СОДЕРЖАНИЕ

ТЕМА 1. ФОРМЫ ВЫСКАЗЫВАНИЙ

Предметно-тематический план

Значения истинности. Предметные переменные и предметные постоянные. Элементарные и сложные высказывания. Союзы и кванторы. Пропозициональные формы. Местность пропозициональных форм, повторение переменных и действие кванторов.

Ключевые значения и термины

- Элементарное высказывание
- Сложное высказывание
- Логические связки (союзы)
- Пропозициональная форма

Типы заданий для практического занятия

Сведение пропозиций к конкретным высказываниям или к пропозициям меньшей местности. Образование из конкретных высказываний пропозициональных форм.

Анализ структуры высказываний с помощью пропозициональных форм.

Над чем полезно подумать (вопросы для самостоятельной проработки)

1. Интерпретация и соотношение логического, научного и философского значений термина «истина».
2. Синтаксический и семантический аспекты логического.

На что следует обратить внимание при изучении темы

Различение содержательного и формального аспектов высказывания как такового.

Формальная структура высказывания.

Смысл термина «логические значения» или «значения истинности», связь логического, материального и философского значений термина «истина».

Разница между элементарными и сложными высказываниями.

Предметные переменные и логические постоянные.

Пропозициональная форма и анализ структуры элементарного высказывания

Рекомендации по решению задач

Для решения задач по данной теме достаточно хорошо уяснить структурный и инструментальный смысл пропозициональных форм. Проверьте, знаете ли вы, как устроена пропозициональная форма, что она выражает, какие предметы она выделяет? Попробуйте придумать геометрическую (аналитико-геометрическую) аналогию для пропозициональной формы.

ТЕМА 2. ЯЗЫК ЛОГИКИ ВЫСКАЗЫВАНИЙ

Предметно-тематический план

Язык логики высказываний; алфавит. Различные способы обозначения знаков алфавита логики высказываний. Различие пропозициональных форм и пропозициональных переменных. Определение формулы логики высказываний. Высказывания, формулы, схемы формул. Понятие о многоуровневости языка. Проверка последовательности знаков языка логики высказываний на формальность. Процедура построения дерева формулы. Семантика основных логических связок в логике высказываний. Таблицы формул логики высказываний. Формализация высказываний естественного языка. Обобщенные и минимальные таблицы формул пропозициональной логики.

Ключевые значения и термины

- Пропозициональные переменные
- Формула логики высказываний
- Таблица формулы
- Отрицание
- Конъюнкция
- Дизъюнкция
- Строгая дизъюнкция
- Импликация
- Эквивалентность
- Антецедент
- Консеквент

Типы заданий для практического занятия

Перевод высказываний естественного языка на язык логики высказываний.

Построение таблицы данной формулы.

Подбор конкретного высказывания по данной формуле.

Над чем полезно подумать (вопросы для самостоятельной проработки)

1. Что выражает формула логики высказываний? Каков «металогические» смысл и значение формул? Какие возможны аналогии при прояснении последнего вопроса (лингвистические, когнитивные, эпистемологические, философские и пр.)?
2. Как можно указать на различные уровни естественного языка? Как функционирует идея многоуровневости языка в практике математического, естественного или гуманитарного познания (попытайтесь найти реализованные образцы у конкретных авторов).
3. Что представляет собой бесскобочный логический язык Я. Лукасевича?

На что следует обратить внимание при изучении темы

Необходимо выучить на память *алфавит* логики высказываний и прояснить для себя значение и функцию его знаков. Мысленно руководствуйтесь вопросом: что обозначает этот (тот или иной) знак, для чего он нужен?

Важно (как при изучении данной темы, так и для адекватного понимания классической символической логики в целом) твердо знать *табличные определения* шести основных союзов. Полезно так же продумать сам табличный способ задания логических отношений.

Беря конкретные элементарные высказывания и приписывая им различные значения истинности, проиллюстрируйте и закрепите эти семантические определения. Например, пусть высказывания «сегодня солнечная погода» и «сегодня ветрено» истинны. Выясните, какое значение истинности будет у конъюнкции, дизъюнкции и т.д. этих элементарных высказываний? Рассмотрите другие наборы логических значений. Используйте «материальную» ситуацию, репрезентируемую в выбранных вами высказываниях как модель для понимания формального смысла той или иной логической связки. Затем попробуйте обратить отношение модели и предмета моделирования.

Рекомендации по решению задач

При решении многих логических задач существенным элементом оказывается *алгоритм*. Занимаясь логикой, задайте своему сознанию алгоритмическую установку. Приучите себя действовать алгоритмически. Это сэкономит много времени и сил.

Прежде чем приступать к задачам, включающим построение таблиц формул, непременно проясните для себя, сколько строк должно быть в таблице формулы в зависимости от входящих в формулу переменных.

Нужно заботиться о том, чтобы переменные (столбцы) и наборы логических значений входящих переменных (строки) не повторялись, но также и о том, чтобы были представлены все возможные в данном случае наборы. Вписывайте упомянутые значения в таблицу в определенном порядке (алгоритм). Не путайте столбцы для различных подформул, будьте внимательны.

Применение таблиц, семантически определяющих основные логические связки, должно быть доведено до автоматизма. При выписывании столбца для некоторой подформулы, начинайте (если это возможно) с того логического значения в таблице для соответствующей связки, которое выписано в ней один раз. Например, выписывая столбец для импликации, начинайте с логического значения «ложь», т.к. импликация ложна только в одном случае и т.д.

Для перевода высказываний естественного языка на язык логики высказываний, а также для решения обратной задачи (подбор высказывания естественного языка, структурно удовлетворяющего данной формуле), строго придерживайтесь известного алгоритма. Перед тем, как приступить к решению (особенно на первых порах), прочтите пункты алгоритма несколько раз, проанализируйте прочитанное. Не ленитесь фиксировать на бумаге каждый этап работы. Т.к. в интерпретации логических связок как союзов естественного языка с необходимостью присутствует известный произвол, следует обращать специальное внимание на конкретный («живой») смысл соответствующих естественных высказываний. Это особенно касается сложных текстов, например, поэтических.

Примеры заданий и упражнений

1.Формализуйте высказывание:

1. Андрей идет в кино только в том случае, когда там показывают комедию.

2. Для того чтобы n было нечетным, достаточно, чтобы n было простым.

3. Если в следующее воскресенье не будет дождя и я буду здоров, то я пойду в лес и буду собирать грибы.

4. Параллелограмм является квадратом, если и только если он — прямоугольник и все его стороны равны.

5. Если Петр любит ходить в гости, то Павел — домосед.

6. Если кто из товарищей опаздывал на молебен, или доходили слухи о какой-нибудь проказе гимназистов, или видели классную даму поздно вечером с офицером, то он очень волновался и все говорил, как бы чего не вышло (Чехов).

7. Если я долго не приезжал в город, то значит, я был болен или что-нибудь случилось со мной, и они оба сильно беспокоились (Чехов).

2.Является ли данный логический текст формулой пропозициональной логики? Покажите это, построив дерево формулы.

1) $(((p \to r) \vee q) \wedge \sim p) \to (p \wedge q)$;
2) $(p \leftrightarrow q) \to ((p \leftrightarrow r) \wedge \sim r)$;
3) $((p \wedge q) \to (q \vee r) \wedge (p \leftrightarrow r))$;
4) $((\sim(\sim p \wedge q) \vee p) \to \sim r$.

3.Расставьте правильно скобки:

1) $\sim p \wedge \sim q \vee r$;
2) $\sim\sim p \vee q \to \sim r \leftrightarrow \sim q$.

4.Построить минимальные таблицы формул:

$(((\sim q \to p) \vee q) \leftrightarrow p)$;
$(((p \vee q) \not\leftrightarrow r) \to (\sim q \to r))$;
$(r \to ((q \vee s) \wedge \sim r))$

5.Построить таблицы истинности с перечнем переменных p, q, r для формул:

$((p \wedge \sim p) \vee p)$;
$(((p \vee q) \to \sim p) \wedge \sim p)$;
$((p \leftrightarrow q) \to (q \not\leftrightarrow r))$.

Дополнение

Написание формул логики высказываний на бесскобочном языке Я. Лукасевича:

1) $KpNCNqArs$;
2) $ANCKNANrqrsNp$;
3) $AENpJqrCCKprAqspr$.

ТЕМА 3. ОТНОШЕНИЕ РАНОСИЛЬНОСТИ ФОРМУЛ В ЛОГИКЕ ВЫСКАЗЫВАНИЙ. ПРАВИЛО РАВНОСИЛЬНОЙ ЗАМЕНЫ. ТАВТОЛОГИИ И ПРОТИВОРЕЧИЯ

Предметно-тематический план

Определение равносильных формул. Формальная характеристика отношения равносильности. Доказательство равносильности формул. Теорема о равносильных вхождениях. Правило равносильной замены. Тождественные преобразования формул. Логические тождества (тавтологии). Логические противоречия. Формальное выражение логических законов.

Ключевые значения и термины

- Равносильные формулы
- Рефлективность (симметричность, транзитивность) отношения равносильности
- Выделенное вхождение переменной
- Выделенное вхождение подформулы
- Равносильная замена подформулы
- Тождественно-истинная формула
- Тождественно-ложная формула
- Логический закон

Типы заданий для практического занятия

Подбор конкретных предметных высказываний под данные схемы равносильных формул.

Выяснение того, частным случаем какой схемы являются данные равносильные формулы логики высказываний.

Доказательство (или опровержение) равносильности данных формул.

Установление на основе тождественной истинности одних формул тождественной истинности других формул пропозициональной логики.

Над чем полезно подумать (вопросы для самостоятельной проработки)

1. В каком смысле функционирование правила равносильной замены основано на симметричности и транзитивности отношения равносильности? Покажите это на конкретных примерах.
2. Что такое тождественные преобразования в алгебре (7 класс средней школы)? Если алгебра не входила в число ваших любимых школьных предметов, попытайтесь объяснить смысл этого термина, приводя другие примеры.
3. Что представляет собой прием замены переменных в математике?
4. Каков возможный «металогический» смысл формального определения законов логики высказываний?

На что следует обратить внимание при изучении темы

Повторите материал, касающийся различения уровней языка логики высказываний. Спросите себя, понимаете ли вы, чем отличаются предметные постоянные, предметные переменные пропозициональные переменные (буквы), «метабуквы» (прописные буквы в записи схем формул – см., напр., дополнение).

Вникните в логический смысл отношения *равносильности*.

Рассмотрите список схем равносильных формул, приведенный в дополнении. Будьте внимательны. Вы должны заметить в некоторых схемах и группах схем определенную симметрию. Схемы желательно знать на память, и отмеченная симметрия может помочь вам в этом. Схемы, которые имеют собственные названия, нужно выучить обязательно. Отдайте себе отчет в том, почему они называются именно так.

Обратите особое внимание на схемы равносильностей с тавтологиями и противоречиями. Проверьте их табличным способом.

Рекомендации к решению задач

Во всех задачах по данной теме (как и во многих других) необходимо ясно представлять соответствие между терминами языка-объекта, символами метаязыка пропозициональной логики и символами метаязыка II и не путать их.

Нужно строго следить за тем, чтобы в процессе решения одни и те же пропозициональные переменные редуцировались к одним и тем же предметным высказываниям, вместо одинаковых букв в схемах формул, во всех местах, где они встречаются, подставлялись одинаковые формулы и т.д.

Правильным подходом будет стремление к постепенному запоминанию основных равносильностей. Очень важно четко представлять, с какой целью производится преобразование. В таком случае выбор равносильностей будет осмысленным, а не механическим или случайным. В процессе решения старайтесь сделать «эвристический набросок» сразу нескольких шагов последовательных преобразований. Даже если конкретная эвристика завела в тупик – не беда! Будьте уверены, вы *уже* получили гораздо больше, чем потеряли.

Непременно выучите на память схемы равносильностей с тавтологиями и противоречиями. Это понадобится и сейчас, и для решения задач по ниже следующим темам.

Во многих случаях удобно пользоваться приемом переобозначения (замены) переменных.

Примеры заданий и упражнений

1.Установить, частным случаем какой равносильности является формула:

1) $(p \to q) \vee (\sim r \vee s)$ и $((p \to q) \wedge \sim r) \vee ((p \to q) \wedge s)$;
2) $(p \vee (q \leftrightarrow r)) \vee (\sim q \vee \sim(p \leftrightarrow r))$ и $(p \vee (q \leftrightarrow r)) \wedge (\sim q \vee \sim(p \leftrightarrow r)) \wedge (p \vee \sim q)$;
3) $\sim p \vee (q \wedge r)$ и $p \to (q \leftrightarrow r)$;
4) $(\sim p \wedge \sim q)$ и $\sim(\sim\sim p \vee \sim\sim q)$;
5) $p \vee q \vee r$ и $\sim(p \vee q) \to r$;
6) $p \vee q \vee (r \wedge s)$ и $(p \vee q \vee r) \wedge (p \vee q \vee s)$;
7) $(p \wedge (q \vee r)) \wedge s$ и $\sim((p \wedge (q \vee r)) \to \sim s)$;
8) $(p \wedge q) \vee (p \wedge \sim q)$ и $p \wedge (q \vee \sim q)$.

2.Являются ли равносильными следующие формулы?

1) $\sim p \vee q$ и $p \to \sim q$;
2) $p \to (q \to r)$ и $(p \wedge q) \to r$,
3) $\sim((p \wedge q) \vee r)$ и $(p \to \sim q) \wedge \sim r$;
4) $\sim p \to (q \to r)$ и $q \to (\sim p \to r)$;
5) $p \vee q$ и $q \vee r$;
6) $p \to q$ и $r \to s$;
7) $p \to q$ и $\sim p \vee r$,
8) $\sim(p \wedge q)$ и $\sim r \vee \sim s$.

3.Пользуясь только правилом равносильной замены по равносильностям (1-27) доказать равносильности (28-34).

Дополнение

Список избранных схем равносильных формул

1.Закон двойного отрицания:

$\sim\sim A$ **равносильно** A. (1)

2.Коммутативность и ассоциативность конъюнкции:

$A \wedge B$ **равносильно** $B \wedge A$; (2)

$A \wedge (B \wedge C)$ **равносильно** $(A \wedge B) \wedge C$. (3)

3.Коммутативность и ассоциативность дизъюнкции:

$A \vee B$ **равносильно** $B \vee A$; (4)

$A \vee (B \vee C)$ **равносильно** $(A \vee B) \vee C$ (5)

4.Дистрибутивность дизъюнкции относительно конъюнкции и конъюнкции относительно дизъюнкции:

$A \vee (B \wedge C)$ **равносильно** $(A \vee B) \wedge (A \vee C)$; (6)

$(B \wedge C) \vee A$ **равносильно** $(A \vee B) \wedge (A \vee C)$; (6′)

$A \wedge (B \vee C)$ **равносильно** $(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$; (7)

$(B \vee C) \wedge A$ **равносильно** $(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ (7′)

5.Законы идемпотентности конъюнкции и дизъюнкции (от лат. «idem+potentia» - одной силы, одинаковые по значимнсти):

$A \wedge A$ **равносильно** A; (8)

$A \vee A$ **равносильно** A (9)

6. Законы Де-Моргана:

$\sim(A \wedge B)$ **равносильно** $\sim A \vee \sim B$; (10)

$\sim(A \vee V)$ **равносильно** $\sim A \wedge \sim B$ (11)

7. Равносильности без названия:

$A \wedge B$ **равносильно** $\sim(A \to \sim B)$. (12)

$A \to B$ **равносильно** $\sim A \vee B$. (13)

$A \wedge B$ **равносильно** $\sim(\sim A \vee \sim B)$. (14)

$A \vee B$ **равносильно** $\sim(\sim A \wedge \sim B)$. (15)

$A \leftrightarrow B$ **равносильно** $(\sim A \vee B) \wedge (\sim B \vee A)$; (16)

$A \not\leftrightarrow B$ **равносильно** $(A \vee B) \wedge (\sim A \vee \sim B)$; (17)

8.Закон исключения:

$(A \vee B) \wedge (\sim A \vee B)$ **равносильно** B; (18)

Законы поглащения:

$A \wedge (A \vee B)$ **равносильно** A; (19)

$A \vee (A \wedge B)$ **равносильно** A; (20)

9.Законы выявления:

$(A \vee C) \wedge (B \vee \sim C)$ равносильно $(A \vee C) \wedge (B \vee \sim C) \wedge (A \vee B)$; (21)

$(A \wedge C) \vee (B \wedge \sim C)$ равносильно $(A \wedge C) \vee (B \wedge \sim C) \vee (A \wedge B)$. (22)

8.Еще равносильности:

$A \to B$ равносильно $\sim B \to \sim A$; (23)

$A \leftrightarrow B$ равносильно $\sim A \leftrightarrow \sim B$; (24)

$A \not\leftrightarrow B$ равносильно $\sim(A \leftrightarrow B)$; (25)

$A \leftrightarrow B$ равносильно $(B \to A) \wedge (B \to A)$; (26)

$A \leftrightarrow B$ равносильно $(A \wedge B)(\sim A \wedge \sim B)$. (27)

$A \vee B$ равносильно $\sim A \to B$; (28)

$A \to B$ равносильно $\sim(A \wedge \sim B)$; (29)

$\sim(A \to B)$ равносильно $(A \wedge \sim B)$; (33)

$A \leftrightarrow B$ равносильно$\sim(\sim A \not\leftrightarrow \sim B)$; (31)

$A \not\leftrightarrow B$ равносильно $\sim(\sim A \leftrightarrow \sim B)$; (32)

$\sim(A \leftrightarrow B)$ равносильно $\sim(A \not\leftrightarrow \sim B)$; (33)

$\sim(A \not\leftrightarrow B)$ равносильно $(\sim A \leftrightarrow \sim B)$. (34)

9.Равносильности для бинарных связок расширенного языка логики высказываний:

$A \leftarrow B$ равносильно $\sim B \vee A$; (35)

$A \uparrow B$ равносильно $A \vee \sim B$; (36)

$A \Leftarrow B$ равносильно $\sim(\sim B \vee A)$; (37)

$A \Rightarrow B$ равносильно $\sim(\sim A \vee B)$; (38)

$A \downarrow B$ равносильно $\sim(A \vee B)$; (39)

$\sim A$ равносильно $A \uparrow A$; (40)

$A \vee B$ равносильно $(A \uparrow A) \uparrow (B \uparrow B)$. (41)

10.Равносильность условной дизъюнкции:

$A \overbrace{B} C$ равносильно $(A \vee \sim B) \wedge (B \vee C)$, (42)

11.Равносильности с тавтологиями и противоречиями:

$\sim$**И** равносильно **Л;** (43)

$\sim$**Л** равносильно **И;** (44)

$A \leftrightarrow$ **И** равносильно A; (45)

$A \leftrightarrow$ **Л** равносильно $\sim A$; (46)

$A \wedge$ **И** равносильно A; (47)

И $\wedge A$ равносильно A (47')

$A \wedge \text{Л}$ равносильно **Л**; (48)

$\text{Л} \wedge A$ равносильно **Л**; (48′)

$A \vee \text{И}$ равносильно **И**; (49)

$\text{И} \vee A$ равносильно **И**; (49′)

$\text{Л} \vee A$ равносильно A; (50)

$A \vee A$ равносильно A. (50′)

ТЕМА 4. РАСШИРЕНИЕ ЯЗЫКА ПРОПОЗИЦИОНАЛЬНОЙ ЛОГИКИ. ПОЛНЫЕ СИСТЕМЫ ЛОГИЧЕСКИХ СВЯЗОК. ЗАКОН ДВОЙСТВЕННОСТИ

Предметно-тематический план

Арность связок. Унарные и бинарные связки. Расширение унарных союзов. Расширение бинарных союзов. Тернарные союзы. Логические функции. Определение полной системы логических знаков. Двойственные логические знаки. Закон двойственности. Самодвойственные и несамодвойственные формулы.

Ключевые значения и термины

- Обратная импликация (репликация)
- Обратная антиимпликация
- Антиконъюнкция
- Антиимпликация
- Антидизъюнкция
- Условная дизъюнкция
- Логическая функция
- Двойственные формулы
- Самодовйственные (несамодвойственные) формулы

Типы заданий для практического занятия

Преобразование данной формулы в формулу, которая не содержит определенных логических знаков (напр., отрицания и конъюнкции и т.п.).

Демонстрация того, что определенных логических связок (напр., антидизъюнкции) достаточно для построения формулы, которой можно задать произвольную логическую функцию.

Демонстрация того, что данный набор логических связок является полной системой логических знаков при помощи отыскания соответствующих равносильностей и выражения через них логических связок, избыточных для этой системы.

Построение формулы, двойственной данной формуле.

Нахождение двойственных пар среди бинарных связок расширенного языка пропозициональной логики.

Над чем полезно подумать (вопросы для самостоятельной проработки)

1.Какие тернарные союзы используют сегодня логики кроме условной дизъюнкции? Как они семантически определяются? Какие высказывания ими моделируются?

2.Каков возможный операциональный смысл закона двойственности?

3.Придумайте примеры естественных высказываний, соответствующие связкам расширенного языка пропозициональной логики. Попробуйте свести их (исходя из предметного смысла высказываний) к другим (по форме) высказываниям с теми же субъектом и предикатом. Затем формализуйте результат. Соответствует ли формула определению какого-либо логического союза? Равносильны ли начальная и конечная формулы? Проверьте.

На что следует обратить внимание при изучении темы

Как при изучении этой темы, так и для понимания специфики логико-математической дискурсии вообще, важно осознать, что здесь весьма существенным оказывается (и всегда приветствуется) предложение различных *формальных представлений* некоторого данного отношения. Так, различными представлениями одного и того же отношения, по существу, являются формулы пропозициональной логики, соответствующие таблицы и соответствующие функции. Это очень простой пример, но суть дела он иллюстрирует хорошо. (Другой пример такого рода представляет «двоица» традиционного языка пропозициональной логики и бесскобочного языка Я. Лукасевича).

Данная тема условно может быть разделена на две части. Первая часть – «содержательная» - посвящена расширению языка логики высказываний. Вторая часть – «операциональная» - повествует о полных системах логических знаков и о законе двойственности. Последние представляют собой элементы техники анализа в пропозициональной логике. Несмотря на условность такого разделения, его осознание может оказаться полезным.

Существование полных систем логических знаков является важной операциональной возможностью классической пропозициональной логики. В самом деле, на эту систему можно как бы «нормировать» любой логический текст, удовлетворяющий условиям данного формализма. Такая нормировка позволяет делать по поводу этого текста определенные формальные выводы, что оказывается весьма полезным в техническом отношении. Мы убедимся в этом довольно скоро.

Сосредоточьтесь на логической семантике новых бинарных связок, сравните это с определениями стандартных союзов.

Будет полезным рассмотреть те равносильности, которые касаются знаков расширенного языка логики высказываний, а также соответствующие таблицы формул. Попытайтесь выделить формальные симметрии.

Рекомендации к решению задач

Все задачи по данной теме решаются с помощью проведения тождественных преобразований формул по правилу равносильной замены. Перед тем, как приступить к решению, уясните, что может выступить решением, что именно необходимо получить в качестве результата. Будьте внимательны. Правильно сопоставляйте «метабуквы» в схемах равносильностей и конкретные подформулы. Если в уме это сделать не выходит, проведите сопоставление на бумаге.

Если решения не получается, просто повторите соответствующие формальные определения. Скорее всего, дело допущении какого-то мелкого несоответствия или в упущении мелкого, но важного момента.

Примеры заданий и упражнений

1. Построить формулы двойственные следующим (если возможно):

1) $(p \leftrightarrow q) \to ((q \not\leftrightarrow r) \wedge (p \vee r))$;

2) $(((p \wedge q) \vee r) \wedge s) \leftrightarrow (((p \vee q) \wedge r) \vee s)$;

3) $\sim((p \not\leftrightarrow q) \leftrightarrow (\sim p \not\leftrightarrow \sim q))$.

2. Из формулы $(p \not\leftrightarrow q) \to r$ ***получить формулу:***

1) не содержащую логических знаков, отличных от $\sim$ и $\wedge$;

2) не содержащую логических знаков, отличных от $\sim$ и $\vee$;

3) не содержащую логических знаков, отличных от $\sim$ и $\to$.

Дополнение

Логическая семантика возможных бинарных связок в двузначной логике высказываний:

A	B	$A \nabla_1 B$	$A \nabla_2 B$	$A \nabla_3 B$	$A \nabla_4 B$	$A \nabla_5 B$	$A \nabla_6 B$	$A \nabla_7 B$	$A \nabla_8 B$	$A \nabla_9 B$	$A \nabla_{10} B$	$A \nabla_{11} B$	$A \nabla_{12} B$	$A \nabla_{13} B$	$A \nabla_{14} B$	$A \nabla_{15} B$	$A \nabla_{16} B$
и	и	и	и	и	и	л	и	и	л	л	л	и	и	л	л	л	л
л	и	и	и	и	л	и	и	л	л	и	и	л	л	и	л	л	л
и	л	и	и	л	и	и	л	л	и	л	и	и	л	л	и	л	л
л	л	и	л	и	и	и	л	и	и	и	л	л	л	л	л	и	л

ТЕМА 5. НОРМАЛЬНАЯ ФОРМА ФОРМУЛ ЛОГИКИ ВЫСКАЗЫВАНИЙ. СЕМАНТИЧЕСКАЯ ПРОБЛЕМА РАЗРЕШЕНИЯ

Предметно-тематический план

Определение нормальной формы. Алгоритм приведения формулы к нормальной форме. Регулярно и нерегулярно входящие переменные. Семантическая проблема разрешения. Описание разрешающей процедуры с приведением к нормальной форме.

Ключевые значения и термины

- Регулярно (не регулярно) входящая переменная
- Нормальная форма формулы логики высказываний
- Семантическая проблема разрешения
- Выполнимая формула логики высказываний

Типы заданий для практического занятия

Приведение формулы к нормальной форме.

Прояснение семантической проблемы разрешения для данной формулы (нетабличным способом).

Над чем полезно подумать (вопросы для самостоятельной проработки)

Почему описанная разрешающая процедура выглядит именно так (разумеется, с логической точки зрения)? Ответьте на этот вопрос по отношению к каждому этапу разрешающей процедуры.

На что следует обратить внимание при изучении темы

Прежде всего, нужно понять, что приведение к нормальной форме есть стандартизирующая произвольную формулу процедура, т.е. процедура, приводящая ее к виду, удобному для проведения определенных преобразований или показательному в смысле определенных формальных связей и отношений. То же самое можно сказать по поводу более сложных «нормировочных» форм пропозициональной логики, речь о которых – ниже.

Полезно разделить материал, заявленный по данной теме, на три части. Во-первых, это определение нормальной формы (этой или других, о которых речь пойдет ниже). Во-вторых, это алгоритм соответствующего преобразования произвольной формулы. Наконец, в-третьих, это описание способа применения такого преобразования для решения конкретных логических задач. Структурно это выражается в трех последовательных вопросах: что это такое? как это получить? для чего это полученное можно использовать?

Таким образом, для успешного решения соответствующих задач необходимо: 1. выучить определение нормальной формы; 2. понять алгоритм приведения формулы к нормальной форме; 3. усвоить логический смысл семантической проблемы разрешения и разрешающую процедуру, нормальной формы относящихся к делу формул.

Рекомендации к решению задач

В силу операционально-алгоритмического характера излагаемого по данной теме материала, настоящий пункт оказывается совпадающим с пунктом «На что следует обратить внимание при изучении темы».

Примеры заданий и упражнений

1.Привести к нормальной форме:

1) $\sim(p \leftrightarrow \sim q)$;
2) $(\sim p \leftrightarrow q) \rightarrow r$;
3) $(p \leftrightarrow q) \rightarrow ((p \leftrightarrow r) \rightarrow (q \leftrightarrow r))$.
4) $((p \vee \sim q) \rightarrow r) \rightarrow (p \wedge r)$;
5) $(p \vee r) \rightarrow ((q \wedge \sim r) \rightarrow p))$;
6) $(p \rightarrow q) \rightarrow (\sim q \rightarrow (p \vee r))$;
7) $(p \rightarrow r) \rightarrow \sim(q \rightarrow (q \rightarrow r))$.

2.Решить (нетабличным способом) проблему разрешения для формул:

1) $p \rightarrow (q \rightarrow (p \wedge q))$;
2) $p \wedge (\sim p \vee q)$;
3) $(p \wedge q) \leftrightarrow \sim(p \rightarrow \sim q)$;
4) $\sim(p \rightarrow (p \vee q))$;
5) $(p \leftrightarrow q) \rightarrow ((q \leftrightarrow r) \rightarrow (p \leftrightarrow r))$;
6) $\sim((p \rightarrow (q \not\leftrightarrow q)) \rightarrow (p \rightarrow r))$;
7) $(p \not\leftrightarrow q) \rightarrow ((p \not\leftrightarrow r) \rightarrow (q \leftrightarrow r))$.
8) $((p \vee \sim q) \rightarrow r) \rightarrow (p \wedge r)$;
9) $(p \vee r) \rightarrow ((q \wedge \sim r) \rightarrow p))$;
10) $(p \rightarrow q) \rightarrow (\sim q \rightarrow (p \vee r))$;
11) $(p \rightarrow r) \rightarrow \sim(q \rightarrow (q \rightarrow r))$.

Примеры решения задач

1.Приведение формулы к нормальной форме

Пусть дана формула:

$$(\sim p \leftrightarrow q) \rightarrow ((q \leftrightarrow r) \vee s).$$

Согласно равносильности (17) получаем формулу

$$((\sim p \vee q) \wedge (\sim\sim p \vee \sim q)) \rightarrow ((q \leftrightarrow r) \vee s).$$

Из нее согласно равносильности (16) получаем формулу

$$((\sim p \vee q) \wedge (\sim\sim p \vee \sim q)) \rightarrow (((\sim q \vee r) \wedge (\sim r \vee q)) \vee s),$$

затем согласно равносильности (13) — формулу

$$\sim((\sim p \vee q) \vee (\sim\sim p \vee \sim q)) \vee (((\sim q \vee r) \wedge (\sim r \vee q)) \vee s)$$

и далее согласно равносильности (10) — формулу

$$(\sim(\sim p \vee q) \vee \sim(\sim\sim p \vee \sim q)) \vee (((\sim q \vee r) \wedge (\sim r \vee q)) \vee s),$$

после чего, дважды применяя правило замены, согласно равносильности (11) — формулу

$$((\sim\sim p \vee q) \vee (\sim\sim\sim p \vee \sim\sim q)) \vee (((\sim q \vee r) \wedge (\sim r \vee q)) \vee s).$$

Наконец, трижды применяя правило замены, согласно равносильности (1) получаем следующую формулу в нормальной форме:

$$((p \wedge \sim q) \vee (\sim p \wedge q)) \vee (((\sim q \vee r) \wedge (\sim r \vee q)) \vee s),$$

которую, пользуясь соглашением о бесскобочной записи кратной дизъюнкции, можно записать:

$$(p \wedge \sim q) \vee (\sim p \wedge q)) \vee ((\sim q \vee r) \wedge (\sim r \vee q)) \vee s.$$

2.Решение проблемы разрешения для данной формулы

Пусть дана формула:

$$(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r)).$$

Приводим ее к нормальной форме:

$$\sim(\sim p \vee (\sim q \vee r)) \vee (\sim(\sim p \vee q) \vee (\sim p \vee r));$$
$$(\sim\sim p \wedge \sim(\sim q \vee r)) \vee ((\sim\sim p \wedge \sim q) \vee \sim p \vee r);$$
$$(\sim\sim p \wedge \sim\sim q \wedge \sim r)) \vee ((\sim\sim p \wedge \sim q) \vee \sim p \vee r);$$
$$(p \wedge q \wedge \sim r)) \vee ((p \wedge \sim q) \vee \sim p \vee r).$$

Здесь нет нерегулярно входящих переменных, поэтому вместо регулярно входящей переменной p согласно п. 5 подставляем буквы **И** и **Л** и получаем формулы:

$$\text{а) } (\textbf{И} \wedge q \wedge \sim r) \vee ((\textbf{И} \wedge \sim q) \vee (\sim\textbf{И} \vee r);$$
$$(q \wedge \sim r) \vee (\sim q \vee r);$$
$$\text{б) } (\textbf{Л} \wedge q \wedge \sim r) \vee ((\textbf{Л} \wedge \sim q) \vee (\sim\textbf{Л} \vee r).$$

Сразу находим, что формула б) равносильна **И**. Формула же а) порождает согласно п. 5 формулы аа) и аб):

$$\text{аа) } (\textbf{И} \wedge \sim r) \vee (\sim\textbf{И} \vee r);$$
$$\sim r \vee r,$$

которая при любых подстановках дает **И**, и

$$\text{аб) } (\textbf{Л} \wedge \sim r) \vee (\sim\textbf{Л} \vee r),$$

которая равносильна **И**.

Так как все заключительные формулы — **И**, исходная формула — тождественно-истинная.

ТЕМА 6. КОНЪЮНКТИВНЫЕ НОРМАЛЬНЫЕ ФОРМЫ. ПОНЯТИЕ ЛОГИЧЕСКОГО СЛЕДОВАНИЯ.

Элементарная дизъюнкция. Условие тождественной истинности элементарной дизъюнкции. Определение Конъюнктивной нормальной формы. Обобщенный закон дистрибутивности конъюнкции и обобщенный закон де-Моргана. Совершенная конъюнктивная нормальная форма. Логическое следование. Простые следствия. Сокращенная конъюнктивная нормальная форма.

Ключевые значения и термины

- КНФ
- СКНФ
- Сокращенная КНФ
- Элементарная дизъюнкция
- Конъюнктивные члены КНФ (СКНФ)
- Дизъюнктивные члены КНФ (СКНФ)
- Посылки
- Следование (следствие) из данных посылок

Типы заданий для практического занятия

Приведение данной формулы к КНФ (СКНФ, сокращенной КНФ)

Выяснение вопроса, следует ли некоторая данная формула из данных посылок?

Систематический обзор всех следствий из данных посылок.

Нахождение простых следствий из данных посылок.

На что следует обратить внимание при изучении темы

Для начала необходимо прочитать и уяснить содержание одноименного с данным пункта для темы 5, относя его к КНФ, СКНФ, сокращенной КНФ.

Обратитесь к своей формальной интуиции (она есть у каждого!), отдайте себе отчет в том, как устроена интересующая вас конъюнктивная форма, представьте эту структуру в целом и в отдельных элементах.

Нужно научиться различать конъюнктивные формы по внешнему виду.

Параллельно (т.е., удерживая в уме то, о чем говорилось выше), проясните для себя отношение логического следования, круг терминов и круг значений, относящихся к этому вопросу.

Совершенно недостаточно просто знать этапы соответствующих процедур. Желательно научиться применять процедуру в конкретных случаях, однако и этим умением никак нельзя ограничиваться. Наряду с последним, важно понимать, *почему именно*, на каких логических основаниях данная процедура задана именно таким образом и относится именно к данному типу логических задач.

Рекомендации по решению задач

Для решения задач по приведению к конъюнктивным нормальным формам, точно воспроизведите соответствующее определение (по пунктам), продумайте его, сопоставьте с алгоритмом приведения, остановитесь на каждой операции. Затем представьте (проговорите, пропишите) полную последовательность операций в отношении формулы, которая дана по условию.

Установите соответствие конкретного логического текста с релевантными ему схемами равносильностей, эвристически набрасывайте сразу несколько операциональных шагов.

В задачах, посвященный логическому следованию сначала желательно еще раз воспроизвести соображения, касающиеся логического обоснования соответствующих операций. Задавайте себе вопросы типа: «почему для установления отношения следования строят именно импликацию такого вида?»; «почему требуют именно ее тождественной истинности?» и т.д.

В более сложных примерах мысленно разделите задание на три этапа: этап формализации, операциональный этап и этап интерпретации (такое деление может быть полезно и в дальнейшем). На этапе формализации содержательные предложения (описание некоторого положения дел) должны быть представлены как *формулы* пропозициональной логики. На операциональном этапе должен быть проведен логический анализ полученных формул с помощью соответствующих технических процедур. На третьем этапе результаты анализа должны быть «деформализованы», проинтерпретированы в контексте данных содержательных значений (переменным должен быть вновь возвращен их константный предметный смысл); логические союзы должны быть проинтерпретированы как предметные связи и отношения между значениями, зафиксированные в условиях задачи.

Будьте внимательны к символам. Даже скобка, поставленная не на своем месте, может кардинально изменить логический смысл. Не пренебрегайте самопроверкой.

Примеры заданий и упражнений

1.Привести к КНФ и проверить на тождественную истинность следующие формулы:

1) $p \to ((p \to q) \to q)$;
2) $((p \to q) \wedge (r \to s)) \to ((p \wedge r) \to (q \wedge s))$;
3) $(p \to q) \to ((p \wedge r) \to (q \wedge r))$;
4) $(p \to (q \wedge r)) \leftrightarrow ((p \to q) \wedge (p \to r))$;
5) $((p \to q) \vee (p \to r)) \to (p \to (q \vee r))$;
6) $(p \leftrightarrow q) \to ((p \leftrightarrow r) \to (q \leftrightarrow r))$.
7) $((p \vee \sim q) \to r) \to (p \wedge r)$;
8) $(p \vee r) \to ((q \wedge \sim r) \to p)$;
9) $(p \to q) \to (\sim q \to (p \vee r))$;
10) $(p \to r) \to \sim(q \to (q \to r))$.

2.Привести к СКНФ формулы:

1) $(p \to q) \vee \sim(\sim q \vee r)$;
2) $((\sim(p \to q) \to q) \vee \sim q) \vee (p \wedge r)$;
3) $(p \leftrightarrow q) \to ((p \leftrightarrow r) \to (q \leftrightarrow r))$;
4) $((p \vee \sim q) \to r) \to (p \wedge r)$;
5) $\sim(p \vee r) \to \sim((q \wedge \sim r) \to \sim p)$;
6) $(p \to q) \to \sim((q \to p) \vee r)$;
7) $\sim(p \to r) \to \sim(q \vee (q \to r))$.

Примеры решения задач

1.Приведение формулы к КНФ

Пусть дана формула $(p \to \sim q) \leftrightarrow (q \to \sim p)$.

$$(\sim(p \to \sim q) \vee (q \to \sim p)) \wedge (\sim(q \to \sim p) \vee (p \to \sim q));$$

$$(\sim(\sim p \vee \sim q) \vee (\sim q \vee \sim p)) \wedge (\sim(\sim q \vee \sim p) \vee (\sim p \vee \sim q));$$

$$((p \wedge q) \vee (\sim q \vee \sim p)) \wedge ((q \wedge p) \vee (\sim p \vee \sim q));$$

$$(\sim q \vee \sim p \vee p) \wedge (\sim q \vee \sim p \vee q) \wedge (\sim p \vee \sim q \vee q) \wedge (\sim p \vee \sim q \vee p).$$

Мы можем сразу видеть, что КНФ тождественно-истинна, следовательно, данная в начале формула есть логическое тождество.

2.Отыскание простых следствий из данных посылок

Пусть высказыванию *Поступок совершил K* соответствует переменная p; высказыванию *Поступок совершил L* — переменная q; высказыванию *Поступок совершил M* — переменная r; высказыванию *Поступок совершил N* — переменная s. Тогда условие, что поступок мог совершить только один из четырех, можно записать в виде формулы, которая выражает, что никакие два из четырех высказываний не могут быть оба истинными;

$$\sim(p \wedge q) \wedge \sim(p \wedge r) \wedge (p \wedge s) \wedge \sim(q \wedge r) \wedge \sim(q \wedge s) \wedge \sim(r \wedge s).$$

Утверждения каждого из четырех означают последовательно: q, s, $\sim r$ и $\sim s$. Но так как истинно только одно из них, никакие два из этих утверждений не являются одновременно истинными. Это условие можно записать следующим образом:

$$\sim(q \wedge s) \wedge \sim(q \wedge \sim r) \wedge \sim(q \wedge \sim s) \wedge \sim(s \wedge \sim r) \wedge \sim(s \wedge \sim s) \wedge \sim(\sim r \wedge \sim s).$$

Конъюнкцию двух последних формул приводим к КНФ:

$$\sim(p \wedge q) \wedge \sim(p \wedge r) \wedge (p \wedge s) \wedge \sim(q \wedge r) \wedge \sim(q \wedge s) \wedge \sim(r \wedge s) \wedge \sim(q \wedge s) \wedge$$
$$\wedge \sim(q \wedge \sim r) \wedge \sim(q \wedge \sim s) \wedge \sim(s \wedge \sim r) \wedge \sim(s \wedge \sim s) \wedge \sim(\sim r \wedge \sim s);$$
$$(\sim p \vee \sim q) \wedge (\sim p \vee \sim r) \wedge (\sim p \vee \sim s) \wedge (\sim q \vee \sim r) \wedge (\sim q \vee \sim s) \wedge (\sim r \vee \sim s) \wedge$$
$$\wedge (\sim q \vee \sim s) \wedge (\sim q \vee r) \wedge (\sim q \vee s) \wedge (\sim s \vee r) \wedge (\sim s \vee s) \wedge (r \vee s).$$

Далее, устраняя повторения и вычеркивая тождественно-истинный конъюнктивный член, получаем формулу

$$(\sim p \vee \sim q) \wedge (\sim p \vee \sim r) \wedge (\sim p \vee \sim s) \wedge (\sim q \vee \sim r) \wedge (\sim q \vee \sim s) \wedge (\sim r \vee \sim s) \wedge$$
$$\wedge (\sim q \vee r) \wedge (\sim q \vee s) \wedge (\sim s \vee r) \wedge (r \vee s).$$

Применяем закон выявления сначала к 5-му и 8-му конъюнктивным членам, затем к 6-му и 9-му, затем к 9-му и 10-му и, наконец, ко 2-му и вновь выявленному 13-му. После сокращения повторений в выявленных конъюнктивных членах получаем формулу:

$$(\sim p \vee \sim q) \wedge (\sim p \vee \sim r) \wedge (\sim p \vee \sim s) \wedge (\sim q \vee \sim r) \wedge (\sim q \vee \sim s) \wedge (\sim r \vee \sim s) \wedge$$
$$\wedge (\sim q \vee r) \wedge (\sim q \vee s) \wedge (\sim s \vee r) \wedge (r \vee s) \wedge \sim q \wedge \sim s \wedge r \wedge \sim p.$$

Производим все поглощения и получаем сокращенную КНФ

$$\sim q \wedge \sim s \wedge r \wedge \sim p,$$

из которой видно, что p, q и s ложны, а r, т.е. высказывание *Поступок совершил М*, — истинно.

Дополнение

1.Формулы обобщенных законов Де-Моргана:

$$\sim(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n) \text{ равносильно } \sim A_1 \vee \sim A_2 \vee \ldots \vee \sim A_n;$$
$$\sim(A_1 \vee A_2 \vee \ldots \vee A_n) \text{ равносильно } \sim A_1 \wedge \sim A_2 \wedge \ldots \wedge \sim A_n.$$

2.Формула обобщенного закона дизъюнкции относительно конъюнкции:

$$(A_1 \wedge \ldots \wedge A_m) \vee (B_1 \wedge \ldots \wedge B_n) \text{ равносильно}$$
$$(B_1 \vee A_1) \wedge \ldots \wedge (B_1 \vee A_m) \wedge \ldots \wedge (B_n \vee A_1) \wedge \ldots \wedge (B_n \vee A_m).$$

ТЕМА 7. ДИЗЪЮНКТИВНЫЕ НОРМАЛЬНЫЕ ФОРМЫ

Предметно-тематический план

Элементарная конъюнкция. Условие тождественной ложности элементарной конъюнкции. Определение дизъюнктивной нормальной формы. Обобщенный закон дистрибутивности дизъюнкции. Совершенная дизъюнктивная нормальная форма. Гипотезы. Простые гипотезы. Сокращенная дизъюнктивная нормальная форма.

Ключевые значения и термины

- ДНФ
- СДНФ
- Сокращенная ДНФ
- Элементарная конъюнкция
- Конъюнктивные члены ДНФ (СДНФ)
- Дизъюнктивные члены ДНФ (СДНФ)
- Посылки
- Гипотезы данных посылок

Типы заданий для практического занятия

Приведение данной формулы к ДНФ (СДНФ, сокращенной ДНФ)

Систематический обзор гипотез данных следствий.

Нахождение простых гипотез данных следствий.

Над чем полезно подумать (вопросы для самостоятельной проработки)

Создать сравнительную таблицу двух видов нормальных форм: конъюнктивных и дизъюнктивных (определения, алгоритмы приведения, типичные случаи аналитического использования, соответствующие схемы равносильностей и т.д.). Проследить симметрию между двумя половинами таблицы.

На что следует обратить внимание при изучении темы

Если построена сравнительная таблица, о которой говорилось в предыдущем пункте, становится вполне очевидно, что материалом из темы 6 можно пользоваться как обратной аналогией в отношении материала из темы 7. Любой из советов, о которых шла речь в одноименном данному разделе темы 6, т.о., справедлив и здесь (разумеется, при известных симметричных изменениях).

Рекомендации по решению задач

Корректное перенесение рекомендаций из одноименного раздела темы 6 на задания по настоящей теме оказывается в данном случае самой предпочтительной рекомендацией. Для демонстрации этого (себе и другим) предлагается выполнить следующее «полушуточное» задание: подсчитайте, сколько слов в тексте последнего раздела темы 6 нужно заменить?

Примеры заданий и упражнений

1.Привести к ДНФ:

1) $((p \not\leftrightarrow q) \to (\sim q \land r)) \leftrightarrow \sim r$;

2) $(p \leftrightarrow \sim q) \to \sim((p \leftrightarrow r) \to \sim(q \leftrightarrow r))$;

3) $(p \to \sim q) \to r) \to (p \to r)$;

4) $(p \leftrightarrow r) \to (\sim(q \leftrightarrow \sim r) \to p))$;

2.Привести к СДНФ:

1) $((p \to q) \not\leftrightarrow (r \leftrightarrow s)) \to (\sim p \wedge s)$;
2) $(p \not\leftrightarrow q) \to ((p \not\leftrightarrow r) \to (q \not\leftrightarrow r))$;
3) $((p \vee \sim q) \to r) \to (p \wedge r)$;
4) $(p \vee r) \to ((q \wedge \sim r) \to p))$;
5) $(p \to q) \to (\sim q \to (p \vee r))$;
6) $(p \to r) \to \sim(q \to (q \to r))$.

3.Найти все простые гипотезы следующих формул:

1) $(p \not\leftrightarrow q) \vee (p \wedge q)$;
2) $((p \to q) \to r) \to (r \vee q)$.

4. Упростить информацию:

Незадачливый брокер в самый разгар торгов прислал своему партнеру сообщение: «Если нам удастся продать акции по указанной шефом цене, то мы хорошо заработаем. Но если нам не удастся этого сделать, то либо придется сбавить цену, либо вовсе отказаться от продажи. Однако если мы откажемся от продажи, нам грозит разорение или шеф нас уволит. С другой стороны, если нам грозит разорение или увольнение с работы, мы должны продать акции по указанной шефом цене».

5.Ответить на вопрос при заданных условиях.

Соня, Башмачник и Мартовский Заяц устроились работать в банк. Свободные вакансии были таковы: охранник, кассир, юрист. При этом известно следующее.

Если Соня – юрист, Башмачник – охранник.
Если Соня – охранник, Башмачник – кассир.
Если Башмачник – не юрист, то Мартовский заяц – не охранник.
Если Мартовский Заяц – кассир, то Соня – охранник.
Кто кем работает?

Примеры решения задач

1.Выяснить, каковы наиболее слабые гипотезы формулы

Пусть дана формула $((p \wedge q) \vee r) \to r$.

Приводим ее к сокращенной ДНФ:

$$\sim((p \wedge q) \vee r) \vee r;$$
$$(\sim(p \wedge q) \wedge \sim r) \vee r;$$
$$(\sim p \vee \sim q) \wedge \sim r) \vee r;$$
$$(\sim r \wedge p) \vee (\sim r \vee \sim q) \vee r;$$
$$(\sim r \wedge p) \vee (\sim r \vee \sim q) \vee r \vee \sim p \vee \sim q;$$
$$r \vee \sim p \vee \sim q.$$

Таким образом, данная формула логически следует из гипотезы r, или гипотезы $\sim p$, или гипотезы $\sim q$.

2.Присведение к СДНФ:

Пусть дана формула $(p \to q) \wedge (\sim q \to p)$.

Пополняем 2-й дизъюнкт недостающей переменной p :

$$(q \land \sim p) \lor (q \land (p \lor \sim p)) \lor (p \land q);$$
$$(q \land \sim p) \lor (q \lor p) \lor (q \lor \sim p) \lor (p \land q).$$

Устраняем возникшие повторения и получаем СДНФ данной формулы:

$$(q \land \sim p) \lor (q \lor p).$$

Вначале приведем ее к ДНФ:

$$(\sim p \lor q) \land (q \lor p);$$
$$(q \land \sim p) \lor (q \land q) \lor (p \land \sim p) \lor (p \land q).$$

Устраняя повторения и вычеркивая тождественно-ложные дизъюнктивные члены, получаем формулу

$$(q \land \sim p) \lor q \lor (p \land q).$$

ТЕМА 8. ПОНЯТИЕ ЛОГИЧЕСКОГО ВЫВОДА

Предметно-тематический план

Что такое логический вывод в логике высказываний. Основные типы (направления) логического вывода. Значение логических тождеств в сфере логического вывода. Схема кратной импликации и ее операционально-аналитический смысл. Глубина анализа формулы по схеме кратной импликации. Фигуры логического вывода, корректность фигур. Действительная истинность и логическая корректность (материя и форма). Схема формального вывода.

Ключевые значения и термины

- Нуль-кратная импликация
- N-кратная импликация
- Правила перехода
- Модус поненс (МП)
- Введение конъюнкции (ВК)
- Введение дизъюнкции (ВД)
- Удаление конъюнкции (УК)
- Удаление дизъюнкции (УД)
- Модус толленс (МТ)
- Удаление отрицания конъюнкции (УОК)
- Удаление дизъюнкции посредством отрицания (УД/О)

Типы заданий для практического занятия

См. типы заданий к теме 9.

Над чем полезно подумать (вопросы для самостоятельной проработки)

1. Что такое условный силлогизм? Какие виды условного силлогизма вы помните?
2. Что такое разделительный силлогизм? Какие виды условно-разделительного силлогизма вы помните?
3. Какой род силлогизма получатся при суммировании родовых признаков двух выше упомянутых родов?

На что следует обратить внимание при изучении темы

Внимательно разберите и выучите определение логического вывода. Ответ на вопрос: что, собственно, требуется получить в качестве решения, для многих ниже описываемых типов задач будет заключаться в простом воспроизведении этого определения.

Точно выясните для себя, что такое схема кратной импликации. Необходимо научиться без труда интерпретировать произвольную формулу в смысле схемы кратной импликации («читать» формулы как кратные импликации).

Научитесь также автоматически (без малейших усилий) переписывать формулы, проанализированные по схеме кратной импликации в терминах фигур рассуждения и наоборот, фигуры рассуждения в терминах схемы кратных импликаций.

Освойте структуру формального вывода (лучше на конкретных примерах).

Необходимо выучить на память данные на лекции правила логического вывода (фигуры рассуждения).

Дополнение

1.Пример естественного вывода

1) $(p_1 \wedge p_2) \to q$	посылки;
2) $p_1 \wedge r$	посылки;
3) $r \to p_2$	посылки;
4) r	УК (2);
5) p_2	МП (4, 3)
6) p_1	УК (2);
7) $p_1 \wedge p_2$	ВК (6, 5);
8) q	МП (7, 1)

2.Логичекая структура рассуждения. Пример логического оказательства

Пусть необходимо доказать предложение: если простое число k делит mn и k делит m, то делит n.

Доказательство:

Допустим, что

(1) простое число k делит mn и не делит m.

Тогда из (1) следует, что

(2) k делит mn.

В свою очередь, из (2) и известного положения

(3) Если простое число k делит mn, то k делит m или n, следует, что

(4) k делит m или n.

В то же время из (1) следует, что

(5) k не делит m.

Наконец, на основании (4) и (5) устанавливаем:

(6) k делит n.

3.Схема кратной импликации и запись фигуры логического следования:

$$A_1 \to (A_2 \to \ldots (A_n \to C) \ldots)$$

$$\frac{A_1, A_2, \ldots, A_n}{C}$$

4.Определение эквивалентности; правила введения и удаления эквивалетности:

$$A \leftrightarrow B =_{df} (A \to B) \land (B \to A).$$

ВЭ $\dfrac{A \to B\, B \to A}{A \leftrightarrow B}$,

УЭ $\dfrac{A \leftrightarrow B}{A \to B}$, $\dfrac{A \leftrightarrow B}{B \to A}$,

ТЕМА 9. СИСТЕМЫ НАТУРАЛЬНЫХ ИСЧИСЛЕНИЙ ВЫСКАЗЫВАНИЙ

Предметно-тематический план

Понятие системы естественного вывода. Правила построения доказательства и правила следования. Система Е. Слупецкого-Л. Борковского. Правила построения прямого доказательства в система Е.Слупецкого-М.Борковского (классическая логика высказываний). Правила построения косвенного (апагогического) доказательства. Тривиальное косвенное доказательство. Чисто прямое доказательство. Понятие эвристики. Производные правила.

Ключевые значения и термины

- Антеценденты
- Консеквент
- Ранее доказанная формула
- Допущение косвенного доказательства
- Элементарные доказательства
- Производные правила
- Тезис
- Одноименные доказательства
- Доказуемая формула (теорема)
- Эквиполентность логических систем

Типы заданий для практического занятия

Указание правил, по которым заключение следует из посылок для данного элементарного вывода.

Отыскание предметных следствий из предметных условий (т.е. для задачи, сформулированной на языке-объекте).

Построение прямого и косвенного доказательства формул (схем формул).

Над чем полезно подумать (вопросы для самостоятельной проработки)

1.Какова этимология и расширенный смысл термина «апагогический»?

2.Есть ли отличия между исторически первыми системами естественных исчислений С. Яськовского и Г. Генцена? Каковы правила построения доказательств и правила следования в этих исчислениях?

3.Какие системы искусственных (ненатуральных) исчислений существуют в классической математической логике? Назовите и кратко охарактеризуйте их.

На что следует обратить внимание при изучении темы

Главное теоретическое послание данной тема – понятие о системе исчисления высказываний.

Главное операционально-аналитическое послание – правила и проведение прямых и косвенных доказательств.

Нужно четко представлять себе «общую идеологию» исчисления высказываний, характер соответствующей системности, значение и структурную связь между различными элементами системы.

На основе имеющихся уже сведений о формальных выводах, фигурах рассуждения и пр., необходимо уяснить, общий формальный смысл и структуру того, что называется доказательством формулы (тезиса, теоремы) в данной системе исчисления высказываний. Особую важность представляет вопрос, какова связь используемых в доказательствах символов с содержательными значениями (т.е., с терминами предметного языка, в которых представлено соответствующее «положение дел»).

Очень важно выучить на память правила построения прямого и косвенного доказательства, отличать их.

Рекомендации по решению задач

Задачи, сформулированные на предметном языке, нужно начинать решать с формализации условия. Повторите разделы, связанные с переводом естественных высказываний на язык пропозициональной логики. Особое значение имеет здесь интерпретация союзов как логических связок.

Всегда начинайте с анализа формализованного логического текста по схеме кратной импликации. Глубина анализа может зависеть от условий конкретной задачи, однако, в общем случае этот анализ должен быть предельным. Будьте внимательны, при установлении соответствия конкретных подформул частям схемы следите за скобками.

Поймите, какое доказательство вы собираетесь провести. Мысленно повторите еще раз соответствующие правила построения и осознайте, чем должно закончиться доказательство

Выпишете допущения. Будьте внимательны, применяя соответствующие фигуры рассуждения. Обязательно следите за корректной записью формального вывода, это очень помогает в сложных случаях.

Старайтесь относиться к задаче не формально, а эвристически. Трехточечный контур эвристики исчислений высказываний известен всем: это тип построения доказательства, конкретные подформулы в качестве допущений, правила следования. Ваш анализ должен совершать круговые движения «туда-обратно» между названными точками.

Примеры заданий и упражнений

1.Для каждой схемы указать правила вывода, при помощи которых получается заключение.

1) $((A \wedge B) \to C) \to (A \wedge B) \to ((A \wedge B) \wedge C)$;
2) $(A \to B) \to ((A \to B) \vee (A \to \sim B))$;
3) $((A \vee B) \wedge (C \vee D)) \to (A \vee B)$;
4) $(\sim(A \wedge B) \wedge (C \to \sim D)) \to \sim(A \wedge B)$;
5) $(((A \vee B) \to (C \wedge \sim D)) \wedge \sim\sim(C \wedge \sim D)) \to \sim(A \vee B)$;
6) $(((A \to B) \to (C \vee D)) (A \to B)) \to (C \vee D)$;
7) $(((E \to (F \leftrightarrow \sim G)) \vee (C \vee D)) \wedge (E \to (F \leftrightarrow \sim G))) \to (C \vee D)$;
8) $(((C \vee D) \to ((J \vee K) \to (J \wedge K))) \wedge \sim((J \vee K) \to (J \wedge K))) \to \sim(C \vee D)$;
9) $(((J \to K) \wedge (K \to L)) \wedge (L \to M)) \to ((J \to K) \wedge (K \to L) \wedge (L \to M))$;
10) $((\sim(L \to (M \to N)) \to \sim(C \vee D)) \wedge (\sim(L \to (M \to N))) \to \sim(C \vee D)$.

Добавление

1) $((A \to (B \wedge C)) \wedge (D \to (B \wedge E)) \wedge (A \vee D)) \to ((B \wedge C) \vee (B \wedge E))$;
2) $(((F \leftrightarrow G) \to \sim(G \wedge \sim F)) \wedge (\sim(G \wedge \sim F) \to (G \to F))) \to ((F \leftrightarrow G) \to (G \to F))$;
3) $((\sim(H \wedge \sim I) \to (H \to I)) \wedge ((I \leftrightarrow H) \to \sim(H \wedge \sim I))) \to ((I \leftrightarrow H) \to (H \to I))$;
4) $((((H \wedge \sim I) \to C) \wedge ((I \wedge \sim H) \to D)) \wedge ((H \wedge \sim I) \vee (I \wedge \sim H))) \to (C \vee D)$;
5) $((((O \to P) \to Q) \to \sim(C \vee D)) \wedge (C \vee D) \to ((O \to P) \to Q)) \to (C \vee D) \to \sim(C \vee D)$.

2.Построить прямое и апагогическое доказательство формул.

1) $((D \to E) \to (D \wedge F)) \to E$;
2) $(G \to H \to ((G \wedge H) \vee I)$;
3) $(J \to K) \to J)) \to (K \vee L)$;
4) $(M \vee N) \to (\sim M \wedge \sim O) \to N$;
5) $((P \wedge Q) \to R) \to (P \wedge R)$;
6) $((G \to H) \wedge (I \to J)) \to G \to (H \vee J)$;
7) $((P \to Q) \wedge (R \to S)) \to ((P \vee R) \wedge (Q \vee R)) \to (Q \vee S)$;
8) $((T \to U) \wedge (T \to V)) \to T \to (U \vee V)$;
9) $(((A \vee B) \to C) \to ((C \vee B) \to (A \to (D \leftrightarrow E))) \to (A \wedge D)) \to (D \leftrightarrow E)$;
10) $((I \vee J) \wedge K) \to (\sim L \to \sim(K \wedge J)) \to (K \to (I \to \sim M)) \to \sim(M \wedge \sim L)$.

3.Считая каждую ниже следующую совокупность формул выводом, корректно дополните и завершите его.

1) $(I \to J) \to (J \to K) \to (L \to M) \to (I \vee L) \to (K \vee M)$
   1) $I \to J$;
   2) $J \to K$;
   3) $L \to M$;
   4) $I \vee L$;
   5) $I \to K$;
   6) $(I \to K) \wedge (L \to M)$;
   7) $K \vee M$.
2) $((Q \to R) \to (\sim S \to (T \to U)) \to (S \vee (Q \vee T)) \to \sim S) \to (R \vee U)$
   1) $T \to U$;
   2) $(Q \to R) \wedge (T \to U)$;
   3) $Q \vee T$;
   4) $R \vee U$;
3) $((W \to X) \to ((W \to Y) \to (Z \vee X)) \to ((W \wedge X) \to Y) \to \sim Z)) \to X$
   1) $W \to X$;
   2) $(W \to Y) \to (Z \vee X)$;
   3) $(W \wedge X) \to Y$;

4) $\sim Z$;
5) $W \to (W \to X)$;
6) $W \to Y$;
7) $Z \vee X$;
8) X.

Примеры решения задач

Построить доказательство формулы.

Пусть дана формула $((p \vee q) \wedge \sim p) \to q$.

1) $(p \vee q) \wedge \sim p$ допущ.;
2) $p \vee q$ УК (1);
3) $\sim p$ УК (1);
4) $\sim p \to (p \to q)$ р.д.ф.;
5) $p \to q$ МП (3, 4);
6) $q \to q$ р.д.ф.;

q УД (2, 5, 6).

Дополнение

Пояснение производности правила в системах исчисления высказываний.

Для того чтобы установить, что правило следования, представленное фигурой

$$\frac{A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_n}{C},$$

производно, достаточно найти доказательство формулы вида

$$A_1 \to (A_2 \to \ldots (A_n \to C) \ldots), \qquad (**)$$

т. е. кратной импликации, антецедентами которой служат посылки, а консеквентом служит заключение фигуры (*).

В самом деле, если в каком-либо доказательстве (некоторой формулы) применяется производное правило (*), то в данном доказательстве, скажем, k-я строка содержит формулу C, полученную по правилу (*) из написанных в предшествующих строках (не обязательно в таком порядке) формул A_1, A_2, ..., A_n.

Нетрудно видеть, что если мы построим доказательство формулы (**), то, стерев в предшествующем доказательстве стоящую в k-й строке формулу C и вставив («втиснув») в образовавшийся пробел следующую колонку формул:

k $\quad A_1 \to (A_2 \to (A_3 \to \ldots (A_n \to C) \ldots))$,

$k+1$ $\quad A_1 \to (A_2 \to \ldots (A_n \to C) \ldots)$,

$k+n-1$ $\quad A_n \to C$,

$k+n$ $\quad C$,

получим новое доказательство той же формулы. Понятно, что в этом новом доказательстве формула в $(k+1)$-й строке следует по правилу МП из формулы (**) в k-й строке и формулы A_1, написанной где-то выше; в свою очередь, формула в $(k+2)$-й строке следует по правилу МП из формулы в $(k+1)$-й строке и формулы A_2, стоящей также где-то выше k-й строки, и так до $(k+n)$-й строки, где появляется формула C (стертая в прежнем доказательстве).

В дальнейшем правило следования (*) мы называем ***производным относи- тельно формулы*** (**), если установлено, что данная формула есть логическая теорема.

ТЕМА 10. ОГРАНИЧЕННЫЕ КЛАССИЧЕСКИЕ ЛОГИКИ

Предметно-тематический план

Положительная логика; чисто прямое доказательство. Доказательство разбором случаев и доказательство по частям. Минимальное косвенная логика; слабое косвенное доказательство. Конструктивная логика; квазисильное косвенное доказательство. Сильное (классическое) косвенное доказательство. Понятие равнообъемных систем. Исчисления позитивной импликации. Полнота классического исчисления высказываний.

Ключевые значения и термины

- Расширение (ограничение) системы логики высказываний
- $\mathcal{N}^{pos}$
- $\mathcal{N}^{min}$
- $\mathcal{N}^{cn}$
- $\mathcal{N}^{cs}$
- Сложная конструктивная дилемма
- Простая деструктивная дилемма
- Сложная деструктивная дилемма
- Удаление отрицания
- Семантическая полнота
- Семантическая корректность

Типы заданий для практического занятия

Проведение доказательств данных тезисов в различных ограниченных логиках (системах исчисления высказываний).

Формальное доказательство предметных умозаключений.

Задачи на технику доказательства разбором случаев и доказательства по частям.

Над чем полезно подумать (вопросы для самостоятельной проработки)

1.Виды условных и разделительных силлогизмов в традиционной логике.

2.Что такое разделительные доказательства и как они строятся?

Конструктивное направление в символической логике (см., в частности, К.Гёдель, А.А.Марков, В.Г.Гливенко, А.Н.Колмогоров, Н.А.Шанин).

3.Обязательно поупражняйтесь в выведении обобщенных правил следования (для конечного числа формул) по индукции (закон условного силлогизма, modus ponens и пр.).

На что следует обратить внимание при изучении темы

Необходимо точно выяснить для себя, чем именно отличаются друг от друга последовательно рассматриваемые логики. Рассмотрите, как растет мера «косвенности» доказательств в этих логиках.

Обратите внимание на «логическую симптоматику» *недоказуемости* в данных логиках некоторых теорем, которые оказываются доказуемыми в последовательно расширенных логиках.

Внимательно разберите общий план, структурные особенности и «операционалистику» доказательств посредством разбора случаев и доказательств по частям. Это стандартные и очень популярные логико-аналитические приемы, значение которых выходит далеко за пределы классических исчислений высказываний.

Изучите тактику, структуру и технику доказательства равнообъемности систем исчисления. Эти доказательства строятся практически одинаково для довольно большого класса логик.

Для адекватного представления самого характера символической (математической) логики как таковой, большое значение имеют понятия семантической полноты и семантической корректности. Соответствующая тема не слишком важна в операционально-техническом отношении (хотя такая важность также имеет место), но весьма существенна, так сказать, «металогически», т.е., в отношении ответа на вопрос: что такое современная логика?

Рекомендации по решению задач

Внимательно прочитайте (еще раз) рекомендации по решению задач к теме 9!

Повторите, чем отличаются правила построения косвенных доказательств различной степени косвенности. Эти отличия довольно просты: нужна только внимательность.

С самого начала постарайтесь запомнить наиболее интересные теоремы, доказанные в различных последовательных системах (конечно вместе с тем, в какой именно системе они доказаны). Таким образом вы будете приумножать свой личный капитал «ранее доказанных формул».

Опирайтесь на знания, полученные в курсе традиционной логики (в особенности на сведения, касающиеся условных и разделительных силлогизмов).

Правила разбора случаев и доказательства по частям содержат изящную симметрию. Перед началом решения соответствующих задач постарайтесь увидеть ее. Если это получится, усвоение правил произойдет мгновенно и автоматически (что даже способно доставить специфическое удовольствие!).

Примеры заданий и упражнений

1.Построить чисто прямое доказательство схем формул.

1) $((Q \to R) \to (R \to S) \to \sim S) \to (\sim Q \wedge \sim R)$;
2) $((A \vee B) \to \sim C) \to (C \vee D) \to D$;
3) $(((\sim X \to Y) \to (Z \to X) \to \sim X) \to (Y \wedge \sim Z)$;
4) $((E \vee \sim F) \to (F \vee (E \vee G)) \to \sim E) \to G$;
5) $((P \to Q) \wedge (Q \to P)) \to (R \to S) \to (P \vee R) \to (Q \vee S)$;
6) $((Q \to R) \wedge (S \to T)) \to ((U \to V) \wedge (W \to X)) \to (Q \vee U) \to (R \vee V)$;
7) $((A \to B) \to (C \to D) \to (A \vee C)) \to ((A \wedge B) \vee (C \wedge D))$;
8) $(((H \vee I) \to (J \wedge (K \wedge L)) \to I) \to (J \wedge K)$;
9) $((Y \to Z) \to (Z \to (Y \to (R \vee S)) \to (R \leftrightarrow S)) \to (\sim R \vee \sim S)) \to \sim Y$;

2.Постройте слабое косвенное доказательство схем формул.

1) $(S \to T) \to (\sim T \wedge \sim U) \to \sim S$;
2) $\sim(K \wedge L) \to (K \to L) \to \sim K$;
3) $((K \to L) \to M) \to ((\sim M \wedge \sim(L \to K) \to \sim(K \to L)$;
4) $((W \wedge X) \to (Y \wedge Z)) \to \sim((W \wedge X) \wedge (Y \wedge Z)) \to \sim(W \wedge X)$;
5) $((Q \to R) \to (R \to S) \to \sim S) \to (\sim Q \wedge \sim R)$;
6) $((T \to U) \to (V \vee \sim U) \to (\sim V \wedge \sim W)) \to \sim T$;
7) $(((\sim M \wedge \sim N) \to (O \to N)) \to (N \to M) \to \sim M)) \to \sim O$.

3. Доказательство равнообъемности систем исчисления высказываний.

I. Систему Слупецкого – Борковского для логики высказываний можно получить, заменив в системе N правило УД следующим:

$$\frac{A \vee B \sim A}{B},$$

а правило [II.2] – его частным случаем, правилом [II.2]°. Требуется доказать, что система N равнообъемна системе Слупецкого – Борковского.

2. Показать, что:
1) система, получаемая добавлением к N^{min} правила УО, равнообъемна системе N^{cn};
2) система, получаемая добавлением к N^{min} правила ДО, равнообъемна системе N.

3.Показать, что:
1) система, получаемая добавлением к N^{pos} правил ВО, УО, равнообъемна системе N^{cn};
2) система, получаемая добавлением к N^{pos} правил ВО, ДО, равнообъемна системе N.

Примеры решения задач

1.Построить чисто прямое доказательство схемы формул.

Пусть дана формула $(A \to C) \to ((B \to D) \to ((A \vee B) \to (C \vee D)))$.

1)	$A \to C$	допущ.;
2)	$B \to D$	допущ.;
3)	$A \vee B$	допущ.;
4)	$C \to (C \vee D)$	р.д.ф., T10;
5)	$D \to (C \vee D)$	р.д.ф., T11;
6)	$A \to (C \vee D)$	Сил. (1, 4);
7)	$B \to (C \vee D)$	Сил. (2, 5);
	$C \vee D$	УД (3, 6, 7).

2.Построить доказательство, пользуясь приемом разбором случаев и делением по частям.

Пусть дана формула $(p \vee (q \wedge r)) \to ((p \vee q) \wedge (p \vee r))$.

Часть 1. $(p \vee (q \wedge r)) \to (p \vee q)$.
Случай 1.1. $(p \to (p \vee q))$, р.д.ф., T10.
Случай 2.1. $(q \wedge r) \to (p \vee q)$.

1)	$q \wedge r$	допущ.;
2)	q	УК (1);
	$p \vee q$	ВД (2).

Часть 2. $(p \vee (q \wedge r)) \to (p \vee r)$.
Случай 2.1. $p \to (p \vee r)$, р.д.ф., T10.
Случай 2.2. $(q \wedge r) \to (p \vee r)$.

1)	$q \wedge r$	допущ.;
2)	r	УК (1);
	$p \vee r$	ВД (2).

3.Построить квазисильное косвенное доказательство

Пусть дана формула $(A \vee B) \to (\sim A \to B)$.

Случай 1. $A \to (\sim A \to B)$, р.д.ф., Т34.

Случай 2. $B \to (\sim A \to B)$, р.д.ф., Т35.

ТЕМА 11. АКСЕОМАТИЧЕСКИЕСКИЕ ИСТИСЛЕНИЯ ВЫСКАЗЫВАНИЙ

Предметно-тематический план

Гильбертовы исчисления высказываний. Гильбертова система $\mathcal{H}$. Аксиомы в языке системы и аксиомные схемы. Выводы в системе $\mathcal{H}$. Операция подстановки. Производность правил $\mathcal{N}$ в $\mathcal{H}$. Связь между доказательством формулы в системе $\mathcal{N}$ и выводом в системе $\mathcal{H}$. Эквиполентность систем $\mathcal{N}$ и $\mathcal{H}$. Доказуемость формулы в системе $\mathcal{N}$ и тождественная истинность данной формулы. Непротиворечивость логической системы. Разрешимость логической системы (теории); разрешающий алгоритм. Подсистемы системы $\mathcal{H}$. Независимость логических знаков в системе $\mathcal{H}$. Импликативно-негативные системы.

Ключевые значения и термины

- Аксиома
- Дедукционная теорема
- Вспомогательный вывод
- Результирующий вывод
- Непротиворечивая логическая система
- Разрешимая логическая теория
- Полная логическая теория
- Иерархия частичных подсистем

Типы заданий для практического занятия

Данная тема сугубо «теоретическая». Задачами по ней служат доказательства лемм и теорем, связанных с доказуемостью тех или иных формул или с одноименностью тех или иных доказательств по отношению к определенным систем исчисления высказываний, а также с обоснованием полноты/неполноты, противоречивости/непротиворечивостью систем исчисления высказываний. Важно подробно разобрать соответствующие леммы и теоремы.

Над чем полезно подумать (вопросы для самостоятельной проработки)

1.Охарактеризуйте первую аксиоматическую систему логики высказываний Г.Фреге.

2.Охарактеризуйте «трехаксиомную» систему исчисления высказываний Я. Лукасевича. Докажите равнообъемность этой системы классической аксиоматической системе Г.Фреге.

На что следует обратить внимание при изучении темы

Материал данной темы представляет собой логико-теоретическую основу классического исчисления высказываний как такового.

Сопоставьте аксиоматическое задание исчисления высказываний и задание с помощью определения правил логического вывода.

Особое внимание нужно обратить на такие вопросы, как непротиворечивость и разрешимость формальных систем.

Примите к сведению свойство независимости логических знаков в Гильбертовых системах исчисления высказываний – это одно из условий их множественности (многообразия) таких систем.

Дополнение

Аксиомы исчисления высказываний Д.Гильберта

A1. $A \to (B \to A)$;
A2. $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$;
A3. $A \to (B \to (A \wedge B))$;
A4. $(A \wedge B) \to A$;
A5. $(A \wedge B) \to B$;
A6. $A \to (A \vee B)$;
A7. $B \to (A \vee B)$;
A8. $(A \to C) \to ((B \to C) \to ((A \vee B) \to C))$;
A9. $(A \to B) \to (A \to {\sim}B) \to {\sim}A$;
A10. $A \to ({\sim}A \to B)$;
A10^{0}. ${\sim}{\sim}A \to A$,

ТЕМА 12. ФОРМАЛИЗОВАННАЯ СИЛЛОГИСТИКА Я.ЛУКАСЕВИЧА

Предметно-тематический план

Силлогистика Аристотеля как исчисление имен. Алфавит формализованной силлогистики Я.Лукасевича. Определение силлогистической формулы. Аксиомы и правила следования. Связь Классического исчисления высказываний и формализованной силлогистики. Доказательство некоторых теорем силлогистики. Модусы категорического силлогизма как теоремы формализованной силлогистики. Возможность обоснования недоказуемости теорем. Правила отбрасывания через подстановку и правило отбрасывания через отделение Я.Лукасевича. Правило Е.Слупецкого как аксиома отбрасывания недоказуемых формул.

Ключевые значения и термины

- Элементарные высказывания
- Аксиомы силлогистики
- Barbara
- Datisi
- Силлогистическая формула
- Подстановка

Типы заданий для практического занятия

Доказательство законов превращения, обращения и противопоставления в качестве теорем силлогистики Лукасевича.

Доказательство корректных модусов категорического силлогизма в качестве теорем силлогистики Лукасевича.

Отбрасывание ложных модусов (формул, фигур рассуждения) на основании правил отбрасывания Е. Слупецкого.

Над чем полезно подумать (вопросы для самостоятельной проработки)

1.Какие системы формализации силлогистики Аристотеля существуют кроме системы Я.Лукасевича?

2.Докажите все (не доказанные на лекциях) корректные модусы по всем фигурам в качестве теорем формализованной силлогистики Я.Лукасевича.

На что следует обратить внимание при изучении темы

Формализованная силлогистика Я.Лукасевича структурно и операционально связана с классическим исчислением высказываний и его аксиоматическим представлением по Гильбертовому типу. Поэтому для успешного усвоения материала по теме полезно повторить вопросы, связанные с формальным выводом, а также с доказательством теорем в системе *N*.

Рекомендации по решению задач

Все операционально-технические средства решения соответствующих задач должны быть уже известны.

Нужно хорошо представлять себе, что называется силлогистической формулой. Аксиомы силлогистики необходимо знать на память.

При решении задач очень помогает знание выраженных в традиционной терминологии и форме корректных модусов простого категорического силлогизма, поэтому желательно повторить соответствующие темы из курса традиционной логики.

Примеры заданий и упражнений

1.Доказать

1) Barbara
2) Cesare
3) Darapti
4) Bramantip
5) Celarent
6) Camestres
7) Disamis
8) Camenes
9) Darii
10) Festino и т.п.

2.Показать, является ли данный модус силлогизма по какой-либо фигуре (фигурам) правильным модусом.

1) ААА по третей фигуре
2) АЕЕ по всем фигурам
3) АII по первой и третьей фигурам и т.п.

Примеры решения задач

Доказать теорему силлогистики.

1. $MeP \to (SiM \to SoP)$.

1) MeP допущ.;
2) SiM допущ.;
3) $\sim SoP$ допущ. косв. док.;
4) $\sim\sim SaP$ Df (3);
5) SaP ДО (4);
6) MiP Datisi (5, 2);
7) $\sim MiP$ Df (1);
Пртврч.: 6, 7.

2. $SaP \rightarrow SiP$

1) SaP допущ.;
2) SiS аксиома, S4;
SiP Datisi (1, 2).

Дополнение

1.Аксиомы формализованной силлогистики Я.Лукасевича.

S1. $MaP \rightarrow (SaM \rightarrow SaP)$;
S2. $MaP \rightarrow (MiS \rightarrow SiP)$;
S3. SaS — ***первый закон тождества;***
S4. SiS -- ***второй закон тождества.***

2.Таблица корректных модусов.

Фигура 1		**Фигура 2**		**Фигура 3**		**Фигура 4**	
Barbara	***AAA***	***Cesare***	***EAE***	***Darapti***	***AAI***	***Bramantip***	***AAI***
Celarent	***EAE***	***Camestres***	***AEE***	***Disamis***	***IAI***	***Camenes***	***AEE***
Darii	***AII***	***Festino***	***EIO***	***Datisi***	***AII***	***Dimaris***	***IAI***
Ferio	***EIO***	***Baroco***	***AOO***	***Felapton***	***EAO***	***Fesapo***	***EAO***
Barbari	*AAO*	*Cesaro*	*EAE*	***Bocardo***	***OAO***	***Fresison***	***EIO***
Celaront	*EAO*	*Camestro*	*AEO*	***Ferison***	***EIO***	*Cameno*	*AEO*

ТЕМА 13. ЯЗЫК ЛОГИКИ ПРЕДИКАТОВ ПЕРВОГО ПОРЯДКА (СИНТАКСИЧЕСКИЙ АСПЕКТ)

Предметно-тематический план

Структура сложных высказываний и «микроструктура» элементарных высказываний. Функциональное отношение. Местность функциональных констант. Отношение символов языка логики предикатов и предметных значений. Алфавит логики предикатов (кванторы, переменные, термы, формулы). Схемы формул и формулы; символы метаязыка. Синтаксические операции с формулами логики предикатов. Утверждения с параметрами. Перевод естественных выражений.

Ключевые значения и термины

- Индивидные переменные
- Индивидные константы
- Функциональные константы (n-местные)
- Предикатные константы (n-местные)
- 0-местный предикат
- Аргумент
- Функция
- Терм
- Автономное употребление имен

Типы заданий для практического занятия

Указание области действия кванторов.

Расставление скобок для получения корректно записанной формулы.

Поиск свободных и связанных вхождений переменных

Проверка и проведение (последовательностей) корректных переименований переменных (свободных и связанных).

Проведение подстановок термов.

Запись выражений естественного языка на языке логики предикатов.

На что следует обратить внимание при изучении темы

Прежде всего, выучите алфавит языка логики предикатов. Необходимо точно знать значения всех знаков.

Очень большую важность имеет сопоставление фраз на естественном языке и на языке логики предикатов.

Подольше рассмотрите формулы. Сосредоточьтесь на их структуре и знаковом выражении. Анализируйте, сопоставляйте. Всякий раз задавайтесь вопросом: почему в формуле написана та или иная группа знаков? Как это прочитать?

Побольше пишите на языке логики предикатов! Формализуйте простые фразы. Переходите к более сложным. В идеальном случае вы должны научиться свободно (автоматически) пользоваться языком логики предикатов.

Рекомендации по решению задач

Задачи по данной теме носят «синтаксический» характер. Иными словами, они направлены на закрепление знаний, касающихся семантических отношений между знаками исчисления предикатов первого порядка. Для выполнения этих заданий не нужно решительно ничего кроме внимательности, аккуратности и элементарного владения базовыми сведениями об устройстве языка логики предикатов, о построении на нем законченных фраз (формул) и об их корректных синтаксических преобразованиях. Правда, упомянутое владение должно быть обеспечено известной непринужденностью.

Данный первичный этап, в прочем, весьма существенен для дальнейшего: знаково-символический инструментарий логики предикатов первого порядка является общепринятым набором средств в теоретических построениях и аналитических приложениях современной логики.

Примеры заданий и упражнений

1.Восстановите скобки, чтобы получились формулы.

1) $\forall y \neg \exists z Qx,\ f(a,\ b) \supset \forall z\ \neg R(z,\ x,\ y) \wedge \neg Q(z,\ x,\ y)$;

2) $\neg\neg\exists x P(x,\ a) \supset \forall y \forall z \neg \exists x R(x,\ a,\ b) \vee Q(y) \vee \neg P(x,\ z) \vee \forall z \neg Q(z)$;

3) $\exists z \forall y \exists x R(a,\ b,\ x) \vee \neg Q(g(x,\ y),\ x) \supset \neg\neg\exists z P(x) \vee \neg Q(h(x,\ y),\ z,\ b)$.

2.Укажите область действия квантора в формулах.

1) $\forall x \forall y \forall z(R(g(x,\ y),\ a) \vee \neg Q(z,\ y)) \supset \exists x(\neg Q(z,\ x) \supset (\forall y R(a,\ b, x) \vee \neg Q(x,\ y)))$;

2) $\exists y((P(y,\ f(z)) \vee (\neg \exists x(Q(g(x),\ y) \supset \forall z(\neg Q(z,\ h(a))))) \wedge R(x,\ h(y),\ z))$;

3) $(\neg \forall z Pz \vee \neg \exists y(Q(g(x,z),\ y)) \supset \forall x x \exists y(R(x,\ y,\ h(z)) \supset \neg \exists z \neg P(z,\ g(y)))$.

3.Укажите свободные и связанные вхождения переменных.

1) $\forall x(\exists y(Q(x, y) \wedge P(x, z)) \supset \exists z R(G(x), y, z))$;

2) $(\neg \exists y R(y, g(z), h(x)) \supset \exists z \forall x(\neg P(f(x, y) \vee Q(x, y, h(z)))$;

3) $\forall x \forall y(P(x, f(z)) \supset \neg \exists z(\neg Q(z, x))) \vee R(f(x), g(y, z))$.

4.Используя корректные переименования, получите из формулы (а) формулу (б).

1) (а) $\forall x x(\exists y Q(y, f(x) \supset \neg \forall z(Q(x, h(y, z))$;

(б) $\forall z(\exists x Q(x, f(z)) \supset \neg \forall x(Q(z, h(y, x))$;

2) (а) $\forall x(\forall z R(h(x, y), z) \supset \forall y \neg Q(h(x, y), g(z)))$;

(б) $\forall x_1(\forall x R(h(x_1, y), x) \supset \forall x \neg Q(h(x_1, x), g(z)))$;

3) (а) $\exists x P(x, f(y)) \supset (\neg \forall x(\exists y(f(y), x) \supset \exists z \neg R(h(z), g(x, y)))$;

(б) $\exists z P(z, f(y)) \supset (\neg \forall z(\exists x(f(x), z) \supset \exists x \neg R(h(x), g(z, y)))$.

Дополнение

Примеры записи предметных высказываний на языке логики предикатов (верхние индексы при предикатах опущены).

1. Некто ловит рыбу

$$\exists x \exists y(Q(x,y) \wedge R_2(y)).$$

2. Боря ловит рыбу

$$\exists x(Q(a,x) \wedge R_2(x)).$$

3. Кто-то ловит кого-то

$$\exists x \exists y Q(x, y).$$

4. Существует человек, который ловит рыбу

$$\exists x \forall y(R(x) \wedge (R_2(y) \supset Q(x, y))).$$

5. Все, кто ловит рыбу, удачливы

$$\forall x \forall y(Q(x,y) \supset (R_2(y) \supset P_5(x))).$$

6. Всякий, кто кого-то ловит, всегда кого-либо поймает

$$\forall x(\exists y \mathrm{Q}(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \supset \exists z R_8(x, z)).$$

7. Боря поймал (вот эту данную) большую щуку

$$R_8(a, b_2) \wedge P_3(b_2).$$

8. Существуют такие рыбы, которых никто не поймал

$$\exists x(R_2(x) \wedge \forall z \neg R_8(z, x)).$$

9. Друг Бори не ловит рыбу

$$\forall x(R_2(x) \supset \neg Q(f_1(a), x).$$

10. Друг Бори поймал щуку

$$\exists x(Q_7(x) \wedge R_8(f_1(a), x)).$$

11. Все Борины друзья — рыбаки

$$\forall x(\mathrm{Q}_3(x,a) \supset P_2(x)).$$

ТЕМА 14. ТЕОРИЯ ЗНАЧЕНИЯ (ЛОГИЧЕСКАЯ СЕМАНТИКА) ДЛЯ ЯЗЫКА ЛОГИКИ ПРЕДИКАТОВ

Предметно-тематический план

Отношение и процедура означивания. Понятие модели. Значение выражений. Определение истинности. Выполнимость. Общезначимость.

Эквивалентные модели. Отношение логического следования между формулами логики предикатов. Отношение логической равносильности.

Ключевые значения и термины

- Логическая семантика
- Модель (в логике)
- Формула, выполнимая в модели
- Счетно бесконечное множество
- Общезначимая формула
- Невыполнимая формула
- Подстановка терма
- Переименование переменной

Типы заданий для практического занятия

Материал данной темы имеет теоретический характер. Это важный материал для общего понимания исчислений предикатов. При этом он имеет существенное операционально-аналитическое значение. С этой точки зрения практическая составляющая заданий по данной теме сводится к подробному разбору доказательств и примеров, которые даются на лекциях. Вместе с тем соответствующие сведения и навыки просто необходимы для выполнения заданий по следующей теме.

На что следует обратить внимание при изучении темы

Общее определение и процедура означивания.

Понятие модели.

Определение истинности (выполнимости) и общезначимости формулы.

Отношение следования в логике предикатов.

Особое внимание нужно обратить на умение свободно читать символические конструкции.

Примеры решения задач

Пользуясь определением истинности, сформулировать условие истинности для формул:

1. $M, v \models \forall x \exists y (R(f(x, y) \wedge \neg Qx)$.

Для любого $v' = v(x)$, $v' \models \exists y (R(f(x, y) \wedge \neg Qx)$.

Существует $v'' = v'(y)$, такое, что $v'' \models R(f(x, y) \wedge \neg Qx$.

Существует $v'' = v'(y)$, такое, что $v'' \models R(f(x, y)$ и $v'' \models \neg Qx$.

Существует $v'' = v'(y)$, такое, что $v'' \models R(f(x, y)$ и неверно, что $v'' \models Qx$.

Существует $v'' = v'(y)$, такое, что $\langle f[M](x[M, v''], y[M, v''])\rangle \in R[M]$ и $\langle x[M, v'']\rangle \notin Q[M]$.

2. $M, v \models \forall y \exists x \neg Q(x, h(y)) \supset \exists z R(z, x)$.

Неверно, что $v \models \forall y \exists x \neg Q(x, h(y))$ или $v \models \exists z R(z, x)$.

Неверно, что для всякого $v' = v(y)$, $v' \models \exists x \neg Q(x, h(y))$ или $v \models \exists z R(z, x)$.

Неверно, что для всякого $v' = v(y)$ существует $v'' = v'(x)$, такое, что $v'' \models \neg Q(x, h(y))$ или $v \models \exists z R(z, x)$.

Неверно, что для всякого $v' = v(y)$ существует $v'' = v'(x)$, такое, что неверно $v'' \models Q(x, h(y))$ или $v \models | \exists z R(z, x)$.

Существуют такие $v' = v(y)$ и $v'' = v'(x)$, что $v'' \models Q(x, h(y))$ или $v \models \exists z R(z, x)$.

Существуют такие $v' = v(y)$ и $v'' = v'(x)$, что $v'' \models Q(x, h(y))$, или существует $v^* = v(z)$, такое, что $v^* \models R(z, x)$.

Существуют такие $v' = v(y)$ и $v'' = v'(x)$, что $\langle x[M, v''], h[M](y[M, v''])\rangle \in Q[M]$, или существует $v^* = v(z)$, такое, что $M, v^* \models R(z, x)$.

Существуют такие $v' = v(y)$ и $v'' = v'(x)$, что $\langle x[M, v''], h[M](y[M, v''])\rangle \in Q[M]$, или существует $v^* = v(z)$, $\langle z[M, v^*], x[M, v^*]\rangle \in R[M]$.

Дополнение

Неформальное описание модели для стихотворения Л.Кэррола «Бармаглот» (1 строфа)

Варкалось. Хливкие шарьки
(Б) Пырялись по наве,
И хрюкотали зелюки,
Как мюмзики в мове.

Очевидно, что (Б) истинно тогда и только тогда, когда (мы не будем учитывать временной аспект, хотя (Б) утверждает нечто относительно прошлого) *варкается, существуют хливкие шарьки, которые пыряются по наве, и зелюки хрюкотают так же, как это делают мюмзики, находящиеся в мове.* Фраза, выделенная курсивом, является условием истинности (Б). Теперь сформулируем условия истинности для ее составляющих (здесь и далее ⇔ есть метаязыковое обозначение для «тогда и только тогда»):

(1) «Варкается» истинно ⇔ варкается;

(2) «Шарьки хливкие» истинно ⇔ шарьки принадлежат классу хливких объектов;

(3) «Шарьки пыряются по наве» истинно ⇔ пара объектов ⟨шарьки, нава⟩ принадлежит к классу пар объектов, пыряющихся один по другому;

(4) «Зелюки хрюкотают, как мюмзики в мове» истинно ⇔ тройка ⟨зелюки, мюмзики, мова⟩ принадлежит к классу троек объектов, в которых первый хрюкотает, как второй в третьем.

Очевидно, что (Б) истинно ⇔ (1) существуют объекты, такие, что (2) и (3) и (4) истинно. Для того чтобы установить, так ли это, необходимо:

(а) приписать значение **И** пропозиции «варкалось»;

(б) задать непустые классы объектов, которые обозначены именами «шарёк», «нава», «зелюк», «мюмзик» и «мова»; это равносильно заданию свойств «быть шарьком», «быть навой» и т. д.;

(в) определить, что считать классами хливких объектов, классом пар пыряющихся друг по другу объектов и, наконец, классом троек объектов, из которых первый хрюкотает, как второй в третьем.

ТЕМА 15. ЗАКОНЫ ЛОГИКИ ПРЕДИКАТОВ. ПРОБЛЕМА РАЗРЕШЕНИЯ В ЛОГИКЕ ПРЕДИКАТОВ

Предметно-тематический план

Тождественно-истинные формулы пропозициональной логики и общезначимые формулы логики предикатов. Взаимовыразимость, отрицание и перестановка кванторов. Кванторные аксиомы. Законы *пронесения* и *вынесения* кванторов. Доказательство общезначимости (для) формул. Правило замены эквивалентных. Предваренная нормальная форма формул логики предикатов. Переименование связной переменной. Разрешимость логики высказываний и неразрешимость логики предикатов. Метод и порядок построения семантических таблиц.

Ключевые значения и термины

- Вырожденный квантор
- Отрицание справа/слева
- Конъюнкция справа/слева
- Дизъюнкция справа/слева
- Импликация справа/слева
- Всеобщность справа/слева
- Существование справа/слева
- Замыкание

Типы заданий для практического занятия

Формулировка определения истинности для данной формулы.

Определение условий истинности для формул в определенной модели при определенном означивании.

Указание означиваний при задании определенных предметных значений соответствующих констант и переменных.

Доказательство общезначимости формул.

Приведение формул к ПНФ.

Построение семантических таблиц.

На что следует обратить внимание при изучении темы

Обязательно повторите материал по теме 14. Строго говоря, материал по темам 14 и 15 – это *одна и та же тема* (некоторая демаркация может быть проведена только по тематической линии «Проблема разрешения исчисления предикатов. Метод семантических таблиц).

Нужно овладеть основными техническими приемами формального анализа и формальных построений. Это нужно сделать один раз. Если данное условие выполнено, логическая дискурсия становится легкой и естественной.

Основные законы логики предикатов нужно выучить на память.

Желательно представлять себе в подробностях определение и алгоритм приведения формулы логики предикатов к ПНФ.

Рекомендации по решению задач

Для решения задач по данной теме с необходимостью потребуется весь материал по теме 14 (определения, значение символов и символических конструкций, доказанные результаты, операциональность проведения доказательств, аналитико-инструментальные средства, примеры).

Конкретные указания по каждому типу задач не имеют смысла, т.к. везде реализуется одни и те же формальные принципы, стиль дискурсии, инструментарий и пр. Общие рекомендации должны быть уже известны читателю по прошлым темам: необходимо обратить внимание на следующие моменты: определение основных математических объектов; определение правил трансформации объектов а так же правил связи (перехода) между одними и другими объектами; наконец, технические средства анализа (синтаксические связки, логико-семантические определения и операции).

Примеры решения задач

1.Обоснование общезначимости данной тавтологии

Пусть дана тавтология $((A \supset B) \supset A) \supset A)$. $(*)$

Будем рассуждать от противоположного, а именно — допустим, что (*) не является общезначимой формулой. Тогда существуют модель M и означивание v, для которых неверно, что $M, v \models (A \supset B) \supset A) \supset A$. По определению истинности отсюда получаем, что $M, v \models (A \supset B) \supset A$ и неверно, что $M, v \models A$,
откуда

или (1) неверно, что $M, v \models A \supset B$ и неверно, что $M, v \models A$,
или (2) $M, v \models A$ и неверно, что $M, v \models A$.

Случай (2) невозможен, значит,

неверно, что $M, v \models A \supset B$ и неверно, что $M, v \models A$,

откуда

$M, v \models A$, неверно, что $M, v \models B$ и неверно, что $M, v \models A$,

что также невозможно. Таким образом, предположение о необщезначимости (*) привело нас к противоречию.

2.Построение семантической таблицы

Рассмотрим закон логики предикатов - т.н. закон Реймонда Смаллиана или «парадокс ковбоя»: существует человек, такой что если он пьет, то и все пьют.

Таблица будет выглядеть так:

(1)

	$\exists x(Px \supset \forall yPy)$	
	$\exists x(Px \supset \forall yPy), Pa \supset \forall yPy$	$(\exists r)$
Pa	$\exists x(Px \supset \forall yPy), \forall yPy$	$(\supset r)$
Pa	$\exists x(Px \supset \forall yPy), \forall yPy, Pb$	$(\forall r)$
Pa	$\exists x(Px \supset \forall yPy), \forall yPy, Pb$ $Pb \supset \forall yPy$	$(\exists r)$
Pa, Pb	$\exists x(Px \supset \forall yPy), \forall yPy, Pb$ $\forall yPy$	$(\supset r)$
замыкание		

...

Дополнение

Общезначимые формулы (законы) логики предикатов

1. Все частные случаи тавтологий или тождественно-истинных формул логики высказываний являются общезначимыми формулами логики предикатов.

2. Взаимовыразимость кванторов

$\forall\alpha A \equiv \neg\exists\alpha\neg A$;

$\exists\alpha A \equiv \neg\forall\alpha\neg A$.

3. Отрицание кванторов

$\neg\forall\alpha A \equiv \exists\alpha\neg A$;

$\neg\exists\alpha A \equiv \forall\alpha\neg A$.

4. Перестановка кванторов

$\forall\alpha\forall\beta A \equiv \forall\beta\forall\alpha A$;

$\exists\alpha\exists\beta A \equiv \exists\beta\exists\alpha A$;

$\exists\alpha\forall\beta A \supset \forall\beta\exists\alpha A$.

5. «Кванторные аксиомы»

$\forall\alpha A \supset At$, где At есть $A(\alpha/t)$;

$At \supset \exists\alpha A$, где At есть $A(\alpha/t)$.

6. Вырожденные[31] кванторы

$\forall\alpha A \equiv A$, если A не содержит свободных вхождений α;

$\exists\alpha A \equiv A$, если A не содержит свободных вхождений α.

7. Законы пронесения и вынесения кванторов

а) конъюнкция

$\forall\alpha(A \wedge B) \equiv (\forall\alpha A \wedge \forall\alpha B)$;

$\exists\alpha(A \wedge B) \supset (\exists\alpha A \wedge \exists\alpha B)$;

$\exists\alpha(A \wedge B) \equiv (A \wedge \exists\alpha B)$, если A не содержит свободных вхождений α;

б) дизъюнкция

$\exists\alpha(A \vee B) \equiv (\exists\alpha A \vee \exists\alpha B)$;

$(\forall\alpha A \vee \forall\alpha B) \supset \forall\alpha(A \vee B)$;

$\forall\alpha(A \vee B) \equiv (A \vee \forall\alpha B)$, если A не содержит свободных вхождений α;

в) импликация

$\forall\alpha(A \supset B) \supset (\forall\alpha A \supset \forall\alpha B)$;

$\forall\alpha(A \supset B) \equiv (A \supset \forall\alpha B)$, если A не содержит свободных вхождений α;

$\forall\alpha(A \supset B) \equiv (\exists\alpha A \supset B)$, если B не содержит свободных вхождений α;

$(\exists\alpha A \supset \exists\alpha B) \supset \exists\alpha(A \supset B)$;

$\exists\alpha(A \supset B) \equiv (A \supset \exists\alpha B)$, если A не содержит свободных вхождений α;

$\exists\alpha(A \supset B) \equiv (\forall\alpha A \supset B)$, если B не содержит свободных вхождений α.

ТЕМА 16. АКСЕОМАТИЧЕСКОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ПРЕДИКАТОВ (АИП)

Предметно-тематический план

Множество аксиом исчисления и отношение выводимости. АИП как исчисление всех общезначимых формул и только их. Язык АИП. Логические аксиомы. Аксиомы исчисления высказываний. Кванторные аксиомы. Правила вывода. Определение вывода (доказательства) данной формулы. Доказуемая формула. Примеры доказательств. Дедукционная теорема АИП. Адекватность АИП семантическому определению истинности и отношению логического следования. Корректность и полнота АИП.

Ключевые значения и термины

- «Штопор»
- Аксиоматическое исчисление общезначимых формул
- Производные правила вывода
-

Над чем полезно подумать (вопросы для самостоятельной проработки)

Что такое теорема эквивалентности для исчисления предикатов. Проанализируйте доказательство этой теоремы.

На что следует обратить внимание при изучении темы

Материал данной темы имеет теоретический характер. В логике предикатов нет универсального способа для распознавания общещначимости формул. Это означает, что нет так же универсального средства для установления логической равносильности и отношения логического следования между произвольными формулами. Однако формализовать понятие истинности и отношение логического следования мы можем. Средством для решения этой задачи является аксиоматическое исчисление предикатов.

Важно иметь в виду, что язык логики предикатов остается тем же и для аксиоматического задания исчисления предикатов.

Определение, кванторные аксиомы, правила вывода, доказуемости и пр. задаются просто и изящно.

Обратите внимание на примеры доказательств в АИИ (см. приложение).

Дополнение

Примеры доказательств в аксиоматической логике предикатов

Докажем формулу ∀x$(Px \supset Qx) \supset (\forall x Px \supset \forall x Qx)$.

1. $\forall x(Px \supset Qx) \supset (\forall x Px \supset (\forall x(Px \supset Qx))$ ИВ;
2. $\forall x(Px \supset Qx) \supset (Px \supset Qx)$ ∀;
3. $\forall x(Px \supset Qx) \supset (\forall x Px \supset (Px \supset Qx))$ силл.;
4. $\forall x Px \supset Px$ А∀;
5. $(\forall x Px \supset Px) \supset (\forall x(Px \supset Qx) \supset (\forall x Px \supset Px))$ ИВ;
6. $\forall x(Px \supset Qx) \supset (\forall x Px \supset Px)$ MP (4, 5);
7. $((\forall x(Px \supset Qx) \supset (\forall x Px \supset (Px \supset Qx))) \supset ((\forall x(Px \supset Qx) \supset$ $\supset (\forall x Px \supset Px)) \supset (\forall x(Px \supset Qx) \supset (\forall x Px \supset Qx)))$ ИВ;
8. $(\forall x(Px \supset Qx) \supset (\forall x Px \supset Px)) \supset$ $\supset (\forall x(Px \supset Qx) \supset (\forall x Px \supset Qx))$ MP (3, 7);
9. $(\forall x(Px \supset Qx) \supset (\forall x Px \supset Qx)$ MP (6, 8);
10. $((\forall x(Px \supset Qx) \supset (\forall x Px \supset Qx)) \supset$ $\supset ((\forall x(Px \supset Qx) \wedge \forall x Px) \supset Qx)$ ИВ;
11. $(\forall x(Px \supset Qx) \wedge \forall x Px) \supset Qx)$ MP (9, 10);
12. $(\forall x(Px \supset Qx) \wedge \forall x Px) \supset \forall x Qx)$ R∀(11), x не входит своб. в $\forall x(Px \supset Qx) \wedge \forall x Px$
13. $(\forall x(Px \supset Qx) \wedge \forall x Px) \supset \forall x Qx) \supset$ $\supset (\forall x(Px \supset Qx) \supset (\forall x Px \supset \forall x Qx))$ ИВ;
14. $\forall x(Px \supset Qx) \supset (\forall x Px \supset \forall x Qx)$ MP (12, 13).

Докажем формулу $\exists x P \supset \neg\forall x \neg P$.

1. $\forall x \neg P \supset \neg Px$ — A$\forall$;
2. $(\forall x \neg P \supset \neg Px) \supset (Px \supset \neg\forall x \neg P)$ — ИВ;
3. $Px \supset \neg\forall x \neg P$ — MP (1, 2).
4. $\exists x P \supset \neg\forall x \neg P$

R$\exists$(3) — x не входит своб. в $\neg\forall x \neg P$.

Докажем $\exists x \forall y P \supset \forall y \exists x P$.

1. $\forall y P \supset Py$ — A$\forall$;
2. $Py \supset \exists x P$ — A$\exists$;
3. $\forall y P \supset \exists x P$ — силл. (1, 2);
4. $\exists x \forall y P \supset \exists x P$ — R$\exists$;
5. $\exists x \forall y P \supset \forall y \exists x P$ — R$\forall$.

ТЕМА 17. ОБЩЕЕ ПОНЯТИЕ ФОРМАЛЬНОЙ ТЕОРИИ (ЛОГИЧЕСКОГО ИСЧИСЛЕНИЯ)

Предметно-тематический план

Математическая дискурсия. Свойство стационарности чистого формализма. «Аналитические» и «синтетические» формализмы. Формальная модель и действительность; портной Ст. Лема. Определение формальности в терминах теории алгоритмов. Формальная теория шахмат. Формальная теория П. Лоренсцена. Определение «логики» формальной теории.

Ключевые значения и термины

- Стационарность
- Естественный закон
- Формальный закон
- Алгоритм
- Теория шахмат

Типы заданий для практического занятия

Над чем полезно подумать (вопросы для самостоятельной проработки)

1.Что говорит о формальных теориях Д.Гильберт?
2.Что говорит о формальных теориях Б.Рассел?
3.Что говорит о формальных теориях Р. Карнап?
4.Что говорит о формальных теориях Э. Гуссерль?

На что следует обратить внимание при изучении темы

Тема имеет общий и одновременно вводный характер. Материал представляет собой общие сведения и соображения по поводу математической и аналитической дискурсии как таковой. В то же время этот материал представляет собой своеобразный плацдарм для более профессионального разговора о проблемах (об)оснований(я) математики и теоремах К.Гёделя о неполноте формальных систем.

ТЕМА 18. ПРОБЛЕМА ОСНОВАНИЙ МАТЕМАТИКИ. ТЕОРЕМЫ ГЁДЕЛЯ

Предметно-тематический план

Программа обоснования математики Д.Гильберта. Аксиомы Дж. Пеано. Арифметика М. Пресбургера. Другие представления натуральных чисел. Теорема о представимости. Парадокс «Лжеца» и его формализация. Лемма об автоссылках (Гёделя-Карнапа). Первая теорема Гёделя. Первая теорема Гёделя в форме Б.Рассела. Понятие фундаментальной теории. Вторая теорема Гёделя. Следствия и выводы из теорем Гёделя о неполноте. Формализм и творчество; проблема творчества в математических дисциплинах. Теория моделей.

Ключевые значения и термины

- Дискретные рассуждения
- Произвольное актуальное множество
- Теория множеств
- Шаг индукции
- Нумералы
- Машина Тьюринга
- Относительные интерпретации
- w-противоречие
- Непротиворечивость
- Неполнота

На что следует обратить внимание при изучении темы

Данный материал является своего рода «эстетическим» дополнением к основному материалу курса. Изучая его, можно ощутить логико-математическое предприятие «как оно есть».

Тема имеет продолжения далеко за пределы логических и математических дисциплин. Вместе с тем, здесь можно найти показательные примеры конкретной операционально-технической, знаково-символической и аналитической работы логиков и математиков.

ТЕМЫ КУРСОВЫХ РАБОТ

1. Логический дискурс в книге Жиля Делеза «Логика смысла».
2. Логика квантовой механики.
3. Классическая и неклассическая логика.
4. Интуиционизм в логике и конструктивизм в математике: сходное и различное.
5. Логика оценок и логика норм.
6. Логика времени.
7. Логика вопросов.
8. Логика микромира.
9. Многозначные и бесконечнозначные логики.
10. Нечеткие логики.
11. Символизация логики в творчестве Г.В.Лейбница.
12. Логика и Б.Спиноза.
13. Роль логики в критической философии Канта.
14. Существует ли диалектическая логика?
15. Новая риторика Х. Перельмана.

16. «Логика и рост научного знания» К. Поппера и современная эпистемология науки.
17. Л.Витгенштейн и проект логического позитивизма.
18. Логика и аналитическая философия.
19. Теоремы К. Гёделя о неполноте формальных систем и их «металогическое» значение.
20. Формализация и интерпретация в (по)знании.
21. Проблема оснований математики в XX веке.
22. Парадокс «Лжец» и его современные вариации.
23. Логика и буддизм.
24. С чем имеет дело логика сегодня.

РЕКОМЕНДОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА:

Базовая

1. Гжегорчик А. Популярная логика. — М.: Наука, 1979. — 112с.
2. Гильберт Д., Аккерман В. Основы теоретической логики. М. : 1947.
3. Карри Х.Б. Основания математической логики. М.: Мир, 1969. –
4. 567 С.
5. Калужнин Л. А. Что такое математическая логика. — М.: Наука, 1964.— 149с.
6. Зегет В. Элементарная логика. — М.: Высшая школа, 1985. — 255 с. Пер. с немецкого, 8-е переработанное издание.
7. Бочаров В. А., Маркин В. И. Основы логики. — М.: Космополис, 1994.— 263с.
8. Костюк В. Н. Логика. — Киев-Одесса: Вища школа, 1975. — 110с.
9. Булос Дж., Р.Джеффри. Вычислимость и логика. М.: Мир, 1994.
10. Смальян Р. Теория формальных систем. М.: Наука, 1981.
11. Справочная книга по математической логике. В 4 частях. Под ред. Дж. Барвайса. М.: Наука, 1982.
12. Черч А. Введение в математическую логику М.: ИЛ, 1960
13. Шенфилд Дж Математическая логика М.: Наука, 1975

Расширенный список

1. Булос Дж., Р.Джеффри. Вычислимость и логика. М.: Мир, 1994.
2. Бунге М. Философия физики. М.: Прогресс, 1975.
3. Васильев Н.А. Воображаемая логика. Избранные груды. М.: Наука, 1989.
4. Витгенштейн Л. Философские работы. Ч. 1. М.: Изд-во

"Гнозис", 1994.
5. Витгенштейн Л. Философские работы. Ч. 2. М.: Изд-во "Гнозис", 1994.
6. Волгин Л.И., В.И.Левин. Непрерывная логика. Теория и применения. Таллинн, 1990.
7. Вригт Г. Х. фон. Логико-философские исследования: Избр. тр. М.: Прогресс, 1986.
8. Кант И. Логика. Пособие к лекциям. 1800 // Кант И. Трактаты и письма. М.: Наука, 1980.
9. Карнап Р. Значение и необходимость. М.: ИЛ, 1959.
10. Кофман А. Введение в теорию нечетких множеств. М.: Радио и связь, 1982.
11.Лукасевич Я. Аристотелевская силлогистика с точки зрения современной формальной логики. М., 1959.
12. Минто Вильям. Дедуктивная и индуктивная логика. СПб.: ТИТ "Комета", 1995.
13. Мулуд Н. Анализ и смысл. М.: Прогресс, 1979.
14. Мулуд Н. Современный структурализм. Размышления о методе и философии точных наук. М.: Прогресс, 1973.
15. Поппер К. Логика и рост научного знания. М., 1983.
16. Расева Е. и Сикорский Р. Математика метаматематики. М.: Наука, 1972.
17. Семантика модальных и интенсиональных логик. М.: Прогресс, 1981.
18. Справочная книга по математической логике. В 4 частях. Под ред. Дж. Барвайса. М.: Наука, 1982.
19. Субботин А.Л. Теория силлогистики в современной формальной логике. М., 1965.
20. Тондл Л. Проблемы семантики. М.: Прогресс, 1975.
21. Философия в современном мире. Философия и логика. М.: Наука, 1974.
22. Философия и логика Львовско-Варшавской школы. М.: Российская политическая энциклопедия (РОССПЭН), 1999.
23. Френкель А. А., Бар-Хилел И. Основания теории множеств. М.: Мир, 1966.
24. .Хинтикка Я. Логико-эпистемологические исследования. М.: Прогресс, 1980.
25. Щербатской Ф.И. Теория познания и логика по учению позднейших буддистов. Часть 1. "Учебник логики" Дхарма-кирти с толкованиями Дхармоттары. СПб.: Изд-во АСТА-пресс LTD, 1995.
26. Щербатской Ф.И. Теория познания и логика по учению

позднейших буддистов. Часть 2. Источники и пределы познания. СПб.: Изд-во ACTA-пресс LTD, 1995.
27. Bochenski Joseph M. Formale Logik. Freiburg [im Breisgau], Muenchen: Alber, 1996
28. Carnap R. and Stegmuller W. Induktive Logik und Wahrschemlichkeit. Viena: Springer, 1959.
29. Keynes D. M. A treatise on probability London, 1952.
30. Lesmewski St. Ueber die Grundlagen der Ontologie, im CRVarsovie, 23, 11-132.
31. Reichenbach H. The theory of probability California, 1949.
32. Schleiermacher, Fnedng Dialektik (1814-15) Einleitung zur Dialektik (1833) / Fnedng Daniel Ernst Schleiermacher Hrsg von Andreas Arndt - Hamburg Meiner, 1988.
33. Slupecki J. St. Lesniewski's calculus of classes, im Studia Logica, 1953, 3, 7-71.

Минаков Игорь Викторович, кандидат философских наук, доцент кафедры теоретической и практической философии Харьковского национального университета имени В.Н. Каразина

Учебно-методическое издание

Минаков И.В. Символическая логика: Пособие для практических занятий и самостоятельной работы / И.В. Минаков. – Харьков, 2012. – с.

Рекомендовано
кафедрой теоретической и практической философии
философского факультета ХНУ имени В.Н. Каразина
Протокол № 22 от 30.06.2011 г.

Формат 60х84х16 Тираж 100 экз.