set, where $\Gamma = \{(\gamma = \delta, P) : \delta \text{ is a gauge on } [0, 1] \text{ and } P \text{ is a } \delta\text{-fine tagged partition of } [0, 1]\}$.

Definition 3 We say, that pair (δ_1, P_1) follows pair (δ_2, P_2) (we denote it by $(\delta_1, P_1) \succ (\delta_2, P_2)$), if $\delta_1 \leq \delta_2$ on $[0, 1]$.

Define the net $F = F_f : \Gamma \rightarrow X$ by the rule $F((\delta, P)) = S(P, f)$. Then the following propositions are obvious

Proposition 1 Let X be a Banach space and a function $f : [0, 1] \rightarrow X$. Then the following conditions are equivalent:

- i) $x \in X$ is the integral of f on $[0, 1]$,
- ii) $x = \lim F$.

Proposition 2 *The limit set of the Henstock-Kurzweil integral sums coincides with the limit set of the net $F = F_f$.*

Remark 1 *Let X be a Banach space, then for a function $f : [0, 1] \rightarrow X$, its limit set $I_{H-K}(f)$ is closed. This is a general result for the limit set of nets (see [?, Chapter 2]).*

Now we proceed to prove other properties of $I_{H-K}(f)$

Theorem 1 *Let X be a Banach space, $f : [0, 1] \rightarrow X$ and $g : [0, 1] \rightarrow X$ be a Henstock-Kurzweil integrable function. Then*

$$I_{H-K}(f + g) = I_{H-K}(f) + \int_0^1 g(t)dt.$$

Proof. i) Let us prove first the inclusion $I_{H-K}(f + g) \subset I_{H-K}(f) + \int_0^1 g(t)dt$. Take an arbitrary $x \in I_{H-K}(f + g)$ and denote $x_2 = \int_0^1 g(t)dt$. We are going to show that there exists $x_1 \in I_{H-K}(f)$ such that $x = x_1 + x_2$, i. e. we have to show that $x - x_2 \in I_{H-K}(f)$.

To this end fix $\varepsilon > 0$. From integrability of $g(t)$ and Proposition 1 we get that for every $\gamma \in \Gamma$ there is a $\tilde{\gamma} \succ \gamma$ such that for every $\gamma_1 \succ \tilde{\gamma}$

$$\|x_2 - F_g(\gamma_1)\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Using condition $x \in I_{H-K}(f + g)$ and Proposition 2, we obtain that for $\tilde{\gamma}$ as above there is $\gamma_1 \succ \tilde{\gamma}$ such that

$$\|x - F_{f+g}(\gamma_1)\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

So, for every $\gamma \in \Gamma$ there is a $\gamma_1 \succ \gamma$ such that

$$\|x - x_2 - F_f(\gamma_1)\| \leq \|x - F_{f+g}(\gamma_1)\| + \|x_2 - F_g(\gamma_1)\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

which means that $x - x_2 \in I_{H-K}(f)$.

ii) Applying i) with f instead of $f + g$ and $-g$ instead of g we obtain

$$I_{H-K}(f) \subset I_{H-K}(f + g) + \int_0^1 -g(t)dt.$$

After adding $\int_0^1 -g(t)dt$ to both sides of this expression we get

$$I_{H-K}(f) + \int_0^1 g(t)dt \subset I_{H-K}(f + g),$$

which was to be proved. $\square$

Theorem 2 Let $f : [0, 1] \rightarrow X$ and $g : [0, 1] \rightarrow X$, where X is a Banach space, and the image of f or of g is relatively compact in X , then

$$I_{H-K}(f + g) \subset I_{H-K}(f) + I_{H-K}(g).$$

Proof. Let us prove that $I_{H-K}(f + g) \subset I_{H-K}(f) + I_{H-K}(g)$. If $I_{H-K}(f + g)$ is empty, the inclusion is satisfied. Let us assume $I_{H-K}(f + g)$ is not empty fix an $x \in I_{H-K}(f + g)$ and define a new directed set

$$\tilde{\Gamma} = \{(\varepsilon, \delta, P) : \varepsilon > 0, \|x - F_{f+g}(\delta, P)\| < \varepsilon\}.$$

We say that $(\varepsilon_1, \delta_1, P_1)$ follows $(\varepsilon_2, \delta_2, P_2)$ if $\varepsilon_1 \leq \varepsilon_2$ and $\delta_1 \leq \delta_2$.

Let us introduce net $\tilde{F}_{f+g}((\varepsilon, \delta, P)) = F_{f+g}((\delta, P))$ then $x = \lim_{\tilde{\Gamma}} \tilde{F}_{f+g}(\tilde{\gamma})$, i.e. for every $\varepsilon > 0$ there is $\tilde{\gamma} \in \tilde{\Gamma}$ such that for every $\tilde{\gamma}_1 \succ \tilde{\gamma}$

$$\|x - \tilde{F}_{f+g}(\tilde{\gamma}_1)\| < \varepsilon.$$

Let image $f([0, 1])$ be relatively compact, then $\tilde{F}_f(\tilde{\Gamma})$ is also relatively compact, i.e. for $\tilde{F}_f$ there exists a limit point x_1 . Let $\tilde{\gamma}$ be as in the above condition. Then for every $\tilde{\gamma}_2 \in \tilde{\Gamma}$ there is a $\tilde{\gamma}_3$ that follows both $\tilde{\gamma}$ and $\tilde{\gamma}_2$. Since x_1 is a limit point for $\tilde{F}_f$, there is a $\tilde{\gamma}_1 \succ \tilde{\gamma}_3$ such that

$$\|x_1 - \tilde{F}_f(\tilde{\gamma}_1)\| < \varepsilon.$$

Using previous estimates we obtain: for every $\varepsilon > 0$ and for every $\tilde{\gamma}_2$ there is a $\tilde{\gamma}_1 \succ \tilde{\gamma}_2$ such that

$$\|x - x_1 - \tilde{F}_g(\tilde{\gamma}_1)\| \leq \|x_1 - \tilde{F}_f(\tilde{\gamma}_1)\| + \|x - \tilde{F}_{f+g}(\tilde{\gamma}_1)\| < 2\varepsilon.$$

We have demonstrated that $x_2 = x - x_1 \in I_{H-K}(g)$. $\square$

However the inverse inclusion may not be true and our next example shows that. By $\lambda^*(C)$ we denote the outer measure of $C \subset [0, 1]$.

Example 1 There exist functions $f(t), g(t) : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ such that their images are relatively compact in X , but

$$I_{H-K}(f + g) \neq I_{H-K}(f) + I_{H-K}(g).$$

Define f and $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ by the rules

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{if } t \in A, \\ -1 & \text{if } t \in B, \end{cases} \quad g(t) = \begin{cases} -1 & \text{if } t \in A, \\ 1 & \text{if } t \in B, \end{cases}$$

where A and B are non-measurable sets, $\lambda^*(A) = \lambda^*(B) = 1$, $A \cup B = [0, 1]$ and $A \cap B = \emptyset$. It is not difficult to see that $f + g = 0$, and $I_{H-K}(f + g) = \{0\}$, but $I_{H-K}(f) + I_{H-K}(g) = \{-2, 0, 2\}$.

The next property of $I_{H-K}(f)$ is obvious, so we state it without proof.

Proposition 3 Let $f : [0, 1] \rightarrow X$, where X is a Banach space, T be a continuous linear map and $x \in I_{H-K}(f)$, then $Tx \in I_{H-K}(Tf)$.

Our next theorem is the general result for limits of nets (see [?, Chapter 2]).

Proposition 4 Let X be a Banach space and for a function $f : [0, 1] \rightarrow X$ its image $f([0, 1])$ is relatively compact in X . Then f is integrable if and only if its limit set $I_{H-K}(f)$ consists exactly of one point and under this assumption its integral is exactly this point.

It is easy to see that the assumption image $f([0, 1])$ is relatively compact in X implies $F(\delta, P)$ is relatively compact in X . Thus under this assumption the limit set of net contains at least one point (see [?, Chapter 2]). Hence the limit set of the Henstock-Kurzweil integral of f is not empty. Let us show that compactness condition can not be replaced by boundedness condition.

Recall that $\ell_1[0, 1]$ is the space of real-valued functions defined on the segment $[0, 1]$, having at most countable support and such that $\sum_{\alpha \in [0, 1]} |g(\alpha)| < \infty$. The norm in $\ell_1[0, 1]$ is $\|g\| = \sum_{\alpha \in [0, 1]} |g(\alpha)|$. The standard basic vectors of the space $\ell_1[0, 1]$ have the following form

$$e_t(\alpha) = \begin{cases} 1 & \text{if } \alpha = t, \\ 0 & \text{if } \alpha \neq t. \end{cases}$$

Then $\|e_t\| = 1$ for all $t \in [0, 1]$. Any element $g \in \ell_1[0, 1]$ can be represented in the form $g = \sum_{i=1}^{\infty} a_i e_{t_i}$, and $\|\sum_{i=1}^{\infty} a_i e_{t_i}\| = \sum_{i=1}^{\infty} |a_i|$.

Function $f : [0, 1] \rightarrow \ell_1[0, 1]$, which acts by the rule $f(t) = e_t$, is an example of a function that has an empty limit set $I_{H-K}(f)$.

Our next goal is to construct an example which shows that a one-point limit set does not guarantee the existence of the integral. Further we need the following technical result.

Proposition 5 Let δ be a gauge on $[0, 1]$, $C \subset [0, 1]$ and $\lambda^*(C) = 1$. Then, for every $\varepsilon > 0$ there is a δ -fine tagged partition P of $[0, 1]$ such that the sum of lengths of segments whose tag points lie in C (we denote them by $(\tilde{\tau}_k, \tau_k)$ for $k = 1, \dots, n$) obeys the following inequality:

$$\sum_{k=1}^n (\tau_k - \tilde{\tau}_k) > 1 - \varepsilon.$$

Proof. Step 1. For all $t \in C$ denote $\Delta_t = (t - \delta(t), t + \delta(t))$. Let us consider properties of the set $\Delta = \cup_{t \in C} \Delta_t$.

(1) Δ is an open set, and consequently it may be represented in the following form:

$$\Delta = \bigcup_{k=1}^{\infty} (a_k, b_k);$$

(2) C is a subset of Δ .

Using 1 and 2, we can conclude that $\sum_{k=1}^{\infty} (b_k - a_k) \geq 1$.

Step 2. Pick $\varepsilon_k > 0$ such that $\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k < \varepsilon$. Notice that we can represent (a_k, b_k) in the form $\cup_{t \in (a_k, b_k) \cap C} \Delta_t$ for all k . After a small decrease of intervals, we obtain

$$[a_k + \frac{\varepsilon_k}{2}, b_k - \frac{\varepsilon_k}{2}] \subset \bigcup_{t \in (a_k, b_k) \cap C} \Delta_t.$$

By the Heine-Borel theorem there exist such points $t_{k_1} < t_{k_2} < \dots < t_{k_{N_k}}$ that

$$[a_k + \frac{\varepsilon_k}{2}, b_k - \frac{\varepsilon_k}{2}] \subset \bigcup_{j=1}^{N_k} \Delta_{t_{k_j}}.$$

Step 3. We are going to introduce smaller intervals $\tilde{\Delta}(t_{k_j}) \subset \Delta_{t_{k_j}}$ in such a way that, if $\tilde{\Delta}(t_{k_j}) \neq \emptyset$, then $t_j \in \tilde{\Delta}_{t_{k_j}}$; intersection of interiors of $\tilde{\Delta}_{t_{k_j}}$ and $\tilde{\Delta}_{t_{k_i}}$ is empty for $j \neq i$ and

$$[a_k + \frac{\varepsilon_k}{2}, b_k - \frac{\varepsilon_k}{2}] \subset \bigcup_{j=1}^{N_k} \tilde{\Delta}_{t_{k_j}}.$$

To this end let us consider four cases:

- (1) $t_{k_2} - \delta(t_{k_2}) < a_k + \frac{\varepsilon_k}{2}$, then we skip point t_{k_1} and $\tilde{\Delta}(t_{k_1}) = \emptyset$;
- (2) $t_{k_1} > t_{k_2} - \delta(t_{k_2})$, then we may choose $\tilde{\Delta}(t_{k_1})$ as follows $\tilde{\Delta}(t_{k_1}) = [a_k + \frac{\varepsilon_k}{2}, t_{k_1}]$;
- (3) $t_{k_1} \leq t_{k_2} - \delta(t_{k_2})$ and $t_{k_1} + \delta(t_{k_1}) \leq t_{k_2}$, then $\tilde{\Delta}(t_{k_1})$ may have the form $\tilde{\Delta}(t_{k_1}) = [a_k + \frac{\varepsilon_k}{2}, t_{k_1} + \frac{t_{k_1} + \delta(t_{k_1}) - t_{k_2} + \delta(t_{k_2})}{2}]$;
- (4) $t_{k_1} \leq t_{k_2} - \delta(t_{k_2})$ and $t_{k_1} + \delta(t_{k_1}) > t_{k_2}$, then $\tilde{\Delta}(t_{k_1}) = [a_k + \frac{\varepsilon_k}{2}, t_{k_2}]$.

Now we consider the segment $[a_k + \frac{\varepsilon_k}{2}, b_k - \frac{\varepsilon_k}{2}] \setminus \tilde{\Delta}(t_{k_1})$ and go over to the point t_{k_2} , for it we check the similar four cases. Then we do the same for all points t_{k_j} for all k and j .

As result, we obtain

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{N_k} \tilde{\Delta}(t_{k_j}) > 1 - \varepsilon,$$

which proves the statement. $\square$

Theorem 3 *There exists a function $f : [0, 1] \rightarrow \ell_1[0, 1]$ such that its limit set $I_{H-K}(f)$ consists exactly of one point, but this function is not Henstock-Kurzweil integrable.*

Proof. Define $f : [0, 1] \rightarrow \ell_1[0, 1]$ by the rule

$$f(t) = \begin{cases} e_t & \text{if } t \in A, \\ e_0 & \text{if } t \in B, \end{cases}$$

where A and B are non-measurable sets, $\lambda^*(A) = \lambda^*(B) = 1$, $A \cup B = [0, 1]$ and $A \cap B = \emptyset$.

Set B obeys conditions of Proposition 5, therefore for every $\varepsilon > 0$ and for every gauge δ on $[0, 1]$ there is a δ -fine tagged partition P of $[0, 1]$ such that

$$\|S(f, P) - e_0\| < \varepsilon.$$

On the other hand, set A also fulfils conditions of Proposition 5, and so for the same $\varepsilon > 0$ and gauge δ on $[0, 1]$ there is a δ -fine tagged partition P of $[0, 1]$ such that for corresponding ξ_i (almost all of which are in A) and t_i

$$\begin{aligned} \|S(f, P) - e_0\| &= \left\| \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(t_i - t_{i-1}) - e_0 \right\| = \\ &= \left\| \sum_{i=1}^m e_{\xi_i}(t_{k_i} - t_{k_{i-1}}) + \sum_{i=m+1}^n e_0(t_{k_i} - t_{k_{i-1}}) - e_0 \right\| > 2|1 - \varepsilon|, \end{aligned}$$

as result, e_0 is not the integral of f .

It is easy to show, that there is no other limit points of f , and we complete the proof. $\square$

Let us recall the following definition. X has infratype p if there exists a constant $C > 0$ such that an inequality

$$\min_{\alpha_i = \pm 1} \left\| \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \right\| \leq C \left(\sum_{i=1}^n \|x_i\|^p \right)^{1/p}$$

holds for any finite collection $\{x_i\}_{i=1}^n$ of elements of X . The basic properties of spaces with infratype $p > 1$ can be found in [4, Chapter 5].

Theorem 4 Let $f : [0, 1] \rightarrow X$, where X is a Banach space, and $f([0, 1])$ is relatively compact in X , then $I_{H-K}(f)$ is convex.

Proof. Notice that f is bounded and denote $M = \sup\{\|f(t)\|, t \in [0, 1]\}$. By relative compactness of $K = f([0, 1])$ for every $\varepsilon > 0$ there is a finite ε -net A_ε for K . Denote by Y the linear span of A_ε . Since Y is finite dimensional, it has infratype $p = 2$.

Let x_1 and x_2 be two points in $I_{H-K}(f)$. Since $I_{H-K}(f)$ is closed (see Remark (1)), it is sufficient to show that $\frac{1}{2}(x_1 + x_2) \in I_{H-K}(f)$. To this end fix N . Since $x_1, x_2 \in I_{H-K}(f)$ then for every $\varepsilon > 0$ and for every $\gamma \in \Gamma$ there are $\gamma_1 \succ \gamma$ and $\gamma_2 \succ \gamma$ such that $\|x_1 - F_f(\gamma_1)\| < \varepsilon$ and $\|x_2 - F_f(\gamma_2)\| < \varepsilon$, also γ_1 and γ_2 may be chosen in such a way that points k/N , where $k = 0, 1, \dots, N$, belong to the set of endpoints of the correspondent partition. Denote by $F_i^k, i = 1, 2, k = 1, \dots, N$, the part of the integral sum $F_f(\gamma_i)$ corresponding to the segments of the partition that lie in $[k/N, (k+1)/N]$. Now for each of the segments $[k/N, (k+1)/N]$ we choose in arbitrarily manner either the sum F_1^k or F_2^k . After this we can formally write 2^N different integral sums of the function f in the following form:

$$F \left(\sum_{k=1}^N \alpha_k \right) = \sum_{k=1}^N \left(\frac{1 + \alpha_k}{2} F_1^k + \frac{1 - \alpha_k}{2} F_2^k \right),$$

where $\alpha_k = \pm 1$ are arbitrarily. Let us show that one of these sums lies close enough to $\frac{1}{2}(x_1 + x_2)$. Indeed,

$$\begin{aligned} \left\| F \left(\sum_{k=1}^N \alpha_k \right) - \frac{1}{2}(x_1 + x_2) \right\| &\leq \varepsilon + \left\| \frac{1}{2}(F_1 + F_2) - F \left(\sum_{k=1}^N \alpha_k \right) \right\| = \\ &= \varepsilon + \left\| \frac{1}{2}(F_1 + F_2) - \sum_{k=1}^N \left(\frac{1 + \alpha_k}{2} F_1^k + \frac{1 - \alpha_k}{2} F_2^k \right) \right\| = \\ &= \varepsilon + \frac{1}{2} \left\| \sum_{k=1}^N \alpha_k (F_1^k - F_2^k) \right\|. \end{aligned}$$

For every element $f(\xi_{k_j}^i)$ from the sums $F_i^k = \sum_{j=1}^{n_k} f(\xi_{k_j}^i)(t_{k_j} - t_{k_{j-1}})$, $i = 1, 2$, there is the nearest element from ε -net, let us denote it by $g(\xi_{k_j}^i)$. Then

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \left\| \sum_{k=1}^N \alpha_k (F_1^k - F_2^k) \right\| \leq \\ &\leq \varepsilon + \frac{1}{2} \left\| \sum_{k=1}^N \alpha_k \left(\sum_{j=1}^{n_k} g(\xi_{k_j}^1)(t_{k_j} - t_{k_{j-1}}) + \sum_{j=1}^{n_k} g(\xi_{k_j}^2)(t_{k_j} - t_{k_{j-1}}) \right) \right\|. \end{aligned}$$

Using this inequality and definition of infratype, we obtain the required result

$$\min_{\alpha_i = \pm 1} \left\| F \left(\sum_{k=1}^N \alpha_k \right) - \frac{1}{2}(x_1 + x_2) \right\| \leq 2\varepsilon + CN^{-1/2}M.$$

Since $\varepsilon > 0$ can be made arbitrarily small and N arbitrarily large, we see that point $\frac{1}{2}(x_1 + x_2)$ lies in the limit set of the Henstock-Kurzweil integral, which completes the proof of the lemma. $\square$

Theorem 5 Let $f : [0, 1] \rightarrow X$, where X is a B -convex normed space, and f is dominated by some integrable function g , then $I_{H-K}(f)$ is convex.

Proof. Recall that B -convexity of X is equivalent to existence of some infratype $p > 1$.

Let x_1 and x_2 be two points in $I_{H-K}(f)$. Let us prove that $\frac{1}{2}(x_1 + x_2) \in I_{H-K}(f)$. To this end fix N . Since g is integrable function ($\int_0^1 g(t)dt = M$), the interval $[0, 1]$ can be divided into N parts such that $\int_{t_{i-1}}^{t_i} g(t)dt = \frac{M}{N}$, where $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = 1$. From condition $x_1, x_2 \in I_{H-K}(f)$ we obtain: for every $\varepsilon > 0$ and for every $\gamma \in \Gamma$ there are $\gamma_1 \succ \gamma$ and $\gamma_2 \succ \gamma$ such that $\|x_1 - F_f(\gamma_1)\| < \varepsilon$ and $\|x_2 - F_f(\gamma_2)\| < \varepsilon$, also γ_1 and γ_2 may be chosen in such a way that points t_i , where $i = 0, \dots, N$, belong to the set of endpoints of the correspondent partition.

Further applying similar arguments as in Theorem (4), we come to the inequality

$$\|F\left(\sum_{k=1}^N \alpha_k\right) - \frac{1}{2}(x_1 + x_2)\| \leq \varepsilon + \frac{1}{2} \left\| \sum_{k=1}^N \alpha_k (F_1^k - F_2^k) \right\|.$$

Using definition of infratype and taking into account that g dominates f , we obtain

$$\min_{\alpha_i = \pm 1} \left\| F\left(\sum_{k=1}^N \alpha_k\right) - \frac{1}{2}(x_1 + x_2) \right\| \leq \varepsilon + CN^{1/p-1}M.$$

Since $\varepsilon > 0$ can be made arbitrarily small and N arbitrarily large, we see that $\frac{1}{2}(x_1 + x_2) \in I_{H-K}(f)$, which was to be proved. $\square$

Remark, that a function with $I_{H-K}(f) \neq \emptyset$ (and even a Henstock-Kurzweil-integrable function) does not necessarily have an integrable majorant. Moreover there is no any restrictions on the behaviour of the function $\|f(t)\|$ for a Henstock-Kurzweil-integrable f , as the following proposition shows

Proposition 6 *Let $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^+$. Then there is Henstock-Kurzweil-integrable function $g : [0, 1] \rightarrow \ell_\infty[0, 1]$ such that $\|g(t)\| = f(t)$ for every $t \in [0, 1]$.*

Proof. Define $g : [0, 1] \rightarrow \ell_\infty[0, 1]$ by the rule $g(t) = f(t)e_t$. It is obvious that $\|g(t)\| = f(t)$ for every $t \in [0, 1]$.

Let us prove that $\int_0^1 g(t)dt = 0$. Fix $\varepsilon > 0$ and define gauge by the rule $\delta(t) = \frac{\varepsilon}{2(f(t)+1)}$. Choose intervals $[t_{k-1}, t_k]$, $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1$, in such a way that $[t_{k-1}, t_k] \subset (\xi_k - \delta(\xi_k), \xi_k + \delta(\xi_k))$, where $\xi_k \in [t_{k-1}, t_k]$. Then

$$\begin{aligned} \|S(P, g)\| &= \left\| \sum_{k=1}^n g(\xi_k)(t_k - t_{k-1}) \right\| = \\ &= \max_k \{f(\xi_k)(t_k - t_{k-1})\} \leq \max_k \frac{\varepsilon f(\xi_k)}{f(\xi_k) + 1} < \varepsilon, \end{aligned}$$

so $g(t)$ is integrable and $\int_0^1 g(t)dt = 0$. $\square$

Acknowledgement. The author is grateful to her scientific supervisor prof. Vladimir M. Kadets for support and sharing his insights and ideas.

REFERENCES

1. H.W. Ellis, On the limits of Riemann sums, J. London Math. Soc. 34 (1959), – no. 1, – P. 93-100.
2. S. Heikkilä, Differential and integral equations with Henstock-Kurzweil integrable functions, J. Math. Anal. Appl. 379. – 2011. – P. 171-179.

3. M. Nakamura, I. Amemiya, On the limit of Riemann sums of functions in Banach spaces, J. Fac. Sci. Hokkaido Univ. Ser. I 19 (1966), – no. 3.4, – P. 135-145.
4. M.I. Kadets, V.M. Kadets, Series in Banach spaces. Conditional and unconditional convergence, Birkhauser, Basel - Boston - Berlin, 1997. – 156 p.
5. V.M. Kadets, The starness of the domain of limits of Riemann integral sums of a vector-valued function, in: Operator Theory, Subharmonic Functions, – Naukova Dumka, – Kiev, – 1991. – P. 60-67 (Russian).
6. V.M. Kadets, M.I. Kadets, Conditions for the convexity of the set of limits of Riemann sums of a vector-valued function, Mat. Zametki 35 (1984), – no. 2, – P. 161-167 (Russian).
7. J.L. Kelley, General Topology, – Springer, – 1975. – 298 p.
8. D.S. Kurtz, Ch.W. Swartz. Series in real analysis - volume 9: theories of integration. The integrals of Riemann, Lebesgue, Henstock-Kurzweil and McShane, – World scientific, – 2004. – 268 p.

Article history: Received: 24 April 2013; Final form: 2 November 2013;

Accepted: 5 November 2013.

Задача Гурса з імпульсними збуреннями

Є.В. Массалітіна

Національний технічний університет України "КПІ Київ

masevgeniia@gmail.com

Знайдена оцінка для функції двох змінних, що задовольняє задачі Гурса з даними на характеристиках та отримує імпульсні збурення на заданих кривих.

Ключові слова: інтегральні нерівності, рівняння гіперболічного типу, імпульсні збурення.

Массалитина Е.В., **Задача Гурса с импульсными возмущениями.**

Найдена оценка для функции двух переменных, удовлетворяющей задаче Гурса с данными на характеристиках и получающей импульсные возмущения на заданных кривых.

Ключевые слова: интегральные неравенства, уравнения гиперболического типа, импульсные возмущения.

E.V. Massalitina, **The Goursat problem with impulse perturbations.**

An estimate for the function of two variables satisfying the Goursat problem with the data on the characteristics and receives a pulse perturbation at defined curves.

Keywords: integral inequalities, hyperbolic equation, impulse perturbation.

2000 Mathematics Subject Classification 34A37, 35L70, 58J45.

Вступ

При дослідженні поведінки розв'язків диференціальних, інтегральних, інтегро-диференціальних рівнянь, а також рівнянь в частинних похідних часто використовують інтегральні нерівності [1], [2], [3]. В даній статті приведені результати, що узагальнюють оцінку, отриману в роботі [4] для функції двох змінних, на випадок розривних функцій та продовжують дослідження, розпочаті в роботах [5], [6].

1. Постановка задачі

Розглянемо функцію $v(x, y)$, що задовольняє задачі Гурса [7] з даними на характеристиках в деякій області $D^* \subset R^2$, в припущенні, що функція $v(x, y)$ на кривих $L_j = \{(x, y) : \psi_j(x, y) = 0\}$ отримує імпульсні збурення, які можуть відбуватися як в фіксованих точках на кривій, так і миттєво на всій довжині кривій, тобто можуть носити як дискретний так і неперервний характер.

Область $D^* = D \cup L$, де $L = \bigcup_{j=1}^n L_j$ – сукупність кривих, на яких функція $v(x, y)$ має скінченний стрибок, $L_i \cap L_j = \emptyset$, $i \neq j$. Область $D = \bigcup_{j=1}^n D_j$, де

$$D_1 = \{(x, y) : x \geq 0, y \geq 0, \psi_1(x, y) < 0\},$$

$$D_j = \{(x, y) : x \geq 0, y \geq 0, \psi_{j-1}(x, y) > 0, \psi_j(x, y) < 0\}, j = \overline{2, n}.$$

Нехай еволюція цього процесу описується рівнянням гіперболічного типу з імпульсними збуреннями

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = f^*(x, y) v(x, y) + k^*(x, y) v^\alpha(x, y), \\ v(x, y_0) = g_1^*(x), \\ v(x_0, y) = g_2^*(y), \end{cases} \quad \forall (x, y) \notin L_j, \quad (0.1)$$

$$\Delta v(x, y) \Big|_{(x, y) \in L_j} = \int_{L_j \cap G_n} \omega_j^*(M) v(M) d\mu_{\psi_j}, \quad (0.2)$$

де задані функції $\omega_j^*(x, y)$, $f^*(x, y)$, $k^*(x, y)$ – неперервні в області D^* , дійсне число $\alpha \geq 0$ розглядається в якості параметра. Інтеграл Лебега-Стілтєса (2) описує умову стрибка $\Delta v(x, y)$ функції $v(x, y)$ на заданих кривих L_j . Область

$$G_j = \{(s, t) : (x, y) \in D_j, (x_0, y_0) \in D_1, x_0 \leq s \leq x, y_0 \leq t \leq y\},$$

$M(\xi, \eta)$ – змінна точка кривої L_j . Функції $g_1^*(x)$, $g_2^*(y)$ є диференційовними та задовольняють умові узгодженості $g_1^*(x_0) = g_2^*(y_0)$, причому $v(x_0, y_0) \neq 0$. Тоді, для функції $v(x, y)$, згідно з [8] (гл. I, § 3, п. 1; гл. II, § 5; гл. III, § 6, пп. 3, 6, 7; гл. IV, § 9) справедливе співвідношення

$$\begin{aligned} v(x, y) \leq g_1^*(x) + g_2^*(y) - g_1^*(x_0) + \sum_{j=1}^{n-1} \int_{L_j \cap G_n} \omega_j^*(M) v(M) d\mu_{\psi_j} + \\ + \iint_{G_n} (f^*(s, t) v(s, t) + k^*(s, t) v^\alpha(s, t)) ds dt. \end{aligned} \quad (0.3)$$

2. Оцінка функції, що задовольняє задачі Гурса з імпульсними збуреннями

Теорема 1 Нехай в області $D^* \subset R^2$, $D^* = D \cup L$ виконуються умови:

1. Невід'ємна функція $u(x, y)$ є неперервною в області D ;
2. Криві $\psi_j(x, y)$ – є неперервно-диференційовними та монотонно-спадними, $\text{grad } \psi_j(x, y) > 0$;
3. μ_{ψ_j} – міра Лебега-Стілтєса [8], яка зосереджена на кривій L_j ;
4. Функція $u(x, y)$ є інтегровною за Лебегом на кривих L_j , $j = \overline{1, n}$;
5. Функції $\omega_j(x, y)$, $j = \overline{1, n}$, $f(x, y)$, $k(x, y)$ – неперервні та невід'ємні в області D^* ;
6. Функції $g_1(x)$, $g_2(y)$ є додатними, диференційовними, $g'_1(x) \geq 0$, $g'_2(y) \geq 0$;
7. $g_1(x_0) = g_2(y_0)$;
8. Функція $u(x, y)$ задовольняє в області D^* інтегральну нерівність

$$u(x, y) \leq R_u(x, y) + \sum_{j=1}^{n-1} \int_{L_j \cap G_n} \omega_j(M) u(M) d\mu_{\psi_j}, \quad (0.4)$$

де

$$R_u(x, y) = g_1(x) + g_2(y) - g_1(x_0) + \iint_{G_n} (f(s, t) u(s, t) + k(s, t) u^\alpha(s, t)) ds dt. \quad (0.5)$$

Тоді справджуються оцінки:

при $0 \leq \alpha < 1$

$$\begin{aligned} u(x, y) \leq & \prod_{j=1}^{n-1} \left(1 + \int_{L_j \cap G_n} \omega_j(M) d\mu_{\psi_j} \right) \left\{ F_n^{1-\alpha}(x_0, x, y_0, y) \times \right. \\ & \times [g_1^{1-\alpha}(x) + g_2^{1-\alpha}(y) - g_1^{1-\alpha}(x_0)] + \\ & \left. + (1-\alpha) \iint_{G_n} \left(k(s, t) F_n^{1-\alpha}(x_0, x, t, y) \prod_{j=1}^{n-1} \left(1 + \int_{L_j \cap G_n} \omega_j(M) d\mu_{\psi_j} \right)^\alpha \right) ds dt \right\}^{\frac{1}{1-\alpha}}, \end{aligned} \quad (0.6)$$

де

$$F_n(x_0, x, y_0, y) = \exp \left(\int_{y_0}^y \int_{x_0}^x f(s, t) \prod_{j=1}^{n-1} \left(1 + \int_{L_j \cap G_n} \omega_j(M) d\mu_{\psi_j} \right) ds dt \right); \quad (0.7)$$

при $\alpha = 1$

$$u(x, y) \leq \prod_{j=1}^{n-1} \left(1 + \int_{L_j \cap G_n} \omega_j(M) d\mu_{\psi_j} \right) E_n(x, y) \frac{g_1(x) g_2(y)}{g_1(x_0)}, \quad (0.8)$$

де

$$E_n(x, y) = \exp \left(\iint_{G_n} (f(s, t) + k(s, t)) \prod_{j=1}^{n-1} \left(1 + \int_{L_j \cap G_n} \omega_j(M) d\mu_{\psi_j} \right) ds dt \right); \quad (0.9)$$

при $\alpha > 1$ оцінка (6) буде справедливою в області

$$D_{\alpha_n} = \left\{ (x, y) \in D_n : \right.$$

$$\left. \iint_{G_n} \left(k(s, t) F_n^{\alpha-1}(x_0, x, t, y) \prod_{j=1}^{n-1} \left(1 + \int_{L_j \cap G_n} \omega_j(M) d\mu_{\psi_j} \right)^\alpha \right) ds dt < \right. \\ \left. < (\alpha - 1)^{-1} [g_1^{1-\alpha}(x) + g_2^{1-\alpha}(y) - g_1^{1-\alpha}(x_0)] \right\}.$$

Доведення. Доведення проведемо, використовуючи метод математичної індукції для випадку $0 \leq \alpha < 1$ (при $\alpha > 1$ схема доведення не зміниться). Нехай $(x, y) \in D_1$. Тоді

$$u(x, y) \leq g_1(x) + g_2(y) - g_1(x_0) + \\ + \iint_{G_1} (f(s, t) u(s, t) + g(s, t) u^\alpha(s, t)) ds dt = R_u(x, y), \quad (0.10)$$

Оскільки функція $u(x, y)$ в області D_1 не зазнає імпульсного впливу, то за теоремою 1 [4] для нерівності (10) буде справедливою оцінка

$$u(x, y) \leq \left\{ F_1(x_0, x, y_0, y) \times [g_1^{1-\alpha}(x) + g_2^{1-\alpha}(y) - g_1^{1-\alpha}(x_0)] + \right.$$

$$+ (1 - \alpha) \left\{ \iint_{G_1} (k(s, t) F_1^{1-\alpha}(x_0, x, t, y)) ds dt \right\}^{\frac{1}{1-\alpha}}, \quad (0.11)$$

де позначено

$$F_1(x_0, x, y_0, y) = \exp \left(\int_{y_0}^y \int_{x_0}^x f(s, t) ds dt \right).$$

Розглянемо область D_2 . Для $(x, y) \in D_2$

$$u(x, y) \leq R_u(x, y) + \int_{L_1 \cap G_2} \omega_1(M) u(M) d\mu_{\psi_1} = R_{1u}(x, y). \quad (0.12)$$

Враховуючи те, що функція $R_u(x, y)$ є неспадною по кожній змінній

$$\frac{\partial R_u(x, y)}{\partial x} \geq 0, \quad \frac{\partial R_u(x, y)}{\partial y} \geq 0$$

та нерівність (10), $\forall M(\xi, \eta) \in L_1$ можемо записати

$$u(M) \leq R_u(M) \leq R_u(x, y). \quad (0.13)$$

З нерівностей (12) та (13) випливає

$$R_1(x, y) \leq \left(1 + \int_{L_1 \cap G_2} \omega_1(M) d\mu_{\psi_1} \right) R_u(x, y),$$

Тоді нерівність (12) набуде вигляду

$$u(x, y) \leq \lambda_1(x, y) R_u(x, y),$$

де позначено

$$\lambda_1(x, y) = 1 + \int_{L_1 \cap G_2} \omega_1(M) d\mu_{\psi_1}.$$

Тоді

$$\begin{aligned} u(x, y) &\leq \lambda_1(x, y) \left(g_1(x) + g_2(y) - g_1(x_0) + \right. \\ &\quad \left. + \iint_{G_2} (f(s, t) u(s, t) + k(s, t) u^\alpha(s, t)) ds dt \right), \\ \frac{u(x, y)}{\lambda_1(x, y)} &\leq \left(g_1(x) + g_2(y) - g_1(x_0) + \right. \end{aligned}$$

$$+ \iint_{G_2} \left(f_1(s, t) \frac{u(s, t)}{\lambda_1(s, t)} + k_1(s, t) \frac{u^\alpha(s, t)}{\lambda_1^\alpha(s, t)} \right) ds dt, \quad (0.14)$$

де позначено

$$f_1(s, t) = f(s, t) \lambda_1(s, t),$$

$$k_1(s, t) = k(s, t) \lambda_1^\alpha(s, t).$$

Якщо застосуємо до нерівності (14) теорему 1 [4], то отримаємо

$$u(x, y) \leq \lambda_1(x, y) \left\{ F_2^{1-\alpha}(x_0, x, y_0, y) [g_1^{1-\alpha}(x) + g_2^{1-\alpha}(y) - g_1^{1-\alpha}(x_0)] + \right. \\ \left. + (1-\alpha) \iint_{G_2} (k_1(s, t) F_2^{1-\alpha}(x_0, x, t, y)) ds dt \right\}^{\frac{1}{1-\alpha}} \quad (0.15)$$

або

$$u(x, y) \leq \left(1 + \int_{L_1 \cap G_2} \omega_1(M) d\mu_{\psi_1} \right) \left\{ F_2^{1-\alpha}(x_0, x, y_0, y) \times \right. \\ \times [g_1^{1-\alpha}(x) + g_2^{1-\alpha}(y) - g_1^{1-\alpha}(x_0)] + \\ \left. + (1-\alpha) \iint_{G_2} \left(k(s, t) F_2^{1-\alpha}(x_0, x, t, y) \left(1 + \int_{L_1 \cap G_2} \omega_1(M) d\mu_{\psi_1} \right)^\alpha \right) ds dt \right\}^{\frac{1}{1-\alpha}}, \quad (0.16)$$

де позначено

$$F_2(x_0, x, y_0, y) = \exp \left(\int_{y_0}^y \int_{x_0}^x f(s, t) \left(1 + \int_{L_1 \cap G_2} \omega_1(M) d\mu_{\psi_1} \right) ds dt \right).$$

Припустимо, що нерівність (4)–(5) є справедливою для $(x, y) \in D_k$. Доведемо, що вона буде справедливою і для $(x, y) \in D_{k+1}$. $\forall (x, y) \in D_{k+1}$

$$u(x, y) \leq R_u(x, y) + \sum_{j=1}^k \int_{L_j \cap G_{k+1}} \omega_j(M) u(M) d\mu_{\psi_j} \leq \\ \leq R_{k-1}(x, y) + \int_{L_k \cap G_{k+1}} \omega_k(M) u(M) d\mu_{\psi_k} = R_{ku}(x, y). \quad (0.17)$$

Звідси, враховуючи властивості функції $R_{k-1u}(x, y)$, $\forall M(\xi, \eta) \in L_k$ можемо записати

$$u(M) \leq R_{k-1}(M) \leq R_{k-1}(x, y). \quad (0.18)$$

Оскільки

$$R_{k-1}(x, y) \leq R_u(x, y) \prod_{j=1}^{k-1} \lambda_j(x, y), \quad (0.19)$$

де

$$\lambda_j(x, y) = 1 + \int_{L_j \cap G_{k+1}} \omega_j(M) d\mu_{\psi_j},$$

то з нерівностей (18) та (19) випливає

$$\begin{aligned} R_{ku}(x, y) &\leq R_{k-1}(x, y) \lambda_k(x, y) \leq \\ &\leq R(x, y) \lambda_k(x, y) \prod_{j=1}^{k-1} \lambda_j(x, y) = R_u(x, y) \prod_{j=1}^k \lambda_j(x, y). \end{aligned}$$

Тоді нерівність (17) набуде вигляду

$$u(x, y) \leq R_u(x, y) \prod_{j=1}^k \lambda_j(x, y)$$

або

$$\begin{aligned} u(x, y) &\leq \prod_{j=1}^k \lambda_j(x, y) \left(g_1(x) + g_2(y) - g_1(x_0) + \right. \\ &\quad \left. + \iint_{G_{k+1}} (f(s, t) u(s, t) + k(s, t) u^\alpha(s, t)) ds dt \right). \end{aligned}$$

Тоді

$$\begin{aligned} \frac{u(x, y)}{\prod_{j=1}^k \lambda_k(x, y)} &\leq \left(g_1(x) + g_2(y) - g_1(x_0) + \right. \\ &\quad \left. + \iint_{G_{k+1}} \left(f_k(s, t) \frac{u(s, t)}{\prod_{j=1}^k \lambda_k(s, t)} + k_k(s, t) \frac{u^\alpha(s, t)}{\prod_{j=1}^k \lambda_k^\alpha(s, t)} \right) ds dt \right), \quad (0.20) \end{aligned}$$

де позначено

$$f_k(s, t) = f(s, t) \prod_{j=1}^k \lambda_k(s, t),$$

$$k_k(s, t) = k(s, t) \prod_{j=1}^k \lambda_k^\alpha(s, t).$$

За теоремою 1 [4] для нерівності (20) буде справедливою оцінка

$$u(x, y) \leq \prod_{j=1}^k \lambda_j(x, y) \left\{ F_{k+1}^{1-\alpha}(x_0, x, y_0, y) [g_1^{1-\alpha}(x) + g_2^{1-\alpha}(y) - g_1^{1-\alpha}(x_0)] + \right. \\ \left. + (1-\alpha) \iint_{G_{k+1}} \left(k(s, t) F_{k+1}^{1-\alpha}(x_0, x, t, y) \prod_{j=1}^k \lambda_j^\alpha(s, t) \right) ds dt \right\}^{\frac{1}{1-\alpha}}, \quad (0.21)$$

де

$$F_{k+1}(x_0, x, y_0, y) = \exp \left(\int_{y_0}^y \int_{x_0}^x f_k(s, t) ds dt \right) = \\ = \exp \left(\int_{y_0}^y \int_{x_0}^x f(s, t) \prod_{j=1}^k \left(1 + \int_{L_j \cap G_{k+1}} \omega_j(M) d\mu_{\psi_j} \right) ds dt \right),$$

Тобто, отримана нерівність (6)–(7) для $n = k + 1$. Отже, нерівність справедлива $\forall n \in N$.

Нехай $\alpha = 1$. Знов скористаємося методом математичної індукції. $\forall (x, y) \in D_1$ нерівність (4) має такий вигляд

$$u(x, y) = g_1(x) + g_2(y) - g_1(x_0) + \int_{y_0}^y \int_{x_0}^x (f(s, t) + k(s, t)) u(s, t) ds dt = H_u(x, y). \quad (0.22)$$

За теоремою 1 [4] для нерівності (22) буде справедливою оцінка

$$u(x, y) \leq \frac{g_1(x)g_2(y)}{g_1(x_0)} E_1(x, y), \quad (0.23)$$

де

$$E_1(x, y) = \exp \left(\int_{y_0}^y \int_{x_0}^x (f(s, t) + k(s, t)) ds dt \right).$$

Припустимо, що нерівність (8)–(9) є справедливою для $(x, y) \in D_k$. Доведемо, що вона буде справедливою і для $(x, y) \in D_{k+1}$. $\forall (x, y) \in D_{k+1}$

$$u(x, y) \leq H_{k-1u}(x, y) + \int_{L_k \cap G_{k+1}} \omega_k(M) u(M) d\mu_{\psi_k} = H_{ku}(x, y). \quad (0.24)$$

Функція $H_{ku}(x, y)$ є неспадною по кожній змінній, тому $\forall M(\xi, \eta) \in L_k$

$$u(M) \leq H_{k-1u}(M) \leq H_{k-1u}(x, y). \quad (0.25)$$

Оскільки

$$H_{k-1u}(x, y) \leq H_u(x, y) \prod_{j=1}^{k-1} h_j(x, y), \quad (0.26)$$

де позначено

$$h_j(x, y) = 1 + \int_{L_j \cap G_{j+1}} \omega_j(M) d\mu_{\psi_j},$$

то з нерівностей (25)–(26) випливає

$$\begin{aligned} H_{ku}(x, y) &\leq H_{k-1u}(x, y) h_k(x, y) \leq \\ &\leq H_u(x, y) h_k(x, y) \prod_{j=1}^{k-1} h_j(x, y) = H_u(x, y) \prod_{j=1}^k h_j(x, y). \end{aligned}$$

Тоді нерівність (23) прийме такий вигляд

$$u(x, y) \leq H_u(x, y) \prod_{j=1}^k h_j(x, y).$$

Звідси

$$\frac{u(x, y)}{\prod_{j=1}^k h_j(x, y)} \leq g_1(x) + g_2(y) - g_1(x_0) + \int_{y_0}^y \int_{x_0}^x (f_k(s, t) + k_k(s, t)) \frac{u(s, t)}{\prod_{j=1}^k h_j(s, t)} ds dt,$$

де позначено

$$f_k(s, t) + k_k(s, t) = (f(s, t) + k(s, t)) \prod_{j=1}^k h_j(s, t).$$

Скористаємося теоремою 1 [4] та отримаємо

$$u(x, y) \leq \frac{g_1(x)g_2(y)}{g_1(x_0)} \prod_{j=1}^k h_j(x, y) E_{k+1}(x, y),$$

де

$$E_{k+1}(x, y) = \exp \left(\int_{y_0}^y \int_{x_0}^x (f(s, t) + k(s, t)) \prod_{j=1}^k \left(1 + \int_{L_j \cap G_{k+1}} \omega_j(M) d\mu_{\psi_j} \right) ds dt \right).$$

Тобто, отримана нерівність (8)–(9) для $n = k + 1$. Отже, нерівність справедлива $\forall n \in N$. Теорему доведено.

Для знаходження оцінки розв'язків задачі Гурса з імпульсними збуреннями,

зробимо деякі припущення. Нехай в області $D^* \subset R^2$ для неперервних функцій $\omega_j^*(x, y)$, $j = \overline{1, n}$, $f^*(x, y)$, $k^*(x, y)$ виконуються такі співвідношення

$$|\omega_j^*(x, y)| \leq \omega_j(x, y), \quad |f^*(x, y)| \leq f(x, y), \quad |k^*(x, y)| \leq k(x, y). \quad (0.27)$$

Покладемо $u(x, y) = |v(x, y)|$ та припустимо

$$|g_1^*(x)| \leq g_1(x), \quad |g_2^*(y)| \leq g_2(y), \quad (0.28)$$

де функції $g_1(x)$, $g_2(y)$ задовольняють умовам теореми 1.

Наслідок. Нехай в області D^* виконуються співвідношення (27)–(28) та функції $\omega_j(x, y)$, $f(x, y)$, $k(x, y)$ задовольняють умовам теореми 1. Тоді для розв'язків задачі (1)–(2) справедливі оцінки (6)–(9).

Теорема 2 Нехай в області $D^* \subset R^2$, $D^* = D \cup L$ виконуються 1-6 умови теореми 1 та функція $u(x, y)$ задовольняє інтегральну нерівність (4), де

$$R_u(x, y) = g_1(x) + g_2(y) + \iint_{G_n} (f(s, t) u(s, t) + k(s, t) u^\alpha(s, t)) ds dt.$$

Тоді справджуються оцінки:

при $0 \leq \alpha < 1$

$$u(x, y) \leq \prod_{j=1}^{n-1} \left(1 + \int_{L_j \cap G_n} \omega_j(M) d\mu_{\psi_j} \right) \left\{ F_n^{1-\alpha}(x_0, x, y_0, y) \times \right. \\ \times \left[(g_1(x) + g_2(y_0))^{1-\alpha} + (g_1(x_0) + g_2(y))^{1-\alpha} - (g_1(x_0) + g_2(y_0))^{1-\alpha} \right] + \\ \left. + (1-\alpha) \iint_{G_n} \left(k(s, t) F_n^{1-\alpha}(x_0, x, t, y) \prod_{j=1}^{n-1} \left(1 + \int_{L_j \cap G_n} \omega_j(M) d\mu_{\psi_j} \right)^\alpha \right) ds dt \right\}^{\frac{1}{1-\alpha}},$$

де

$$F_n(x_0, x, y_0, y) = \exp \left(\int_{y_0}^y \int_{x_0}^x f(s, t) \prod_{j=1}^{n-1} \left(1 + \int_{L_j \cap G_n} \omega_j(M) d\mu_{\psi_j} \right) ds dt \right);$$

при $\alpha = 1$

$$u(x, y) \leq \prod_{j=1}^{n-1} \left(1 + \int_{L_j \cap G_n} \omega_j(M) d\mu_{\psi_j} \right) E_n(x, y) \times$$

$$\times \frac{(g_1(x) + g_2(y_0))(g_1(x_0) + g_2(y))}{g_1(x_0) + g_2(y_0)},$$

де

$$E_n(x, y) = \exp \left(\iint_{G_n} (f(s, t) + k(s, t)) \prod_{j=1}^{n-1} \left(1 + \int_{L_j \cap G_n} \omega_j(M) d\mu_{\psi_j} \right) ds dt \right);$$

при $\alpha > 1$ оцінка (6) буде справедливою в області

$$D_{\alpha_n} = \left\{ (x, y) \in D_n : \right. \\ \left. \iint_{G_n} \left(k(s, t) F_n^{\alpha-1}(x_0, x, t, y) \prod_{j=1}^{n-1} \left(1 + \int_{L_j \cap G_n} \omega_j(M) d\mu_{\psi_j} \right)^\alpha \right) ds dt < \right. \\ \left. < \frac{1}{\alpha-1} \left((g_1(x) + g_2(y_0))^{1-\alpha} + (g_1(x_0) + g_2(y))^{1-\alpha} - (g_1(x_0) + g_2(y_0))^{1-\alpha} \right) \right\}.$$

Висновок. Характерною особливістю отриманих результатів є те, що при знаходженні оцінок для розривних функцій двох змінних були використані теорія міри та інтеграл Лебега-Стільтєса. Цей підхід дозволив об'єднати в одному результаті два випадки:

1. μ_{ψ_j} – міра Лебега-Стільтєса, яка зосереджена на кривій L_j – дискретна;
2. μ_{ψ_j} – міра Лебега-Стільтєса, яка зосереджена на кривій L_j – абсолютно-неперервна.

REFERENCES

1. Мартынюк А.А., Гутовски Р. Интегральные неравенства и устойчивость движения. – К.: Наук. думка, 1979. – 249 с.
2. Мартынюк А.А., Лакшмикантам В., Лиля С. Устойчивость движения: метод интегральных неравенств. – К.: Наук. думка, 1989. – 272 с.
3. Самойленко А.М., Перестюк Н.А. Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. – К.: Вища шк., 1987. – 287 с.
4. Массалітіна Є.В. Оцінка функції, яка задовольняє задачі Гурса // Вісник Харківського університету. Серія: Математика, прикладна математика і механіка – 2005. – №711. – С. 8–16.
5. Массалітіна Є.В. Про інтегро-сумарну нерівність Перова для функцій двох змінних // Укр. мат. журн. 2004. – Т. 56, №11. – С. 1569–1575.

6. Массалітіна Є.В. Багатовимірні нелінійні інтегральні нерівності // Наукові вісті НТУУ "КПР". – 2000. – №6. – С. 149–155.
7. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М.: Наука, – 1977. – 737 с.
8. Шилов Г.Е., Гуревич Б.Л. Интеграл, мера и производная. – М.: Наука, – 1967. – 220 с.

Стаття одержана: 25.09.2013; перероблений варіант: 17.11.2013;
прийнята: 19.11.2013.

Симметрически-спектральные операторы в пространствах ℓ_p ($1 \leq p < \infty$) и c_0

В.А. Марченко

Харьковский национальный университет имени В.Н. Каразина,
пл. Свободы, 4, 61022, Харьков, Украина
vitalii.marchenko@karazin.ua

В работе вводится понятие симметрически-спектрального оператора, которое обобщает понятие спектрального по Риссу оператора на случай банаховых пространств с симметричным базисом. Получена теорема об основных свойствах симметрически-спектральных операторов в пространствах ℓ_p ($1 \leq p < \infty$) и c_0 .

Ключевые слова: симметрически-спектральный оператор, симметричный базис, C_0 -полугруппа.

Марченко В.А., **Симетрично-спектральні оператори у просторах ℓ_p ($1 \leq p < \infty$) та c_0 .** В роботі введено поняття симетрично-спектрального оператора, що узагальнює поняття спектрального за Рисом оператора на випадок банахових просторів із симетричним базисом. Отримано теорему про основні властивості симетрично-спектральних операторів у просторах ℓ_p ($1 \leq p < \infty$) та c_0 .

Ключові слова: симетрично-спектральний оператор, симетричний базис, C_0 -напівгрупа.

V.A. Marchenko, **Symmetrically-spectral operators on ℓ_p ($1 \leq p < \infty$) and c_0 spaces.** We introduce the concept of symmetrically-spectral operator which generalizes the concept of Riesz-spectral operator to the case of Banach spaces with symmetric basis. We obtain the theorem on the main properties of symmetrically-spectral operators on ℓ_p ($1 \leq p < \infty$) and c_0 spaces.

Keywords: symmetrically-spectral operator, symmetric basis, C_0 -semigroup.

2000 Mathematics Subject Classification: 47B40, 47A10, 47D06.

1. Введение

Фундаментальной концепцией анализа бесконечномерных линейных динамических систем являются C_0 -полугруппы линейных ограниченных операторов [1]–[5]. Множество систем с распределенными параметрами характеризуются абстрактными дифференциальными уравнениями

$$\dot{x}(t) = Ax(t), \quad x(0) = x_0 \quad (0.1)$$

в банаховом пространстве, для которых заранее известно, что (0.1) имеет единственное решение для всякого начального состояния x_0 , т.е. оператор A является инфинитезимальным генератором C_0 -полугруппы. Во многих приложениях уравнение (0.1) рассматривается в сепарабельном гильбертовом пространстве H и, более того, собственные векторы оператора A образуют базис Рисса пространства H , т.е. A – спектральный по Риссу оператор. Таким свойством обладают, к примеру, системы гиперболического типа [1], системы с запаздыванием нейтрального типа [2]–[4], регулярные системы Штурма-Лиувилля [5]. Данное свойство оператора является достаточно ценным с точки зрения приложений, поскольку позволяет в значительной мере упростить методы исследования устойчивости, управляемости, наблюдаемости бесконечномерных систем, см., к примеру, [1]–[4]. Больше информации о спектральных по Риссу операторах содержится в [1].

В данной работе затрагивается вопрос о разработке спектрального подхода к системам (0.1), которые рассматриваются в банаховом пространстве. Поскольку негильбертовы пространства не обладают базисом Рисса, в работе рассматриваются две задачи. Во-первых, мы хотим выявить класс банаховых пространств, в которых вообще возможна разработка спектрального подхода, подобного существующему в пространствах Гильберта. И, во-вторых, мы хотим обосновать спектральный подход для исследования систем (0.1) в некоторых конкретных банаховых пространствах из выявленного класса. Так как всякий базис Рисса гильбертового пространства является симметричным, в работе предлагается рассматривать симметричные спектральные базисы в банаховых пространствах с симметричным базисом. Пространства с симметричным базисом были впервые введены и изучены И. Зингером [6] в связи с одной задачей С. Банаха и вопросом Ч. Бессаги и А. Пелчинского из изоморфной теории банаховых пространств.

Мы вводим понятие симметрически-спектрального оператора, которое можно рассматривать как естественное обобщение понятия спектрального по Риссу оператора на случай банаховых пространств с симметричным базисом. Также мы получаем результаты об основных свойствах симметрически-спектральных операторов в пространствах ℓ_p ($1 \leq p < \infty$) и c_0 , которые можно рассматривать в качестве обоснования спектрального подхода для исследования систем (0.1) в этих пространствах. В частности, получено спектральное представление симметрически-спектрального оператора A , действующего в ℓ_p или c_0 , спектральное представление резольвенты

$(A - \lambda I)^{-1}$, критерий порождения оператором C_0 -полугруппы и соотношение для логарифмического показателя роста C_0 -полугруппы в терминах спектра $\sigma(A)$. Данный результат можно считать естественным обобщением Теоремы 2.3.5 из [1] о свойствах спектральных по Риссу операторов в гильбертовом пространстве.

2. Симметричные базисы

Всюду далее через $\{e_n\}_{n=1}^\infty$ мы будем обозначать канонический базис пространства ℓ_p , $1 \leq p < \infty$, т.е. $e_n = (\delta_i^n)$, $n \in \mathbb{N}$, где δ_i^n – символ Кронекера. Действие функционала $f \in X^*$ на элемент x банахова пространства X будет обозначаться следующим образом: $\langle f, x \rangle$. В данной работе существенную роль играет следующее определение.

Определение 1 [7] Базис $\{\phi_n\}_{n=1}^\infty$ банахова пространства X называется симметричным, если для всякого $x \in X$

$$\sup_{\sigma \in \Pi} \sup_{|\beta_i| \leq 1, 1 \leq k < \infty} \left\| \sum_{i=1}^k \beta_i \langle \psi_i, x \rangle \phi_{\sigma(i)} \right\| < \infty,$$

где $\{\psi_n\}_{n=1}^\infty \subset X^*$ – соответствующая базису биортогональная последовательность (последовательность координатных функционалов), а Π обозначает множество всех перестановок множества $\mathbb{N}$.

К примеру, канонический базис $\{e_n\}_{n=1}^\infty$ пространства c_0 и ℓ_p , $p \geq 1$ является симметричным. В то же время, в пространстве $L_p[0, 1]$, $p \neq 2$, симметричных базисов не существует [7]. Очевидно, всякий симметричный базис является безусловным. Все симметричные базисы имеют следующую характеристику.

Утверждение 1 [7] Пусть $\{\phi_n\}_{n=1}^\infty$ – базис пространства X , а $\{\psi_n\}_{n=1}^\infty$ – соответствующая ему последовательность координатных функционалов. Следующие утверждения эквивалентны.

- 1) $\{\phi_n\}_{n=1}^\infty$ – симметричный базис пространства X .
- 2) Для всякого $x \in X$ имеем, что

$$\sup_{(\rho \times \sigma) \in \Pi \times \Pi} \left\| \sum_{i=1}^\infty \langle \psi_{\rho(i)}, x \rangle \phi_{\sigma(i)} \right\| < \infty.$$

- 3) Всякая перестановка $\{\phi_{\sigma(n)}\}_{n=1}^\infty$ базиса $\{\phi_n\}_{n=1}^\infty$ сама является базисом, изоморфным $\{\phi_n\}_{n=1}^\infty$.

Заметим, что существуют примеры банаховых пространств с несчетным множеством взаимно неэквивалентных симметричных базисов [8]. Пример банахова пространства с двумя, с точностью до эквивалентности, симметричными базисами содержится в [9]. С другой стороны, следует подчеркнуть,

что в пространствах $\ell_p, p \geq 1$ и c_0 все симметричные базисы эквивалентны между собой [8] (с. 129). Иными словами, в пространствах $\ell_p, p \geq 1$ и c_0 существует только один, с точностью до эквивалентности, симметричный базис, и он эквивалентен каноническому. Это замечательное свойство симметричного базиса в пространствах ℓ_p и c_0 позволяет развить с его помощью технику, подобную технике базисов Рисса в гильбертовых пространствах. Таким образом, мы приходим к формулировке утверждений.

Утверждение 2 Пусть $\{\phi_n\}_{n=1}^\infty$ – симметричный базис пространства $\ell_p, 1 \leq p < \infty$. Тогда существуют константы $M \geq m > 0$, такие, что для всякого $x = \sum_{n=1}^\infty \alpha_n \phi_n \in \ell_p$,

$$m\|x\|^p \leq \sum_{n=1}^\infty |\alpha_n|^p \leq M\|x\|^p.$$

Доказательство. Поскольку $\{\phi_n\}_{n=1}^\infty$ – симметричный базис пространства $\ell_p, p \geq 1$ и в силу того, что все симметричные базисы ℓ_p эквивалентны между собой [8] (с. 129), найдется изоморфизм F , такой, что $\phi_n = Fe_n, n \in \mathbb{N}$. Если $x = \sum_{n=1}^\infty \alpha_n \phi_n \in \ell_p$, то, с одной стороны,

$$\begin{aligned} \|x\|^p &= \left\| \sum_{n=1}^\infty \alpha_n \phi_n \right\|^p = \left\| F \sum_{n=1}^\infty \alpha_n e_n \right\|^p \leq \|F\|^p \left\| \sum_{n=1}^\infty \alpha_n e_n \right\|^p = \\ &= \|F\|^p \left\| \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \dots \end{pmatrix} \right\|^p = \|F\|^p \sum_{n=1}^\infty |\alpha_n|^p. \end{aligned}$$

С другой стороны,

$$\sum_{n=1}^\infty |\alpha_n|^p = \left\| \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \dots \end{pmatrix} \right\|^p = \left\| \sum_{n=1}^\infty \alpha_n e_n \right\|^p = \left\| F^{-1} \sum_{n=1}^\infty \alpha_n \phi_n \right\|^p \leq \|F^{-1}\|^p \|x\|^p.$$

Утверждение 3 Пусть $\{\phi_n\}_{n=1}^\infty$ – симметричный базис пространства c_0 . Тогда существуют константы $M \geq m > 0$, такие, что для всякого $x = \sum_{n=1}^\infty \alpha_n \phi_n \in c_0$,

$$m\|x\| \leq \sup_{n \geq 1} |\alpha_n| \leq M\|x\|.$$

Доказательство этого утверждения проводится аналогично доказательству предыдущего.

3. Симметрически-спектральные операторы

В дальнейшем нам понадобится следующее утверждение.

Утверждение 4 Пусть замкнутый, линейный оператор A в банаховом пространстве X с базисом имеет простой спектр $\{\lambda_n\}_{n \geq 1}$ и соответствующие собственные вектора $\{\phi_n\}_{n \geq 1}$ образуют базис X . Если $\{\psi_n\}_{n \geq 1}$ – собственные вектора A^* , соответствующие $\{\bar{\lambda}_n\}_{n \geq 1}$, а

$$\widetilde{\psi}_n = \frac{\psi_n}{\langle \psi_n, \phi_n \rangle},$$

то $\{\phi_n\}_{n \geq 1}$ и $\{\widetilde{\psi}_n\}_{n \geq 1}$ биортогональны друг другу.

Доказательство.

$$\lambda_n \langle \psi_m, \phi_n \rangle = \langle \psi_m, A \phi_n \rangle = \langle A^* \psi_m, \phi_n \rangle = \langle \bar{\lambda}_m \psi_m, \phi_n \rangle = \lambda_m \langle \psi_m, \phi_n \rangle.$$

Если теперь $\lambda_n \neq \lambda_m$, то $\langle \psi_m, \phi_n \rangle = 0$. Следовательно, $\langle \widetilde{\psi}_m, \phi_n \rangle = \delta_m^n$.

По аналогии с понятием спектрального по Риссу оператора, действующего в гильбертовом пространстве [1], введем понятие симметрически-спектрального оператора.

Определение 2 Предположим, что A является замкнутым линейным оператором, действующим в банаховом пространстве X , наделенном симметричным базисом. Пусть A имеет простые собственные значения $\{\lambda_n\}_{n \geq 1}$, и соответствующие этим значениям собственные векторы $\{\phi_n\}_{n \geq 1}$ образуют симметричный базис X . Если замыкание $\{\lambda_n\}_{n \geq 1}$ тотально разделено, то мы назовем A симметрически-спектральным оператором.

Под тотальной разделенностью мы понимаем то, что множество $\overline{\{\lambda_n\}_{n \geq 1}}$ не содержит двух точек, которые могут быть соединены кривой, целиком лежащей в $\overline{\{\lambda_n\}_{n \geq 1}}$. Следовательно, Определение 2 допускает к рассмотрению операторы с конечным количеством точек сгущения собственных значений. Отметим, что, так как всякий базис Рисса является симметричным, понятие симметрически-спектрального оператора является, с одной стороны, естественным обобщением понятия спектрального по Риссу оператора на случай банаховых пространств с симметричным базисом и включает в себя последнее. С другой стороны, симметрически-спектральные операторы образуют подкласс во множестве спектральных операторов в смысле Данфорда и Шварца [10].

4. Симметрически-спектральные операторы в ℓ_p и c_0

В этом разделе будет показано, что симметрически-спектральные операторы в пространствах ℓ_p ($1 \leq p < \infty$) и c_0 обладают рядом замечательных свойств, которые подобны свойствам спектральных по Риссу операторов в гильбертовых пространствах. А именно, справедлива следующая теорема о свойствах симметрически-спектральных операторов в пространствах ℓ_p ($1 \leq p < \infty$).

Теорема 1 Пусть A – симметрически-спектральный оператор в пространстве ℓ_p ($1 \leq p < \infty$) с простым спектром $\{\lambda_n\}_1^\infty$ и соответствующими собственными векторами $\{\phi_n\}_1^\infty$, а $\{\chi_n\}_1^\infty$ – собственные вектора A^* . Рассмотрим последовательность векторов $\left\{\psi_n = \frac{\chi_n}{\langle \chi_n, \phi_n \rangle}\right\}_1^\infty$.

Тогда оператор A обладает следующими свойствами:

$$(i) \rho(A) = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : \inf_{n \in \mathbb{N}} |\lambda_n - \lambda| > 0 \right\}, \quad \sigma(A) = \overline{\{\lambda_n\}_1^\infty},$$

$$(A - \lambda I)^{-1} x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n - \lambda} \langle \psi_n, x \rangle \phi_n \quad (\lambda \in \rho(A), x \in \ell_p). \quad (0.2)$$

(ii) Для всякого $x \in D(A)$ оператор A имеет спектральное представление

$$Ax = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle \psi_n, x \rangle \phi_n, \quad (0.3)$$

$$\text{причем } D(A) = \left\{ x \in \ell_p : \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^p |\langle \psi_n, x \rangle|^p < \infty \right\}.$$

(iii) Оператор A генерирует C_0 -полугруппу тогда и только тогда, когда

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \Re(\lambda_n) < \infty; \text{ при этом действие полугруппы задается формулой}$$

$$T(t)x = \sum_{n=1}^{\infty} e^{\lambda_n t} \langle \psi_n, x \rangle \phi_n \quad (t \geq 0, x \in \ell_p). \quad (0.4)$$

(iv) Логарифмический показатель роста полугруппы совпадает с

$$\omega_0 = \sup_{n \in \mathbb{N}} \Re(\lambda_n). \quad (0.5)$$

Доказательство. Применив Утверждение 4, мы отмечаем, что $\langle \psi_m, \phi_n \rangle = \delta_n^m$, и, следовательно, для всякого $x \in \ell_p$, $x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle \psi_n, x \rangle \phi_n$.

(i) Рассмотрим точку $\lambda \in \mathbb{C}$, такую, что $\inf_{n \in \mathbb{N}} |\lambda_n - \lambda| \geq a > 0$. Установим, что оператор

$$A_\lambda x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n - \lambda} \langle \psi_n, x \rangle \phi_n$$

является резольвентой оператора A . Применив Утверждение 2 дважды, мы видим, что для всякого $x \in \ell_p$,

$$\|A_\lambda x\|^p \leq \frac{1}{m} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|\lambda_n - \lambda|^p} |\langle \psi_n, x \rangle|^p \leq \frac{1}{ma^p} \sum_{n=1}^{\infty} |\langle \psi_n, x \rangle|^p \leq \frac{M}{ma^p} \|x\|^p,$$

т.е. A_λ – ограничен. Зафиксируем $x \in \ell_p$ и рассмотрим

$$z_N = \sum_{n=1}^N \frac{1}{\lambda_n - \lambda} \langle \psi_n, x \rangle \phi_n.$$

Тогда

$$(A - \lambda I) z_N = \sum_{n=1}^N \frac{1}{\lambda_n - \lambda} \langle \psi_n, x \rangle (\lambda_n \phi_n - \lambda \phi_n) = \sum_{n=1}^N \langle \psi_n, x \rangle \phi_n$$

и $z_N \rightarrow A_\lambda x$, если $N \rightarrow \infty$. Но $(A - \lambda I) z_N \rightarrow x$ при $N \rightarrow \infty$, и в силу замкнутости оператора A отсюда следует, что $A_\lambda x \in D(A)$ и для всякого $x \in \ell_p$

$$(A - \lambda I) A_\lambda x = x. \quad (0.6)$$

Возьмем теперь $y \in D(A)$ и рассмотрим $x = (A - \lambda I) y$. Тогда, в силу (0.6), $x = (A - \lambda I) A_\lambda x = (A - \lambda I) A_\lambda (A - \lambda I) y$. Следовательно,

$$(A - \lambda I) (y - A_\lambda (A - \lambda I) y) = x - x = 0$$

и, так как λ не является собственным значением A , то для всякого $y \in D(A)$

$$y = A_\lambda (A - \lambda I) y.$$

Комбинируя это равенство с (0.6) получим, что $\lambda \in \rho(A)$ и $A_\lambda = (A - \lambda I)^{-1}$. Таким образом установлено, что

$$\left\{ \lambda \in \mathbb{C} : \inf_{n \in \mathbb{N}} |\lambda_n - \lambda| > 0 \right\} \subset \rho(A).$$

Для завершения доказательства остается заметить, что, поскольку $\lambda_n \in \sigma(A)$ и спектр замкнутого оператора замкнут, мы имеем, что $\sigma(A) = \{\lambda_n\}_1^\infty$ и

$$\rho(A) = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : \inf_{n \in \mathbb{N}} |\lambda_n - \lambda| > 0 \right\}.$$

(ii) Прежде всего докажем, что

$$B = \left\{ x \in \ell_p : \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^p |\langle \psi_n, x \rangle|^p < \infty \right\} \subset D(A)$$

и что для всех $x \in B$ справедливо спектральное представление (0.3). Для

$x \in B$ рассмотрим элемент $x_N = \sum_{n=1}^N \langle \psi_n, x \rangle \phi_n$. Тогда, согласно Утвержде-

нию 2, $\{x_N\}_{N=1}^\infty$ и $\{Ax_N = \sum_{n=1}^N \lambda_n \langle \psi_n, x \rangle \phi_n\}_{N=1}^\infty$ сходятся при $N \rightarrow \infty$ к x и к

$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle \psi_n, x \rangle \phi_n$, соответственно. В силу замкнутости оператора A мы заключаем, что $x \in D(A)$ и $Ax = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle \psi_n, x \rangle \phi_n$.

Значит, $B \subset D(A)$ и нам остается увидеть, что $D(A) \subset B$. Предположим, что $x \in D(A)$ и рассмотрим элемент $y = (A - \lambda I)x$, если $\lambda \in \rho(A)$. На основании доказанного свойства (i) мы имеем

$$x = (A - \lambda I)^{-1} y = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n - \lambda} \langle \psi_n, y \rangle \phi_n$$

и $x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle \psi_n, x \rangle \phi_n$. В силу того, что $\{\phi_n\}_1^{\infty}$ – базис, мы имеем

$$\frac{1}{\lambda_n - \lambda} \langle \psi_n, y \rangle = \langle \psi_n, x \rangle \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Следовательно, $x \in B$, так как для всякого $\lambda \in \rho(A)$,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^p |\langle \psi_n, x \rangle|^p &= \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\lambda_n}{\lambda_n - \lambda} \right|^p |\langle \psi_n, y \rangle|^p = \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\lambda}{\lambda_n - \lambda} + 1 \right|^p |\langle \psi_n, y \rangle|^p \leq \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \left(\left| \frac{\lambda}{\lambda_n - \lambda} \right| + 1 \right)^p |\langle \psi_n, y \rangle|^p \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{|\lambda|}{\mu} + 1 \right)^p |\langle \psi_n, y \rangle|^p \leq \\ &\leq M \left(\frac{|\lambda|}{\mu} + 1 \right)^p \|y\|^p, \end{aligned}$$

где $\mu = \inf_{n \in \mathbb{N}} |\lambda_n - \lambda|$.

(iii) Если оператор A генерирует C_0 -полугруппу $T(t)$, то

$$\omega_0 = \inf_{t > 0} \frac{\ln \|T(t)\|}{t} < \infty$$

и любая точка $\lambda \in \mathbb{C} : \Re(\lambda) > \omega_0$ попадает в $\rho(A)$. Следовательно,

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \Re(\lambda_n) < \infty. \quad (0.7)$$

Покажем, что условие (0.7) является достаточным для порождения оператором A полугруппы. Как было показано в (i), для всякого λ , такого, что $\Re(\lambda) > \sup_{n \in \mathbb{N}} \Re(\lambda_n) = \omega$, резольвента оператора A имеет представление

$$(A - \lambda I)^{-1} x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n - \lambda} \langle \psi_n, x \rangle \phi_n, \quad (x \in \ell_p), \text{ откуда}$$

$$(A - \lambda I)^{-k} x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\lambda_n - \lambda)^k} \langle \psi_n, x \rangle \phi_n \quad (k \in \mathbb{N}).$$

Применив Утверждение 2, получаем, что

$$\|(A - \lambda I)^{-k} x\|^p \leq \frac{1}{m} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|\lambda_n - \lambda|^{pk}} |\langle \psi_n, x \rangle|^p \leq \frac{M \|x\|^p}{m (\operatorname{Re}(\lambda) - \omega)^{pk}}.$$

Отсюда, применяя известную теорему Хилле - Йосиды, мы заключаем, что оператор A порождает C_0 -полугруппу $T(t)$, причем

$$\|T(t)\| \leq \sqrt{\frac{M}{m}} e^{\omega t}. \quad (0.8)$$

Осталось установить (0.4). Определим оператор e^{At} для всякого $x \in \ell_p$ так:

$$e^{At} x = \sum_{n=1}^{\infty} e^{\lambda_n t} \langle \psi_n, x \rangle \phi_n.$$

Этот оператор ограничен для всякого $t \geq 0$ в силу Утверждения 2 и условия (0.7). Рассмотрим $\lambda : \Re(\lambda) > \omega$. Применяя преобразование Лапласа, на основании (i) и представления резольвенты C_0 -полугруппы, имеем

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} e^{At} x dt &= \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} \sum_{n=1}^{\infty} e^{\lambda_n t} \langle \psi_n, x \rangle \phi_n dt = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} e^{\lambda_n t} \langle \psi_n, x \rangle \phi_n dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda - \lambda_n} \langle \psi_n, x \rangle \phi_n = -(A - \lambda I)^{-1} x = \\ &= \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} T(t) x dt \quad (x \in \ell_p). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\int_0^{\infty} e^{-\lambda t} (e^{At} x - T(t) x) dt = 0.$$

Единственность преобразования Лапласа завершает доказательство (0.4).

(iv) Из (iii) и неравенства (0.8) имеем, что $T(t)\phi_n = e^{\lambda_n t} \phi_n$, ($t \geq 0$), и

$$\omega_0 = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln \|T(t)\|}{t} \leq \omega = \sup_{n \in \mathbb{N}} \Re(\lambda_n).$$

Следовательно, для всех натуральных n ,

$$\omega_0 = \inf_{t > 0} \frac{\ln \|T(t)\|}{t} \geq \Re(\lambda_n) \quad \text{и} \quad \omega_0 = \sup_{n \in \mathbb{N}} \Re(\lambda_n).$$

Теорема доказана.

Следующая теорема устанавливает ряд свойств симметрически-спектральных операторов в пространстве c_0 .

Теорема 2 Пусть A – симметрически-спектральный оператор в пространстве c_0 с простым спектром $\{\lambda_n\}_1^\infty$ и соответствующими собственными векторами $\{\phi_n\}_1^\infty$, а $\{\chi_n\}_1^\infty$ – собственные вектора A^* .

Рассмотрим последовательность векторов $\left\{\psi_n = \frac{\chi_n}{\langle \chi_n, \phi_n \rangle}\right\}_1^\infty$.

Тогда оператор A обладает следующими свойствами:

$$(i) \rho(A) = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : \inf_{n \in \mathbb{N}} |\lambda_n - \lambda| > 0 \right\}, \quad \sigma(A) = \overline{\{\lambda_n\}_1^\infty},$$

$$(A - \lambda I)^{-1} x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n - \lambda} \langle \psi_n, x \rangle \phi_n \quad (\lambda \in \rho(A), x \in c_0). \quad (0.9)$$

(ii) Для всякого $x \in D(A)$ оператор A имеет спектральное представление

$$Ax = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle \psi_n, x \rangle \phi_n, \quad (0.10)$$

$$\text{причем } D(A) = \left\{ x \in c_0 : \sup_{n \in \mathbb{N}} |\lambda_n| |\langle \psi_n, x \rangle| < \infty \right\}.$$

(iii) Оператор A генерирует C_0 -полугруппу тогда и только тогда, когда

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \Re(\lambda_n) < \infty; \text{ при этом действие полугруппы задается формулой}$$

$$T(t)x = \sum_{n=1}^{\infty} e^{\lambda_n t} \langle \psi_n, x \rangle \phi_n \quad (t \geq 0, x \in c_0). \quad (0.11)$$

(iv) Логарифмический показатель роста полугруппы совпадает с

$$\omega_0 = \sup_{n \in \mathbb{N}} \Re(\lambda_n). \quad (0.12)$$

Доказательство Теоремы 2 основано на тех же рассуждениях, что и доказательство Теоремы 1, с привлечением Утверждения 3.

Пункт (i) Теорем 1 и 2 также означает, что, если A – симметрически-спектральный оператор в ℓ_p или c_0 , имеющий собственные значения $\{\lambda_n\}_1^\infty$, которые могут сгущаться только на бесконечности, то $\sigma(A) = \{\lambda_n\}_1^\infty$. Иными словами, оператор A имеет только точечный спектр. В некотором смысле можно сказать, что пункт (ii) Теорем 1 и 2 допускает обращение, а именно, справедливо следующее утверждение.

Утверждение 5 Предположим, что линейный оператор A имеет представление (0.9) или (0.10), где $\{\lambda_n\}_1^\infty$ – различные комплексные числа, $\{\phi_n\}_1^\infty$ – симметричный базис ℓ_p или c_0 , соответственно, и $\langle \psi_m, \phi_n \rangle = \delta_n^m$. Если $\overline{\{\lambda_n\}_1^\infty}$ тотально разделено, то A – симметрически-спектральный оператор.

Доказательство. Достаточно показать, что оператор A замкнут и плотно определен. Докажем утверждение в случае пространства ℓ_p . В силу представления (0.3), для всякого $j \in \mathbb{N}$

$$\phi_j \in D(A) = \left\{ x \in \ell_p : \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^p |\langle \psi_n, x \rangle|^p < \infty \right\}$$

и

$$A\phi_j = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle \psi_n, \phi_j \rangle \phi_n = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \delta_n^j \phi_n = \lambda_j \phi_j,$$

откуда следует, что $\{\phi_n\}_1^\infty$ – (все) собственные вектора A . Поскольку они формируют базис ℓ_p , оператор A является плотно определенным.

Для доказательства замкнутости A рассмотрим последовательность $\{x_k\}_1^\infty \subset D(A)$, такую, что $x_k \rightarrow x^*$, если $k \rightarrow \infty$ и $Ax_k \rightarrow y^*$ при $k \rightarrow \infty$. Так как последовательность $\{Ax_k\}_1^\infty$ – ограничена, применяя Утверждение 2, мы видим, что для любого $k \in \mathbb{N}$,

$$M^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n \langle \psi_n, x_k \rangle|^p \leq \|Ax_k\|^p \leq C,$$

$$m \|Ax_k\|^p \leq \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n \langle \psi_n, x_k \rangle|^p \leq M \|Ax_k\|^p.$$

Предельный переход по $k \rightarrow \infty$ дает

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n \langle \psi_n, x^* \rangle|^p \leq MC,$$

$$m \|y^*\|^p \leq \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n \langle \psi_n, x^* \rangle|^p \leq M \|y^*\|^p,$$

откуда $x^* \in D(A)$. Так как теперь

$$m \|Ax^*\|^p \leq \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n \langle \psi_n, x^* \rangle|^p \leq M \|Ax^*\|^p,$$

то $Ax^* = y^*$ и A – замкнутый оператор. Доказательство утверждения в случае пространства c_0 проводится аналогично.

5. Выводы

Данная работа закладывает основы спектрального подхода для исследования систем (0.1) в пространствах с симметричным базисом. Для этого вводится понятие симметрически-спектрального оператора, обобщающее понятие спектрального по Риссу оператора в гильбертовом пространстве. Используя тот факт, что в пространствах ℓ_p и c_0 существует единственный, с

точностью до изоморфизма, симметричный базис, и он эквивалентен каноническому базису, мы устанавливаем ряд свойств симметрически-спектральных операторов в пространствах ℓ_p и c_0 (Теоремы 1 и 2).

Подобно тому, как техника спектральных базисных риссовских разложений играет важную роль в исследовании устойчивости, управляемости и наблюдаемости систем (0.1) в гильбертовых пространствах, полученные в настоящей работе результаты могут быть весьма полезны в исследовании устойчивости, управляемости и наблюдаемости систем (0.1) в пространствах ℓ_p ($1 \leq p < \infty$) и c_0 .

ЛИТЕРАТУРА

1. Curtain R.F., Zwart H.J. An Introduction to Infinite-Dimensional Linear Systems Theory, Texts in Applied Mathematics, Volume 21.- New-York: Springer-Verlag, 1995. – 698 p.
2. Rabah R., Sklyar G.M., Rezounenko A.V. Generalized Riesz basis property in the analysis of neutral type systems // C. R. Math. Acad. Sci. Paris, Ser. I – 2003. – 337. – P. 19–24
3. Rabah R., Sklyar G.M., Rezounenko A.V. Stability analysis of neutral type systems in Hilbert space // J. Differential Equations, – 2005. – 214. – P. 391–428
4. Rabah R., Sklyar G.M. The analysis of exact controllability of neutral-type systems by the moment problem approach // SIAM J. Control Optim., – 2007. – 46, no 6. – P. 2148–2181
5. Delattre C., Dochain D., Winkin J. Sturm-Liouville systems are Riesz-spectral systems // Int. J. Appl. Math. Comput. Sci., – 2003. – 13, no 4. – P. 481–484
6. Зингер И. О банаховых пространствах с симметричным базисом // Revue de math. pures et appl., – 1961. – 6. – P. 159–166
7. Singer I. Bases in Banach Spaces I.- Berlin: Springer-Verlag, 1970. – 668 p.
8. Lindenstrauss J., Tzafriri L. Classical Banach Spaces I.- Reprint of the 1977 ed., Berlin: Springer-Verlag, 1996. – 188 p.
9. Read C.J. A Banach space with, up to equivalence, precisely two symmetric bases // Israel J. Math., – 1981. – 40, no 1. – P. 33–53
10. Данфорд Н. и Шварц Дж.Т. Линейные операторы, том 3: Спектральные Операторы.- Москва: Мир, 1974. – 661 с.

Статья получена: 5.10.2013; окончательный вариант: 15.10.2013; принята: 19.11.2013.

Дослідження потенційної енергії формозміни в прямокутній плиті, на яку тисне опуклий штамп

Т. О. Штефан, О. В. Величко

Запорізький національний технічний університет,

ул. Жуковського, 64, 69063, Запоріжжя, Україна

taiana2000@rambler.ru,

Таврійський державний агротехнологічний університет

пр. Б. Хмельницького, 18, 72316, м. Мелітополь,

Запорізька обл., Україна

velichko_ev@i.ua

Розглядається стаціонарна задача про просторову деформацію штампом плити у вигляді прямокутного паралелепіпеда. Досліджується вплив геометричних та механічних параметрів плити на поведінку функції потенційної енергії формозміни. Чисельні результати наведено для штампу, поверхня якого є синусоїдальною в двох вимірах.

Ключові слова: плита, штамп, просторова деформація, четверта гіпотеза міцності, потенційна енергія, зона пластичності.

Штефан Т.А., Величко Е.В., **Исследование потенциальной энергии формоизменения в прямоугольной плите, на которую давит выпуклый штамп.** Рассматривается стационарная задача про пространственную деформацию прямоугольного параллелепипеда штампом. Исследуется влияние геометрических и механических параметров плиты на поведение функции потенциальной энергии формоизменения. Численные результаты приведены для штампа, поверхность которого является синусоидальной в двух измерениях.

Ключевые слова: плита, штамп, пространственная деформация, четвертая гипотеза прочности, потенциальная энергия, зона пластичности.

T. A. Shtefan, H. V. Velichko, **Research the potential energy of forming a rectangular plate, which pushes convex stamp.** We consider the stationary problem of spatial deformation cuboid stamp. The influence of geometrical and mechanical parameters of the slab on the behavior of the potential energy function. Numerical results are shown for the stamp which surface is sinusoidal in two dimensions.

Keywords: plate, stamp, spatial deformation, the fourth hypothesis is strength, potential energy, the zone of plasticity.

2000 Mathematics Subject Classification 74G65.

ВСТУП

Плити представляють собою важливі елементи різноманітних інженерних споруд, тому дослідженню особливостей їх деформацій присвячено багато робіт, деякі з яких наведені в роботі [1]. Оцінка міцності елементів машин і споруд є важливою задачею інженерного розрахунку. При аналізі міцності інженерних конструкцій одним із основних інструментів для теоретичних розрахунків є теорія пружності [2]. Наприклад, в роботі [3] викладено суть авторських робіт, присвячених розрахунку на міцність опору матеріалів детермінованими методами при відомому напруженому стані. Після визначення компонент напружень в точках деформованого тіла в залежності від типу матеріалу використовують одну із гіпотез міцності. На практиці найчастіше застосовується четверта (енергетична) гіпотеза міцності, сутністю якої є твердження про те, що руйнування структури матеріалу споруди відбувається в тих областях, де потенціальна енергія формозміни перевищує деяке критичне значення [4]. Явний вираз для функції енергії формозміни можна записати лише в деяких найпростіших випадках. Наприклад, для деформації нескінченного в одному напрямку паралелепіпеда, який знаходиться в умовах плоскої деформації, можна записати відповідний вираз для функції потенційної енергії формозміни, використовуючи результати роботи [5]. Зазвичай при розв'язанні задач теорії пружності обмежуються або виразами для компонент тензору напружень, або графіками для поведінки компонент тензору напружень, при побудові яких використанні визначені в процесі розв'язку їх значення в вузлах деякої сітки [6]. Визначення критичних, з точки зору гіпотез міцності, областей конструкцій є окремою задачею механіки. В даній роботі на основі аналітичних розв'язків мішаної задачі теорії пружності для плити у вигляді прямокутного паралелепіпеда проведено чисельний аналіз поведінки функції, яка описує потенційну енергію формозміни залежно від геометричних та пружних параметрів задачі. В роботі [7] розглядається стаціонарна задача про плоску деформацію прямокутного паралелепіпеда штампом, причому нижня межа тіла вільна від навантажень. Отримано аналітичний вигляд для напружень і переміщень точок паралелепіпеда та досліджено вплив геометричних і механічних характеристик на поведінку величини енергії формозміни, яка застосовується у четвертій (енергетичній) гіпотезі міцності. Для просторової деформації плити синусоїдальним штампом така задача вперше розглянута в цій публікації. Виявлені механічні ефекти можуть бути перенесені на інші подібні конструкції.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ.

Розглядається плита у вигляді прямокутного паралелепіпеда. Матеріал плити є ізотропним невагомим однорідним і характеризується модулем зсуву μ та коефіцієнтом Пуассона ν . Виберемо прямокутну декартову систему координат так, щоб початок координат знаходився в одній з вершин плити, вісі направлені вздовж його ребер, причому вісь Oz направлено вниз. Вважаємо, що плита займає область $D \times [0, h]$, де $D : (x, y) \in [0, A] \times [0, B]$. Для

зручності будемо застосовувати представлення $A = \frac{\pi}{a}$, $B = \frac{\pi}{b}$. На верхню межу плити ($z = 0$) тисне гладкий абсолютно жорсткий штамп, який переміщується вертикально і контактує з поверхнею плити на всій ділянці D . Відповідні граничні умови мають вигляд:

$$u(x, y, 0) = 0, v(x, y, 0) = 0, w(x, y, 0) = f(x, y), (x, y) \in D. \quad (1)$$

Тут $z = f(x, y)$ – рівняння поверхні, яка співпадає з нижньою межею штампу в кінцевому положенні, де $D : (x, y) \in [0, A] \times [0, B]$.

Будемо вважати, що нижня межа вільна від навантажень, тобто:

$$\tau_{yz}(x, y, h) = 0, \tau_{xz}(x, y, h) = 0, \sigma_z(x, y, h) = 0. \quad (2)$$

За аналогією з [5] будемо вважати, що на бокових межах виконуються наступні умови:

$$w(0, y, z) = w(x, 0, z) = 0, w(A, 0, z) = w(0, B, z) = 0. \quad (3)$$

Ставиться задача про отримання явного аналітичного виразу для функції потенційної енергії формозміни плити та дослідження її на максимум. Для цього потрібно отримати аналітичний розв'язок задачі лінійної теорії пружності з межовими умовам (1)-(3).

2. МЕТОД РОЗВ'ЯЗАННЯ.

Оскільки функція $w(x, y, z)$ повинна задовольняти умовам (3), то будемо шукати її у вигляді подвійного тригонометричного ряду за синусами:

$$w(x, y, z) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{nk}(z) \sin(kax) \sin(nby). \quad (4)$$

У цьому випадку розвинення функцій $u(x, y, z)$, $v(x, y, z)$, $\sigma_x(x, y, z)$, $\sigma_y(x, y, z)$, $\sigma_z(x, y, z)$, $\tau_{xy}(x, y, z)$, $\tau_{xz}(x, y, z)$, $\tau_{yz}(x, y, z)$ мають вигляд:

$$\begin{aligned} u &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} U_{nk}(z) \cos(kax) \sin(nby), v = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} V_{nk}(z) \sin(kax) \cos(nby), \\ \sigma_x &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} S_{nk}(z) \sin(kax) \sin(nby), \sigma_y = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} R_{nk}(z) \sin(kax) \sin(nby), \\ \sigma_z &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} Q_{nk}(z) \sin(kax) \sin(nby), \tau_{xy} = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} T_{nk}(z) \cos(kax) \cos(nby), \\ \tau_{xz} &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} M_{nk}(z) \cos(kax) \sin(nby), \tau_{yz} = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} N_{nk}(z) \sin(kax) \cos(nby). \end{aligned} \quad (5)$$

З урахуванням рівнянь рівноваги та закону Гука отримано загальний вигляд для функцій, які входять в розвинення (5):

$$\begin{aligned} U_{nk} &= \frac{ak(A_{nk} + zpB_{nk}) \operatorname{ch} pz + ak(C_{nk} + zpD_{nk}) \operatorname{sh} pz + bnE_{nk} \operatorname{ch} pz + bnF_{nk} \operatorname{sh} pz}{p^2}, \\ V_{nk} &= \frac{bn(A_{nk} + zpB_{nk}) \operatorname{ch} pz + bn(C_{nk} + zpD_{nk}) \operatorname{sh} pz - akE_{nk} \operatorname{ch} pz - akF_{nk} \operatorname{sh} pz}{p^2}, \\ W_{nk} &= \frac{A_{nk} \operatorname{sh} pz + B_{nk}((4\nu - 3) \operatorname{ch} pz + pz \operatorname{sh} pz) + C_{nk} \operatorname{ch} pz + D_{nk}((4\nu - 3) \operatorname{sh} pz + pz \operatorname{ch} pz)}{p}. \end{aligned}$$

Після визначення коефіцієнтів $U_{nk}(z)$, $V_{nk}(z)$ та $W_{nk}(z)$ визначаємо функції $S_{nk}(z)$, $R_{nk}(z)$, $Q_{nk}(z)$, $T_{nk}(z)$, $M_{nk}(z)$ та $N_{nk}(z)$:

$$\begin{aligned}\frac{p^2}{4\mu} S_{nk}(1-2\nu) &= A_{nk} a^2 k^2 (\nu-1) \operatorname{ch} pz + C_{nk} a^2 k^2 (\nu-1) \operatorname{sh} pz + \\ &\quad + p B_{nk} (a^2 k^2 (\nu-1) z \operatorname{ch} pz + \nu(2\nu-1) p \operatorname{sh} pz) + \\ &\quad + p D_{nk} (a^2 k^2 (\nu-1) z \operatorname{sh} pz + \nu(2\nu-1) p \operatorname{ch} pz); \\ \frac{p^2}{4\mu} R_{nk}(1-2\nu) &= A_{nk} b^2 n^2 (\nu-1) \operatorname{ch} pz + C_{nk} b^2 n^2 (\nu-1) \operatorname{sh} pz + \\ &\quad + p B_{nk} (b^2 n^2 (\nu-1) z \operatorname{ch} pz + \nu(2\nu-1) p \operatorname{sh} pz) + \\ &\quad + p D_{nk} (b^2 n^2 (\nu-1) z \operatorname{sh} pz + \nu(2\nu-1) p \operatorname{ch} pz); \\ \frac{p^2}{4\mu} Q_{nk}(1-2\nu) &= A_{nk} (\nu-1) p^2 \operatorname{ch} pz + C_{nk} (\nu-1) p^2 \operatorname{sh} pz + \\ &\quad + p B_{nk} ((\nu-1) p^2 z \operatorname{ch} pz + (2\nu^2 - 5\nu + 2) p \operatorname{sh} pz) + \\ &\quad + p D_{nk} ((\nu-1) p^2 z \operatorname{sh} pz + (2\nu^2 - 5\nu + 2) p \operatorname{ch} pz); \\ \frac{p^2}{4\mu} T_{nk}(1-2\nu) &= akbn(\nu-1)((A_{nk} + B_{nk}z)p \operatorname{ch} pz + (C_{nk} + D_{nk}z)p \operatorname{sh} pz); \\ \frac{p^2}{4\mu} M_{nk}(1-2\nu) &= ak(\nu-1)(A_{nk} p \operatorname{sh} pz + B_{nk} p(pz \operatorname{sh} pz + (2\nu-1) \operatorname{ch} pz) + \\ &\quad + C_{nk} p \operatorname{ch} pz + D_{nk} p(pz \operatorname{ch} pz + (2\nu-1) \operatorname{sh} pz)); \\ \frac{p^2}{4\mu} N_{nk}(1-2\nu) &= bn(\nu-1)(A_{nk} p \operatorname{sh} pz + B_{nk} p(pz \operatorname{sh} pz + (2\nu-1) \operatorname{ch} pz) + \\ &\quad + C_{nk} p \operatorname{ch} pz + D_{nk} p(pz \operatorname{ch} pz + (2\nu-1) \operatorname{sh} pz)).\end{aligned}$$

Тут A_{nk} , B_{nk} , C_{nk} , D_{nk} , E_{nk} , F_{nk} – довільні константи, $p^2 = a^2 k^2 + b^2 n^2$. Зауважимо, що для кожної з гармонік константа p є своєю. Значення довільних констант визначаються з межових умов (1), (2). Наведемо остаточні формули:

$$\begin{cases} A_{nk} = E_{nk} = F_{nk} = 0, \\ B_{nk} = p f_{nk} \frac{\operatorname{ch}^2 ph + 1 - 2\nu}{(4\nu - 3) \operatorname{ch}^2 ph - p^2 h^2 - 4\nu^2 + 4\nu - 1}, \\ C_{nk} = p f_{nk} \frac{4\nu^2 - 6\nu + 2 - p^2 h^2}{(4\nu - 3) \operatorname{ch}^2 ph - p^2 h^2 - 4\nu^2 + 4\nu - 1}, \\ D_{nk} = p f_{nk} \frac{ph - \operatorname{sh} ph \operatorname{ch} ph}{(4\nu - 3) \operatorname{ch}^2 ph - p^2 h^2 - 4\nu^2 + 4\nu - 1}. \end{cases} \quad (6)$$

Тут f_{nk} – коефіцієнт розкладу функції $z = f(x, y)$ в ряд Фур'є:

$$f_{nk} = \frac{1}{ab} \iint_D f(x, y) \sin \frac{\pi k x}{a} \sin \frac{\pi n y}{b} dx dy,$$

де область інтегрування $D : (x, y) \in [0, \frac{\pi}{a}] \times [0, \frac{\pi}{b}]$.

3. ДОСЛІДЖЕННЯ ФУНКЦІЇ ПОТЕНЦІАЛЬНОЇ ЕНЕРГІЇ ФОРМОЗМІНИ.

Застосуємо отриманні результати для дослідження поведінки функції енергії формозміни. В четвертій гіпотезі міцності [4] використовується вираз

$$\sigma^{II} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2},$$

який визначає енергію формозміни. Цей вираз можна записати через компоненти тензора напружень у довільній декартовій системі координат:

$$\sigma^{II} = F(x, y, z) = \sqrt{(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)^2 - 3(\sigma_x \sigma_y + \sigma_x \sigma_z + \sigma_y \sigma_z - \tau_{xy}^2 - \tau_{xz}^2 - \tau_{yz}^2)}.$$

З урахуванням розвинень (5) можна отримати розклад для функції потенціальної енергії формозміни. Оскільки вираз виявляється занадто громіздким, обмежимося дослідженням енергії, залишивши в розкладах (5) лише перші гармоніки. В цьому випадку

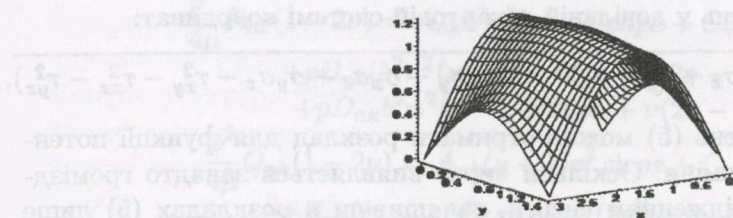
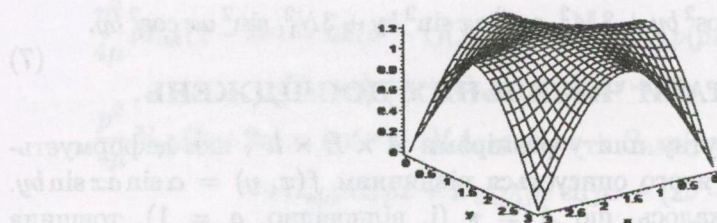
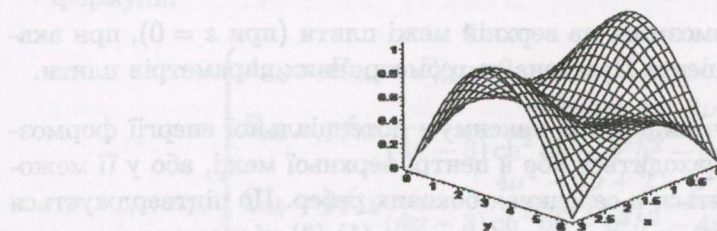
$$F^2(x, y, z) = (S_{11}^2 + R_{11}^2 + Q_{11}^2 - 3S_{11}R_{11} - 3S_{11}Q_{11} - 3R_{11}Q_{11}) \sin^2 ax \sin^2 by + \\ + 3T_{11}^2 \cos^2 ax \cos^2 by + 3M_{11}^2 \cos^2 ax \sin^2 by + 3N_{11}^2 \sin^2 ax \cos^2 by. \quad (7)$$

4. РЕЗУЛЬТАТИ ЧИСЕЛЬНИХ ДОСЛІДЖЕНЬ.

Розглянемо прямокутну плиту розмірами $A \times B \times h$, яка деформується штампом, поверхня якого описується рівнянням $f(x, y) = \alpha \sin ax \sin by$. При розрахунках вважалось, що $A = \pi$ (і, відповідно, $a = 1$), товщина плити $h = \frac{\pi}{2}$, а параметр B буде змінним. Замість функції потенційної енергії формозміни будемо розглядати пропорційну їй безрозмірну функцію $\tilde{F}(x, y, z) = \frac{F(x, y, z)}{\alpha \mu a}$. На рисунках 1-3 зображені типові графіки функції потенційної енергії формозміни на верхній межі плити (при $z = 0$), при вказаних значеннях коефіцієнта Пуассона та геометричних параметрів плити.

Із симетрії задачі очевидно, що максимум потенціальної енергії формозміни на верхній межі знаходиться або в центрі верхньої межі, або у її межових точках, які знаходяться в середині бокових ребер. Це підтверджується рисунками 1-3. При заданих граничних умовах (1)-(3) відношення значень функції потенційної енергії формозміни на середині ребер верхньої грані дорівнює відношенню лінійних розмірів плити. На рисунках 4-6 зображено графіки функції енергії формозміни на нижній межі плити (при $z = h$) при тих же параметрах, що і на верхній межі.

На нижній межі плити локальні максимуми знаходяться в точці $x = \frac{A}{2}, y = \frac{B}{2}$ і в кутових точках плити, причому значення локальних максимумів в кутових точках спадають. Збільшення довжини плити призводить

Рис. 1: Функція $\tilde{F}(x, y, 0)$ при $\nu = 0,4$; $B = \frac{\pi}{2}$.Рис. 2: Функція $\tilde{F}(x, y, 0)$ при $\nu = 0,2$; $B = \pi$.Рис. 3: Функція $\tilde{F}(x, y, 0)$ при $\nu = 0,4$; $B = 2\pi$.

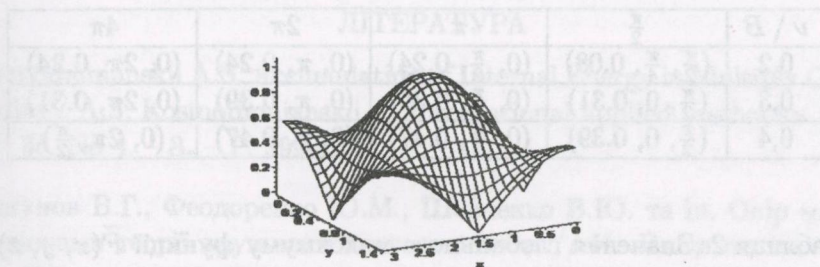


Рис. 4: Функція $\tilde{F}(x, y, h)$ при $\nu = 0, 4$; $B = \frac{\pi}{2}$.

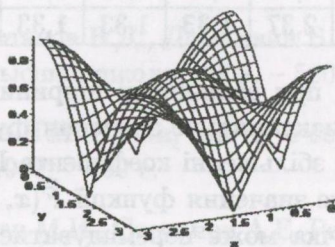


Рис. 5: Функція $\tilde{F}(x, y, h)$ при $\nu = 0, 2$; $B = \pi$.

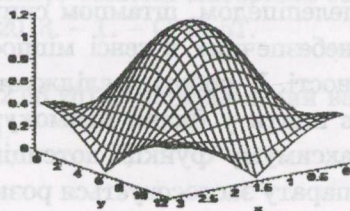


Рис. 6: Функція $\tilde{F}(x, y, h)$ при $\nu = 0, 4$; $B = 4\pi$.

до збільшення значення локального максимуму функції потенційної енергії формозміни в середині нижньої межі.

В таблиці 1 представлені положення точок глобального максимуму функції енергії $\tilde{F}(x, y, z)$, а в таблиці 2 наведені значення глобального максимуму вказаної функції в екстремальних точках.

Таблиця 1. Положення глобального максимуму функції $\tilde{F}(x, y, z)$.

$\nu \setminus B$	$\frac{\pi}{2}$	π	2π	4π
0,2	$(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, 0.08)$	$(0, \frac{\pi}{2}, 0.24)$	$(0, \pi, 0.24)$	$(0, 2\pi, 0.24)$
0,3	$(\frac{\pi}{2}, 0, 0.31)$	$(0, \frac{\pi}{2}, 0.39)$	$(0, \pi, 0.39)$	$(0, 2\pi, 0.31)$
0,4	$(\frac{\pi}{2}, 0, 0.39)$	$(0, \frac{\pi}{2}, 0.47)$	$(0, \pi, 0.47)$	$(0, 2\pi, \frac{\pi}{2})$

Таблиця 2. Значення глобального максимуму функції $\tilde{F}(x, y, z)$.

$\nu \setminus B$	$\frac{\pi}{2}$	π	2π	4π	6π
0,2	2,39	1,22	1,23	1,22	1,22
0,3	2,22	1,25	1,26	1,25	1,24
0,4	2,37	1,33	1,33	1,33	1,34

Як бачимо з таблиць, при збільшенні ширини плити B при незмінному коефіцієнті Пуассона максимальне значення функції потенційної енергії змінюється незначно. При збільшенні коефіцієнта Пуассона ν при незмінній ширині плити максимальне значення функції $\tilde{F}(x, y, z)$ змінюється немонотонно, а екстремальна точка може переміщуватися із середини плити в її межові точки.

ВИСНОВКИ.

У представленій роботі розглянута просторова задача деформації плити, яка є прямокутним паралелепіпедом, штампом синусоїдальної форми. Проведено пошук найбільш небезпечних в сенсі міцності областей плити згідно четвертої гіпотези міцності. У роботі досліджується вплив геометричних та механічних параметрів плити у формі прямокутного паралелепіпеда на положення локального максимуму функції потенційної енергії формозміни. У якості математичного апарату застосовується розклад функцій переміщень та навантажень в тригонометричні ряди. В результаті чисельних досліджень виявлено, що максимум потенціальної енергії формозміни на верхній межі знаходиться або в центрі верхньої межі або на її межових точках, що знаходяться в середині бокових ребер (в залежності від лінійних параметрів плити та значення коефіцієнта Пуассона). При заданих граничних умовах на серединах ребер верхньої грані значення функції потенційної енергії формозміни пропорційні лінійним параметрам плити. На нижній межі плити локальні максимуми знаходяться в середній точці або в кутових точках плити, причому значення в всіх чотирьох кутових точках співпадають. Висота точки, в

якій знаходиться глобальний максимум, та саме значення максимуму функції енергії формозміни немонотонно залежить від лінійних розмірів плити і від коефіцієнту Пуассона. Розроблений математичний апарат дозволяє провести систематичний аналіз впливу форми штапу, розмірів плити та коефіцієнту Пуассона матеріалу плити на поведінку функції, яка описує потенційну енергію формозміни, що і планується зробити в подальшому.

ЛІТЕРАТУРА

1. Kosmodamianskii A.S. Accumulation of Internal Energy in Multiply Connected Bodies / A.S. Kosmodamianskii // International applied mechanics. – 2002. – Vol. 38, No 4. – 8. – P. 399-422.
2. Піскунов В.Г., Феодоренко Ю.М., Шевченко В.Ю. та ін. Опір матеріалів з основами теорії пружності й пластичності // К.: Вища школа. – 1994. – 9. – 655 с.
3. Павлов В.С. Вдосконалення розрахунків на міцність в машинобудуванні. / В.С. Павлов // Вісник ХНУ. Технічні науки. – 2012. – № 1. – С. 51-65.
4. Александров А.В., Потапов В.Д., Державин Б. П. Сопротивление материалов. 7-е изд. – М.: Высшая школа, 2009. – 560 с.
5. Власов В.З., Леонтьев Н.Н. Балки, плиты и оболочки на упругом основании. – М.: ГИФМЛ, 1960. – 490 с.
6. Угодчиков А.Г., Длугач М.И., Степанов А.Е. Решение краевых задач плоской теории упругости на цифровых и аналоговых машинах. – Казань: Изд. Казанского ун-та, 1970. – 528 с.
7. Штефан Т.О., Величко О.В. Дослідження енергії формозміни в плиті, яка деформується штампом // Новітні матеріали та технології в металургії та машинобудуванні. – 2013. – 1. – С.45-51.

Стаття одержана: 12.06.2013; перероблений варіант: 10.11.2013;
прийнята: 29.11.2013.

Функциональные модели коммутативных систем операторов близких к унитарным

В.Н. Сыровацкий

Харьковский национальный университет имени В.Н. Каразина
пл. Свободы, 4, 61022, Харьков, Украина
vsirovatsky@gmail.com

Найдены операторы, которые определяют основную коммутативную систему линейных ограниченных операторов T_1, T_2 коммутативного унитарного метрического узла. Операторы задаются в терминах построенной для системы T_1, T_2 функциональной модели.

Ключевые слова: функциональная модель, коммутативная система операторов.

Сыровацкий В.М., **Функціональні моделі коммутативних систем операторів близьких до унітарних.** Знайдено оператори, які визначають основну комутативну систему лінійних обмежених операторів T_1, T_2 комутативного унитарного метричного вузла. Оператори задаються у термінах збудованої для системи T_1, T_2 функціональної моделі.

Ключові слова: Функціональна модель, комутативна система операторів.

V.N. Syrovatskyi, **Functional models of commutative systems of operators close to the unitary.** Operators were found, that define main commutative system of linear limited operators T_1, T_2 for unital metric knot. This operators are defined in terms of functional model that was built for system T_1, T_2 .

Keywords: functional model, commutative system of operators.

2000 Mathematics Subject Classification: 47A45.

Функциональная модель оператора сжатия T , который действует в гильбертовом пространстве H была впервые получена Б.С. Надем и Ч. Фояшем [5]. Данная модель позволяет реализовать оператор T как оператор умножения на независимую переменную в специальном пространстве функций [5, 2]. Изучение спектральных характеристик этой модели привело к ряду

нетривиальных задач как функционального анализа так и теории функции, среди которых: вопросы интерполяции, задачи базисности и полноты и др. [2].

При использовании техники дилатаций Надя-Фояша [5] построение аналогичных функциональных моделей для коммутативных систем операторов $\{T_1, T_2\}$, заданных в гильбертовом пространстве H , наталкивалось на существенные трудности. На этом пути не удалось решить поставленную выше задачу даже в случае сжимаемости T_1 и T_2 . Выход из этой ситуации был найден в работе [7], которая базируется на обобщении понятия узла для коммутативных систем операторов и по сути была высказана М.С. Лившицем.

В работе [8] построена функциональная модель пары коммутативных операторов, когда один из них является сжатием. Эти построения основаны на технике преобразований Фурье. Если же ни один из операторов $\{T_1, T_2\}$ не является сжатием, данный метод применим быть не может.

В работе [9] построена функциональная модель пары коммутативных операторов, когда ни один из них не является сжатием. Модель построена в пространстве Л. де Бранжа.

В данной работе найден вид операторов $N_1, N_2, \Gamma, \tilde{N}_1, \tilde{N}_2, \tilde{\Gamma}$, которые определяют систему $\{T_1, T_2\}$.

§1. Предварительные сведения

Рассмотрим линейный ограниченный оператор T , действующий в гильбертовом пространстве H . Совокупность

$$\Delta = (J; H \oplus E; V = \begin{bmatrix} T & \Phi \\ \Psi & K \end{bmatrix}; H \oplus \tilde{E}; \tilde{J}) \quad (1.1)$$

называется унитарным узлом [1-4], если линейный оператор

$$V = \begin{bmatrix} T & \Phi \\ \Psi & K \end{bmatrix} : H \oplus E \mapsto H \oplus \tilde{E} \quad (1.2)$$

удовлетворяет соотношениям

$$V^* \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & \tilde{J} \end{bmatrix} V = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & J \end{bmatrix}, \quad V \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & J \end{bmatrix} V^* = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & \tilde{J} \end{bmatrix}, \quad (1.3)$$

где J и $\tilde{J}$ являются инволюциями в гильбертовых пространствах E и $\tilde{E}$ соответственно, $J = J^* = J^{-1}$, $\tilde{J} = \tilde{J}^* = \tilde{J}^{-1}$. Любой ограниченный линейный оператор T в H всегда может быть включен в унитарный узел Δ (1.1), для этого необходимо положить [2] $-E = \overline{D_{T^*}H}$, $\tilde{E} = \overline{D_T H}$, $\Psi = \sqrt{|D_{T^*}|}$, $\Phi = \sqrt{|D_T|}$, $J = \text{sign} D_{T^*}$, $\tilde{J} = \text{sign} D_T$, $K = -\tilde{J}T^*$, где, как обычно, $D_T = I - T^*T$ — дефектные операторы, отвечающие T , а $\sqrt{|A|}$ и $\text{sign} A$ для самосопряженного оператора A следует понимать в смысле соответствующих спектральных разложений.

Узел Δ (1.1) называется простым [2], если $H = H_1$, где

$$H_1 = \text{span}\{T^n \Phi f + T^{*m} \Psi^* g; f \in E; g \in \tilde{E}; n, m \in \mathbb{Z}_+\}. \quad (1.4)$$

Подпространства H_1 и $H_0 = H_1^\perp = H \ominus H_1$ приводят оператор T , причём сужение T на H_0 является унитарным оператором [2].

Основным инвариантом узла Δ (1), описывающим простые узлы, является, введенная ещё в 1946 году [1] М.С. Лившицем, характеристическая оператор-функция

$$S_\Delta = K + \Psi(zI - T)^{-1} \Phi, \quad (1.5)$$

которая играет основную роль в теории треугольных [2] и функциональных моделей [4, 5] для операторов близких к унитарным (в смысле определения (1.1)).

Предположим, что $\dim E = \dim \tilde{E} = r < \infty$ и $J = \tilde{J}$. Выберем в E и $\tilde{E}$ ортонормированные базисы $\{e_\alpha\}_1^r$ и $\{e'_\alpha\}_1^r$. Тогда из результатов В. П. Потапова [2] следует, что матрица-функция $S_\Delta(z) = \| \langle S_\Delta(z) e_\alpha, e'_\beta \rangle \|$, в случае когда спектр $\sigma(T)$ оператора T принадлежит единичной окружности $T = \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}$, имеет следующую мультипликативную структуру

$$S_\Delta(z) = \int_0^{\varphi_t} \exp \left\{ \frac{e^{i\varphi_t} + z}{e^{i\varphi_t} - z} J dF_t \right\}, \quad (1.6)$$

где φ_t - неотрицательная неубывающая на $[0, \ell]$ функция $0 \leq \varphi_t \leq 2\pi$; а F_t - неубывающая эрмитова $(r \times r)$ матрица-функция на $[0, \ell]$, для которой $\text{tr} F_t \equiv t$.

Используя представление В. П. Потапова (1.6) для $S_\Delta(z)$ (5), нетрудно построить [2] треугольную модель оператора T . Обозначим через $L_{r,l}^2(F_x)$ гильбертово пространство вектор-функций

$$L_{r,l}^2(F_x) = \left\{ f(x) = (f_1(x), \dots, f_r(x)); \int_0^l f(x) dF_x f^*(x) < \infty \right\}. \quad (1.7)$$

Зададим в $L_{r,l}^2(F_x)$ (1.7) линейный оператор T

$$Tf(x) = f(x)e^{i\varphi_x} - 2 \int_x^l f(t) dF_t \Phi_t^* \Phi_x^{*-1} J e^{i\varphi_x}, \quad (1.8)$$

где матрица Φ_x является решением интегрального уравнения

$$\Phi_x + \int_0^x \Phi_t dF_t J = I, \quad x \in [0, l]. \quad (1.9)$$

Рассмотрим также матрицу-функцию Ψ_x

$$\Psi_x + \int_x^l \Psi_t dF_t J = J, \quad x \in [0, l]. \quad (1.10)$$

Определим теперь операторы $\Phi : E \mapsto L_{r,l}^2(F_x)$ и $\Psi : L_{r,l}^2(F_x) \mapsto E$ (здесь $E = \mathbb{C}^n$) следующим образом

$$\Phi f(x) = \sqrt{2} f \Psi_x e^{i\varphi_x}, \quad \Psi f(x) = \sqrt{2} \int_0^l f(x) dF_x \Phi_x^*, \quad (1.11)$$

где $f \in E$. И пусть $K = S_\Delta(\infty)$ (1.6). Совокупность

$$\Delta_c = (J; L_{r,l}^2(F_x) \oplus E; V = \begin{bmatrix} T & \Phi \\ \Psi & K \end{bmatrix}; L_{r,l}^2(F_x) \oplus E; J) \quad (1.12)$$

является унитарным узлом (1.1)-(1.3) и называется треугольной моделью простого узла Δ (1.1), где $L_{r,l}^2(F_x)$, T , Φ , Ψ - имеют вид (1.7), (1.8) - (1.11). Последнее означает, что простые компоненты (1.4) у узлов Δ (1.1) и Δ_c (1.12), в случае когда спектр оператора T лежит на единичной окружности $\sigma(T) \subseteq \mathbb{T}$, унитарно-эквивалентны [2], конечно, при условии $J = \tilde{J}$ и $\dim E = \dim \tilde{E} = r < \infty$.

Предположим, что $\dim E = 2$, а $J = J_N$, где

$$J_N = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (1.13)$$

Следуя работе [6], введём вектор-функции:

$$L_x(z) = (1 - zT)^{-1} \Phi(1, 1) \quad (1.14)$$

$$\tilde{L}_x(z) = (1 - zT^*)^{-1} \Psi^*(1, -1) \quad (1.15)$$

Определение 1. Гильбертовым пространством Л. де Бранжа $\mathcal{B}(E, G)$ назовём пространство, которое образуют вектор-функции $F(z) = [F_1(z), F_2(z)]$, где $F_k(z)$, ($k = 1, 2$) имеют вид

$$F_1(z) = \int_0^l f(t) dF_t L_t^*(\bar{z}); \quad F_2(z) = \int_0^l f(t) dF_t \tilde{L}_t^*(\bar{z}). \quad (1.16)$$

И пусть $\mathcal{B}_\phi$ - отображение Л. де Бранжа

$$\mathcal{B}_\phi f = [F_1(z), F_2(z)]. \quad (1.17)$$

Скалярное произведение в $\mathcal{B}(E, G)$ индуцируется прообразом отображения $\mathcal{B}_\varphi$ (1.17):

$$\langle F(z), \hat{F}(z) \rangle_{\mathcal{B}_\varphi(E, G)} = \langle f(t), \hat{f}(t) \rangle_{L^2_{2,l}(F_t)}, \quad (1.18)$$

причём $F(z) = \mathcal{B}_\varphi f(t)$, $\hat{F}(z) = \mathcal{B}_\varphi \hat{f}(t)$, где $f(t), \hat{f}(t) \in L^2_{2,l}(F_t)$.

Функции $E_x(z), \tilde{E}_x(z), G_x(z), \tilde{G}_x(z)$ задаются соотношениями [6]

$$L_x(z) = (e^{-i\phi_x} - z)^{-1} [E_x(z); \tilde{E}_x(z)] \quad (1.19)$$

$$\tilde{L}_x(z) = (1 - ze^{-i\phi_x})^{-1} [G_x(z); \tilde{G}_x(z)]. \quad (1.20)$$

Пусть T_1, T_2 - коммутативная система линейных ограниченных операторов, действующая в гильбертовом пространстве H . Совокупность гильбертовых пространств $E, \tilde{E}$ и операторов $\Phi \in [E, H]$, $\Psi \in [H, \tilde{E}]$, $K \in [E, \tilde{E}]$, $\sigma_s, \tau_s, N_s, \Gamma_1 \in [E, E]$, $\tilde{\sigma}_s, \tilde{\tau}_s, \tilde{N}_s, \tilde{\Gamma}_1 \in [\tilde{E}, \tilde{E}]$ ($s = 1, 2$) назовём коммутативным унитарным метрическим узлом Δ

$$\Delta = (\Gamma_1, \sigma_s, \tau_s, N_s, H \oplus E, V_s, V_s^+, H \oplus \tilde{E}, \tilde{N}_s, \tilde{\tau}_s, \tilde{\sigma}_s, \tilde{\Gamma}_1), \quad (1.21)$$

если для расширений

$$V_s = \begin{bmatrix} T_s & \Phi N_s \\ \Psi & K \end{bmatrix}, \quad V_s^+ = \begin{bmatrix} T_s^* & \Psi^* \tilde{N}_s^* \\ \Phi^* & K^* \end{bmatrix}$$

справедливы следующие соотношения:

$$1) \quad V_s^* \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & \tilde{\sigma} \end{bmatrix} V_s = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & \tau_s \end{bmatrix}, \quad V_s^+ \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & \sigma_s \end{bmatrix} V_s^+ = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & \tilde{\tau}_s \end{bmatrix},$$

$$2) \quad T_2 \Phi N_1 - T_1 \Phi N_2 = \Phi \Gamma_1, \quad \tilde{N}_1 \Psi T_2 - \tilde{N}_2 \Psi T_1 = \tilde{\Gamma}_1 \Psi,$$

$$3) \quad \tilde{N}_2 \Psi \Phi N_1 - \tilde{N}_1 \Psi \Phi N_2 = K \Gamma_1 - \tilde{\Gamma}_1 K, \quad K N_s = \tilde{N}_s K (s = 1, 2),$$

где $\sigma_s, \tau_s, (\tilde{\sigma}_s, \tilde{\tau}_s)$ самосопряжены в $E(\tilde{E})$, ($s = 1, 2$).

Операторы, действующие в пространствах E и $\tilde{E}$ узла Δ (1.21), - зависимы. Произвольная коммутативная система линейных ограниченных операторов T_1, T_2 всегда может быть включена в узел Δ (1.21) [1]. В случае обратимости "дефектных" операторов σ_1 и $\tilde{\sigma}_1$ в E и $\tilde{E}$ всегда можно считать, что N_1 и $\tilde{N}_1$ обратимы. Введём $N, \tilde{N}, \Gamma, \tilde{\Gamma}$ следующего вида

$$N = N_1^{-1} N_2; \quad \Gamma = N_1^{-1} \Gamma_1; \quad \tilde{N} = \tilde{N}_1^{-1} \tilde{N}_2; \quad \tilde{\Gamma} = \tilde{N}_1^{-1} \tilde{\Gamma}_1. \quad (1.22)$$

Зададим в $L^2_{r,l}(F_x)$ (1.7) линейные операторы T_1 и T_2

$$T_1 f(x) = f(x) e^{i\varphi_x} - 2 \int_x^l f(t) dF_t \Phi_t^* \Phi_x^{*-1} J e^{i\varphi_x}, \quad (1.23)$$

$$T_2 f(x) = f(x) (N(x)e^{i\varphi_x} + \Gamma(x)) - 2 \int_x^l f(t) dF_t \Phi_t^* \Phi_t^{*-1} J N(x) e^{i\varphi_x}. \quad (1.24)$$

Основная система коммутативных операторов $\{T_1, T_2\}$ узла Δ (1.19) унитарно эквивалентна [9] системе операторов, которая действует в пространстве Л. де Бранжа $\mathcal{B}(E, G)$ следующим образом

$$T_1 F_1(z) = (z + \overline{\mu(\bar{z})}) F_1(z) + \overline{\nu(\bar{z})} F_2(z) + \frac{\overline{E_0(\bar{z})} - \overline{\tilde{E}_0(\bar{z})}}{2} F_2(0) \quad (1.25)$$

$$T_1 F_2(z) = \frac{F_2(z) - F_2(0)}{z} \quad (1.26)$$

$$T_2 F_1(z) = \frac{F_1(z)}{m(z)} + \frac{\tilde{\mu}(z)}{m(z)} F_1(z) + \frac{\tilde{\nu}(z)}{m(z)} F_2(z) \quad (1.27)$$

$$T_2 F_2(z) = \frac{F_2(z)n(z) - F_2(0)n(0)}{z}, \quad (1.28)$$

где $(F_1(z), F_2(z)) \in \mathcal{B}(E, G)$, а $m(z)$ и $n(z)$ удовлетворяют уравнениям $(N + z\Gamma)(1, 1)^T = m(z)(1, 1)^T$ и $(\tilde{N}^* + z\tilde{\Gamma}^*)(1, -1)^T = n(z)(1, -1)^T$. При этом коэффициенты $\mu(z)$ и $\nu(z)$ имеют следующий вид:

$$\nu(z) = \frac{c_2(z)c_3(z) - c_1(z)c_4(z)}{c_2(z) - c_4(z)} \quad (1.29)$$

$$\mu(z) = \frac{c_1(z) - c_3(z)}{c_2(z) - c_4(z)} \quad (1.30)$$

$$c_1(z) = \frac{(E_0(z) + \tilde{E}_0(z))(1 - z^2)}{2(E_0(z)\overline{E_0(\bar{z})} - \tilde{E}_0(z)\overline{\tilde{E}_0(\bar{z})})} \int_0^l \Psi_t^*(1, 1) dF_t L_t^*(\bar{z}) \quad (1.31)$$

$$c_2(z) = \frac{(G_l'(z) + \tilde{G}_l'(z))(1 - z^2)}{2(E_0(z)\overline{E_0(\bar{z})} - \tilde{E}_0(z)\overline{\tilde{E}_0(\bar{z})})} \quad (1.32)$$

$$c_3(z) = \frac{E_0(z) + \tilde{E}_0(z)}{E_0'(z) - \tilde{E}_0'(z)} \int_0^l \Psi_t^*(1, 1) dF_t \tilde{L}_t^*(\bar{z}) \quad (1.33)$$

$$c_4(z) = \frac{2(G_l(z)\overline{G_l(\bar{z})} - \tilde{G}_l(z)\overline{\tilde{G}_l(\bar{z})})}{(E_0'(z) - \tilde{E}_0'(z))(1 - z^2)}, \quad (1.34)$$

а коэффициенты $\tilde{\mu}(z)$ и $\tilde{\nu}(z)$ равны:

$$\tilde{\mu}(z) = \frac{I_1(z)d_3(z) - I_2(z)d_1(z)}{d_2(z)d_3(z) - d_1(z)d_4(z)} \quad (1.35)$$

$$\tilde{\nu}(z) = \frac{I_1(z)d_4(z) - I_2(z)d_2(z)}{d_1(z)d_4(z) - d_2(z)d_3(z)} \quad (1.36)$$

$$I_1(z) = \frac{1}{2z}(1,1)\sqrt{2}S\left(\frac{1}{z}\right)\tilde{\sigma}_2\left(\Phi_l\left(\frac{1}{z}\right) - J(\overline{E_0(z)}, \overline{\tilde{E}_0(z)})\right) \quad (1.37)$$

$$I_2(z) = \frac{1}{2z}(1,1)\sqrt{2}S\left(\frac{1}{z}\right)\tilde{\sigma}_2\left(\Phi_l J\left(\frac{\overline{G_l(z)}}{\overline{\tilde{G}_l(z)}}\right) + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \quad (1.38)$$

$$d_1(z) = \frac{E_0(z)\overline{E_0(z)} - \tilde{E}_0(z)\overline{\tilde{E}_0(z)}}{1 - |z|^2} \quad (1.39)$$

$$d_2(z) = \frac{G_l'(z) + \tilde{G}_l'(z)}{2} \quad (1.40)$$

$$d_3(z) = \frac{E_0'(z) - \tilde{E}_0'(z)}{2} \quad (1.41)$$

$$d_4(z) = \frac{G_l(z)\overline{\tilde{G}_l(z)} - \tilde{G}_l(z)\overline{G_l(z)}}{1 - |z|^2}. \quad (1.42)$$

§2. Основная часть

Поскольку для системы операторов T_1, T_2 (1.23), (1.24) построение модели (1.25)-(1.28) использует операторы $N, \Gamma, \tilde{N}, \tilde{\Gamma}$ (1.22), то найдём вид этих операторов в терминах параметров модели (1.29) - (1.42).

Обозначим

$$\begin{aligned} N_1 &= \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} & N_2 &= \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix} & \Gamma_2 &= \begin{bmatrix} a_3 & b_3 \\ c_3 & d_3 \end{bmatrix} \\ \tilde{N}_1 &= \begin{bmatrix} \tilde{a}_1 & \tilde{b}_1 \\ \tilde{c}_1 & \tilde{d}_1 \end{bmatrix} & \tilde{N}_2 &= \begin{bmatrix} \tilde{a}_2 & \tilde{b}_2 \\ \tilde{c}_2 & \tilde{d}_2 \end{bmatrix} & \tilde{\Gamma}_2 &= \begin{bmatrix} \tilde{a}_3 & \tilde{b}_3 \\ \tilde{c}_3 & \tilde{d}_3 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.1)$$

Рассмотрим выражение, которое вытекает из узлового соотношения

$$T_2 \Psi_x N_1 - T_1 \Psi_x N_2 = \Psi_x \Gamma, \quad (2.2)$$

где операторы T_1, T_2 из узла Δ (1.21). Выясним, во что перейдут после преобразования де Бранжа операторы $\Psi_x N_1, \Psi_x N_2$ и $\Psi_x \Gamma$.

Легко видеть, что

$$\int_0^l \Psi_t dF_t L_t(\bar{z}) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \Psi_0 J \begin{pmatrix} E_0(\bar{z}) \\ \tilde{E}_0(\bar{z}) \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} R_0 \begin{pmatrix} E_0(\bar{z}) \\ \tilde{E}_0(\bar{z}) \end{pmatrix},$$

где:

$$R_0 = -S_\Delta(0) = \begin{pmatrix} a(0) & b(0) \\ c(0) & d(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(0) & a(0) - \overline{G_l(0)} \\ a(0) - \overline{G_l(0)} & E_0(0) - \overline{\tilde{G}_l(0)} - a(0) \end{pmatrix}.$$

Следовательно:

$$B_L \Psi_x N_1 \xi = \xi N_1 \left(\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} R_0 \begin{pmatrix} E_0(\bar{z}) \\ \tilde{E}_0(\bar{z}) \end{pmatrix} \right),$$

$$B_L \Psi_x N_2 \xi = \xi N_2 \left(\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} R_0 \begin{pmatrix} E_0(\bar{z}) \\ \tilde{E}_0(\bar{z}) \end{pmatrix} \right),$$

$$B_L \Psi_x \Gamma \xi = \xi \Gamma \left(\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} R_0 \begin{pmatrix} E_0(\bar{z}) \\ \tilde{E}_0(\bar{z}) \end{pmatrix} \right),$$

где $\xi \in E$.

Также рассмотрим:

$$\begin{aligned} \int_0^l \Psi_t dF_t \tilde{L}_t(\bar{z}) &= \frac{-1}{2z} \begin{pmatrix} G_l(\bar{z}) \\ \tilde{G}_l(\bar{z}) \end{pmatrix} + \frac{1}{2z} \Psi_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2z} R_0 J \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2z} \begin{pmatrix} G_l(\bar{z}) \\ \tilde{G}_l(\bar{z}) \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{2z} R_0 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2z} \begin{pmatrix} G_l(\bar{z}) \\ \tilde{G}_l(\bar{z}) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Итак, мы имеем:

$$B_{\tilde{L}} \Psi_x N_1 \xi = \xi N_1 \left(\frac{1}{2z} R_0 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2z} \begin{pmatrix} G_l(\bar{z}) \\ \tilde{G}_l(\bar{z}) \end{pmatrix} \right),$$

$$B_{\tilde{L}} \Psi_x N_2 \xi = \xi N_2 \left(\frac{1}{2z} R_0 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2z} \begin{pmatrix} G_l(\bar{z}) \\ \tilde{G}_l(\bar{z}) \end{pmatrix} \right),$$

$$B_{\tilde{L}} \Psi_x \Gamma \xi = \xi \Gamma \left(\frac{1}{2z} R_0 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2z} \begin{pmatrix} G_l(\bar{z}) \\ \tilde{G}_l(\bar{z}) \end{pmatrix} \right).$$

Обозначим:

$$R_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} R_0 \begin{pmatrix} E_0(\bar{z}) \\ \tilde{E}_0(\bar{z}) \end{pmatrix},$$

$$R_2 = R_0 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} G_l(\bar{z}) \\ \tilde{G}_l(\bar{z}) \end{pmatrix}.$$

Тогда соотношение (2.2) при преобразовании де Бранжа B_L принимает вид:

$$T_2 B_L(\Psi_x N_1 \xi) - T_1 B_L(\Psi_x N_2 \xi) = B_L(\Phi_x \Gamma \xi)$$

или

$$\begin{aligned} \frac{1}{m(z)} \xi N_1 R_1(z) + \frac{\tilde{\mu}(z)}{m(z)} + \frac{\tilde{\nu}(z)}{m(z)} \xi N_1 R_2(z) + (z + \overline{\mu(\bar{z})}) \xi N_2 R_1(z) + \nu(\bar{z}) \xi N_2 R_2(z) + \\ + \frac{1}{2} (\overline{E_0(\bar{z})} - \overline{\tilde{E}_0(\bar{z})}) \xi N_2 R_2(z) = \xi \Gamma R_1(z). \end{aligned}$$

А при преобразовании де Бранжа $B_{\tilde{L}}$ соотношение (2.2) принимает следующий вид:

$$T_2 B_{\tilde{L}}(\Psi_x N_1 \xi) - T_1 B_{\tilde{L}}(\Psi_x N_2 \xi) = B_{\tilde{L}}(\Phi_x \Gamma \xi) \quad (1.37)$$

$$\frac{1}{z}(\xi N_1 R_2(z)n(z) - \xi N_1 R_2(0)n(0)) - \frac{1}{z}(\xi N_2 R_2(z) - \xi N_2 R_2(0)) = \xi \Gamma R_2(z) \quad (1.38)$$

$$\frac{1}{z}(\xi N_1 n(z) - \xi N_2) R_2(z) - \frac{1}{z}(\xi N_1 n(0) - \xi N_2) R_2(0) = \xi \Gamma R_2(z) \quad (1.39)$$

$$\frac{1}{z}(\xi N_1 n(z) - \xi N_2 - z \xi \Gamma) R_2(z) = \frac{1}{z}(\xi N_1 n(0) - \xi N_2) R_2(0).$$

Введём функцию $f(z) = (\xi N_1 n(z) - \xi N_2 - z \xi \Gamma) R_2(z)$, тогда последнее равенство означает, что:

$$f(z) - f(0) = 0 \quad (\forall z \in \mathbb{C}).$$

Так как

$$\begin{aligned} R_2 &= R_0 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} G_l(\bar{z}) \\ \tilde{G}_l(\bar{z}) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -\overline{G_l(0)} \\ E_0(0) + \overline{G_l(0)} - \tilde{G}_l(0) - 2a(0) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} G_l(\bar{z}) \\ \tilde{G}_l(\bar{z}) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -\overline{G_l(0)} - G_l(\bar{z}) \\ E_0(0) + \overline{G_l(0)} - \tilde{G}_l(0) - \tilde{G}_l(\bar{z}) - 2a(0) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

то первый коэффициент разложения функции $f(z)$ должен равняться нулю:

$$((\xi N_1 n(z) - \xi N_2 - z \xi \Gamma) R_2(z))' = 0$$

$$(\xi N_1 n'(z) - \xi \Gamma) R_2(z) + (\xi N_1 n(z) - \xi N_2 - z \xi \Gamma) R_2'(z) = 0. \quad (2.3)$$

Следовательно, при $z = 0$:

$$(\xi N_1 n'(0) - \xi \Gamma) R_2(0) + (\xi N_1 n(0) - \xi N_2) R_2'(0) = 0.$$

Рассмотрим также

$$(-1, 1)n(z) = (-1, 1)(\tilde{N}^* + z\tilde{\Gamma}^*),$$

где $\tilde{N} = \tilde{N}_1^{-1} \tilde{N}_2$, $\tilde{\Gamma} = \tilde{N}_1^{-1} \tilde{\Gamma}$, $\tilde{N}^* = \tilde{N}_2^* \tilde{N}_1^{*-1}$, $\tilde{\Gamma}^* = \tilde{\Gamma} \tilde{N}_1^{*-1}$, тогда:

$$(1, -1)n(z) = (1, -1)(\tilde{N}_2^* \tilde{N}_1^{*-1} + z\tilde{\Gamma}^* \tilde{N}_1^{*-1})$$

$$(1, -1)n(z) \tilde{N}_1^* = (1, -1)(\tilde{N}_2^* + z\tilde{\Gamma}^*).$$

В результате приведенных преобразований имеем два выражения:

$$(1, -1)n(0) \tilde{N}_1^* = (1, -1) \tilde{N}_2^*$$

$$(1, -1)n'(0) \tilde{N}_1^* = (1, -1) \tilde{\Gamma}^*.$$

Так как $n(z)$ есть линейная функция $n(z) = \theta z + \lambda$ и $n'(z) = \theta$, выражение (2.3) принимает вид:

$$(\xi \theta N_1 - \xi \Gamma) R_2(0) + (\xi \lambda N_1 - \xi N_2) R'_2(0) = 0.$$

В связи с тем, что $R'_2(z)$ имеет вид:

$$R'_2(z) = \begin{pmatrix} G'_l(\bar{z}) \\ \tilde{G}'_l(\bar{z}) \end{pmatrix},$$

то:

$$(\xi \theta N_1 - \xi \Gamma) \left(R_0 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} G_l(\bar{z}) \\ \tilde{G}_l(\bar{z}) \end{pmatrix} \right) + (\xi \lambda N_1 - \xi N_2) \begin{pmatrix} G'_l(\bar{z}) \\ \tilde{G}'_l(\bar{z}) \end{pmatrix} = 0.$$

Так как вектор ξ произвольный, то, взяв в последнем выражении $\xi = (1, 0)$ и $\tilde{\xi} = (0, 1)$, получим следующие уравнения:

$$\begin{aligned} &(\theta a_1 - a_3)(a(0) - b(0) - G_l(0)) + (\theta b_1 - b_3)(c(0) - d(0) - \tilde{G}_l(0)) + \\ &+ (\lambda a_1 - a_2)G'_l(0) - (\lambda b_1 - b_2)\tilde{G}'_l(0) = 0 \\ &(\theta c_1 - c_3)(a(0) - b(0) - G_l(0)) + (\theta d_1 - d_3)(c(0) - d(0) - \tilde{G}_l(0)) + \\ &+ (\lambda c_1 - c_2)G'_l(0) - (\lambda d_1 - d_2)\tilde{G}'_l(0) = 0. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Из выражений $(1, -1)n(0)\tilde{N}_1^* = (1, -1)\tilde{N}_2^*$ и $(1, -1)n'(0)\tilde{N}_1^* = (1, -1)\tilde{\Gamma}^*$, а также, используя вид матриц N_1 , N_2 и Γ , имеем:

$$\begin{aligned} \bar{\lambda}(\tilde{a}_1 - \tilde{b}_1) &= \tilde{a}_2 - \tilde{b}_2 \\ \bar{\lambda}(\tilde{c}_1 - \tilde{d}_1) &= \tilde{c}_2 - \tilde{d}_2 \\ \bar{\theta}(\tilde{a}_1 - \tilde{b}_1) &= \tilde{a}_3 - \tilde{b}_3 \\ \bar{\theta}(\tilde{c}_1 - \tilde{d}_1) &= \tilde{c}_3 - \tilde{d}_3. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Аналогично рассмотрим выражение, определяющее $m(z)$:

$$m(z) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = (N + z\Gamma) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$m(z) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = (N_1^{-1}N_2 + zN_1^{-1}\Gamma) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$m(z)N_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = (N_2 + z\Gamma) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда выражения $m(0)N_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = N_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ и $m'(0)N_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \Gamma \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ определяют вид функции $m(z)$:

$$m(z) = \delta z + \eta.$$

И приходим к следующим выражениям:

$$\begin{aligned}\eta(a_1 + b_1) &= a_2 + b_2 \\ \eta(c_1 + d_1) &= c_2 + d_2 \\ \delta(a_1 + b_1) &= a_3 + b_3 \\ \delta(c_1 + d_1) &= c_3 + d_3.\end{aligned}\tag{2.6}$$

Теперь рассмотрим узловые соотношения $KN_1 = \tilde{N}_1K$ и $KN_2 = \tilde{N}_2K$. Используя то, что $K = S_\Delta(0)$, получим:

$$\begin{pmatrix} a(0) & b(0) \\ c(0) & d(0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{a}_1 & \tilde{b}_1 \\ \tilde{c}_1 & \tilde{d}_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a(0) & b(0) \\ c(0) & d(0) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a(0) & b(0) \\ c(0) & d(0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{a}_2 & \tilde{b}_2 \\ \tilde{c}_2 & \tilde{d}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a(0) & b(0) \\ c(0) & d(0) \end{pmatrix}.$$

Или имеем 8 уравнений:

$$\begin{aligned}a(0)a_1 + b(0)c_1 &= a(0)\tilde{a}_1 + c(0)\tilde{b}_1 \\ a(0)b_1 + b(0)d_1 &= b(0)\tilde{a}_1 + d(0)\tilde{b}_1 \\ c(0)a_1 + d(0)c_1 &= a(0)\tilde{c}_1 + c(0)\tilde{d}_1 \\ c(0)b_1 + d(0)d_1 &= b(0)\tilde{c}_1 + d(0)\tilde{d}_1 \\ a(0)a_2 + b(0)c_2 &= a(0)\tilde{a}_2 + c(0)\tilde{b}_2 \\ a(0)b_2 + b(0)d_2 &= b(0)\tilde{a}_2 + d(0)\tilde{b}_2 \\ c(0)a_2 + d(0)c_2 &= a(0)\tilde{c}_2 + c(0)\tilde{d}_2 \\ c(0)b_2 + d(0)d_2 &= b(0)\tilde{c}_2 + d(0)\tilde{d}_2.\end{aligned}\tag{2.7}$$

Также, взяв вторую производную от функции $f(z)$, получим:

$$((\xi N_1 n(z) - \xi N_2 - z\xi\Gamma)R_2(z))'' = 0$$

$$((\xi N_1 n'(z) - \xi\Gamma)R_2(z) + (\xi N_1 n(z) - \xi N_2 - z\xi\Gamma)R_2'(z))' = 0$$

$$2(\xi N_1 n'(z) - \xi\Gamma)R_2'(z) + (\xi N_1 n(z) - \xi N_2 - z\xi\Gamma)R_2''(z) = 0.$$

Из $R_2'(z) = \begin{pmatrix} G_l'(\bar{z}) \\ \tilde{G}_l'(\bar{z}) \end{pmatrix}$ следует, что $R_2''(z) = \begin{pmatrix} G_l''(\bar{z}) \\ \tilde{G}_l''(\bar{z}) \end{pmatrix}$, тогда:

$$2(\xi N_1 n'(0) - \xi\Gamma)R_2'(0) + (\xi N_1 n(0) - \xi N_2)R_2''(0) = 0$$

$$2(\xi N_1 n'(0) - \xi\Gamma) \begin{pmatrix} G_l'(0) \\ \tilde{G}_l'(0) \end{pmatrix} + (\xi N_1 n(0) - \xi N_2) \begin{pmatrix} G_l''(0) \\ \tilde{G}_l''(0) \end{pmatrix} = 0.$$

В последнем выражении, подставив $\xi = (1, 0)$ и $\tilde{\xi} = (0, 1)$, получим:

$$\begin{aligned} 2(\theta a_1 - a_3)G'_l(0) + 2(\theta b_1 - b_3)\tilde{G}'_l(0) + \\ + (\lambda a_1 - a_2)G''_l(0) + (\lambda b_1 - b_2)\tilde{G}''_l(0) = 0 \\ 2(\theta c_1 - c_3)G'_l(0) + 2(\theta d_1 - d_3)\tilde{G}'_l(0) + \\ + (\lambda c_1 - c_2)G''_l(0) + (\lambda d_1 - d_2)\tilde{G}''_l(0) = 0. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Аналогичные уравнения можно получить, взяв следующие производные:

$$\begin{aligned} 3(\theta a_1 - a_3)G''_l(0) + 3(\theta b_1 - b_3)\tilde{G}''_l(0) + \\ + (\lambda a_1 - a_2)G'''_l(0) + (\lambda b_1 - b_2)\tilde{G}'''_l(0) = 0 \\ 3(\theta c_1 - c_3)G''_l(0) + 3(\theta d_1 - d_3)\tilde{G}''_l(0) + \\ + (\lambda c_1 - c_2)G'''_l(0) + (\lambda d_1 - d_2)\tilde{G}'''_l(0) = 0 \end{aligned} \quad (2.9)$$

$$\begin{aligned} 4(\theta a_1 - a_3)G'''_l(0) + 4(\theta b_1 - b_3)\tilde{G}'''_l(0) + \\ + (\lambda a_1 - a_2)G^{(4)}_l(0) + (\lambda b_1 - b_2)\tilde{G}^{(4)}_l(0) = 0 \\ 4(\theta c_1 - c_3)G'''_l(0) + 4(\theta d_1 - d_3)\tilde{G}'''_l(0) + \\ + (\lambda c_1 - c_2)G^{(4)}_l(0) + (\lambda d_1 - d_2)\tilde{G}^{(4)}_l(0) = 0, \end{aligned} \quad (2.10)$$

где $m(z) = \delta z + \eta$ и $n(z) = \theta z + \lambda$.

Результатом проведенных вычислений является следующая теорема:

Теорема 1. Пусть задан коммутативный узел Δ (1.21) такой, что $E = \tilde{E}$, $\dim E = 2$, а $\sigma_1 = \tilde{\sigma}_1 = J_N$ (1.13); спектр оператора T_1 сосредоточен в точке $\{1\}$, а функции $m(z)$ и $n(z)$ удовлетворяют уравнениям $(N + z\Gamma)(1, 1)^T = m(z)(1, 1)^T$ и $(\tilde{N}^* + z\tilde{\Gamma}^*)(1, -1)^T = n(z)(1, -1)^T$, соответственно.

И пусть функциональная модель системы операторов T_1, T_2 имеет вид (1.25)-(1.28), а функции $E_x(z), \tilde{E}_x(z), G_x(z), \tilde{G}_x(z)$ удовлетворяют выражениям (1.14), (1.15), соответственно.

Тогда, чтобы для операторов $N_1, N_2, \Gamma, \tilde{N}_1, \tilde{N}_2, \tilde{\Gamma}$ (2.1) выполнялись узловые соотношения узла Δ (1.21), необходимо, чтобы были справедливы соотношения (2.4)-(2.10).

ЛИТЕРАТУРА

1. Лившиц М.С. Янцевич А.А. Теория операторных узлов в гильбертовых пространствах. – Харьков.: Изд. Харьк. ун-та, 1971. – 160 с.
2. Золотарёв В.А. Аналитические методы спектральных представлений несамосопряжённых и неунитарных операторов. – Харьков.: ХНУ, 2003. – 342 с.
3. De Branges Н.И., Hilbert spaces of entire functions. – Prentice-Hall: London, 1968. – 326 с.

4. Лившиц М.С. Об одном классе линейных операторов в гильбертовом пространстве // Матем. сборник – 1946. – 19. 61:2 – 236-260 с.
5. Надь Б.С., Фояш Ч. Гармонический анализ операторов в гильбертовом пространстве. – Москва.: Мир, 1970. – 431 с.
6. Золотарёв В.А., Сыровацкий В.Н. Преобразование де Бранжа относительно круга // Вестник Харьковского национального университета им. В. Н. Каразина, Серия "Математика, прикладная математика и механика". №711 – Харьков, ХНУ, 2005. – с. 80-92.
7. Золотарёв В.А. Модельные представления коммутативных систем линейных операторов // Функциональный анализ и его приложения, 1988, т.22, вып. 1, С. 66-68.
8. Zolotarev V.A. Functional model of commutative operator systems // J. of Math. Physics, Analysis, Geometry, 2008. vol. 4, No 3, P. 420-440.
9. Сыровацкий В.Н. Функциональные модели коммутативных систем операторов близких к унитарным // Вестник Харьковского национального университета им. В.Н.Каразина, Серия "Математика, прикладная математика и механика". №1018 - Харьков.: ХНУ, 2012. – С. 41-61.
10. Dym H. Reproducing kernels and Riccati equations // Int. J. Appl. Math. Comput. Sci., 2001, Vol.11, No.1, P. 35-53.
11. Arov D.Z., Dym H. J-contractive matrix valued functions and related topic // Encyclopedia of Mathematics and its Applications, 116, Cambridge University Press, Cambridge 2008. - 440 p.

Статья получена: 4.10.2013; окончательный вариант: 10.12.2013;
принята: 10.12.2013.

Экспоненциальная стабилизация одного класса нелинейных систем с ограниченным управлением

В.И. Коробов^{аb}, А.В. Луценко^а

^аХарьковский национальный университет,
пл. Свободы, 4, 61022, Харьков, Украина

^bЩецинский университет, Польша
vkorobov@univer.kharkov.ua,
avluts@gmail.com

Рассматривается задача робастной экспоненциальной стабилизации семейства управляемых нелинейных систем, содержащего неопределенности и нелинейно зависящего от управления. Получены достаточные условия робастной стабилизации и синтезированы регуляторы, осуществляющие робастную стабилизацию. Приведены численные примеры.

Ключевые слова: экспоненциальная стабилизация, робастность.

Коробов В.І., Луценко А.В., **Експоненціальна стабілізація одного класу нелінійних систем з обмеженим керуванням.** Розглядається задача робастної експоненціальної стабілізації сімейства керованих нелінійних систем, що містить невизначеності і нелінійно залежить від управління. Отримано достатні умови робастної стабілізації та синтезовані регулятори, які здійснюють робастну стабілізацію. Наведено чисельні приклади.

Ключові слова: експоненціальна стабілізація, робастність.

V.I. Korobov, A.V. Lutsenko, **Exponential stabilization of a class of nonlinear systems with constrained control.** This paper studies the problem of robust exponential stabilization of a class of nonlinear controlled systems containing uncertainty and nonlinear depending on the control. Sufficient conditions for the robust stabilization are obtained and regulators implementing robust stabilization are synthesized. Numerical examples are given.

Keywords: exponential stabilization, robustness.

2010 Mathematics Subject Classification: 93D15.

1. Введение

В последние десятилетия интенсивно исследуется проблема стабилизации нелинейных систем [1, 2, 4, 6, 7, 8, 10, 12, 13, 14, 18]. Значительное место в теории стабилизации занимает проблема робастной стабилизации [2, 3, 5, 11, 15, 16, 17], связанная с наличием неопределенностей в математическом описании систем управления.

Первым результатом в этом направлении можно считать теорему А. М. Ляпунова об устойчивости по первому приближению. Одним из наиболее эффективных методов исследования проблемы стабилизации нелинейных систем является метод функций Ляпунова, представляющий собой мощный инструментальный анализ и синтеза систем управления, позволивший получить большое количество важных результатов [1, 2, 3, 4, 5, 9, 10, 12, 14].

Метод функций Ляпунова применяется и в настоящей статье, цель которой получить достаточные условия робастной экспоненциальной стабилизации класса нелинейных неавтономных систем с ограниченным управлением.

2. Достаточные условия робастной экспоненциальной стабилизации

В евклидовом пространстве R^n рассматриваются нелинейные системы

$$\dot{x} = a(t, x) + b(t, x)p(t, x, u), \quad (t, x, u) \in R^+ \times R^n \times R^m, \quad (0.1)$$

где $R^+ = [0, \infty)$, $x \in R^n$ – вектор состояния, $u \in R^m$ – вектор управления, $a(t, x) \in R^n$, $b(t, x) \in R^{n \times m}$, $p(t, x, u) \in R^m$. Здесь $R^{n \times m}$ – множество действительных $(n \times m)$ -матриц. Предполагается, что $u \in \Omega \subset R^m$, функции $a(t, x)$, $b(t, x)$, $p(t, x, u)$ непрерывны, непрерывно дифференцируемы по x, u в $R^+ \times R^n \times R^m$, удовлетворяют условию $a(t, 0) = b(t, 0)p(t, 0, 0) = 0$, функция $p(t, x, u)$ содержит неопределенности.

Введем необходимые **обозначения**:

- 1) $(*)$ – операция транспонирования;
- 2) $\|x\| = \sqrt{x^*x}$ – евклидова норма вектора $x \in R^n$;
- 3) C_D^1 – совокупность гладких на множестве D функций;
- 4) $\frac{\partial v(t, x)}{\partial x} = \left(\frac{\partial v(t, x)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial v(t, x)}{\partial x_n} \right)$ – матрица Якоби скалярной функции $v(t, x)$;
- 5) $\dot{v}(t, x)|_{(0.2)}$ – производная Ляпунова функции $v(t, x)$ в силу системы (0.2):

$$\dot{x} = f(t, x), \quad (0.2)$$

то есть $\dot{v}(t, x) = \frac{\partial v(t, x)}{\partial t} + \frac{\partial v(t, x)}{\partial x} f(t, x)$.

$$6) B(t, x) = (B_1(t, x), \dots, B_m(t, x)) = \frac{\partial v(t, x)}{\partial x} b(t, x).$$

Определение 1. Нулевое решение системы (0.2) называется *экспоненциально устойчивым*, если существуют положительные числа α, δ, L такие, что каждое решение $x(t)$ системы (0.2) с начальным условием $x(t_0), \|x(t_0)\| < \delta$ удовлетворяет неравенству $\|x(t)\| \leq L\|x(t_0)\| e^{-\alpha(t-t_0)}$ при $t \geq t_0$.

Определение 2. Системы (0.1) называются *робастно экспоненциально стабилизируемыми*, если можно указать управление $u = u(t, x)$, такое что нулевое решение систем $\dot{x} = a(t, x) + b(t, x)p(t, x, u(t, x))$ является экспоненциально устойчивым.

В приводимой ниже теореме устанавливаются достаточные условия робастной экспоненциальной стабилизации и указывается управление, осуществляющее стабилизацию.

Теорема 1 Пусть существует непрерывная функция $\psi(z) : D \rightarrow \Omega \subset R^m$, $D \subset R^m$ и скалярная функция $v(t, x) \in C^1_{D_1}$, $D_1 = R^+ \times R^n$, удовлетворяющая в D_1 условиям

$$c_1\|x\|^2 \leq v(t, x) \leq c_2\|x\|^2, \quad c_1 > 0, \quad c_2 > 0, \quad (0.3)$$

$$\frac{\partial v(t, x)}{\partial t} + \frac{\partial v(t, x)}{\partial x} a(t, x) \leq 0$$

и пусть при непрерывных в D_1 скалярных функциях $\{a_i(t, x)\}_{i=1}^{2k+1}$, удовлетворяющих условиям

$$a_2(t, x) > 0, \quad a_{2i}(t, x) \geq 0, \quad i = \overline{2, k}, \quad a_{2s+1}(t, x)a_2(t, x) \leq a_{2s}(t, x), \quad s = \overline{1, k},$$

выполняются неравенства

$$a_1(t, x)\|B(t, x)\| \leq (b_1 - c_3)\|x\|^2, \quad 0 < c_3 < b_1, \quad (0.4)$$

и

$$z(t, x)p_0(t, x, z(t, x)) \leq \sum_{i=1}^{2k+1} (-1)^{i-1} a_i(t, x)\|z(t, x)\|^i - b_1 q(t, x)\|x\|^2. \quad (0.5)$$

Здесь

$$p_0(t, x, z) = -p(t, x, \psi(z)),$$

$$z(t, x) = (z_1(t, x), \dots, z_m(t, x)) = -q(t, x)B(t, x) \in D,$$

$$q(t, x) = \frac{a_2(t, x)}{\|B(t, x)\| + d(t, x)},$$

где $d(t, x)$ – непрерывная положительная в D_1 функция. Тогда функция

$$u(t, x) = \psi(z(t, x)), \quad (0.6)$$

где

$$z(t, x) = -q(t, x)B(t, x)$$

является управлением, робастно стабилизирующим системы (0.1).

Доказательство. Подставив управление (0.6) в (0.1), получаем

$$\dot{x} = a(t, x) + b(t, x)p(t, x, u(t, x)) = a(t, x) - b(t, x)p_0(t, x, z(t, x)). \quad (0.7)$$

Вычислим производную Ляпунова функции $v(t, x)$ в силу системы (0.7):

$$\begin{aligned} \dot{v}(t, x)|_{(0.7)} &= \frac{\partial v(t, x)}{\partial t} + \frac{\partial v(t, x)}{\partial x} a(t, x) - \frac{\partial v(t, x)}{\partial x} b(t, x)p_0(t, x, z(t, x)) \leq \\ &\leq -\frac{\partial v(t, x)}{\partial x} b(t, x)p_0(t, x, z(t, x)) = -B(t, x)p_0(t, x, z(t, x)). \end{aligned} \quad (0.8)$$

Подставив

$$z(t, x) = -q(t, x)B(t, x)$$

в неравенство (0.5), получаем

$$\begin{aligned} &-q(t, x)B(t, x)p_0(t, x, z(t, x)) \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^{2k+1} (-1)^{i-1} a_i(t, x) q^i(t, x) \|B(t, x)\|^i - b_1 q(t, x) \|x\|^2 = \\ &= a_1(t, x) q(t, x) \|B\| + \sum_{s=1}^k (a_{2s+1} q^{2s+1} \|B\|^{2s+1} - a_{2s} q^{2s} \|B\|^{2s}) - b_1 q(t, x) \|x\|^2. \end{aligned}$$

Сократив на положительный множитель $q(t, x)$, имеем

$$\begin{aligned} &-B(t, x)p_0(t, x, z(t, x)) \leq \\ &\leq a_1(t, x) \|B\| + \sum_{s=1}^k (a_{2s+1} q^{2s} \|B\|^{2s+1} - a_{2s} q^{2s-1} \|B\|^{2s}) - b_1 \|x\|^2 \leq \\ &\leq -c_3 \|x\|^2 + \sum_{s=1}^k q^{2s-1} \|B\|^{2s} \left(\frac{a_{2s}}{a_2} \frac{a_2 \|B\|}{\|B\| + d(t, x)} - a_{2s} \right) \leq -c_3 \|x\|^2. \end{aligned}$$

Отсюда и из (0.8) получаем

$$\dot{v}(t, x)|_{(0.7)} \leq -c_3 \|x\|^2. \quad (0.9)$$

Пусть $x(t)$ — произвольное решение системы (0.7). В силу соотношений (0.3), (0.9) имеем

$$\dot{v}(t, x(t)) + \frac{c_3}{c_2} v(t, x(t)) \leq 0.$$

Умножив последнее неравенство на $\exp\left(\frac{c_3}{c_2} t\right)$ и проинтегрировав от t_0 до t , получаем

$$v(t, x(t)) \leq v(t_0, x(t_0)) e^{-\frac{c_3}{c_2} (t - t_0)},$$

откуда, применив (0.3), имеем

$$c_1 \|x(t)\|^2 \leq c_2 \|x(t_0)\|^2 e^{-\frac{c_3}{c_2} (t - t_0)},$$

то есть

$$\|x(t)\| \leq L\|x(t_0)\| e^{-\alpha(t-t_0)}, \quad L = \sqrt{\frac{c_2}{c_1}}, \quad \alpha = \frac{c_3}{2c_2}$$

Таким образом, нулевое решение системы (0.7) экспоненциально устойчиво.
Теорема доказана.

Примеры

Пример 1. Рассмотрим системы

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -(4 + 2e^{-t})x_1 - 2x_2 - t^2x_1^3 \\ 3x_1 - 10x_2 - 4x_2^3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \left(1 + \frac{1}{2}e^{-t}\right)x_1 \\ 2x_2 \end{pmatrix} \left(f(t, x)u + g(t, x)u^2 + 2 \ln \frac{2e^3 + (e^3 + 1)u}{2 - (e^3 + 1)u} \right), \quad t \geq 0,$$

где $x = (x_1, x_2)^*$; $\frac{-2e^3}{e^3 + 1} < u < \frac{2}{e^3 + 1}$; f, g – непрерывно дифференцируемые функции, удовлетворяющие условиям $|f(t, x)| \leq \frac{1}{2}$, $|g(t, x)| \leq \frac{1}{4}$.

Представим эти системы в следующей форме:

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -2x_2 - t^2x_1^3 \\ 3x_1 - 2x_2 - 4x_2^3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \left(1 + \frac{1}{2}e^{-t}\right)x_1 \\ 2x_2 \end{pmatrix} \left(f(t, x)u + g(t, x)u^2 + 2 \ln \frac{2e^3 + (e^3 + 1)u}{2 - (e^3 + 1)u} - 4 \right),$$

$t \geq 0.$

Здесь

$$a(t, x) = \begin{pmatrix} -2x_2 - t^2x_1^3 \\ 3x_1 - 2x_2 - 4x_2^3 \end{pmatrix}, \quad b(t, x) = \begin{pmatrix} \left(1 + \frac{1}{2}e^{-t}\right)x_1 \\ 2x_2 \end{pmatrix},$$

$$p(t, x, u) = f(t, x)u + g(t, x)u^2 + 2 \ln \frac{2e^3 + (e^3 + 1)u}{2 - (e^3 + 1)u} - 4.$$

Проверим, что при

$$\psi(z) = \frac{2(e^{2z} - e^3)}{(e^3 + 1)(e^{2z} + 1)}, \quad v(t, x) = 3x_1^2 + 2x_2^2$$

выполняются условия теоремы.

Легко видеть, что

$$-\frac{2e^3}{e^3+1} < \psi(z) < \frac{2}{e^3+1},$$

$$2\|x\|^2 \leq v(t, x) \leq 3\|x\|^2,$$

$$\frac{\partial v(t, x)}{\partial t} + \frac{\partial v(t, x)}{\partial x} a(t, x) = -6t^2 x_1^4 - 8x_2^2 - 16x_2^4 \leq 0,$$

$$B(t, x) = 6 \left(1 + \frac{1}{2} e^{-t} \right) x_1^2 + 8x_2^2,$$

$$p_0(t, x, z) = -p(t, x, \psi(z)) =$$

$$= -f(t, x)\psi(z) - g(t, x)\psi^2(z) - 2 \ln \frac{2e^3 + (e^3 + 1)\psi(z)}{2 - (e^3 + 1)\psi(z)} + 4.$$

Тогда

$$z(t, x)p_0(t, x, z(t, x)) =$$

$$= -f(t, x)z(t, x)\psi(z(t, x)) - g(t, x)z(t, x)\psi^2(z(t, x)) -$$

$$-2z(t, x) \ln \frac{2e^3 + (e^3 + 1)\psi(z(t, x))}{2 - (e^3 + 1)\psi(z(t, x))} + 4z(t, x) \leq$$

$$\leq |z(t, x)| + |z(t, x)| - 4z^2(t, x) + 4z(t, x) =$$

$$= 2|z(t, x)| - 4z^2(t, x) + 4z(t, x).$$

Так как $z(t, x) = -q(t, x)B(t, x)$, то $z(t, x) \leq -6q(t, x)\|x\|^2$, следовательно

$$z(t, x)p_0(t, x, z(t, x)) \leq 2|z(t, x)| - 4z^2(t, x) - 24q(t, x)\|x\|^2.$$

Из последнего неравенства вытекает, что можно положить

$$a_1(t, x) = 2, \quad a_2(t, x) = 4, \quad a_3(t, x) = 0, \quad b_1 = 24.$$

Положив $d(t, x) = 2$, получаем

$$q(t, x) = \frac{4}{6 \left(1 + \frac{1}{2} e^{-t} \right) x_1^2 + 8x_2^2 + 2}.$$

Наконец,

$$a_1(t, x)\|B(t, x)\| = 2 \left(6 \left(1 + \frac{1}{2} e^{-t} \right) x_1^2 + 8x_2^2 \right) \leq 18\|x\|^2,$$

так что можно положить $c_3 = 6$.

Итак, выполнены условия теоремы. Следовательно, управление

$$u(t, x) = \psi(z(t, x)) = \frac{2(e^{2z(t, x)} - e^3)}{(e^3 + 1)(e^{2z(t, x)} + 1)},$$

$$z(t, x) = \frac{4 \left(6 \left(1 + \frac{1}{2} e^{-t} \right) x_1^2 + 8x_2^2 \right)}{6 \left(1 + \frac{1}{2} e^{-t} \right) x_1^2 + 8x_2^2 + 2}$$

экспоненциально стабилизирует данные системы.

Пример 2. Рассмотрим системы

$$\begin{aligned} \dot{x} = & \begin{pmatrix} -9x_1 - \frac{2x_2x_3}{1+t} - x_1^3 \\ \frac{3x_1x_3}{1+t} - 16x_2 - 4x_2^3 \\ -8x_3 - \frac{x_3^3}{1+t^2x_2^4} \end{pmatrix} + \\ & + \begin{pmatrix} x_1 \\ 2x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \left(f(t, x, u)u + g(t, x, u)u^2 + 5h(t, x, u)\frac{u}{1-|u|} \right), \quad t \geq 0, \end{aligned}$$

где $x = (x_1, x_2, x_3)^*$, $|u| < 1$, f, g, h — непрерывно дифференцируемые функции, удовлетворяющие условиям $|f(t, x, u)| \leq 2$, $|g(t, x, u)| \leq 1$, $h(t, x, u) \geq 1$. Представим эти системы в следующей форме

$$\begin{aligned} \dot{x} = & \begin{pmatrix} -x_1 - \frac{2x_2x_3}{1+t} - x_1^3 \\ \frac{3x_1x_3}{1+t} - 4x_2^3 \\ -\frac{x_3^3}{1+t^2x_2^4} \end{pmatrix} + \\ & + \begin{pmatrix} x_1 \\ 2x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \left(f(t, x, u)u + g(t, x, u)u^2 + 5h(t, x, u)\frac{u}{1-|u|} - 8 \right), \end{aligned}$$

здесь

$$a(t, x) = \begin{pmatrix} -x_1 - \frac{2x_2x_3}{1+t} - x_1^3 \\ \frac{3x_1x_3}{1+t} - 4x_2^3 \\ -\frac{x_3^3}{1+t^2x_2^4} \end{pmatrix}, \quad b(t, x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ 2x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},$$

$$p(t, x, u) = f(t, x, u)u + g(t, x, u)u^2 + 5h(t, x, u)\frac{u}{1-|u|} - 8.$$

Проверим, что при

$$\psi(z) = \frac{z}{|z| + 1}, \quad v(t, x) = 3x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2$$

выполняются условия теоремы. Легко видеть, что

$$|\psi(z)| < 1,$$

$$2\|x\|^2 \leq v(t, x) \leq 3\|x\|^2,$$

$$\frac{\partial v(t, x)}{\partial t} + \frac{\partial v(t, x)}{\partial x} a(t, x) = -6x_1^2 - 6x_1^4 - 16x_2^4 - 6\frac{x_3^4}{1 + t^2 x_2^4} \leq 0,$$

$$B(t, x) = 6x_1^2 + 8x_2^2 + 6x_3^2,$$

$$\begin{aligned} p_0(t, x, z) &= -p(t, x, \psi(z)) = \\ &= -f(t, x, \psi(z))\psi(z) - g(t, x, \psi(z))\psi^2(z) - 5h(t, x, \psi(z))\frac{\psi(z)}{1 - |\psi(z)|} + 8. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} z(t, x)p_0(t, x, z(t, x)) &= \\ &= -f(t, x, \psi(z(t, x)))z(t, x) - g(t, x, \psi(z(t, x)))\psi^2(z(t, x))z(t, x) - \\ &\quad - 5h(t, x, \psi(z(t, x)))\frac{\psi(z(t, x))}{1 - |\psi(z(t, x))|}z(t, x) + 8z(t, x). \end{aligned}$$

Так как $z(t, x) = -q(t, x)B(t, x)$, то $z(t, x) \leq -6q(t, x)\|x\|^2$, следовательно

$$z(t, x)p_0(t, x, z(t, x)) \leq 3|z(t, x)| - 5|z(t, x)|^2 - 48q(t, x)\|x\|^2.$$

Из последнего неравенства вытекает, что можно положить

$$a_1(t, x) = 3, \quad a_2(t, x) = 5, \quad a_3(t, x) = 0, \quad b_1 = 48.$$

Положив $d(t, x) = 2$, получаем

$$q(t, x) = \frac{5}{6x_1^2 + 8x_2^2 + 6x_3^2 + 2}.$$

Наконец,

$$a_1(t, x)\|B(t, x)\| = 3(6x_1^2 + 8x_2^2 + 6x_3^2) \leq 24\|x\|^2,$$

так что можно положить $c_3 = 24$.

Итак, выполнены условия теоремы. Следовательно, управление

$$u(t, x) = \psi(z(t, x)) = \frac{z(t, x)}{|z(t, x)| + 1},$$

$$z(t, x) = -\frac{5(3x_1^2 + 4x_2^2 + 3x_3^2)}{3x_1^2 + 4x_2^2 + 3x_3^2 + 1}$$

экспоненциально стабилизирует данные системы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Коробов В. И. Метод функции управляемости. М.-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Институт компьютерных исследований, 2007. – 576 с.
2. Коробов В. И., Луценко А. В. Робастная стабилизация одного класса нелинейных систем. АИТ (в печати).
3. Поляк Б.Т., Щербаков П.С. Робастная устойчивость и управление. М.: Наука, 2002. – 303 с.
4. Bacciotti A., Rosier L. Liapunov functions and stability in control theory. Springer-Verlag, Berlin, 2005.
5. Battilotti S. Robust stabilization of nonlinear systems with pointwise norm- bounded uncertainties: a control Lyapunov function approach. IEEE Transactions on Automatic Control. 1999. v. 44, №1, P. 3-17.
6. Ceragioli F. Some remarks on stabilization by means of discontinuous feedbacks. Systems and Control Letters, 45 (2002), P. 271-281.
7. Clarke F., Ledyev Yu., Sontag E., Subbotin A. Asymptotic controllability implies feedback stabilization, IEEE Trans. Autom. Control 42 (1997), P. 1394-1407.
8. Coron J. Stabilization in finite time of locally controllable systems by means of continuous time-varying feedbacks laws, SIAM J. Contr. Opt. 33 (1995), P. 804-833.
9. Hudon N. Dissipative decomposition and feedback stabilization of nonlinear control systems. Queens University. Kingston, Ontario, Canada, 2010.
10. Isidori A. Nonlinear control systems. Springer-Verlag, New York, 1999.
11. Jiang Z. Robust exponential regulation of nonholonomic systems with uncertainties, Automatica J. IF AC 36 (2000), P. 189-200.
12. Khalil H. Nonlinear systems. Prentice Hall, New York, 2002.
13. Marquez H. Nonlinear control systems. John Wiley & Sons Inc., 2003.
14. Nguang S., Fu M. Global quadratic stabilization of a class of nonlinear systems. Int. J. Robust Nonlinear Control. 8. 1998. P. 483-497.
15. Prieur C. Asymptotic controllability and robust asymptotic stabilizability, SIAM J. Contr. Opt., 43(5) (2005), P. 1888-1912.
16. Prieur C., Trelat E. Robust optimal stabilization of the Brockett integrator via a hybrid feedback. Math. Control Signals Systems, 13 (3) (2005), P. 201-216.
17. Prieur C. Robust stabilization of nonlinear control systems by means of hybrid feedbacks. Rend. Sem. Mat. Univ. Pol. Torino - Vol. 64, 1(2006), P. 25-38.
18. Slotin J-J., Li W. Applied nonlinear control. Prentice Hall, Inc., 1991.

Статья получена: 18.10.2013; окончательный вариант: 15.11.2013;
принята: 16.12.2013.

О множестве позиционных управлений,
решающих задачу глобального синтеза для линейного
уравнения в гильбертовых пространствах

В. А. Скорик

*Харьковский национальный университет имени В. Н. Каразина,
пл. Свободы, 4, 61022, Харьков, Украина
v.skoryk@karazin.ua*

На основе метода функционала управляемости показано, что для линейного уравнения с ограниченным кососамосопряженным оператором в гильбертовых пространствах любая невозрастающая неотрицательная на неотрицательной полуоси функция, имеющая некоторое число точек убывания и на некотором отрезке отрицательную производную, порождает позиционное управление, решающее задачу глобального синтеза.

Ключевые слова: задача глобального синтеза, гильбертово пространство, линейное уравнение.

Скорик В. О., **Про множину позиційних керувань, які вирішують задачу глобального синтезу для лінійного рівняння в гільбертових просторах.** На основі метода функціонала керованості показано, що для лінійного рівняння з обмеженням кососамоспряженим оператором у гільбертових просторах будь-яка незростаюча невід'ємна на невід'ємній півосі функція, яка має деяке число точок спадання та на деякому відрізку від'ємну похідну, породжує позиційне керування, яке вирішує задачу глобального синтезу.

Ключові слова: задача глобального синтезу, гільбертовий простір, лінійне рівняння.

V. A. Skoryk, **On a set of positional controls which solve the global synthesis problem for a linear equation in Hilbert spaces.** On the basis of the method of the controllability functional it is shown that for a linear equation with a bounded skew self-adjoint operator in Hilbert spaces any non-increasing non-negative on the non-negative semiaxis function, which has a certain number of points of decreasing, and one has a negative derivative on some interval, generates a positional control, which solve the problem of the global synthesis.

Keywords: problem of global synthesis, Hilbert space, linear equation.

2000 Mathematics Subject Classification 93B50.

1. Введение

Рассмотрим задачу синтеза ограниченных позиционных управлений для управляемого процесса, описываемого уравнением

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu, \quad x \in X, \quad u \in \Omega \subset U, \quad 0 \in \text{int } \Omega, \quad (0.1)$$

где X, U — гильбертовы пространства, оператор A с областью определения $D(A)$ порождает сильно непрерывную группу операторов $\{e^{At}\}_{-\infty < t < +\infty}$, B — ограниченный оператор, действующий из U в X .

Задача состоит в построении позиционного управления $u = u(x)$ такого, чтобы $u(x) \in \Omega$ для всех x из некоторой окрестности Q начала координат, и такого, чтобы для произвольной точки $x_0 \in Q$ решение $x(t)$ задачи Коши

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu(x), \quad x(0) = x_0,$$

существовало и удовлетворяло условиям:

$$1) \lim_{t \rightarrow T(x_0)} x(t) = 0 \text{ для некоторого } T(x_0) < \infty;$$

$$2) x(t) \in Q \text{ для всех } t \in [0, T(x_0)).$$

Если $Q = X$, то будем говорить о глобальном синтезе, и о локальном — в противном случае.

Очевидно, что для решения этой задачи необходимо, чтобы уравнение (0.1) было точно 0-управляемым за свободное время. Поэтому, не ограничивая общности, будем считать, что уравнение (0.1) является точно 0-управляемым за свободное время.

Исследования задачи проводятся на основе метода функционала управляемости [1, 2].

В работе [1] получено конструктивное решение задачи локального синтеза ограниченного управления для уравнения (0.1) в случае, когда A является ограниченным оператором и $\Omega = \{u \in U : \|u\| \leq d\}$. Показано, что решением этой задачи является управление $u(x) = -\frac{1}{2}B^*N^{-1}(1/\Theta(x))x$. Здесь $\Theta(x)$ — функционал управляемости, определяемый при $x \neq 0$ как единственное положительное решение уравнения $2a_0\Theta = (N^{-1}(\frac{1}{\Theta})x, x)$ ($a_0 > 0$), где

$$N(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} e^{-At} B B^* e^{-A^* t} dt, \quad \lambda > 2\omega_0(-A) \left(\omega_0(-A) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln \|e^{-At}\|}{t} \right).$$

Результаты работы [1] получили дальнейшее развитие. Так, в работе [3] дано описание множества ограниченных позиционных управлений, решающих задачу локального синтеза. Показано, что каждая функция $f \in \mathcal{F}_m(A)$ порождает управление $u_f(x)$, решающее задачу допустимого синтеза ограниченного управления в некоторой области Q_c .

Данная работа является развитием результатов работ [3, 5]. Развитие результатов работы [3] состоит в решении задачи глобального допустимого синтеза управления, а работы [5] — в описании более широкого класса функций, каждая из которых порождает управление, решающее эту задачу.

2. Исходные результаты

Следуя работе [3], для произвольной невозрастающей неотрицательной на полуоси $[0, \infty)$ функции $f(s)$, удовлетворяющей условию

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \left[-\frac{\ln f(s)}{s} \right] = f_0 > 0 \quad (0.2)$$

(постоянная f_0 может равняться $+\infty$, например, для финитной функции f), рассмотрим при $\lambda > \lambda_0 = \max \left\{ 0, \frac{2\omega_0(-A)}{f_0} \right\}$ положительно определенный оператор

$$N_f(\lambda)x = \int_0^\infty f(\lambda t) e^{-At} B B^* e^{-A^* t} x dt, \quad x \in \mathbb{X}. \quad (0.3)$$

Выберем положительное число Θ_f , которое не превышает $1/\lambda_0$. Обозначим $R = \delta \sqrt{2a_0 \Theta_f / \|N_f^{-1}(\frac{1}{\Theta_f})\|}$ ($\delta \in (0, 1)$) и рассмотрим область $Q_1 = \{x \in \mathbb{X} : \|x\| \leq R\}$. Определим в области $Q_1 \setminus \{0\}$ функционал управляемости $\Theta(x)$ из уравнения

$$2a_0 \Theta = \left(N_f^{-1} \left(\frac{1}{\Theta} \right) x, x \right), \quad a_0 > 0, \quad (0.4)$$

имеющего единственное положительное непрерывно дифференцируемое решение $\Theta(x)$, которое, при условии $\Theta(0) = 0$, является непрерывным при $x = 0$.

Рассмотрим управление

$$u_f(x) = -\frac{1}{2} f(0) B^* N_f^{-1} \left(\frac{1}{\Theta(x)} \right) x, \quad x \in Q_1 \setminus \{0\}. \quad (0.5)$$

Это управление в каждой области $K(\rho_1, \rho_2) = \{x : 0 < \rho_1 \leq \|x\| \leq \rho_2 < R\}$ удовлетворяет условию Липшица с постоянной $L(\varepsilon, \rho_2) \rightarrow +\infty$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ ($0 < \varepsilon < \rho_2$).

Для уравнения (0.1) с ограниченным оператором A , в силу его точной управляемости, на основании теоремы 2 [4], существует некоторое целое число $m \geq 0$ такое, что выполнено соотношение

$$\text{Span} \{BU, ABU, \dots, A^m BU\} = \mathbb{X}. \quad (0.6)$$

Пусть m — наименьшее число, для которого выполнено соотношение (0.6). Обозначим через $\mathcal{F}_m(A)$ класс невозрастающих неотрицательных на полуоси $[0, +\infty)$ функций f , имеющих, по крайней мере, $(m+1)$ точек убывания и удовлетворяющих условию (0.2).

В работе [3] установлено, что при выборе в уравнении (0.4) числа a_0 из условия

$$0 < a_0 \leq a_f = \frac{2l_{\mu_1}d^2}{f^2(0)}, \quad l_{\mu_1} > 0, \quad (0.7)$$

каждая функция $f \in \mathcal{F}_m(A)$ порождает управление $u_f(x)$ вида (0.5), которое решает задачу локального синтеза и удовлетворяет ограничению

$$\|u_f(x)\| \leq d, \quad x \in Q_c = \{x : \Theta(x) \leq c_f\} \subset \text{int}Q_1. \quad (0.8)$$

При этом установлена непрерывность функционала $\Psi_f(x_0) = \Phi_t(x_0, 0)$ для любого $x_0 \in Q_c \setminus \{0\}$, где $\Phi(x_0, t) = \Theta(x(t))$, $x(t)$ — решение задачи Коши

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu_f(x), \quad x(0) = x_0 \in Q_c \setminus \{0\};$$

показано, что функционал $\Psi_f(x)$ имеет вид

$$\Psi_f(x) = \frac{\Theta(x) \left(\hat{N}_f \left(\frac{1}{\Theta(x)} \right) \varphi(x), \varphi(x) \right)}{\left(N_f \left(\frac{1}{\Theta(x)} \right) \varphi(x), \varphi(x) \right) + \left(\tilde{N}_f \left(\frac{1}{\Theta(x)} \right) \varphi(x), \varphi(x) \right)}, \quad (0.9)$$

где $\varphi(x) = N_f^{-1} \left(\frac{1}{\Theta(x)} \right) x$, операторы $\hat{N}_f(\lambda)$, $\tilde{N}_f(\lambda)$ задаются соотношениями $\hat{N}_f(\lambda)x = \int_0^\infty e^{-\lambda t} BB^* e^{-A^* t} x d(-f(\lambda t))$, $\tilde{N}_f(\lambda)x = \int_0^\infty t e^{-\lambda t} BB^* e^{-A^* t} x d(-f(\lambda t))$, и удовлетворяет неравенству

$$\Psi_f(x) \leq -\beta_f \quad \text{при} \quad x \in Q_c \setminus \{0\} \quad (\beta_f > 0). \quad (0.10)$$

3. Основной результат

Рассмотрим случай, когда оператор A в уравнении (0.1) является ограниченным кососамосопряженным, т. е. $(Ax_1, x_2) = -(x_1, Ax_2)$. Известно, что всякий кососамосопряженный оператор A порождает сильно непрерывную группу унитарных операторов $\{e^{At}\}_{-\infty < t < \infty}$ [6, стр. 247], [7, стр. 350]. В этом случае операторы $N_f(\lambda)$, $\hat{N}_f(\lambda)$, $\tilde{N}_f(\lambda)$ определены на всей положительной полуоси $\lambda > 0$, уравнение (0.4) имеет единственное положительное решение $\Theta(x)$ — функционал управляемости, определенное для всех $x \in X \setminus \{0\}$, поскольку функция $G_1(\Theta) = 2a_0\Theta - \left(N_f^{-1} \left(\frac{1}{\Theta} \right) x, x \right)$ монотонно возрастает на $(0, +\infty)$ и $\lim_{\Theta \rightarrow +0} G_1(\Theta) = -\infty$, $\lim_{\Theta \rightarrow +\infty} G_1(\Theta) = +\infty$. Управление $u_f(x)$ вида (0.5) и функционал $\Psi_f(x)$ также определены для всех $x \in X \setminus \{0\}$. Это означает, что $Q_c = Q_1 = X$.

Приведем условия выбора функции f и числа a_0 , при выполнении которых управление $u_f(x)$ вида (0.5) решает задачу глобального синтеза.

Обозначим через $\mathcal{F}'_m(A)$ подкласс всех функций $f(s)$ из класса функций $\mathcal{F}_m(A)$, для каждой из которых существуют числа $T_f \geq 0$ и $\varepsilon_f > 0$ такие, что на отрезке $[T_f, T_f + \varepsilon_f]$ функция имеет производную $f'(s) < 0$.

Для $\Theta \geq c_f$ выберем натуральное число $n = n(\Theta) \in [\Theta, \Theta + 1]$. Отсюда и из того, что $s/(s+1)$ является возрастающей функцией, имеем

$$\varepsilon_f \geq \frac{\Theta}{n} \varepsilon_f \geq \frac{\Theta}{\Theta + 1} \varepsilon_f \geq \frac{c_f}{c_f + 1} \varepsilon_f. \quad (0.11)$$

Из точной управляемости уравнения (0.1) следует, что для любого $T_0 > 0$ оператор N_{T_0} , задаваемый соотношением $N_{T_0}x = \int_0^{T_0} e^{-At} B B^* e^{-A^*t} x dt$, $x \in X$, является положительно определенным [8], т. е.

$$(N_{T_0}x, x) \geq \delta(T_0)\|x\|^2, \quad \delta(T_0) > 0. \quad (0.12)$$

Поскольку положительная функция $\delta(T_0)$ может быть выбрана монотонно неубывающей функцией на отрезке $\left[\frac{c_f}{c_f+1}\varepsilon_f, \varepsilon_f\right]$, то, при указанном выборе числа n , для любого $\Theta \geq c_f$ из (0.11) имеем неравенства

$$\delta\left(\frac{\varepsilon_f \Theta}{n}\right) \geq \delta\left(\frac{\varepsilon_f c_f}{c_f + 1}\right) \equiv \delta_f, \quad \frac{n}{\Theta} \geq 1. \quad (0.13)$$

Пусть число $\varepsilon > 0$ такое, что для функции $f \in \mathcal{F}'_m(A)$ выполнено условие $f(\varepsilon) > 0$. Обозначим

$$a'_f = \frac{2\delta_f f(\varepsilon)d^2}{f^2(0)\|B\|^2}. \quad (0.14)$$

Теорема. Предположим, что уравнение (0.1), где X, U — гильбертовы пространства, $A \in [X, X]$, $B \in [U, X]$, $\Omega = \{u \in U: \|u\| \leq d\}$ ($d > 0$ — любое заданное число), является точно 0-управляемым. Пусть оператор A является кососамосопряженным, функция $f \in \mathcal{F}'_m(A)$, число a_0 удовлетворяет условию

$$0 < a_0 \leq \hat{a}'_f = \min\{a_f, a'_f\}, \quad (0.15)$$

функционал $\Theta(x)$ при $x \neq 0$ является положительным решением уравнения (0.4) и $\Theta(0) = 0$.

Тогда управление $u_f(x)$ вида (0.5) решает задачу глобального синтеза, причем $T(x_0) \leq \Theta(x_0)/\hat{\beta}'_f$ ($\hat{\beta}'_f > 0$).

Доказательство. В силу предположений теоремы, согласно работе [3], каждая функция $f \in \mathcal{F}'_m(A) \subset \mathcal{F}_m(A)$ порождает управление вида (0.5), которое решает задачу допустимого локального синтеза в области Q_c и, при выборе числа a_0 из условия (0.7), удовлетворяет ограничению (0.8). Покажем, что число $a_0 > 0$ (0.4) может быть выбрано таким, что это управление решает задачу глобального допустимого синтеза.

Установим при некоторых $\alpha > 0$ и $\beta > 0$ неравенство

$$\Psi_f(x) \leq -\beta \Theta^{1-\frac{1}{\alpha}}(x) \quad (0.16)$$

в глобальном смысле, т. е. для всех $x \in X \setminus \{0\}$. В работе [3] показано, что функционал $\Psi_f(x)$ удовлетворяет неравенству (0.10) в области $Q_c \setminus \{0\}$. Пусть $\Theta = \Theta(x) \geq c_f$. Имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Theta} \left(\tilde{N}_f \left(\frac{1}{\Theta} \right) \varphi, \varphi \right) &= \int_0^\infty \frac{t}{\Theta} \|B^* e^{-A^* t} \varphi\|^2 d \left(-f \left(\frac{t}{\Theta} \right) \right) \leq \\ &\leq \|B^*\|^2 \|\varphi\|^2 \int_0^\infty \frac{t}{\Theta} d \left(-f \left(\frac{t}{\Theta} \right) \right) = I_f \|B\|^2 \|\varphi\|^2, \end{aligned} \quad (0.17)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Theta} \left(N_f \left(\frac{1}{\Theta} \right) \varphi, \varphi \right) &= \frac{1}{\Theta} \int_0^\infty f \left(\frac{t}{\Theta} \right) \|B^* e^{-A^* t} \varphi\|^2 dt \leq \\ &\leq \|B^*\|^2 \|\varphi\|^2 \int_0^\infty f(\tau) d\tau = I_f \|B\|^2 \|\varphi\|^2, \end{aligned} \quad (0.18)$$

где $I_f = \int_0^\infty f(\tau) d\tau < \infty$ — положительная постоянная. Получим оценку снизу для $\left(\hat{N}_f \left(\frac{1}{\Theta} \right) \varphi, \varphi \right)$. Для выбранной функции $f \in \mathcal{F}'_m(A)$ определим постоянную $f'_{\min} = \min_{s \in [T_f, T_f + \varepsilon_f]} (-f'(s)) > 0$. Тогда для любого $\Theta \geq c_f$ имеем

$$\begin{aligned} \left(\hat{N}_f \left(\frac{1}{\Theta} \right) \varphi, \varphi \right) &= \int_0^\infty \|B^* e^{-A^* t} \varphi\|^2 d \left(-f \left(\frac{t}{\Theta} \right) \right) \geq \\ &\geq \int_{T_f \Theta}^{(T_f + \varepsilon_f) \Theta} \|B^* e^{-A^* t} \varphi\|^2 \left(-f' \left(\frac{t}{\Theta} \right) \right) \frac{dt}{\Theta} \geq f'_{\min} \int_0^{\varepsilon_f \Theta} \|B^* e^{-A^* (t + T_f \Theta)} \varphi\|^2 \frac{dt}{\Theta}. \end{aligned} \quad (0.19)$$

В силу неравенств (0.11), (0.12) и унитарности группы $\{e^{-A^* t}\}_{-\infty < t < \infty}$, из (0.19) получаем

$$\begin{aligned} \left(\hat{N}_f \left(\frac{1}{\Theta} \right) \varphi, \varphi \right) &\geq f'_{\min} \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k \Theta \varepsilon_f / n}^{(k+1) \Theta \varepsilon_f / n} \|B^* e^{-A^* (t + T_f \Theta)} \varphi\|^2 \frac{1}{\Theta} dt = \\ &= f'_{\min} \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^{\Theta \varepsilon_f / n} \|B^* e^{-A^* (t + T_f \Theta + k \Theta \varepsilon_f / n)} \varphi\|^2 \frac{1}{\Theta} dt = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= f'_{\min} \sum_{k=0}^{n-1} \left(N_{\frac{\varepsilon_f \Theta}{n}} e^{-A^*(T_f + k\varepsilon_f/n)\Theta} \varphi, e^{-A^*(T_f + k\varepsilon_f/n)\Theta} \varphi \right) \frac{1}{\Theta} \geq \\
&\geq f'_{\min} \delta \left(\frac{\varepsilon_f \Theta}{n} \right) \sum_{k=0}^{n-1} \|e^{-A^*(T_f + k\varepsilon_f/n)\Theta} \varphi\|^2 \frac{1}{\Theta} \geq f'_{\min} \delta \left(\frac{\varepsilon_f \Theta}{n} \right) \frac{n}{\Theta} \|\varphi\|^2. \quad (0.20)
\end{aligned}$$

В силу неравенства (0.13), из (0.20) получаем

$$\left(\hat{N}_f \left(\frac{1}{\Theta} \right) \varphi, \varphi \right) \geq f'_{\min} \delta_f \|\varphi\|^2, \quad \Theta \geq c_f. \quad (0.21)$$

Поэтому, на основании (0.17)–(0.21), для функционала $\Psi_f(x)$ имеем неравенство

$$\Psi_f(x) \leq -\beta'_f, \quad x \in \{x : \Theta(x) \geq c_f\}, \quad (0.22)$$

где число $\beta'_f = \delta_f f'_{\min} / (2I_f \|B\|^2) > 0$. Следовательно, согласно (0.10) и (0.22), окончательно получаем, что функционал $\Psi_f(x)$ удовлетворяет неравенству

$$\Psi_f(x) \leq -\hat{\beta}'_f, \quad x \in \mathbb{X} \setminus \{0\},$$

где $\hat{\beta}'_f = \min \{\beta_f, \beta'_f\}$.

Таким образом, для функционала $\Psi_f(x)$ неравенство (0.16) при $\alpha = 1$ и $\beta = \hat{\beta}'_f$ установлено в глобальном смысле.

Установим, что при выборе числа a_0 из условия $0 < a_0 \leq a'_f$ управление (0.5) удовлетворяет ограничениям $\|u_f(x)\| \leq d$ при $x \in \{x \in \mathbb{X} : \Theta(x) \geq c_f\}$. Получим оценку снизу для $\frac{1}{\Theta} \left(N_f \left(\frac{1}{\Theta} \right) \varphi, \varphi \right)$ при $\Theta \geq c_f$. Поскольку для функции $f \in \mathcal{F}'_m(A)$ выполнено условие $f(\varepsilon) > 0$, то имеем

$$\frac{1}{\Theta} \left(N_f \left(\frac{1}{\Theta} \right) \varphi, \varphi \right) \geq \frac{1}{\Theta} \int_0^{\varepsilon \Theta} f \left(\frac{t}{\Theta} \right) \|B^* e^{-A^* t} \varphi\|^2 dt \geq f(\varepsilon) \frac{1}{\Theta} \int_0^{\varepsilon \Theta} \|B^* e^{-A^* t} \varphi\|^2 dt,$$

откуда, как и для (0.19)–(0.21), получаем

$$\frac{1}{\Theta} \left(N_f \left(\frac{1}{\Theta} \right) \varphi, \varphi \right) \geq f(\varepsilon) \delta_f \|\varphi\|^2, \quad \Theta \geq c_f. \quad (0.23)$$

Используя равенство (0.4) и неравенство (0.23), имеем

$$\begin{aligned}
\|u_f(x)\|^2 &= \frac{1}{4} f^2(0) \|B^* \varphi\|^2 = \frac{1}{2} f^2(0) a_0 \frac{\|B^* \varphi\|^2}{\frac{1}{\Theta(x)} \left(N_f \left(\frac{1}{\Theta(x)} \right) \varphi, \varphi \right)} \leq \\
&\leq \frac{f^2(0) \|B^*\|^2 \|\varphi\|^2}{2f(\varepsilon) \delta_f \|\varphi\|^2} a_0 = \frac{f^2(0) \|B\|^2}{2\delta_f f(\varepsilon)} a_0. \quad (0.24)
\end{aligned}$$

Выберем число a_0 из условия $0 < a_0 \leq a'_f$, где a'_f определено равенством (0.14). Тогда из (0.24) получаем

$$\|u_f(x)\| \leq d \quad \text{для всех } x \in \{x \in X : \Theta(x) \geq c_f\}. \quad (0.25)$$

Таким образом, на основании (0.8) и (0.25), получаем, что при выборе числа a_0 из условия (0.15) управление $u_f(x)$ удовлетворяет заданным ограничениям

$$\|u_f(x)\| \leq d \quad \text{для всех } x \in X.$$

Тогда по теореме 1 [1, 2] следует утверждение данной теоремы. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Коробов В.И., Скляр Г.М. Розв'язок задачі синтезу за допомогою функціоналу керованості для систем у нескінченновимірних просторах // Доповіді АН УРСР. – Сер. А, 1983. – № 5. – С. 11–14.
2. Коробов В.И., Скляр Г.М. Синтез управления в уравнениях, содержащих неограниченный оператор // Теория функций, функциональный анализ и их приложения. – 1986. – Вып. 45. – С. 45–63.
3. Скляр Г.М., Скорик В.А. О множестве позиционных управлений, решающих задачу синтеза в гильбертовых пространствах // Вісник Харківського університету. Серія “Математика, прикладна математика і механіка”. – 1999. – № 458. – С. 3–14.
4. Коробов В.И., Рабах Р. Точная управляемость в банаховом пространстве // Дифференциальные уравнения. – 1979. – Т. 15, № 12. – С. 2142–2150.
5. Korobov V.I., Sklyar G.M., Skoryk V.A. Solution of the Synthesis Problem in Hilbert Spaces // Proceedings CD of the Forteenth International Symposium of Mathematical Theory of Networks and Systems. – Perpignan, France, 2000. – 10 pages.
6. Лакс П., Филлипс Р. Теория рассеивания: Пер. с англ. – М.: Мир, 1971. – 312 с.
7. Иосида К. Функциональный анализ: Пер. с англ. – М.: Мир, 1967. – 624 с.
8. Megan M., Hiris V. On the space of linear controllable systems in Hilbert spaces // Glasnik matematiki. – 1975. – Vol. 10, No. 1. – P. 161 – 167.

Статья получена: 18.11.2013; принята: 29.11.2013.

Visit our Web-page

<http://vestnik-math.univer.kharkov.ua/>

to find

- Information for Manuscript Preparation
- Editorial Board
- Abstracts
- Full-texts available (PDF)

Наукове видання

Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна
№ 1081 Серія "Математика, прикладна математика і механіка"

Збірник наукових праць

Російською, українською, англійською мовами

Підписано до друку 16.12.2013 р.

Формат 70 × 108/16. Папір офсетний. Друк ризограф.

Ум. друк. арк. – 5,2

Обл.– вид. арк. – 6,1

Тираж 100 пр.

Ціна договірна

14-50

61022, м.Харків, майдан Свободи, 4, Харківський національний університет
імені В.Н.Каразіна

Надруковано: ХНУ імені В.Н.Каразіна

61022, м.Харків, майдан Свободи, 4, тел. 705-24-32

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 3367 від 13.01.09

ОБОВ'ЯЗКОВИЙ
ПРИМІРНИК

