

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
імені В. Н. КАРАЗІНА

АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ

В 3-х частинах
Частина 1. Прямі та площини

Навчально-методичний посібник
для самостійної роботи та практичних занять

Харків – 2023

УДК 514.12(075.8)

А 64

Рецензенти:

К. В. Максименко-Шейко – доктор технічних наук, професор, заступник директора з наукової роботи Інституту проблем машинобудування ім. А. М. Підгорного НАН України;

М. Г. Кокодій – доктор фізико-математичних наук, професор кафедри інформаційних технологій в фізико-енергетичних системах ННІ комп'ютерної фізики та енергетики Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна.

*Затверджено до друку рішенням Науково-методичної ради
Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна
(протокол № 2 від 15 листопада 2023 року)*

А 64 **Аналітична** геометрія. В 3-х частинах. Частина 1. Прямі та площини : навчально-методичний посібник для самостійної роботи та практичних занять / уклад. Т. Г. Віхтинська, К. Е. Немченко. – Харків : ХНУ імені В. Н. Каразіна, 2023. – 64 с.

Навчально-методичний посібник для самостійної роботи та практичних занять призначено для ознайомлення з основами аналітичної геометрії в її застосуваннях у задачах фізики.

Основна увага приділена набуттю студентами навичок розв'язання задач і, зокрема, формулювання фізичних задач мовою математики. Цей посібник є складовою частиною загального навчально-методичного комплексу з аналітичної геометрії і містить задачі для проведення практичних занять за темою «Прямі і площини». Посібник розрахований на студентів фізичних спеціальностей університетів, зокрема студентів першого курсу науково-навчального інституту комп'ютерної фізики та енергетики Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна.

УДК 514.12(075.8)

© Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна, 2023

© Віхтинська Т. Г., Немченко К. Е., уклад., 2023

© Дончик І. М., макет обкладинки, 2023

Зміст

Практичне заняття № 1. Рівняння прямої на площині	4
Довідковий матеріал. Пряма на площині	6
Практичне заняття № 2. Рівняння прямої на площині	8
Практичне заняття № 3. Нормальне рівняння прямої на площині	10
Практичне заняття № 4. Взаємне розташування точки та прямих	14
Практичне заняття № 5. Взаємне розташування точки та прямих	16
Практичне заняття № 6. Основні задачі на пряму на площині	18
Довідковий матеріал. Площина в просторі	20
Практичне заняття № 7. Рівняння площини	23
Практичне заняття № 8. Рівняння площини	27
Практичне заняття № 9. Основні задачі на площину	29
Практичне заняття № 10. Основні задачі на площину	33
Довідковий матеріал. Прямі в просторі	36
Практичне заняття № 11. Рівняння прямої в просторі	38
Довідковий матеріал. Окремі випадки взаємного розташування прямих та площин	42
Практичне заняття № 12. Взаємне розташування прямих в просторі	46
Практичне заняття № 13. Взаємне розташування прямих і площин в просторі	50
Практичне заняття № 14. Взаємне розташування прямих і площин в просторі	54
Додатки	56
Додаток 1. Типова контрольна робота	56
Додаток 2. Типові задачі для індивідуальної роботи	58
Додаток 3. Типові задачі на іспиті	61

Практичне заняття № 1

Рівняння прямої на площині

Задача 1.01. Визначити, чи належать точки $A(2,-3)$ та $B(-3,15)$ прямій $5x + 8y = 16$. Знайти нормаль та напрямний вектор цієї прямої.

Задача 1.02. Задано рівняння прямої. Запишіть для цієї прямої всі види рівнянь.

а) $12x - 5y - 65 = 0$ б) $y - 2 = 0$ в) $2x + 3y = 0$ г) $x/2 - y/5 = 1$

д) $\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = -4 + 2t \end{cases}$ е) $x = 5,$ ж) $(x - 6)/2 = (y + 1)/5$

Задача 1.03. Дано дві точки. Запишіть для цієї прямої всі види рівнянь.

а) $(1,2)$ і $(4,-2)$; б) $(0,0)$ і $(2,1)$.

Задача 1.04. Пряма проходить через точку $A(3,4)$ і паралельна вектору $q=(5,1)$. Запишіть для цієї прямої всі види рівнянь.

Задача 1.05. Під яким кутом пряма перетинає вісь Ox ? Побудувати цю пряму.

а) $y = x + 2$ б) $5x + 3y = 0$

Задача 1.06. Побудувати пряму, яка відсікає на осі Oy відрізок $b = 3$ і утворює з віссю Ox кут а) 45° ; б) 135° ; с) 30° ; д) 150° .

Задача 1.07. Написати рівняння прямої, яка відсікає на координатних осях Ox і Oy відрізки $a = 3$, $b = 4$.

Задача 1.1. Прямі $x = -1$ і $x = 3$ перетинають пряму $y=2x+1$ в точках A і B . Визначити координати вектора \overline{AB} та його довжину.

Задача 1.2. Дано точки $A(3,3)$ і $B(-1,7)$. Знайти точки перетину прямої AB з осями координат.

Задача 1.3. Знайти точку перетину діагоналей чотирикутника $ABCD$, вершини якого мають координати $A(1,2)$, $B(3,9)$, $C(1,1)$ і $D(9,9)$.

Задача 1.4. Дано точки $A(3,4)$ і $B(1,2)$. Визначити, чи лежить точка $C(2,1)$ на прямій AB . При якому y точка $D(7, y)$ лежить на цій прямій?

Задача 1.5. Дано точки $A(1,1)$ і $B(2, -5)$. Визначити рівняння прямої, що проходить через початок координат і перпендикулярна прямій AB .

Завдання для самостійної роботи 1

Рівняння прямої на площині

Задача 1.08. Визначити, чи належать точки $A(-2, 3)$ та $B(-3, 8)$ прямій $2x+3y=18$. Знайти нормаль та напрямний вектор цієї прямої.

Задача 1.09. Задано рівняння прямої. Запишіть для цієї прямої всі інші види рівнянь.

а) $x+4y+24=0$,

б) $x+5=0$,

в) $3x+2y=0$,

г) $4x-3y+12=0$,

д) $y=2x-1$,

е) $y/5-x/2=1$,

є) $\begin{cases} x=-1-3t \\ y=-5+2t \end{cases}$,

ж) $(y-1)/5=(x+6)/2$.

Задача 1.010. Дано дві точки. Запишіть для цієї прямої всі види рівнянь.

а) $(1,0)$ і $(0,-3)$; б) $(-1,-5)$ і $(-2,-2)$; в) $(1,6)$ і $(0,0)$.

Задача 1.6. Пряма проходить через точку $A(2,-1)$ і паралельна вектору $q=(-1,2)$. Запишіть для цієї прямої всі види рівнянь.

Задача 1.7. Під яким кутом пряма $4x-7y+8=0$ перетинає вісь Ox ? Побудувати цю пряму.

Задача 1.8. Побудувати пряму, яка відсікає на осі Oy відрізок $b=3$ і утворює з віссю Ox кут

а) 30° ;

б) 150° .

Задача 1.9. Написати рівняння прямої, яка відсікає на координатних осях Ox і Oy відрізки $a=-3$, $b=-4$.

Задача 1.10. Дано точки $A(2, 2)$ і $B(1, -3)$. Визначити рівняння прямої, що проходить через початок координат і паралельна прямій AB .

Задача 1.11 Дано точка $A(2,3)$. Провести через цю точку пряму, яка паралельна осі абсцис, ординат, бісектрисі третього квадранта.

Довідковий матеріал Пряма на площині

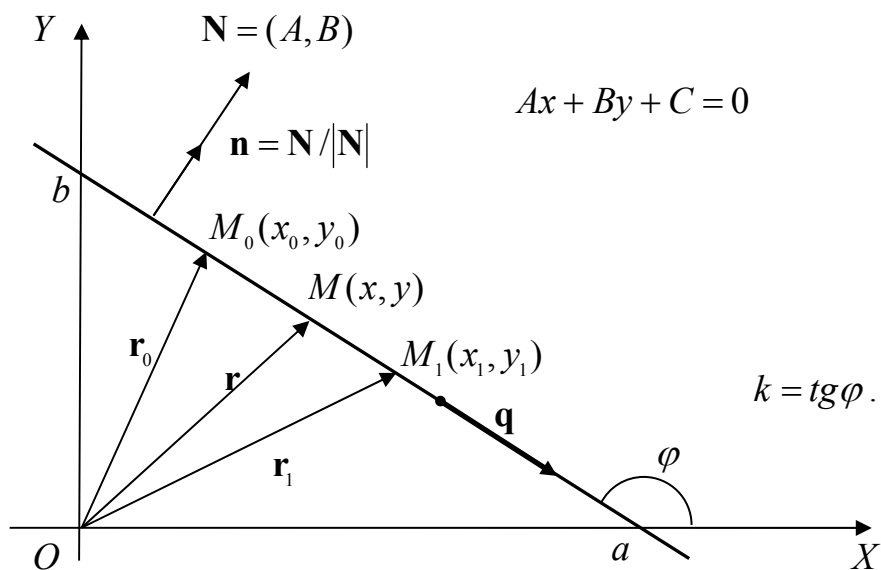


Рис. 1. Пряма на площині

Таблиця 1

Рівняння прямої лінії на площині

N	Назва	Рівняння
1	Загальне рівняння	$Ax + By + C = 0$
2	Нормальне	$\frac{Ax + By + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} = 0$
3	У відрізках	$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$
4	З кутовим коефіцієнтом	$y = kx + b$
5	Канонічне	$\frac{x - x_0}{q_x} = \frac{y - y_0}{q_y}$
6	Через дві точки	$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0}$
7	Параметричне в координатах	$\begin{cases} x = x_0 + q_x t \\ y = y_0 + q_y t \end{cases}$
8	Параметричне через дві точки	$\begin{cases} x = x_0 + (x_1 - x_0)t \\ y = y_0 + (y_1 - y_0)t \end{cases}$
9	Векторне параметричне	$\mathbf{r}_M = \mathbf{r}_0 + \mathbf{q}t$
10	Векторне параметричне через дві точки	$\mathbf{r}_M = \mathbf{r}_0 + (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0)t$
11	Векторне	$\mathbf{N}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0$

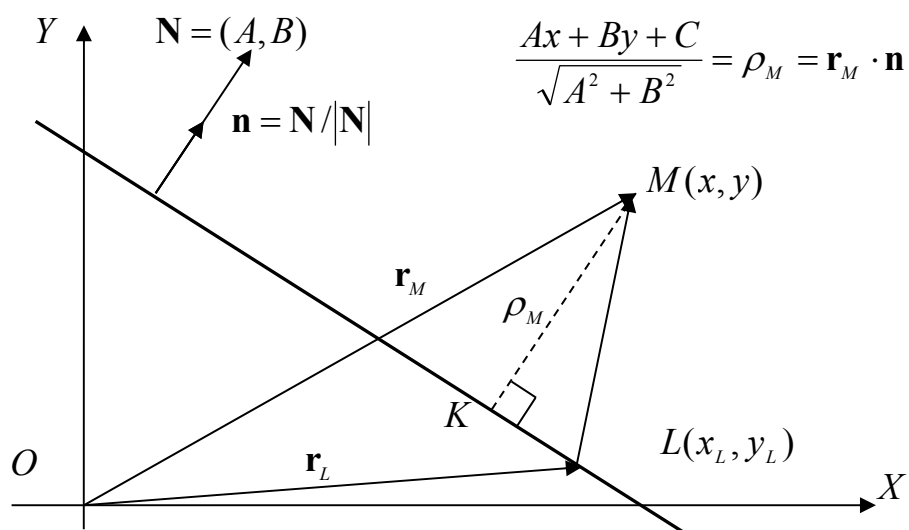


Рис. 2. Нормальне рівняння прямої

Запам'ятайте:

Нормаль до прямої

$$\mathbf{N} = (A, B).$$

Можливі вирази для напрямляючого вектора:

$$\mathbf{q} = \left(\frac{1}{A}, -\frac{1}{B} \right), \mathbf{q} = (B, -A) \text{ тощо.}$$

Відрізки, що відтинаються на осях:

$$a = -\frac{C}{A}, b = -\frac{C}{B}.$$

Кутовий коефіцієнт:

$$k = -\frac{A}{B}.$$

Абсолютне значення величини

$$\rho = \frac{Ax + By + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

визначає відстань від точки до прямої, а її знак – їхнє взаємне розташування.

Практичне заняття №2

Рівняння прямої на площині

Задача 2.1. Записати рівняння прямої, яка відсікає на осі ординат відрізок 5 і проходить через точку $(1,9)$.

Задача 2.2. Написати рівняння прямої, яка проходить через точку $A(3; 4)$ і

- А) паралельна прямій $5x + 12y - 10 = 0$,
- Б) перпендикулярна прямій $x - 4 = 0$,
- В) перпендикулярна прямій $y - 8 = 0$,
- Г) перпендикулярна прямій $4x - 3y - 2 = 0$.

Задача 2.3. Дано трикутник з вершинами: $A(-2; 0)$, $B(2; 4)$, $C(4; 0)$.
Записати рівняння медіани AE і висоти BK .

Задача 2.4. Записати рівняння прямої, яка проходить через точку перетину прямих $2x - 3y + 5 = 0$ і $3x + y - 7 = 0$ і перпендикулярна до прямої $y = 2x$.

Задача 2.5. Дано дві вершини трикутника $A(3; -2)$, $B(1; 5)$, його висоти перетинаються в точці $M(0; 2)$. Знайти координати третьої вершини.

Задача 2.6. Відомі рівняння двох сторін ромба: $2x - 5y - 1 = 0$ і $2x - 5y - 34 = 0$, а також рівняння його діагоналі $x + 3y - 6 = 0$. Знайти рівняння двох інших сторін ромба та його висоти.

Задача 2.7. Записати рівняння траєкторії точки $M(x,y)$, проекція якої на вісь Ox рухається зі швидкістю m од/с, а на вісь Oy – зі швидкістю n од/с. Початкове знаходження точки $M_0(a,b)$.

Задача 2.8. Дано точки $A(-4,0)$ і $B(0,6)$. Через середину відрізка AB провести пряму, яка відсікає на осі Ox відрізок в два рази більший, ніж на осі Oy .

Задача 2.9. Визначити взаємне розташування двох прямих

- 1) $2x - 5y + 6 = 0$ $2x - 5y - 7 = 0$,
- 2) $3x + 8y = 15$ $6x + 16y - 30 = 0$,
- 3) $2x - y + 6 = 0$ $x - y = 0$,
- 4) $x + 8y = 15$ $y = 5$.

Завдання для самостійної роботи 2

Рівняння прямої на площині

Задача 2.10. Записати рівняння прямої, яка відсікає на осі абсцис відрізок -3 і проходить через точку $(-2, -2)$.

Задача 2.11. Дано точки $A(2, 5)$ і $B(3, -4)$. Визначити точки перетину прямої AB з осями координат.

Задача 2.12. Написати рівняння прямої, яка проходить через точку $B(2; 4)$ і

А) паралельна прямій $x - y + 1 = 0$,

Б) перпендикулярна прямій $x - y + 1 = 0$.

Задача 2.13. Написати рівняння прямої, яка проходить через точку $B(2; 4)$ і

А) паралельна прямій $3x - 4y + 15 = 0$,

Б) перпендикулярна прямій $3x - 7y + 14 = 0$.

Задача 2.14. Дано трикутник з вершинами: $A(-1; 3)$, $B(5; 4)$, $C(2; -3)$. Записати рівняння медіан і висот.

Задача 2.15. Вершиною трикутника є точка $A(5; -3)$, а основою відрізок, який з'єднує точки $B(0; -1)$ і $C(3; 3)$. Знайти довжину висоти трикутника.

Задача 2.16. Знайти рівняння прямої, яка ділить навпіл відрізок між точками $A(1, 2)$ і $B(=3, 4)$ та перпендикулярна йому.

Задача 2.17. Записати рівняння траєкторії точки $M(x, y)$, проекція якої на вісь Ox рухається зі швидкістю V_x од/с, а на вісь Oy – зі швидкістю V_y од/с. Початкове знаходження точки $M_0(x_0, y_0)$.

Задача 2.18. Перевірити, що точки $A(-4; -3)$, $B(-5; 0)$, $C(6; 6)$, $D(1; 0)$ є вершинами трапеції, і знайти її висоту.

Задача 2.19. Визначити взаємне розташування двох прямих $2x + 5y - 3 = 0$, $x + y + 1 = 0$.

Практичне заняття № 3
Нормальне рівняння прямої на площині

Задача 3.01. Записати нормальне рівняння прямої

а) $3x + 4y + 15 = 0$, б) $6x - 8y - 9 = 0$.

Задача 3.02. Знайти відстань від початку координат до прямої $12x - 5y + 39 = 0$.

Задача 3.03. Знайти відстань

а) від точки $A(2, 4)$ до прямої $6x - 8y - 9 = 0$;

б) від точки $(2, 5)$ до прямої $6x + 9y - 5 = 0$.

Задача 3.04. Знайти відстань між двома паралельними прямими

а) $2x - 3y = 6$ і $4x - 6y = 25$; б) $-3x + 9y - 7 = 0$ і $x - 3y + 5 = 0$.

Задача 3.05. Знайти кут між двома прямими $y = 2x + 4$ і $y = 3x + 1$.

Задача 3.06. Знайти кути між прямими, сторони якого задані рівняннями:

$$l_1: \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = -3t \end{cases} \quad l_2: -2y/3 + x/4 = 1 \quad l_3: \frac{x-2}{4} = \frac{y+1}{3}.$$

Задача 3.07. Знайти взаємне розташування двох прямих

1) $2x - 5y + 6 = 0$, $2x - 5y - 7 = 0$; 2) $3x + 8y = 15$, $6x + 16y - 30 = 0$;

3) $2x + 5y - 3 = 0$, $x + y + 1 = 0$.

Задача 3.08. Сторони трикутника задані рівняннями:

(AB): $2x + 4y + 1 = 0$ (BC): $x - y + 2 = 0$ (AC): $3x + 4y - 12 = 0$.

Знайти координати вершин.

Задача 3.1. Знайти відстань між двома прямими

а) $2x - 3y = 6$ і $4x - 6y = 25$; б) $\begin{cases} x = 5 + 3t \\ y = 3 + 2t \end{cases}$ і $\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = -4 + 2t \end{cases}$.

Задача 3.2. Знайти кути трикутника, сторони якого задані рівняннями:

$x - 2y + 1 = 0$, $5x - 2y - 11 = 0$, $x + 2y + 5 = 0$.

Задача 3.3. Знайти геометричне місце точок, відстань від якого до прямої $-x - 2y + 7 = 0$ дорівнює $d = 2\sqrt{5}$.

Задача 3.4. Знайти геометричне місце точок, рівновіддалених від двох паралельних прямих $5x - y + 6 = 0$ і $-15x + 3y + 2 = 0$.

Задача 3.5. Дана пряма $2x + y - 6 = 0$ і на ній дві точки з ординатами $y_A = 6, y_B = -2$. Знайти рівняння висоти AD трикутника AOB .

Задача 3.6. Дві сторони квадрата лежать на прямих $5x + 5y + 2 = 0$, $10x + 10y - 2 = 0$. Знайти площу квадрата.

Завдання для самостійної роботи 3
Нормальне рівняння прямої на площині

Задача 3.09. Задано загальне рівняння прямої $12x - 5y - 65 = 0$. Запишіть для цієї прямої нормоване рівняння.

Задача 3.010. Запишіть загальне рівняння прямої L і знайдіть відстань від початку координат до прямої:

1) $L : M_0(-1;2) \in L, \bar{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \perp L;$ 2) $L : M_0(2;1) \in L, \bar{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \perp L;$

3) $L : M_0(-1;2) \in L, \bar{s} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \parallel L;$ 4) $L : M_0(1;0) \in L, \bar{s} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \parallel L;$

5) $M_1(1;2), M_2(-1;0) \in L;$ 6) $M_1(1;1), M_2(1;-2) \in L.$

Задача 3.011.

а) Обчисліть відстань $d(M_0;L)$ від точки M_0 до прямої L ;

б) запишіть рівняння прямої L' , що проходить через точку M_0 перпендикулярно до прямої L ;

в) запишіть рівняння прямої L'' , що проходить через точку M_0 паралельно прямій L , якщо:

1) $L : -2x + y - 1 = 0, M_0(-1;2);$ 2) $L : 2y + 1 = 0, M_0(1;0).$

Задача 3.012. Дослідіть взаємне розташування прямих. Якщо прямі паралельні, то знайдіть віддаль $d(L_1;L_2)$ між прямими; якщо прямі перетинні, то знайдіть косинус кута (L_1, L_2) і точку перетину прямих:

1) $L_1 : -2x + y - 1 = 0, L_2 : 2y + 1 = 0;$

2) $L_1 : \frac{x-1}{-2} = \frac{y}{1}, L_2 : \frac{x+2}{1} = \frac{y}{0};$

3) $L_1 : x + y - 1 = 0, L_2 : 2x + 2y + 1 = 0;$

4) $L_1 : x + y - 1 = 0, L_2 : \frac{x}{2} = \frac{y+1}{-2};$

5) $L_1 : -x + 2y + 1 = 0, L_2 : 2x - 4y - 2 = 0.$

Задача 3.7. Через точку перетину прямих $L_1 : x + 2y - 1 = 0$ і $L_2 : 2x + y - 4 = 0$ проведіть пряму:

- 1) що проходить через точку $M_0(-1;3)$;
- 2) паралельну осі Oy ;
- 3) перпендикулярну до прямої $L_3 : x - 2y + 11 = 0$.

Задача 3.8. За яких значень параметра a прямі $L_1 : ax - 4y - 6 = 0$ та $L_2 : x - ay - 3 = 0$:

- 1) перетинаються;
- 2) паралельні;
- 3) збіжні?

Практичне заняття № 4

Взаємне розташування точки та прямих

Задача 4.1. Знайти проекцію точки на пряму.

а) $M(-1;4)$ на $12x - 18y + 7 = 0$. б) $K(4;6)$ на $-6x + 9y - 14 = 0$.

Задача 4.2. Знайдіть точку B , симетричну точці $A(10;10)$ щодо прямої $L: 3x + 4y - 20 = 0$.

Задача 4.3. Знайти довжину перпендикуляра, який опущено з початку координат на пряму $15x - 8y - 51 = 0$. Знайти також координати основи перпендикуляра.

Задача 4.4. Скласти рівняння геометричного місця точок, відхилення яких від прямої $8x - 15y - 25 = 0$ дорівнює -2 .

Задача 4.5. На прямій $2x + 3y - 8 = 0$ знайти точку, яка рівновіддалена від точок $A(4; 4)$ і $B(2; -4)$.

Задача 4.6. Середня лінія трапеції має рівняння $2x + 3y - 6 = 0$. Скласти рівняння основ трапеції, якщо відомо, що точка $M(3; 2)$ лежить на одній з основ.

Задача 4.7. Нехай відомі рівняння двох сторін квадрата: $5x + 12y - 10 = 0$, $5x + 12y + 29 = 0$. Скласти рівняння двох інших сторін за умови, що точка $M(-3; 5)$ лежить на стороні цього квадрата.

Задача 4.8. Дані рівняння сторони $x + 3y - 8 = 0$ і діагоналі $2x + y + 4 = 0$ ромба. Записати рівняння інших сторін і діагоналі ромба, знаючи, що точка $A(-9, -1)$ лежить на стороні.

Задача 4.9. Дано рівняння сторони трикутника $x + 2y - 2 = 0$ і рівняння $2x - 3y + 4 = 0$ та $2x + y - 1 = 0$ двох його висот. Знайти рівняння двох інших сторін трикутника.

Задача 4.10. Дано точки $A(5,2)$, $B(1,2)$ і $C(1,-1)$. Визначити, чи лежить точка B на прямій CA . Якщо ні, знайти площу трикутника ABC , рівняння висоти та медіани, проведеної з вершини B . Знайти рівняння прямої, яка проходить через точку B та паралельна CA .

Завдання для самостійної роботи 4
Взаємне розташування точки та прямих

Задача 4.11. Знайти проекцію точки $P(-8; 12)$ на пряму, яка проходить через точки $A(-5; 1)$ і $B(2; -3)$.

Задача 4.12. Знайдіть точку B , симетричну точці $A(1;2)$ щодо прямої $L: 3x - y + 9 = 0$.

Задача 4.13. Знайти довжину перпендикуляра, який опущено з початку координат на пряму $4x + 3y + 35 = 0$. Знайти також координати основи перпендикуляра.

Задача 4.14. Дані рівняння основ трапеції. Знайти її висоту.
 $2x + y - 5 = 0$ і $4x + 2y - 7 = 0$.

Задача 4.15. Точка $M(3; -1)$ – вершина трикутника, сторони якого лежать на прямих $3x + 5y - 1 = 0$ і $5x - 3y - 20 = 0$.

Задача 4.16. Знайти рівняння діагоналі паралелограма, яка не проходить через точку перетинання його сторін $x + y - 1 = 0$, $y + 1 = 0$, якщо відомо, що діагоналі паралелограма перетинаються в точці $P(-1, 0)$.

Задача 4.17. Дано дві протилежні вершини квадрата $A(2, 1)$ і $C(4, 5)$. Знайти дві інші.

Задача 4.18. Запишіть рівняння прямої L' , що проходить через точку $A(-3; 4)$ і паралельна прямій L і прямій L'' , що проходить через точку A і перпендикулярна до прямої L :

- 1) $L: x - 2y + 5 = 0$; 2) $L: \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{3}$; 3) $L: x = 2$; 4) $L: y = -1$;
5) $L: x = 3 + t, y = 4 - 7t$.

Задача 4.19. Дано вершини $A(-3, -2)$, $B(4, -1)$, $C(1, 3)$ трапеції $ABCD$ ($AD \parallel CB$). Діагоналі трапеції перпендикулярні. Знайти координати точки D .

Задача 4.20. Знайти координати вершин трикутника, якщо задані рівняння його сторін $AB: x/3 - y/5 = 1$, $BC: (3, 1)(x + 5, y - 1) = 0$, $CA: x + 2y - 1 = 0$, і написати рівняння медіани цього трикутника, проведеної з вершини C . Знайти висоту, проведenu з вершини B . Знайти рівняння прямої, яка проходить через точку B та паралельна CA .

Практичне заняття № 5

Взаємне розташування точки та прямих

Задача 5.1. Прямі $-x + 5y + 4 = 0$ і $4x + 20y - 5 = 0$ ділять площину на смуги. В якій смугі лежить точка $M(7; -2)$.

Задача 5.2. Яка пряма знаходиться між двома іншими:

$$-2x + 3y - 2 = 0 \quad 12x - 18y + 7 = 0 \quad -6x + 9y - 14 = 0$$

Задача 5.3. Дано точки M і K . Чи перетинає відрізок MK пряму:

а) $M(5;4)$ і $K(10;-3)$. $x + 4 = 0$. б) $M(3;3)$ і $K(-3;5)$. $y - 12 = 0$.

Задача 5.4. Визначити взаємне розташування прямих:

1) $x + 2y + 3 = 0$, $2x + 3y + 5 = 0$, $x - y + 7 = 0$;

2) $2x + 5y - 4 = 0$, $7x + y - 20 = 0$, $3x + 2y - 8 = 0$.

Задача 5.5. Знайти кути трикутника, сторони якого задані рівняннями:

$$2x - 3y + 1 = 0, \quad x + 2y - 10 = 0, \quad 3x - 2y + 5 = 0.$$

Задача 5.6. Знайти кути трикутника, сторони якого задані рівняннями:

$$\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = -4 + 2t \end{cases} \quad \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = -3t \end{cases} \quad \begin{cases} x = 4 - 5t \\ y = 3 + 3t \end{cases}$$

Задача 5.7. Записати рівняння бісектрис кутів між прямими $3x + 4y = 0$ і $y = 0$.

Задача 5.8. Записати рівняння бісектриси гострого кута між прямими, які перетинаються: $3x + 4y + 15 = 0$, $6x - 8y - 9 = 0$;

Задача 5.9. Дано трикутник ABC : $A = (4, 4)$, $B = (-6, -1)$, $C = (-2, -4)$. Написати рівняння бісектриси внутрішнього кута трикутника при вершині C .

Задача 5.10. Знайти взаємне розташування прямих:

$$(1, -4)(x + 2, y + 3) = 0, \quad \frac{x - 2}{4} = \frac{y + 1}{3}, \quad \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = -3t \end{cases}$$

Знайти кути між прямими. У разі формування трикутника знайти площу, рівняння однієї з висот, медіан та бісектрис.

Задача 5.11. Дано точки $A(5,2)$, $B(1,2)$ і $C(1,-1)$. Визначити, чи лежить точка B на прямій CA . Якщо ні, знайти бісектриси, проведені з вершини B .

Завдання для самостійної роботи № 5
Взаємне розташування точки та прямих

Задача 5.12. Прямі $3x + 2y - 6 = 0$ і $-3x - 2y + 3 = 0$ ділять площину на смуги. В якій смугі лежить точка $M(1;1)$?

Задача 5.13. Дано точки M і K . Чи перетинає відрізок MK пряму?

а) $M(6;1)$ і $K(5;-2)$. $-3x + 4y - 11 = 0$.

б) $M(1;5)$ і $K(-3;-4)$. $6x + y - 1 = 0$.

Задача 5.14. Яка пряма знаходиться між двома іншими:

$8x - 2y + 3 = 0$, $4x - y - 8 = 0$, $-20x + 5y + 9 = 0$.

Задача 5.15. Знайти взаємне розташування прямих:

1) $x - y - 2 = 0$, $3x + 5y + 4 = 0$, $6x - 6y + 1 = 0$;

2) $2x + 3y - 1 = 0$, $4x + 6y + 5 = 0$, $10x + 15y - 7 = 0$.

Задача 5.16. Знайти кути трикутника, сторони якого задані рівняннями:

$y/5 - x/2 = 1$, $y/2 + x/3 = 1$, $-2y/3 + x/4 = 1$.

Задача 5.17. Записати рівняння бісектриси тупого кута між прямими, які перетинаються: $3x + 4y + 15 = 0$, $6x - 8y - 9 = 0$.

Задача 5.18. Задано вершини трикутника ABC .

а) Напишіть рівняння боку AB ;

б) напишіть рівняння висоти CD і обчисліть її довжину $h = |CD|$;

в) знайдіть кут φ між висотою CD і медіаною BM ;

г) напишіть рівняння бісектрис L_1 та L_2 внутрішнього і зовнішнього кутів при вершині A , якщо:

1) $A(1;2), B(2;-2), C(6;1)$;

2) $A(2;-2), B(6;1), C(-2;0)$.

Задача 5.19. Знайти координати вершин трикутника, якщо задані рівняння його сторін $AB: x/3 - y/5 = 1$, $BC: (3,1)(x+5, y-1) = 0$, $CA: x + 2y - 1 = 0$, і написати рівняння медіани цього трикутника, проведеної з вершини C . Знайти рівняння бісектриси, проведеної з вершини A .

Практичне заняття № 6

Основні задачі на пряму на площині

Задача 6.1. Скласти рівняння сторін трикутника, якщо дані одна з його вершин $A(0; 2)$, рівняння висоти BM : $y = -3x + 4$

та висоти CM : $\begin{cases} x = 4 + 3t \\ y = 3 - t \end{cases}$,

де M – точка перетинання висот.

Задача 6.2. Дано дві протилежні вершини ромба $A(3; 4)$ і $C(1; -2)$ та рівняння однієї з його сторін $x - y + 1 = 0$. Знайти рівняння інших його сторін.

Задача 6.3. Скласти рівняння катетів прямокутного трикутника, знаючи рівняння гіпотенузи $y = 3x + 5$ і вершину прямого кута $(4; -1)$ (трикутник рівнобедрений).

Задача 6.4. Через початок координат провести пряму так, щоб вона пройшла на однаковій відстані від точок $A(2; 2)$ і $B(4; 0)$.

Задача 6.5. Скласти рівняння сторін трикутника, знаючи одну з його вершин $A(0; 2)$ і рівняння висот BM і CM : $x + y = 4$ і $y = 2x$, де M — точка перетину висот.

Задача 6.6. Дано рівняння сторони трикутника $x + 2y - 2 = 0$ і рівняння $2x - 3y + 4 = 0$, $2x + y - 1 = 0$ двох його висот. Знайти рівняння двох інших сторін трикутника.

Задача 6.7. Скласти рівняння трьох сторін квадрата, якщо відомо, що четвертою стороною є відрізок прямої $4x + 3y - 12 = 0$, кінці якого лежать на осях координат.

Задача 6.8. В рівнобічному трикутнику відомо рівняння основи $x - 2y + 3 = 0$, рівняння однієї з його бічних сторін $4x - y + 5 = 0$ і точка $P(1,2; 5,6)$ на іншій бічній стороні. Обчислити відстань від вершини при основі до бічної сторони.

Задача 8.9. На прямій $2x + 3y - 8 = 0$ знайти точку, яка рівновіддалена від точок $A(4; 4)$ і $B(2; -4)$.

Завдання для самостійної роботи 6
Основні задачі на пряму на площині

Задача 6.10. Рівняння однієї зі сторін кута $2x - 9y - 3 = 0$, а рівняння бісектриси $4x - y + 11 = 0$. Знайти рівняння другої сторони кута.

Задача 6.11. Дано дві вершини трикутника $A(-4; 5)$ і $B(4; 1)$ і точка перетину його висот $D(3; 5)$. Скласти рівняння сторін трикутника.

Задача 6.12. Дано дві прямі: $3x + 4y - 10 = 0$ і $5x - 12y + 26 = 0$. Знайти точку, яка би знаходилась на відстані 5 одиниць як від однієї, так і від другої прямої.

Задача 6.13. Вершинами трикутника ABC є точки $A(2; -2)$ і $B(3; -1)$. Його медіани перетинаються в точці $P(1; 0)$. Скласти рівняння висоти трикутника, яка проходить через вершину C .

Задача 6.14. Знайти рівняння діагоналі паралелограма, яка не проходить через точку перетину його сторін $x + y - 1 = 0$ і $y + 1 = 0$, якщо відомо, що діагоналі паралелограма перетинаються в точці $P(-1; 0)$.

Задача 6.15. Скласти рівняння прямої, яка проходить через початок координат і через центр тяжіння трикутника зі сторонами: $x - y - 4 = 0$, $2x - 11y + 37 = 0$, $2x + 7y - 17 = 0$.

Задача 6.16. Обчислити координати центра кола, вписаного у трикутник з вершинами $A(0; 0)$, $B(2; 0)$, $C(0; 4)$.

Задача 6.17. Обчислити координати центра кола, описаного навколо трикутника з вершинами $A(-1; 1)$, $B(2; -1)$, $C(4; 0)$.

Задача 6.18. Через точку $A(2, 2)$ провести пряму, яка відстоїть від початку координат на відстань 1.

Задача 6.19. В рівнобічному трикутнику відомо рівняння основи $x - y - 1 = 0$, рівняння однієї з його бічних сторін $x - 2y + 5 = 0$ і точка $P(1; 3)$ на цієї бічній стороні. Визначити рівняння третьої сторони трикутника

Довідковий матеріал
Площина в просторі

Таблиця 2

Рівняння площини

5	Назва рівняння	Рівняння
1	Загальне	$Ax + By + Cz + D = 0$
2	Нормальне	$\frac{Ax + By + Cz + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = 0$
3	У відрізках	$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$
4	Векторне параметричне, задане а) однією точкою і двома напрямляючими векторами, б) трьома точками, в) двома точками й одним напрямляючим вектором	$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \lambda \mathbf{p} + \mu \mathbf{q};$ $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \lambda(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0) + \mu(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_0);$ $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \lambda \mathbf{p} + \mu(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_0).$
5	Параметричне, задане а) точкою і двома напрямляючими векторами, б) трьома точками, в) двома точками й одним напрямляючим вектором	$\begin{cases} x = x_0 + \lambda p_x + \mu q_x \\ y = y_0 + \lambda p_y + \mu q_y; \\ z = z_0 + \lambda p_z + \mu q_z \end{cases}$ $\begin{cases} x = x_0 + \lambda(x_1 - x_0) + \mu(x_2 - x_0) \\ y = y_0 + \lambda(y_1 - y_0) + \mu(y_2 - y_0) \\ z = z_0 + \lambda(z_1 - z_0) + \mu(z_2 - z_0) \end{cases}$ $\begin{cases} x = x_0 + \lambda p_x + \mu(x_2 - x_0) \\ y = y_0 + \lambda p_y + \mu(y_2 - y_0) \\ z = z_0 + \lambda p_z + \mu(z_2 - z_0) \end{cases}$
6	Векторне, задане нормаллю	$\mathbf{N}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0$
7	Векторне, задане: а) напрямляючими векторами, б) двома точками й одним напрямляючим вектором, в) трьома точками	$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \cdot (\mathbf{p} \times \mathbf{q}) = (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0, \mathbf{p}, \mathbf{q}) = 0,$ $(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0, \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0, \mathbf{q}) = 0,$ $(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0, \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0, \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_0) = 0.$

8	<p>Векторне рівняння площини в координатному записі, задане</p> <p>а) напрямляючими векторами,</p> <p>б) двома точками й одним напрямляючим вектором,</p> <p>в) трьома точками</p>	$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ p_x & p_y & p_z \\ q_x & q_y & q_z \end{vmatrix} = 0,$ $\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ q_x & q_y & q_z \end{vmatrix} = 0,$ $\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 & z_2 - z_0 \end{vmatrix} = 0$
---	--	---

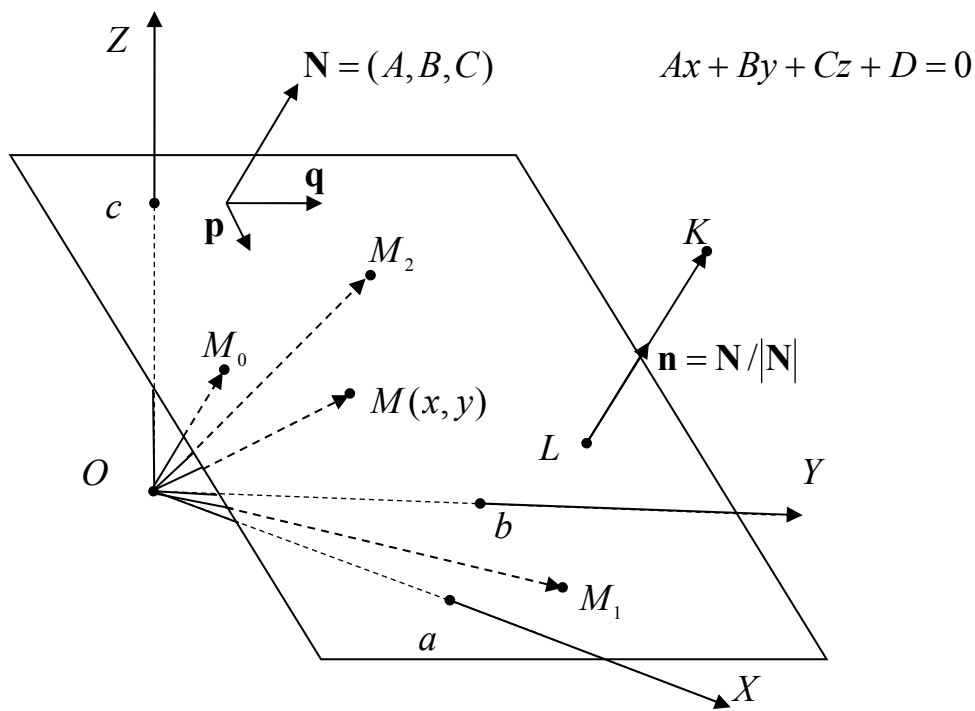


Рис. 3. Параметри площини. Загальне рівняння площини

Запам'ятайте!

Нормаль до площини:

$$\mathbf{N} = (A, B, C).$$

Вираз нормального вектора через напрямляючі:

$$\mathbf{N} = \mathbf{p} \times \mathbf{q}.$$

Відрізки, що відтинаються на осях:

$$a = -\frac{D}{A}, \quad b = -\frac{D}{B}, \quad c = -\frac{D}{C}.$$

Абсолютне значення величини

$$\rho = \frac{\mathbf{rN} + D}{|\mathbf{N}|} = \mathbf{rn} + \frac{D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{Ax + By + Cz + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

визначає відстань від точки до прямої, а її знак – їхнє взаємне розташування.

Практичне заняття № 7

Рівняння площини

Задача 7.01. Вкажіть нормальний вектор площини: $3x + z - 11 = 0$.

Задача 7.02. Перевірте, які з точок $A(-1;2;3)$, $B(1;-2;1)$, $C(0;1;2)$ лежать на площині $2x - 3y + z - 9 = 0$.

Задача 7.03. Як розташована щодо системи координат $Oxyz$ площина:

- 1) $3y + 2z - 1 = 0$; 2) $2x + y = 0$;
3) $x + z = 0$; 4) $2x + 3 = 0$.

Задача 7.04. Дано три точки. Написати рівняння площини.

- а) $A(2; -3; 2)$, $B(7; 1; 0)$, $C(2; -3; 4)$;
б) $A(-1; -3; -4)$, $B(1; 2; 3)$, $C(1; -3; 0)$.

Задача 7.05. Запишіть загальне рівняння площини, що проходить через точку M_0 , паралельно векторам \bar{a}_1 та \bar{a}_2 , якщо:

$$M_0(1;1;1), \bar{a}_1 = (0;1;2), \bar{a}_2 = (-1;0;1).$$

Задача 7.06. Запишіть рівняння площини, що проходить через точки M_1 і M_2 паралельно вектору \bar{a} , якщо:

1) $M_1(1;2;2)$, $M_2(2;1;1)$, $\bar{a} = (3;0;1)$

Задача 7.07. Із загального рівняння площини

а) $2x + 3y - 4z + 12 = 0$; б) $5x - 2y + 3z - 10 = 0$; в) $3x + 2y - z = 0$

знайти: а) нормаль;

б) три різні точки, які містить ця площина;

с) два (неколінеарні) напрямляючі вектори цієї площини. Переконатися, що їх векторний добуток є паралельним нормальному вектору.

Написати наступні рівняння площини:

- 1) Через три точки (і звести до загального).
2) Будь-яке з параметричних (потім звести до загального).

Задача 7.08. Дано рівняння у відрізках $\frac{x}{2} + \frac{y}{4} + \frac{z}{6} = 1$. Написати рівняння через три точки, усі види параметричних рівнянь. Звести до загального рівняння.

Задача 7.1. Написати рівняння площини, що проходить через точку $M(2; -1; 3)$ і відсікає на осях координат рівні відрізки.

Задача 7.2. Написати рівняння площини, що проходить через точку $M(-4; 0; 4)$ і відсікає на осях Ox і Oy відрізки $a = 4$ і $b = 3$.

Задача 9.3. Знайдіть довжини відрізків, що відтинає від координатних площин площина:
$$2x + 3y - 9z + 18 = 0.$$

Задача 7.4. Знайдіть об'єм тетраедра, який відтинає від координатного кута площина:
$$3x - 2y + z - 12 = 0.$$

Завдання для самостійної роботи 7
Рівняння площини

Задача 7.09. Вкажіть нормальний вектор площини: $-x + 2y - 7z + 5 = 0$.

Задача 7.010. Як розташована щодо системи координат $Oxyz$ площина:

- 1) $2x + y - 5z = 0$, 2) $2x - y - 1 = 0$;
3) $3y - 4z = 0$, 4) $z + 4 = 0$.

Задача 7.011. Перевірте, які з точок $D(3;0;3)$ та $E(5;-7;11)$ лежать на площині $2x - 3y + z - 9 = 0$.

Задача 7.012. Дано три точки. Написати рівняння площини.

- а) $A(4; -5; 6)$, $B(-1; 1; 3)$, $C(7; -3; 2)$;
б) $A(-2; -1; 5)$, $B(-1; 4; 0)$, $C(3; -3; -3)$.

Задача 7.013. Запишіть загальне рівняння площини, що проходить через точку M_0 , паралельно векторам \vec{a}_1 та \vec{a}_2 , якщо:

$$M_0(0;1;2), \vec{a}_1 = (2;0;1), \vec{a}_2 = (1;1;0) .$$

Задача 7.014. Запишіть рівняння площини, що проходить через точки M_1 і M_2 паралельно вектору \vec{a} , якщо: $M_1(1;1;1)$, $M_2(0;-1;2)$, $\vec{a} = (2;3;-1)$.

Задача 7.015. Із загального рівняння площини

- а) $2x - 3y + z + 12 = 0$; б) $3x + 2z = 0$; в) $2z - 7 = 0$.

Знайти: 1) нормаль; 2) три різні точки, які містить ця площина;

3) два (неколінеарні) напрямляючі вектори цієї площини.

Переконатися, що їх векторний добуток є паралельним нормальному вектору.

Написати наступні рівняння площини:

- 1) Через три точки (і звести до загального рівняння).
2) Будь-яке з параметричних (потім звести до загального).

Задача 7.016. Привести рівняння площини до рівняння у відрізках:
 $-x + 5y + z + 3 = 0$.

Задача 7.017. Дано рівняння у відрізках $\frac{x}{4} - \frac{y}{1} + \frac{z}{2} = 1$. Написати рівняння через три точки, усі види параметричних рівнянь. Звести до загального рівняння.

Задача 7.5. Написати рівняння площини, що проходить через точку $M(1; -3; 5)$ і відсікає на осях Oy і Oz вдвічі більші відрізки, ніж на осі Ox .

Задача 7.6. Написати рівняння площини, що проходить через точку $M(-14; 1; 2)$ і відсікає на осях Ox і Oy відрізки $a = 1$ і $b = 2$.

Задача 7.7. Знайдіть довжини відрізків, що відтинає від координатних площин площина:
 $x - 2y + 5z - 20 = 0$.

Задача 7.8. Знайдіть об'єм тетраедра, який відтинає від координатного кута площина:
 $x + 2y - 5z + 20 = 0$.

Практичне заняття № 8

Рівняння площини

Задача 8.1. Через точку $(2; 1; 3)$ провести площину, яка була б паралельна до площини $x - 2y - 3z = 0$.

Задача 8.2. Запишіть рівняння площини, що проходить через точки:

- 1) $M_1(1; -3; 2), M_2(-2; 1; 4), \parallel Ox$;
- 2) $M_1(-2; 1; -3), M_2(1; -3; -4), \parallel Oy$;
- 3) $M_1(4; -1; 1), M_2(0; -2; -3), \parallel Oz$.

Задача 8.3. Запишіть рівняння площини, що проходить:

- 1) через вісь Ox і точку $M_1(-1; 1; -3)$;
- 2) через вісь Oy і точку $M_2(1; -2; 5)$;
- 3) через вісь Oz і точку $M_3(2; 3; -4)$.

Задача 8.4. Запишіть рівняння площини, що проходить через точку:

- 1) $M_1(-2; 3; -1)$ паралельно площині Oxy ;
- 2) $M_2(4; -1; 5)$ паралельно площині Oxz ;
- 3) $M_3(-3; -2; 2)$ паралельно площині Oyz .

Задача 8.5. Провести площину, яка була б перпендикулярна до площини $x + 2y + 2z - 4 = 0$ і проходила б через точки $A(-1; -2; 0)$ і $B(1; 1; 2)$.

Задача 8.6. Через точки $A(-2; -2; 0)$ і $B(0; 1; 2)$ провести площину, яка була б перпендикулярна до площини:

- а) xOz ;
- б) yOz .

Задача 8.7. Обчислити кути між наступними площинами:

$$4x - 5y + 3z - 1 = 0 \text{ і } x - 4y - z + 9 = 0.$$

Задача 8.8. Через три довільні точки на різних осях координат побудувати площину і звести рівняння до загального і до рівняння у відрізках. Написати рівняння:

- а) через точку і два напрямляючі вектори;
- б) дві точки і напрямляючий вектор.

Задача 8.9. Написати рівняння площини, що проходить через точку $M(2; 1; -2)$ і перпендикулярну до лінії перетину площин $x + 3y + 2z + 1 = 0$ і $3x + 2y - z + 8 = 0$.

Завдання для самостійної роботи 8

Рівняння площини

Задача 8.10. Знайти точки, що належать до площини $2x - 5y + 3z - 9 = 0$.

Задача 8.11. Через точку $(4; -7; 1)$ провести площину, що паралельна площині $3x - 7y + 5z - 12 = 0$.

Задача 8.12. Написати рівняння площини, що паралельна до осі Ox і проходить через точки $M(0; -2; 3)$ і $K(2; 4; 5)$.

Задача 8.13. Написати рівняння площини, що паралельна до осі Oy і проходить через точки $M(0; -2; 3)$ і $K(2; 4; 5)$.

Задача 8.14. Провести площину, яка була б перпендикулярна до площини $x + 5y + 2z - 10 = 0$ і проходила б через точки $A(0; -5; 0)$ і $B(0; 0; 2)$.

Задача 8.15. Через точки $A(-2; 4; 1)$ і $B(1; 0; -2)$ провести площину, яка була б перпендикулярна до площини xOy .

Задача 8.16. Написати рівняння площини, що паралельна до осі Oz і проходить через точки $M(2; 2; 0)$ і $K(4; 0; 0)$.

Задача 8.17. Провести через точку $(1; 2; 0)$ площину, що

- 1) перпендикулярна до заданого вектора $(1; 1; 1)$;
- 2) паралельна до площини xOz ;
- 3) перпендикулярна до осі Ox .

Задача 8.18. Провести через точку $(1; 0; 1)$ площину, що:

- 1) перпендикулярна до заданого вектора $(2; 1; 0)$;
- 2) паралельна до площини xOy ;
- 3) перпендикулярна до осі Oy .

Задача 8.19. Написати рівняння площини, що проходить через вісь Oz і точку $M(-2; -4; 3)$.

Задача 8.20. Написати рівняння площини, що проходить через вісь Oy і точку $M(2; 4; -3)$.

Задача 8.21. Написати рівняння площини, що проходить через вісь Ox і точку $M(-2; 4; 3)$.

Задача 8.22. Обчислити кути між наступними площинами:

- 1) $3x - y + 2z + 15 = 0$ і $5x + 9y - 3z - 1 = 0$;
- 2) $6x + 2y - 4z + 17 = 0$ і $9x + 3y - 6z - 4 = 0$.

Практичне заняття № 9
Основні задачі на площину

Задача 9.01. Привести рівняння площини до нормованого виду.

а) $2x + 9y - 6z + 33 = 0$; б) $3x - 4y + 5z - 14 = 0$.

Задача 9.02. Знайти відстань від точки

а) $M(5; 1; -1)$ до площини
$$\begin{cases} x = 5 + 3\lambda + 2\mu \\ y = -1 - 2\lambda + 3\mu \\ z = 2 + \lambda - \mu \end{cases}$$

б) $M(-2; -1; 3)$ до площини $\frac{x}{3} - \frac{y}{2} + \frac{z}{5} = 1$,

в) $M(3; -1; -3)$ до площини $\mathbf{N}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0$, де $\mathbf{N} = (1; 2; 1)$, $\mathbf{r}_0 = (-1; -1; -1)$.

Задача 9.03. Дана точка і площина. Знайти відстань від цієї точки до площини і їх взаємне розташування:

$\alpha_1 :: 3x - 18y + 3z + 3 = 0, M(5, -5, 6)$.

Задача 9.04 . Дано дві точки. Визначити, в одному або в різних півпросторах відносно площини лежать точки:

$\alpha_1 : 2x - y + 4z + 2 = 0, M(-5, -2, 1), N(2, 3, 1)$.

Задача 9.05. Дано дві площини. Знайти відстань між ними:

1) $x - 2y - z + 5 = 0$ і $3x - 6y - 3z + 15 = 0$.

Задача 9.06. На відстані k одиниць від площини P проведіть площину, паралельну їй:

1) $k = 5, P : x - 2y + 2z - 14 = 0$;

2) $k = 3, P : 3x - 6y - 2z + 14 = 0$.

Задача 9.07. Запишіть рівняння площини, рівновіддаленої від площин P_1 і P_2 , якщо:

$P_1 : 4x - y - 2z - 3 = 0, P_2 : 4x - y - 2z - 5 = 0$.

Задача 9.08. Дослідіть взаємне розташування площин. У разі якщо вони паралельні, то знайдіть віддаль $d(P_1, P_2)$ між площинами, якщо вони перетинні, то знайдіть косинус кута між ними:

$$1) P_1: \begin{cases} x = 1 - u + v, \\ y = 2 + u, \\ z = 3 + u + v; \end{cases}, P_2: \begin{cases} x = 1 - 4u, \\ y = 3u + v, \\ z = 4 + 2u + 5v; \end{cases}$$

$$2) P_1: 2x - y + z - 1 = 0, P_2: -4x + 2y - 2z - 1 = 0;$$

$$3) P_1: x - y + 1 = 0, P_2: y - z + 1 = 0.$$

Задача 9.09. Запишіть рівняння площин, що поділяють навпіл кути, утворені площинами P_1 і P_2 , якщо:

$$P_1: x - 3y + 2z - 5 = 0,$$

$$P_2: 3x - 2y - z + 3 = 0.$$

Завдання для самостійної роботи 9
Основні задачі на площину

Задача 9.10. Запишіть нормоване рівняння площини:

1) $5y - 12z + 26 = 0$; 2) $x + \sqrt{2}y + z - 10 = 0$.

Задача 9.12. Знайти відстань від точки

а) $M(0; 2; -1)$ до площини
$$\begin{cases} x = 2 - 3\lambda_x - 2\mu \\ y = -3 - \lambda + \mu \\ z = 1 + 2\lambda - 3\mu_z \end{cases};$$

б) $M(2; -1; 0)$ до площини $\frac{x}{2} - \frac{y}{2} + \frac{z}{3} = 1$;

в) $M(-2; -1; 3)$ до площини $\mathbf{N}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0$,
де $\mathbf{N} = (-1; 2; -1)$, $\mathbf{r}_0 = (-2; -1; -2)$.

Задача 9.13. Дана точка і площина. Знайти відстань від цієї точки до площини і їх взаємне розташування: $\alpha_1: -x + 6y - z + 3 = 0, N(1, -3, 1)$.

Задача 9.14 . Дано дві точки. Визначити, в одному або в різних пів-просторах відносно площини лежать точки:

$\alpha_1: 4x - 2y + 8z + 1 = 0, M(-5, -2, -1), N(-2, 3, 1)$.

Задача 9.15. Дано дві площини. Знайти відстань між ними:

1) $x - 2y - 3z + 5 = 0$ і $-3x + 6y + 9z + 6 = 0$;
2) $2x - 2y - z + 9 = 0$ і $10x - 10y - 5z - 15 = 0$.

Задача 9.16. Написати рівняння площин, паралельних площині $x + 2y - z + 3 = 0$ і віддалених від неї на відстань $d = 5$.

Задача 9.17. Запишіть рівняння площини, рівновіддаленої від площин P_1 і P_2 , якщо:

$P_1: 5x - 3y + z + 3 = 0$,

$P_2: 10x - 6y + 2z + 7 = 0$.

Задача 9.18. Дослідіть взаємне розташування площин. У разі якщо вони паралельні, то знайдіть відстань $d(P_1, P_2)$ між площинами, якщо вони перетинні, то знайдіть косинус кута між ними:

1) $P_1 : -x + 2y - z + 1 = 0$, $P_2 : y + 3z - 1 = 0$;

2) $P_1 : 2x - y - z + 1 = 0$, $P_2 : -4x + 2y + 2z - 2 = 0$;

3) $P_1 : \begin{cases} x = 1 + 4u, \\ y = 3u + v, \\ z = 4 + 2u + 2v; \end{cases} \quad P_2 : \begin{cases} x = 1 + u + v, \\ y = 2 + u, \\ z = 3 + u - v. \end{cases}$

Задача 9.19. Запишіть рівняння площин, що поділяють навпіл кути, утворені площинами P_1 і P_2 , якщо:

$$P_1 : 2x - y + 5z - 3 = 0,$$

$$P_2 : 2x - 10y + 4z - 2 = 0.$$

Задача 9.20.

Задано

$$\alpha_1 : -x + 6y - z + 3 = 0, \alpha_2 : 3x - 18y + 3z + 3 = 0, M(5, -5, 6), N(1, -3, 1):$$

а) знайти відстань від точки M до α_1 ;

б) визначити, в одному чи в різних півпросторах відносно α_1 лежать точки M і N ;

в) довести, що площини α_1 і α_2 є паралельними, і знайти відстань між ними.

Практичне заняття № 10
Основні задачі на площину

Задача 10.1. Перевірити, чи можна провести площину через наступні чотири точки:
(+3; +1; 0), (0; +7; +2), (-1; 0; -5) і (+4; +1; +5).

Задача 10.2. Обчислити висоту (h_s) піраміди з вершинами $S(0; +6; +4)$, $A(+3; +5; +3)$, $B(-2; +11; -5)$, $C(+1; -1; +4)$.

Задача 10.3. Задано три паралельні площини. Яка площина лежить між іншими двома:
 $12x + 4y + 24z = 0$, $3x + y + 6z - 3 = 0$, $-3x - y - 6z - 6 = 0$?

Задача 10.4. Знайти точку перетину площин:
 $x + y + z - 2 = 0$, $2x - 3y + 4z - 3 = 0$ і $4x - 11y + 10z - 5 = 0$.

Задача 10.5. Визначити взаємне розташування трьох площин у випадках:

- 1) $2x - 4y + 5z - 21 = 0$, $x - 3z + 18 = 0$, $6x + y + z - 30 = 0$;
- 2) $x + 2y - 3 = 0$, $3x + 6y - 9z + 10 = 0$, $2x + 4y - 6z - 1 = 0$.

Задача 10.6. Перевірити, чи мають спільну точку наступні чотири площини:
 $5x - z + 3 = 0$, $2x - y - 4z + 5 = 0$, $3y + 2z - 1 = 0$, $3x + 4y + 5z - 3 = 0$.

Задача 10.7. За яких значень l і m площини $P_1: 2x - y + 3z - 1 = 0$,
 $P_2: x + 2y - z + m = 0$ та $P_3: x + ly - 6z + 10 = 0$ перетинаються:

- 1) в одній точці;
- 2) уздовж прямої;
- 3) уздовж паралельних прямих?

Задача 10.8. Дано дві точки $A(+1; +3; -2)$ і $B(+7; -4; +4)$. Через точку B провести площину, що перпендикулярна до відрізка AB .

Задача 10.9. Доведіть, що площини $P_1: x - 2y + 3z - 13 = 0$,
 $P_2: 5x + y - z - 11 = 0$ та $P_3: 3x + 5y - 7z + 15 = 0$ проходять через одну й ту саму пряму.

Задача 10.10. Написати рівняння площини, що проходить через лінію перетину площин $4x - y + 3z - 6 = 0$ і $x + 5y - z + 10 = 0$ і є перпендикулярною до площини $2x - y + 5z - 5 = 0$.

Задача 10.11. На осі z знайти точку, що рівновіддалена від двох площин: $x + 4y - 3z - 2 = 0$ і $5x + z + 8 = 0$.

Задача 10.12. Скласти рівняння геометричного місця точок, рівновіддаленого від двох площин $-x + 4y + 1 = 0$ і $5x - 20z + 7 = 0$.

Задача 10.13. Скласти рівняння площини, що проходить від початку координат на відстані 6 одиниць та відтинає на осях координат відрізки, що пов'язані співвідношенням: $a:b:c = 1:3:2$.

Завдання для самостійної роботи 10
Основні задачі на площину

Задача 10.14. Перевірити, чи можна провести площину через наступні чотири точки: $(+1; -1; +1)$, $(0; +2; +4)$, $(+1; +3; +3)$ і $(+4; 0; -3)$.

Задача 10.15. Обчислити висоту (h_s) піраміди з вершинами $S(0; +6; +4)$, $A(-3; -5; +3)$, $B(-2; +1; 5)$, $C(+2; -1; +4)$.

Задача 10.16. Задано три паралельні площини. Яка площина лежить між іншими двома: $2x + 5y - z - 7 = 0$, $-4x - 10y + 2z + 5 = 0$, $6x + 15y - 3z + 5 = 0$?

Задача 10.17. Знайти точку перетину площин:

- а) $x + y + z = 0$, $2x - 3y + 4z = 0$, $4x - 11y + 10z = 0$;
б) $x - y + z - 1 = 0$, $x + y - z - 2 = 0$, $5x + y - z - 7 = 0$.

Задача 10.18. Визначити взаємне розташування трьох площин в кожному з наступних випадків:

- 1) $3x - y + 2z + 1 = 0$, $7x + 2y + z = 0$, $15x + 8y - z - 2 = 0$;
2) $5x - 2y + 4 = 0$, $3x + z - 5 = 0$, $8x - 2y + z + 7 = 0$;
3) $6x + 2y + 12z - 3 = 0$, $5y - 7z - 10 = 0$, $3x + y + 6z + 12 = 0$.

Задача 10.19. Перевірити, чи мають спільну точку наступні чотири площини: $5x + 2y - 6 = 0$, $x + y - 3z = 0$, $2x - 3y + z + 8 = 0$, $3x + 2z - 1 = 0$.

Задача 10.20. Скласти рівняння геометричного місця точок, рівновіддаленого від двох площин $3x + y + 8z - 2 = 0$ і $9x + 3y - 24z - 8 = 0$.

Задача 10.21. На осі Ox знайти точку, що рівновіддалена від двох площин: $x + 4y - 3z - 2 = 0$ і $5x + z + 8 = 0$.

Задача 10.22. Дано дві точки $A(+1; +3; -2)$ і $B(+7; -4; +4)$. Через точку A провести площину, що перпендикулярна до відрізка AB .

Задача 10.23. Через лінію перетину площин $P_1: x + y - z + 5 = 0$ та $P_2: 2x + y + z - 3 = 0$ проведіть площину:

- 1) що проходить через точку $M_0(-1; 3; 4)$;
2) паралельну до осі Oy ;
3) перпендикулярну до площини $3x - y + 2z - 11 = 0$.

Задача 12.04. Скласти рівняння площини, що проходить від початку координат на відстані 3 одиниці та відтинає на осях координат відрізки, що пов'язані співвідношенням: $a:b:c = 3:5:1$.

Довідковий матеріал
Прямі в просторі

Таблиця 3

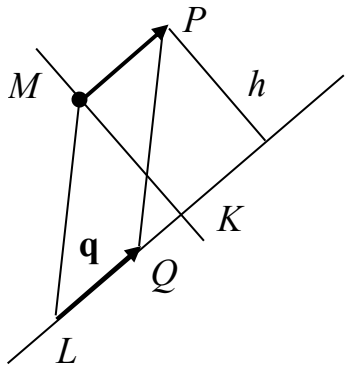
Рівняння прямої лінії в просторі

N	Назва рівняння	Рівняння
1	Векторне параметричне	$\mathbf{r}_M = \mathbf{r}_0 + \mathbf{q}t$
2	Векторне параметричне, задане двома точками	$\mathbf{r}_M = \mathbf{r}_0 + (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0)t$
3	Параметричне в координатах	$\begin{cases} x = x_0 + q_x t \\ y = y_0 + q_y t \\ z = z_0 + q_z t \end{cases}$
4	Параметричне, задане двома точками	$\begin{cases} x = x_0 + (x_1 - x_0)t \\ y = y_0 + (y_1 - y_0)t \\ z = z_0 + (z_1 - z_0)t \end{cases}$
5	Канонічне	$\frac{x - x_0}{q_x} = \frac{y - y_0}{q_y} = \frac{z - z_0}{q_z}$
6	Через дві точки	$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{z - z_0}{z_1 - z_0}$
7	Загальне рівняння	$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$
8	Векторне	$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \times \mathbf{q} = 0$
9	Векторне, задане двома точками	$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \times (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0) = 0$

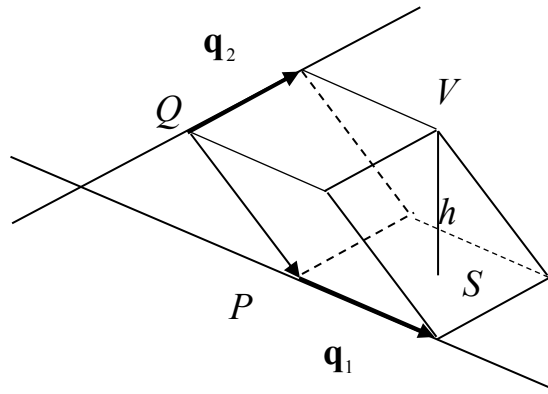
Запам'ятайте!

Якщо пряма задана як перетин двох площин, то її напрямлюючий вектор визначається нормальними до цих площин векторами:

$$\mathbf{q} = \mathbf{N}_1 \times \mathbf{N}_2.$$



$$h = \frac{|\mathbf{q} \times (\mathbf{r}_M - \mathbf{r}_0)|}{|\mathbf{q}|} \equiv \frac{S_{LQPM}}{|LQ|}$$



$$h = \frac{|(\mathbf{r}_{10} - \mathbf{r}_{20}) \cdot (\mathbf{q}_1 \times \mathbf{q}_2)|}{|\mathbf{q}_1 \times \mathbf{q}_2|} \equiv \frac{V_{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \overline{QP}}}{S_{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2}}$$

Рис. 4. До задачі про відстань від точки до прямої і між мимобіжними прямими

Практичне заняття № 11
Рівняння прямої в просторі

Задача 11.01. Визначити, чи лежать точки $A(5; -2; -3)$ і $B(8; 3; 1)$ на прямій $\begin{cases} 5x - 3y - 31 = 0 \\ 3x + 4y + 7z + 14 = 0 \end{cases}$.

Задача 11.02. У просторі дана пряма $\frac{x-4}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{-2}$. Знайти напрямляючий вектор цієї прямої.

Задача 11.03. Дано дві точки $A(1; -1; -1)$, $B(2; 3; 4)$. Написати загальне рівняння прямої. Отримати інші рівняння прямої.

Задача 11.04. Отримати параметричні рівняння прямої $(x-1)/3 = (y+2)/3 = z$.

Задача 11.05. Написати рівняння прямої, що проходить через точку $A(0; -4; 0)$ і паралельна до вектора $P(1; 2; 3)$.

Задача 11.06. Дано рівняння прямої. Написати у канонічній і параметричній формах:

- 1) $\begin{cases} x = 4 \\ z = y \end{cases}$; 2) $\begin{cases} 2x - y - 7 = 0 \\ 2x - z + 5 = 0 \end{cases}$;
- 3) $\begin{cases} x = 3z - 5 \\ y = 2z - 8 \end{cases}$; 4) $\begin{cases} y = 2 \\ z = x + 1 \end{cases}$;
- 5) $\begin{cases} y = 3 \\ z = 2 \end{cases}$.

Задача 11.07. Написати рівняння прямої, що проходить через точку $A(-1; 2; -2)$ і паралельна до прямої $\begin{cases} x - y = 2 \\ y = 2z + 1 \end{cases}$.

Задача 11.08. Написати рівняння прямої, що проходить через точки $A(2; -1; 3)$, $B(2; 3; 3)$, і знайти напрямляючі косинуси.

Задача 11.09. Довести, що пряма $\frac{x-2}{2} = \frac{y+3}{3} = \frac{z-1}{1}$ є перпендикулярною

до прямої $\begin{cases} x = z + 3 \\ 2y = -2z - 5 \end{cases}$.

Задача 11.10. Знайти кут між прямими $\begin{cases} 3x - 2y + 8 = 0 \\ 3x = z \end{cases}$ і $\begin{cases} 2x - y - 7 = 0 \\ 2x - z + 5 = 0 \end{cases}$.

Задача 11.11. Знайти кут між прямою $\begin{cases} x = 2z - 1 \\ y = -2z + 1 \end{cases}$ та прямою, що проходить через початок координат і точку $K(1; -1; -1)$.

Задача 11.12. Написати рівняння траєкторії точки $M(x, y, z)$, яка, вийшовши з точки $A(4; -3; 1)$, рухається зі швидкістю $\mathbf{v}(2; 3; 1)$.

Завдання для самостійної роботи 11

Рівняння прямої в просторі

Задача 11.13. Дано рівняння прямої $\begin{cases} x = 4 \\ y = 3 \end{cases}$. Знайти її направляючий вектор.

Задача 11.14. Дано рівняння прямої. Написати у канонічній, параметричній і векторній формах:

1) $\begin{cases} 2x + y + 8z - 16 = 0 \\ x - 2y - z + 2 = 0 \end{cases}$; 2) $\begin{cases} x = -1 \\ z = 3 \end{cases}$;

3) $\begin{cases} y = 2 \\ z = -1 \end{cases}$; 4) $\begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \end{cases}$.

Задача 11.15. Дано дві точки $A(5; 4; -1)$, $B(-2; -3; -5)$. Написати в канонічній, векторній і параметричній формах, знайти напрямляючі косинуси.

Задача 11.16. Написати параметричне рівняння прямої, що

1) проходить через точку $A(-2; 1; -1)$ і паралельна до вектора $P(1; -2; 3)$;

2) проходить через точки $A(3; -1; 4)$, $B(1; 1; 2)$.

Задача 11.17. Написати рівняння прямої, що проходить через точку

$A(-1; 2; -2)$ і паралельна до прямої $\begin{cases} x - y = 2 \\ y = 2z + 1 \end{cases}$.

Задача 11.18. Написати рівняння прямої, що проходить через точку $A(a, b, c)$ і

1) паралельна до осі Oz ;

2) перпендикулярна до осі Oz .

Задача 11.19. Знайти напрямляючий вектор прямої $\begin{cases} x + y - z = 0 \\ y = x \end{cases}$ і кути між прямою і осями координат.

Задача 11.20. Знайдіть кут між прямими:

1) $L_1: \frac{x+1}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+2}{-1}$ та $L_2: \frac{x+5}{6} = \frac{y}{3} = \frac{z-1}{2}$;

2) $L_1: \frac{x}{1} = \frac{y}{-2} = \frac{z}{3}$ та $L_2: \begin{cases} 3x + y - 5z = 0, \\ 2x + 3y - 8z + 1 = 0. \end{cases}$

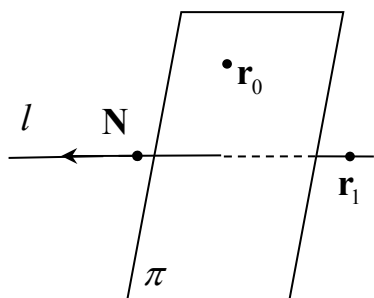
Задача 11.21. Довести, що прямі $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{1}$ і $\begin{cases} x = z + 1 \\ y = -z + 1 \end{cases}$ є перпендикулярними.

Задача 11.22. Скласти рівняння руху точки M , яка, маючи початкове положення $M_0(1; 2; 1)$, рухається прямолінійно і рівномірно в напрямку вектора $\mathbf{a} = \{4; 4; 2\}$ зі швидкістю $V = 18$ од/с.

Довідковий матеріал

Окремі випадки взаємного розташування прямих та площин

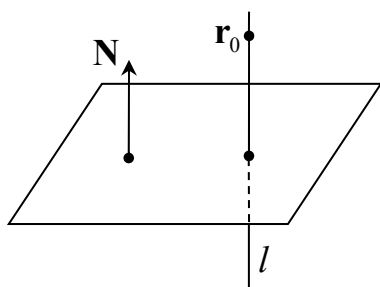
1. Рівняння площини, що проходить через задану точку, перпендикулярно даній прямій.



$$l: \mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + \mathbf{N}t;$$

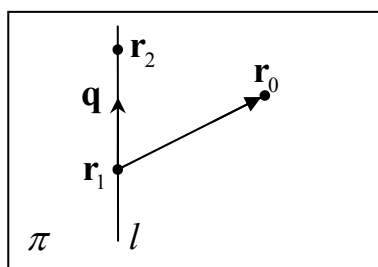
$$\pi: \mathbf{N}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0.$$

2. Рівняння перпендикуляра до заданої площини, що проходить через задану точку.



$$l: \mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{N}t.$$

3. Рівняння площини, що проходить через задані пряму та точку.



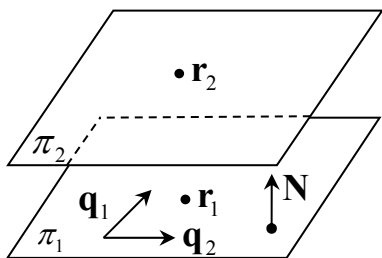
$$l: \mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + \mathbf{q}t \left. \vphantom{l} \right\} \pi: \mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + \mathbf{q}\alpha + \beta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0);$$

$$\mathbf{r}_0$$

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)t \left. \vphantom{\mathbf{r}} \right\} \pi: (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0, \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0, \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) = 0.$$

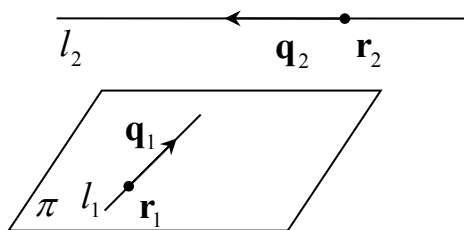
$$\mathbf{r}_0$$

4. Рівняння площини, що проходить через задану точку та паралельна заданій площині.



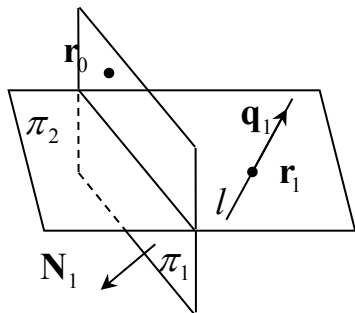
$$\begin{aligned} \pi_1: \mathbf{N}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) &= 0; \\ \pi_2: \mathbf{N}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_2) &= 0; \\ \mathbf{N} &= \mathbf{q}_1 \times \mathbf{q}_2. \end{aligned}$$

5. Рівняння площини, що проходить через задану пряму паралельно до іншої заданої прямої.



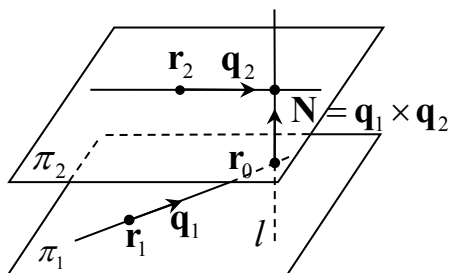
$$\begin{aligned} l_1: \mathbf{r} &= \mathbf{r}_1 + \mathbf{q}_1 t; \\ l_2: \mathbf{r} &= \mathbf{r}_2 + \mathbf{q}_2 t; \\ \pi: \mathbf{r} &= \mathbf{r}_1 + \mathbf{q}_1 \alpha + \mathbf{q}_2 \beta. \end{aligned}$$

6. Рівняння площини, що проходить через задану пряму перпендикулярно заданій площині.



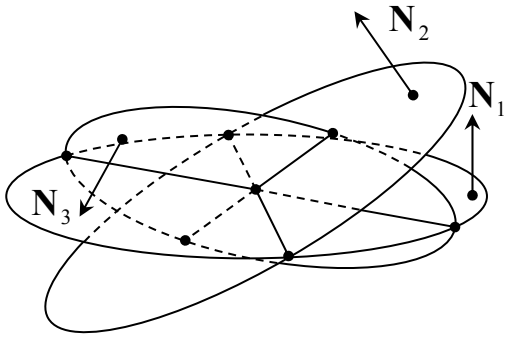
$$\begin{aligned} \pi_1: \mathbf{N}_1(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) &= 0; \\ l: \mathbf{r} &= \mathbf{r}_1 + \mathbf{q}_1 t; \\ \pi_2: \mathbf{r} &= \mathbf{r}_1 + \mathbf{q}_1 \alpha + \mathbf{N}_1 \beta. \end{aligned}$$

7. Відстань між мимобіжними прямими і рівняння перпендикуляра.



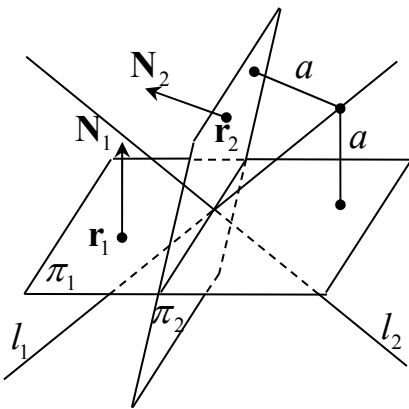
$$\begin{aligned} \mathbf{N} &= \mathbf{q}_1 \times \mathbf{q}_2 \\ \pi_1: \mathbf{N}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) &= 0; \\ \pi_2: \mathbf{N}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_2) &= 0; \\ l: \mathbf{r} &= \mathbf{r}_0 + \mathbf{N} t. \end{aligned}$$

8. Перетин площин в одній точці ($\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2, \mathbf{N}_3$ – некопланарні).



$$(\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2, \mathbf{N}_3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$$

9. Бісектральний кут.

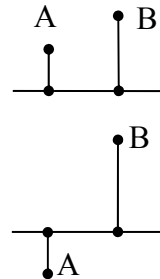
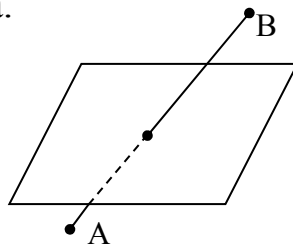


$$\begin{aligned} \pi_1: \mathbf{N}_1(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) = 0, \quad \mathbf{r}\mathbf{N}_1 = p_1; \\ \pi_2: \mathbf{N}_2(\mathbf{r} - \mathbf{r}_2) = 0, \quad \mathbf{r}\mathbf{N}_2 = p_2. \end{aligned}$$

1. $\mathbf{r}\mathbf{N}_1 - p_1 = \mathbf{r}\mathbf{N}_2 - p_2$;
2. $\mathbf{r}\mathbf{N}_1 - p_1 = p_2 - \mathbf{r}\mathbf{N}_2$.

10. Відрізок та площина.

$$\begin{cases} \rho_A = \mathbf{r}_A \mathbf{N} - p_1; \\ \rho_B = \mathbf{r}_B \mathbf{N} - p_1. \end{cases}$$



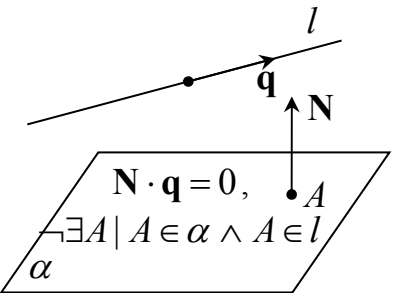
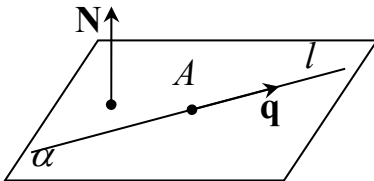
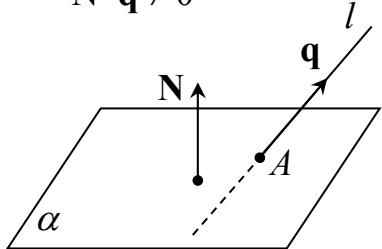
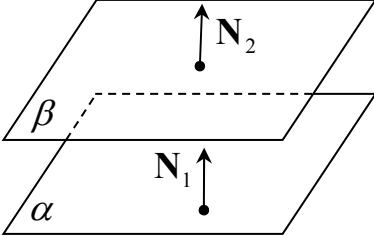
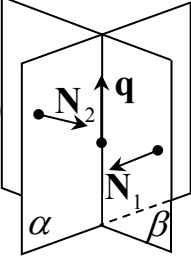
$$\rho_A \rho_B > 0;$$

$$\rho_A \rho_B < 0.$$

Таблиця 4

Відносне розташування прямих та площин

<p>$\mathbf{q}_1 \times \mathbf{q}_2 = 0$</p> <p>Паралельні прямі</p>	<p>$\mathbf{q}_1 \times \mathbf{q}_2 \neq 0,$ $\exists A A \in l_1 \wedge A \in l_2$</p> <p>Прямі, що перетинаються</p>	<p>$\mathbf{q}_1 \times \mathbf{q}_2 \neq 0,$ $\neg \exists A A \in l_1 \wedge A \in l_2$</p> <p>Мимобіжні прямі</p>
--	---	--

 <p>$\mathbf{N} \cdot \mathbf{q} = 0,$ $\exists A A \in \alpha \wedge A \in l$</p> <p>Пряма, паралельна площині</p>	<p>$\mathbf{N} \cdot \mathbf{q} = 0,$ $\exists A A \in \alpha \wedge A \in l$</p>  <p>Пряма належить площині</p>	<p>$\mathbf{N} \cdot \mathbf{q} \neq 0$</p>  <p>Пряма перетинає площину</p>
<p>$\mathbf{N}_1 \times \mathbf{N}_2 = 0$</p>  <p>Паралельні площини</p>	<p>$\mathbf{N}_1 \times \mathbf{N}_2 = \mathbf{q} \neq 0$</p>  <p>Площини, що не перетинаються</p>	

Практичне заняття № 12

Взаємне розташування прямих в просторі

Задача 12.1. При яких значеннях вільного члена D пряма перетинає вісь

$$Oz \begin{cases} 3x - y + 2z - 6 = 0 \\ x + 4y - z + D = 0 \end{cases}$$

Задача 12.2. Доведіть, що прямі $x = -t, y = -4 - 5t, z = 3 + 3t$ та

$$\begin{cases} 4x + y + 3z - 5 = 0, \\ 7x - 2y - z - 5 = 0 \end{cases} \text{ збігаються.}$$

Задача 12.3. Доведіть, що наступні дві прямі перетинаються:

$$x = -3t, y = 2 + 3t, z = 1 \text{ та } x = 1 + 5t', y = 1 + 13t', z = 1 + 10t'.$$

Задача 12.4. Знайти відстань від точки $(1, 2, 5)$ до прямої $x = t, y = 1 - 2t, z = 3 + t$.

Задача 12.5. Доведіть, що прямі $x = 1 - 2t, y = 3t, z = -2 + t$ та $x = 7 + 4t', y = 5 - 6t', z = 4 - 2t'$ паралельні і знайдіть відстань між ними.

Задача 12.6. Знайти відстань між перехресними прямими

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - 2t \\ z = -t \end{cases} \quad \text{і} \quad \begin{cases} x = -2t \\ y = -5 + 3t \\ z = 4 \end{cases}$$

Задача 12.7. Знайти відстань між прямими:

1) $x = 3 + t, y = 1 - t, z = 2 + 2t$ і $x = -t, y = 2 + 3t, z = 3t$;

2) $\begin{cases} x + 2y - z + 1 = 0, \\ 2x - 3y + z - 4 = 0 \end{cases}$ та $\begin{cases} x + y + z - 9 = 0, \\ 2x - y - z = 0. \end{cases}$

Задача 12.8. Встановити, які з наступних пар прямих схрещуються, паралельні, перетинаються або збігаються; якщо прямі паралельні, то написати рівняння площини, що проходить через них; якщо прямі перетинаються, то написати рівняння площини, що містить їх, якщо схрещуються, знайти відстань між ними:

$$1) \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 7 + t \\ z = 3 + 4t \end{cases} \quad \text{і} \quad \begin{cases} x = 6 + 3t \\ y = -1 - 2t \\ z = -2 + t \end{cases};$$

2)

$$3) \begin{cases} x = 1 + 9t \\ y = 2 + 6t \\ z = 3 + 3t \end{cases} \quad \text{і} \quad \begin{cases} x = 7 + 6t \\ y = 6 + 4t \\ z = 5 + 2t \end{cases};$$

$$3) \quad \frac{x+2}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z+3}{2} \quad \text{і} \quad \frac{x-5}{-2} = \frac{y-5}{-3} = \frac{z-5}{4};$$

$$4) \quad \begin{cases} x + z - 1 = 0, \\ 3x + y - z + 13 = 0; \end{cases} \quad \text{і} \quad \begin{cases} x - 2y + 3 = 0, \\ y + 2z - 8 = 0. \end{cases}$$

Задача 12.9. Довести, що пряма $\frac{x+1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-3}{3}$ паралельна площині $2x + y - z = 0$, а пряма $\frac{x+1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z+3}{3}$ лежить в цій площині.

Завдання для самотійної роботи 12
Взаємне розташування прямих в просторі

Задача 12.10. Доведіть, що прямі збігаються:

1) $x = 8 + 3t, y = 7 - 2t, z = 11 + t$ та $x = 5 - 6t', y = 9 + 4t', z = 10 - 2t'$.

Задача 12.11. Доведіть, що прямі перетинаються:

2) $x = -2 + 3t, y = -1, z = 4 - t$ та $\begin{cases} 2y - z + 2 = 0, \\ x - 7y + 3z - 17 = 0. \end{cases}$

Задача 12.12. Знайти відстань від точки (1, 3, 5) до прямої

$2x + y + z - 1 = 0, 3x + y + 2z - 3 = 0.$

Задача 12.13. Знайти відстань між паралельними прямими:

$\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{4} = \frac{z}{2}$ і $\frac{x-7}{3} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-3}{2}.$

Задача 12.14. Доведіть, що прямі паралельні, і знайдіть віддаль між ними:

2) $x = 2t, y = 0, z = -2t$ та $\begin{cases} x + y + z - 3 = 0, \\ x - y + z - 1 = 0. \end{cases}$

Задача 12.15. Знайти відстань між прямими

1) $\begin{cases} x - y + z - 4 = 0 \\ 2x + y - 2z + 5 = 0 \end{cases}$ і $x = y = z - 1;$

2) $\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x + z = 3 \end{cases}$ і $\begin{cases} x + y + z - 4 = 0 \\ 2x + 3y - z - 6 = 0 \end{cases}.$

Задача 12.16. Встановити, які з наступних пар прямих схрещуються, паралельні, перетинаються або збігаються; якщо прямі паралельні або перетинаються, то написати рівняння площини, що проходить через них, та відстань між ними; якщо схрещуються, знайти відстань між ними:

1) $\begin{cases} 3x + y - 2z - 6 = 0, \\ 41x - 19y + 52z - 68 = 0; \end{cases}$ і $\begin{cases} 22x - 9y + 25z - 37 = 0, \\ 19x - 10y + 27z - 31 = 0; \end{cases}$

$$\begin{array}{ccc}
2) \begin{cases} x = 2 + 4t \\ y = -6t \\ z = -1 - 8t \end{cases} & \text{i} & \begin{cases} x = 7 - 6t \\ y = 2 + 9t \\ z = 12t \end{cases} \\
3) \begin{cases} 2x + 3y = 0, \\ x + z - 8 = 0; \end{cases} & \text{i} & \begin{cases} z - 4 = 0, \\ 2x + 3z - 7 = 0; \end{cases} \\
4) \begin{cases} x + y + z - 1 = 0, \\ y + 4z = 0; \end{cases} & \text{i} & \begin{cases} 2x + 3y + 6z - 6 = 0, \\ 3x + 4y + 7z = 0. \end{cases}
\end{array}$$

Практичне заняття № 13

Взаємне розташування прямих і площин в просторі

Задача 13.1. Написати рівняння площини, що проходить через пряму $\frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z+1}{3}$ і точку $A(3; 4; 0)$.

Задача 13.2. Написати рівняння площини, що проходить через паралельні

$$\text{прямі } \begin{cases} x = 2 + 4t \\ y = -6t \\ z = -1 - 8t \end{cases} \quad \text{і} \quad \begin{cases} x = 7 - 6t \\ y = 2 + 9t \\ z = 12t \end{cases}.$$

Задача 13.3. Написати рівняння площини, що проходить через прямі, що

$$\text{перетинаються: } \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 7 + t \\ z = 3 + 4t \end{cases} \quad \text{і} \quad \begin{cases} x = 6 + 3t \\ y = -1 - 2t \\ z = -2 + t \end{cases}.$$

Задача 13.4. Дані пряма $\begin{cases} x = -z + 1 \\ y = 2 \end{cases}$ і площина $y = z$. Знайти

- а) точку перетину прямої з площиною;
- б) кут між прямою та площиною.

Задача 13.5. Знайти точку перетину прямої $\frac{x}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{2}$ з площиною $x - 2y + 3z - 29 = 0$.

Задача 13.6. Установіть, чи лежить пряма L у площині P , не має з площиною P спільних точок або перетинає в деякій точці, і тоді знайдіть точку перетину та кут між прямою і площиною:

$$1) L: \frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{-1} = \frac{z+2}{5}, \quad P: 4x + 3y - z + 3 = 0;$$

$$2) L: \frac{x-7}{5} = \frac{y-4}{1} = \frac{z-5}{4}, \quad P: 3x - y + 2z - 5 = 0.$$

Задача 13.7. Скласти рівняння перпендикуляра, проведеного з точки $A(-1, -2, 1)$ на площину α , яка задана рівнянням $x - 2y + 3z - 1 = 0$.

Задача 13.8. Знайти проекцію точки $A(-1, -2, 1)$ на площину $x - 2y + 3z - 1 = 0$.

Задача 13.9. Знайти точку, симетричну точці $A(1; 2; 3)$ відносно площини $2x - 3y + 5z - 68 = 0$.

Завдання для самостійної роботи 13
 Взаємне розташування прямих
 і площин в просторі

Задача 13.10. Написати рівняння площини, що проходить через пряму

$$\begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = t + 2 \\ z = 1 - t \end{cases} \text{ і точку } A(3; 4; 0).$$

Задача 13.11. Написати рівняння площини, що проходить через

паралельні прямі $\frac{x-3}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{2}$ і $\frac{x+1}{4} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{4}$.

перетинаються, $\begin{cases} x = z - 2 \\ y = 2z + 1 \end{cases}$ і $\frac{x-2}{3} = \frac{y-4}{1} = \frac{z-2}{1}$.

Задача 13.13. Знайти точку перетину прямої $\begin{cases} x = t \\ y = t - 1 \\ z = t \end{cases}$ з площиною $3x -$

$$2y + z = 3.$$

Задача 13.14. Знайти точку перетину прямої, що проходить через точки $A(0; 0; 4)$ і $B(2; 2; 0)$, з площиною $x + y - z = 0$ та кут між ними.

Задача 13.15. Встановити в кожному з наступних випадків, чи лежить дана пряма в даній площині, що паралельна площині, чи перетинає її. В останньому випадку знайти кут між прямою і площиною та точку перетину прямої та площини.

Пряма

Площина

1) $\frac{x-12}{4} = \frac{y-9}{3} = \frac{z-1}{1}$,

$$3x + 5y - z - 2 = 0;$$

2) $\frac{x+1}{2} = \frac{y-3}{4} = \frac{z}{3}$,

$$3x - 3y + 2z - 5 = 0;$$

3) $\frac{x-13}{8} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-4}{3}$,

$$x + 2y - 4z + 1 = 0;$$

$$4) \frac{x-7}{5} = \frac{y-4}{1} = \frac{z-5}{4},$$

$$3x - y + 2z - 5 = 0;$$

$$5) \frac{x+1}{2} = \frac{y-3}{4} = \frac{z}{5},$$

$$x - 3y + 2z - 5 = 0.$$

Задача 13.16. Скласти рівняння перпендикуляра, проведеного з точки $A(-1, 2, 3)$ на площину α , яка задана рівнянням $x + 3y - 2z + 5 = 0$.

Задача 13.17. Знайти проекцію точки $A(1, -2, 3)$ на площину $x - 2y + 3z - 4 = 0$.

Задача 13.18. Знайти точку, що симетрична до точки $(-1; -2; -3)$ відносно площини $x - 3y + z - 8 = 0$.

Практичне заняття № 14

Взаємне розташування прямих і площин в просторі

Задача 14.1. Перевірити, чи лежать прямі $\begin{cases} 4x + y + 3z = 0 \\ 2x + 3y + 2z - 9 = 0 \end{cases}$ і $\begin{cases} 3x - 2y + z + 5 = 0 \\ x - 3y - 2z - 3 = 0 \end{cases}$ в одній площині.

Задача 14.2. За яких значень параметрів A і D пряма L лежить у площині P ?

$$L: \frac{x-3}{4} = \frac{y-1}{-4} = \frac{z+3}{1}, \quad P: Ax + 2y - 4z + D = 0.$$

Задача 14.3. Написати рівняння площини, що проходить через точку $(-1; 2; -3)$ і перпендикулярна до прямої $\begin{cases} x = 2 \\ y - z = 1 \end{cases}$.

Задача 14.4. Написати рівняння площини, що проходить через пряму $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z+2}{2}$ і перпендикулярна до площини $2x + 3y - z = 4$.

Задача 14.5. Написати рівняння площини, що проходить через пряму $\frac{x+7}{-2} = \frac{y-6}{3} = \frac{z}{1}$ і паралельна прямій $x - y + z = 0$, $x - y + 2z = 0$.

Задача 14.6. Написати рівняння площини, що проходить через пряму $\frac{x+7}{-2} = \frac{y-6}{3} = \frac{z}{1}$, та перпендикулярна до прямої $\frac{x-2}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-5}{3}$.

Задача 14.7. Задано пряму $\gamma: \frac{x+4}{7} = \frac{y+3}{-1} = \frac{z-4}{5}$ і точку $N(4; -2; -4)$. Знайти проекцію точки N на пряму γ .

Задача 14.8. Записати рівняння перпендикуляра, який опущено з точки $A(2; 1; 0)$ на пряму $\begin{cases} x = 3z - 1 \\ y = 2z \end{cases}$.

Задача 14.9. Написати рівняння прямої, що проходить через точки перетину площини $2x + y - 3z - 3 = 0$ з прямими $\frac{x-2}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-5}{3}$ і $\frac{x-2}{6} = \frac{y-2}{5} = z - 5$.

Завдання для самостійної роботи 14

Взаємне розташування прямих і площин в просторі

Задача 14.9. Перевірити, чи лежать прямі в одній площині:

$$\begin{aligned} \text{а) } & \begin{cases} x+2y-z-2=0 \\ x+3y+z-1=0 \end{cases} \quad \text{і} \quad \begin{cases} 2x-y+3z-4=0 \\ 3x+y-z-3=0 \end{cases}; \\ \text{б) } & \begin{cases} x=7z-17 \\ y=3z-1 \end{cases} \quad \text{і} \quad \begin{cases} x=4z-11 \\ y=-10z+25 \end{cases}. \end{aligned}$$

Задача 14.10 Написати рівняння площини, що проходить через пряму

$$\frac{x-12}{4} = \frac{y-9}{3} = \frac{z-1}{1} \text{ і паралельна до прямої } \begin{cases} x=3t-12 \\ y=-2t+1 \\ z=1-t \end{cases}.$$

Задача 14.11. Написати рівняння площини, що проходить через пряму

$$\frac{x+7}{-2} = \frac{y-6}{3} = \frac{z}{1} \text{ і паралельна прямій } x-y+z=0; x-y+2z=0.$$

Задача 14.12. Написати рівняння площини, що проходить через пряму

$$\frac{x+7}{-2} = \frac{y-6}{3} = \frac{z}{1} \text{ та перпендикулярна до прямої } \frac{x-2}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-5}{3}.$$

Задача 14.13. Написати рівняння прямої, що проходить через точки пере-

$$\text{тину площини } 2x+y-3z-3=0 \text{ з прямими } \frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{3} = \frac{z}{4} \text{ і } \frac{x-2}{6} = \frac{y-2}{5} = z-5.$$

Задача 14.14. Через пряму $\frac{x+5}{3} = \frac{y-2}{1} = \frac{z}{4}$ провести площину, що паралельна площині $x+y-z+15=0$.

Задача 14.15. Скласти рівняння прямої, що проходить через точки

$$\text{перетину площини } 2x+y-3z+1=0 \text{ з прямими } \frac{x-3}{1} = \frac{y-5}{-5} = \frac{z+1}{2} \text{ і } \frac{x-5}{2} = \frac{y-3}{4} = \frac{z+4}{-6}.$$

Задача 14.16. Задано пряму $\gamma: \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-4}{3}$ і точку $N(1, 5, 7)$. Знайти проекцію точки N на пряму γ .

Задача 14.17. Записати рівняння перпендикуляра, який опущено з точки

$$A(-2; 1; 3) \text{ на пряму } \frac{x-12}{4} = \frac{y-9}{3} = \frac{z-1}{1}.$$

ДОДАТКИ

Додаток 1

Типова контрольна робота

Варіант 1

Задача 1. Знайти проекцію точки $A(3, 2, -7)$ на площину $\alpha: 2x + y - z - 4 = 0$.

Задача 2. Задано $\gamma: \frac{x-4}{3} = \frac{y-3}{-5} = \frac{z+6}{1}$, $M(1, -2, -1)$. Знайти рівняння перпендикуляра з точки M на пряму γ та відстань від точки M до прямої γ .

Задача 3. Скласти рівняння площини, що проходить через пряму

$$\frac{x+7}{-2} = \frac{y-6}{3} = \frac{z}{1} \text{ та паралельна прямій } \frac{x-7}{3} = \frac{y-4}{2} = \frac{z-5}{5}.$$

Задача 4. Визначити взаємне розташування прямої $\frac{x-7}{5} = \frac{y-4}{1} = \frac{z-5}{4}$ та площини $3x - y + 2z - 5 = 0$. У разі перетинання знайти точку перетину, у разі паралельності знайти відстань між прямими

Задача 5. Визначити, чи ці дві прямі $\frac{x-9}{4} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z}{1}$ та $\frac{x}{-2} = \frac{y+7}{9} = \frac{z-2}{2}$ є мимобіжні, паралельні, перетинаються або співпадають. Якщо прямі паралельні, то написати рівняння площини, яка проходить крізь них; якщо прямі перетинаються, то написати рівняння площини, якій належать ці прямі; якщо мимобіжні, знайти відстань між ними.

Варіант 2

Задача 1. Знайти проекцію точки $M(1,4,5)$ на площину $\alpha: 8x + 4y - 4z - 3 = 0$.

Задача 2. Задано $\gamma: \frac{x+6}{1} = \frac{y+7}{-4} = \frac{z}{-2}$, $B(0, 1, 1)$. Знайти рівняння перпендикуляра з точки B на пряму γ та відстань від точки B до прямої γ .

Задача 3. Скласти рівняння площини, що проходить через пряму

$$\frac{x-12}{4} = \frac{y-9}{3} = \frac{z-1}{1} \text{ та паралельна прямій } \frac{x-7}{5} = \frac{y-4}{1} = \frac{z-5}{4}.$$

Задача 4. Визначити взаємне розташування прямої $\frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{4} = \frac{z}{-1}$ та площини $3x - y + 2z + 5 = 0$. У разі перетинання знайти точку перетину, у разі паралельності знайти відстань між прямими.

Задача 5. Визначити, чи ці дві прямі $\frac{x+3}{4} = \frac{y-6}{-3} = \frac{z-3}{2}$ та $\frac{x-4}{8} = \frac{y-9}{-3} = \frac{z-1}{3}$ є мимобіжні, паралельні, перетинаються або співпадають. Якщо прямі паралельні, то написати рівняння площини, яка проходить крізь них; якщо прямі перетинаються, то написати рівняння площини, якій належать ці прямі; якщо мимобіжні, знайти відстань між ними.

Типові задачі для індивідуальної роботи

Задача 1. Встановити, дана пара прямих: схрещуються, паралельні, перетинаються або збігаються; якщо прямі паралельні, то знайти відстань між ними та написати рівняння площини, яка через них проходить; якщо прямі перетинаються, то написати рівняння площини, яка їх містить, та знайти кут між ними, якщо мимобіжні – знайти відстань між ними.

$$1) \begin{cases} x = 1 + 2t, y = 7 + t, z = 3 + 4t; \\ x = 6 + 3t, y = -1 - 2t, z = -2 + t; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x = 1 + 2t, y = 2 - 2t, z = -t; \\ x = -2t, y = -5 + 3t, z = 4; \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} x = 2 + 4t, y = -6t, z = -1 - 8t; \\ x = 7 - 6t, y = 2 + 9t, z = 12t; \end{cases} \quad 4) \begin{cases} x = 1 + 9t, y = 2 + 6t, z = 3 + 3t; \\ x = 7 + 6t, y = 6 + 4t, z = 5 + 2t. \end{cases}$$

$$5) \begin{cases} x = 1 - 2t, y = 7 + t, z = 3 + 4t; \\ x = 6 + 3t, y = 1 - 2t, z = -2 + t; \end{cases} \quad 6) \begin{cases} x = 1 + 2t, y = 7 - t, z = 3 + 4t; \\ x = 6 - 3t, y = -1 - 2t, z = 2 + t; \end{cases}$$

$$7) \begin{cases} x = 1 - 3t, y = 7 + t, z = 3 + 4t; \\ x = 6 + 3t, y = -1 - 2t, z = 4 - t; \end{cases} \quad 8) \begin{cases} x = 1 + 2t, y = 5 - t, z = 3 + 4t; \\ x = 6 - 4t, y = -1 - 2t, z = -2 + t; \end{cases}$$

$$9) \begin{cases} x = 1 + 2t, y = 7 - t, z = 3 + 4t; \\ x = 6 + 3t, y = 1 + 2t, z = 2 + t; \end{cases} \quad 10) \begin{cases} x = 1 + 2t, y = 7 + t, z = -3 + 4t; \\ x = -6 + 3t, y = -3 + 2t, z = -2 + t. \end{cases}$$

Задача 2. Встановити, які з наступних пар площин перетинаються, паралельні чи збігаються:

1) $2x + 3y + 4z - 12 = 0$ і $3x - 6y + 1 = 0$;

2) $3x - 2y - 3z + 5 = 0$ і $9x - 6y - 9z - 5 = 0$;

$$\begin{cases} x = 1 + u + v, \\ y = 2 + u, \\ z = 3 + u - v; \end{cases} \quad \text{і} \quad \begin{cases} x = 1 + 4u, \\ y = 3u + v, \\ z = 4 + 2u + 2v; \end{cases} \quad \text{і} \quad \begin{cases} x = 1 + u + v, \\ y = 2 + u, \\ z = 3 + u - v; \end{cases}$$

3) $x + 3y + 4z + 10 = 0$ і $3x - y + 5 = 0$;

4) $2x + 3y + 4z - 12 = 0$ і $3x - 6y + 1 = 0$;

$$\begin{cases} x = 1 - u + v, \\ y = 2 + u, \\ z = 3 + u + v; \end{cases} \quad \text{і} \quad \begin{cases} x = 1 - 4u, \\ y = 3u + v, \\ z = 4 + 2u + 5v; \end{cases} \quad \text{і} \quad \begin{cases} x = 2 + u + v, \\ y = 3 - u, \\ z = 3 - u - v; \end{cases} \quad \text{і} \quad \begin{cases} x = 2 - 4u, \\ y = 3u + v, \\ z = 3 - 2u + 2v; \end{cases}$$

5) $x + 3y + z - 12 = 0$ і $3x - 6y + 15 = 0$;

$$6) 2x - 3y + 2z - 12 = 0 \text{ i } 3x + 6y + 15 = 0;$$

$$\begin{cases} x = 4 + u - v, \\ y = 2 + u, \\ z = 5 + u + v; \end{cases} \text{ i } \begin{cases} x = 2 + 5u, \\ y = u + v, \\ z = 4 - u + 2v; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 1 + u + v, \\ y = 6 - u, \\ z = 3 + u + v; \end{cases} \text{ i } \begin{cases} x = 1 + 4u, \\ y = 2u - v, \\ z = 4 + 2u - 2v; \end{cases}$$

$$7) 2x + 3y + 5z - 14 = 0 \text{ i } 2x - 6y - 1 = 0;$$

$$8) 2x + y + 4z - 5 = 0 \text{ i } 4x - 6y - 7 = 0;$$

$$\begin{cases} x = 1 - u + v, \\ y = 1 + u, \\ z = 3 - u - v; \end{cases} \text{ i } \begin{cases} x = 1 - u, \\ y = 3u + v, \\ z = 1 + 2u - 2v; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 1 + u + v, \\ y = 2 - u, \\ z = 3 - u - v; \end{cases} \text{ i } \begin{cases} x = 1 + 2u, \\ y = 3u + v, \\ z = 3 - 2u + v; \end{cases}$$

$$9) x + 3y + 4z - 15 = 0 \text{ i } 3x - 6y - 6 = 0;$$

$$10) 2x - 3y - 4z - 12 = 0 \text{ i } 3x - 6y - 1 = 0;$$

$$\begin{cases} x = 1 + u + v, \\ y = u, \\ z = 3 + u + v; \end{cases} \text{ i } \begin{cases} x = 4u, \\ y = u + v, \\ z = 4 + 2u + 2v; \end{cases} \quad \begin{cases} x = u + v, \\ y = 2 + 5u, \\ z = 3 + u - 3v; \end{cases} \text{ i } \begin{cases} x = 1 - 4u, \\ y = 3u + 2v, \\ z = 5 + 2u + 2v. \end{cases}$$

Задача 3. Знайти точку, симетричну даній точці щодо заданої площини.

1) точка (1, 2, 3), площина $2x - 3y + 5z - 68 = 0$;

2) точка (-1, 1, 4), площина $3x - y + 5z - 10 = 0$;

3) точка (0, 2, 5), площина $2x - y + 5z - 1 = 0$;

4) точка (1, -2, 6), площина $2x + 3y + 7z - 24 = 0$;

5) точка (1, 3, 3), площина $x + 2y + 5z + 10 = 0$;

6) точка (0, 2, -2), площина $2x + 5y + 5z - 25 = 0$;

7) точка (2, 0, 3), площина $2x - 6y - 5z - 1 = 0$;

8) точка (1, 3, 2), площина $2x - 7y + z + 56 = 0$;

9) точка (1, 3, 3), площина $2x - 4y - 5z - 14 = 0$;

10) точка (1, 3, -2), площина $2x - 3y - 5z - 72 = 0$.

Задача 4. Показати, що дані прямі і перетинаються, і написати рівняння площини, в якій вони розташовані.

1) $x = z - 2, y = 2z + 1$ і $\frac{x-2}{3} = \frac{y-4}{1} = \frac{z-2}{1}$;

2) $x = z + 2, y = 5z - 1$ і $\frac{x-4}{3} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-3}{1}$;

- 3) $x = z + 4, y = 3z - 2$ i $\frac{x-1}{3} = \frac{y+3}{1} = \frac{z-2}{2}$;
- 4) $x = z - 2, y = 2z - 1$ i $\frac{x-2}{2} = \frac{y-4}{4} = \frac{z-2}{2}$;
- 5) $x = z - 2, y = -2z + 1$ i $\frac{x+2}{3} = \frac{y-4}{1} = \frac{z+2}{1}$;
- 6) $x = z - 2, y = 2z - 3$ i $\frac{x-2}{3} = \frac{y+6}{1} = \frac{z-2}{2}$;
- 7) $x = 2z - 1, y = z + 2$ i $\frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{4} = \frac{z-2}{3}$;
- 8) $x = z + 2, y = 2z - 1$ i $\frac{x-1}{3} = \frac{y-4}{5} = \frac{z+2}{1}$;
- 9) $x = z + 2, y = 2z + 5$ i $\frac{x-2}{5} = \frac{y+4}{3} = \frac{z-3}{1}$;
- 10) $x = z - 4, y = 2z - 5$ i $\frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-2}{5}$.

Типові задачі на іспиті

Задача 1. Задано $\gamma: \frac{x+3}{1} = \frac{y+5}{2} = \frac{z+7}{-3}, N(1,0,-7)$.

- 1) Знайти проекцію точки N на пряму γ .
- 2) Знайти точку, яка симетрична точці N відносно γ .
- 3) Скласти рівняння перпендикуляра, що опущено з точки N на пряму γ .
- 4) Скласти рівняння площини, яка проходить через пряму γ і точку N .

а) $\gamma: \frac{x+3}{1} = \frac{y+5}{2} = \frac{z+7}{-3}, N(1,0,-7)$; б) $\gamma: \frac{x-7}{-4} = \frac{y-7}{-4} = \frac{z+2}{4}, N(1,-1,-1)$;

в) $\gamma: \frac{x}{-1} = \frac{y-1}{6} = \frac{z+7}{2}, N(1,5,2)$; г) $\gamma: \frac{x-6}{-1} = \frac{y-1}{6} = \frac{z+7}{4}, N(1,-1,8)$;

д) $\gamma: \frac{x+6}{-1} = \frac{y-5}{3} = \frac{z+3}{-2}, N(-2,-1,0)$; е) $\gamma: \frac{x+6}{1} = \frac{y-4}{-3} = \frac{z+3}{-2}, N(1,1,-2)$.

Задача 2. Задано дві площини α_1, α_2 і дві точки M, N :

- 1) визначити, в одному чи в різних півпросторах відносно α_1 лежать ці точки;
- 2) довести, що площини α_1 і α_2 є паралельними, і знайти відстань між ними;
- 3) знайти проекцію точки M на площину α_2 ;
- 4) скласти рівняння перпендикуляра, що опущено з точки M на площину α_2 .

а) $\alpha_1: x-3y-2z-3=0, \alpha_2: -4x+12y+8z+6=0, M(3,-5,-3), N(2,-1,5)$;

б) $\alpha_1: 2x+y-2z-4=0, \alpha_2: 4x+2y-4z+1=0, M(5,3,-6), N(1,-3,0)$;

в) $\alpha_1: -2x-5y-2z+3=0, \alpha_2: 6x+15y+6z+7=0, M(4,-5,-1), N(2,-1,4)$;

г) $\alpha_1: -2x+y-3z-3=0, \alpha_2: 10x-5y+15z+6=0, M(3,-6,2), N(1,7,1)$;

д) $\alpha_1: -x+y+2z-6=0, \alpha_2: -5x+5y+10z-8=0, M(-4,3,-2), N(1,-2,5)$;

е) $\alpha_1: x+2y+2z-3=0, \alpha_2: -5x-10y-10z+6=0, M(1,5,2), N(7,1,-1)$.

Задача 3. Встановити, дана пара прямих: схрещуються, паралельні, перетинаються або збігаються; якщо прямі паралельні, то знайти відстань між ними та написати рівняння площини, яка через них проходить; якщо прямі перетинаються, то написати рівняння площини, яка їх містить, та знайти кут між ними, якщо мимобіжні – знайти відстань між ними.

1)
$$\begin{cases} x+z-1=0, \\ 3x+y-z+13=0; \end{cases} \quad \begin{cases} x-2y+3=0, \\ y+2z-8=0; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} 3x + y - 2z - 6 = 0, \\ 41x - 19y + 52z - 68 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} 22x - 9y + 25z - 37 = 0, \\ 19x - 10y + 27z - 31 = 0. \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} 4x + y + 3z = 0 \\ 2x + 3y + 2z - 9 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} 3x - 2y + z + 5 = 0 \\ x - 3y - 2z - 3 = 0; \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - y - 2z - 1 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} y + z - 1 = 0 \\ x - 2z - 2 = 0. \end{cases}$$

Задача 4. Знайти відстань від точки A до прямої γ . Знайти рівняння перпендикуляра та проекцію точки на пряму. Знайти рівняння площини, до якої належать точка і пряма.

а) точка $A(1; 2; 3)$, пряма $\gamma \begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x + z = 3 \end{cases}$;

б) точка $A(0; 2; -3)$, пряма $\gamma \begin{cases} x - 2y + 3 = 0, \\ y + 2z - 8 = 0; \end{cases}$

в) точка $A(1; 0; -1)$, пряма $\gamma \begin{cases} 3x - 2y + z + 5 = 0 \\ x - 3y - 2z - 3 = 0; \end{cases}$

г) точка $A(-1; 1; 0)$, пряма $\gamma \begin{cases} x - 2y + z + 2 = 0 \\ 2x - y - 3z - 1 = 0. \end{cases}$

Задача 5.1.

Задано $\gamma: \frac{x+3}{1} = \frac{y+5}{2} = \frac{z+7}{-3}$, $\alpha: x - 3y - 2z - 3 = 0, M(3, -5, -3), N(1, 0, -7)$,

$\vec{a} = (4, -1, 3)$.

а) Знайти рівняння площини, яка проходить через точку N , паралельно вектору \vec{a} і прямій γ .

б) Знайти проекцію точки N на пряму γ .

в) Знайти проекцію точки M на площину α .

Задача 5.2.

Задано $\gamma: \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-4}{3}, N(1, 5, 7)$. $\alpha: 5x + y - 3z + 1 = 0, M(1, 8, -7), \vec{a} = (-4, -1, -3)$.

а) Знайти рівняння площини, яка проходить через точку N , паралельно вектору \vec{a} і прямій γ .

б) Знайти проекцію точки N на пряму γ .

в) Знайти проекцію точки M на площину α .

Задача 6. Знайти A_1 – проекцію точки A на площину α і A_2 – точку, яка симетрична точці A відносно α , якщо:

а) $A(3, -4, -6)$, α проходить через точки $M_1(-6, 1, -5)$, $M_2(7, -2, -1)$ і $M_3(10, -7, 1)$;

б) $A(-3, 2, 5)$, α проходить через прямі

$$\begin{cases} x - 2y + 3z - 5 = 0, \\ x - 2y - 4z + 3 = 0; \end{cases} \quad \text{і} \quad \begin{cases} 3x + y + 3z + 7 = 0 \\ 5x - 3y + 2z + 3 = 0. \end{cases}$$

в) $A(3, -4, -2)$, α проходить через прямі

$$\frac{x-5}{3} = \frac{y-6}{1} = \frac{z+3}{-3} \quad \text{і} \quad \frac{x-2}{3} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+3}{-3}.$$

г) $A(1, -1, -1)$, α проходить через прямі

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{-2} \quad \text{і} \quad \frac{x}{2} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-2}{-2}.$$

Задача 7. Скласти рівняння спільного перпендикуляра до прямих γ_1 та γ_2 і знайти відстань між ними:

а) $\gamma_1: \begin{cases} x + z - 1 = 0, \\ 3x + y - z + 13 = 0; \end{cases} \quad \gamma_2: \begin{cases} 3x - 2y + z + 5 = 0 \\ x - 3y - 2z - 3 = 0; \end{cases}$

б) $\gamma_1: \begin{cases} 3x + y - 2z - 6 = 0, \\ 41x - 19y + 52z - 68 = 0; \end{cases} \quad \gamma_2: \begin{cases} x - 2y + 3 = 0, \\ y + 2z - 8 = 0; \end{cases}$

в) $\gamma_1: \begin{cases} 4x + y + 3z = 0 \\ 2x + 3y + 2z - 9 = 0; \end{cases} \quad \gamma_2: \begin{cases} 3x - 2y + z + 5 = 0 \\ x - 3y - 2z - 3 = 0; \end{cases}$

г) $\gamma_1: \begin{cases} 3x - 2y + z + 5 = 0 \\ x - 3y - 2z - 3 = 0; \end{cases} \quad \gamma_2: \begin{cases} x + z - 1 = 0, \\ 3x + y - z + 13 = 0; \end{cases}$

Задача 8. Дослідити взаємне розташування трьох площин у кожному з наступних випадків:

1) $P_1: 2x - 4y + 5z - 21 = 0, \quad P_2: x - 3z + 18 = 0, \quad P_3: 6x + y + z - 30 = 0;$

2) $P_1: x + 2y - 3 = 0, \quad P_2: 3x + 6y - 9z + 10 = 0, \quad P_3: 2x + 4y - 6z - 1 = 0;$

3) $P_1: 3x - 2y - 3z + 5 = 0 \quad P_2: x + 2y - 3 = 0 \quad P_3: 9x - 6y - 9z - 5 = 0$

4) $P_1: 2x - y - z + 1 = 0 \quad P_2: -4x + 2y + 2z - 2 = 0, \quad P_3: y + 3z - 1 = 0;$

5) $P_1: x - y + 1 = 0, \quad P_2: y - z + 1 = 0 \quad P_3: 10x - 5y - 5z + 15 = 0.$

Навчальне видання

Віхтинська Тетяна Геннадіївна
Немченко Костянтин Едуардович

АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ

В 3-х частинах
Частина 1. Прямі та площини

Навчально-методичний посібник
для самостійної роботи та практичних занять

Коректор *О. В. Анцибора*
Комп'ютерне верстання *Н. О. Ваніна*
Макет обкладинки *І. М. Дончик*

Формат 60x84/16. Ум. друк. арк. 4,32. Наклад 50 пр. Зам. № 215/23.

Видавець і виготовлювач

Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна,
61022, м. Харків, майдан Свободи, 4.

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 3367 від 13.01.09

Видавництво ХНУ імені В. Н. Каразіна