

Міністерство освіти і науки України
Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна
Факультет математики і інформатики
Кафедра вищої математики та інформатики

Кваліфікаційна робота магістра
на тему *«Симетрія в навколишньому світі та її використання
в геометричних задачах»*

Виконала: здобувач ЗВО групи МСз-61,
курсу 2 спеціальності 014.04 «Середня
освіта (Математика)», освітньо-професійна
програма «Математика та інформатика»
Ломоносова Наталія Олександрівна

Науковий керівник: кандидат фізико-
математичних наук, доцент кафедри вищої
математики та інформатики факультету
математики і інформатики
Лисиця Віктор Тимофійович

Рецензент: канд. пед. наук, викладач
математики, викладач вищої категорії,
вчитель-методист, заступник директора КЗ
“Харківський університетський ліцей”
Харківської міської ради *Іванова О.Ю.*

Харків – 2025 р

Анотація

Ломоносова Н.О. Симетрія в навколишньому світі та її використання в геометричних задачах.

Структура роботи. Кваліфікаційна робота містить вступ, три розділи, 21 підрозділів, висновки, список використаних джерел (79 найменувань) та 7 додатків, робота містить 56 малюнків. Загальний обсяг становить **197 сторінок**, з них **71 сторінок основного тексту**.

У роботі досліджено симетрію як ключове поняття геометрії та універсальний принцип організації простору. Розкрито історичний розвиток уявлень про симетрію, її прояви в природі, науці та мистецтві. Проведено аналіз підходів до вивчення теми «Симетрія» в Україні та Німеччині, порівняно зміст підручників і виявлено особливості організації навчального процесу, зокрема використання ІКТ і STEM/STEAM-методів.

Окрему увагу приділено методу геометричних перетворень як ефективному засобу розв'язування задач. Подано класифікацію задач із теми «Симетрія», описано типові труднощі учнів та запропоновано методичні рекомендації щодо їх подолання. Розроблено факультативний курс для учнів 9 класу, що містить завдання різних типів, візуальні матеріали, приклади з навколишнього світу та цифрові моделі.

Результати дослідження можуть бути використані у навчанні геометрії, на факультативах, у STEM/STEAM-проектах та методичній роботі вчителя для розвитку просторового мислення й підвищення пізнавальної активності учнів.

Ключові слова: симетрія, геометричні перетворення, осьова симетрія, центральна симетрія, поворот, STEM-освіта, GeoGebra, задачі з геометрії, методика навчання.

Abstract

Lomonosova N.O. Symmetry in the Surrounding World and Its Application in Geometric Problems.

Structure of the work. The qualification thesis includes an introduction, three chapters, 21 subsections, conclusions, a list of references (79 sources), and 7 appendices; the work contains 56 figures. The total volume is **197 pages**, of which **71 pages represent the main text**.

The thesis examines symmetry as a key concept of geometry and a universal principle of spatial organization. The historical development of the notion of symmetry and its manifestations in nature, science, and art are analyzed. Approaches to teaching the topic “Symmetry” in Ukraine and Germany are compared, with attention to the structure of textbooks and the specific features of the educational process, including the use of ICT and STEM/STEAM methods.

Special attention is paid to the method of geometric transformations as an effective tool for solving problems. A classification of tasks on symmetry is presented, typical student difficulties are described, and methodological recommendations for overcoming them are offered. An elective course for 9th-grade students has been developed, including tasks of various types, visual materials, real-world examples, and digital models.

The results of the study can be applied in geometry teaching, elective courses, STEM/STEAM projects, and in teachers’ methodological practice aimed at developing spatial reasoning and increasing students’ learning motivation.

Keywords: symmetry, geometric transformations, axial symmetry, central symmetry, rotation, STEM education, GeoGebra, geometry problems, teaching methodology.

ЗМІСТ

ВСТУП.....	6
РОЗДІЛ 1. ТЕОРЕТИЧНІ ЗАСАДИ СИМЕТРІЇ ТА ЇЇ ІСТОРИЧНИЙ РОЗВИТОК.....	9
1.1. Розвиток сучасного поняття симетрії.....	9
1.1.1. Роль Германа Вейля у розвитку сучасного поняття симетрії.....	9
1.1.2. Історичний розвиток поняття симетрії за Іаном Стюартом.....	10
1.1.3. Симетрія як універсальний принцип: огляд книги «Світ симетрії».....	12
1.2. Симетрія у навколишньому світі.....	15
1.2.1. Симетрія в природі.....	15
1.2.2. Симетрія в архітектурі.....	19
1.2.3. Симетрія в мистецтві.....	22
ВИСНОВКИ ДО РОЗДІЛУ 1.....	24
РОЗДІЛ 2. ТЕХНОЛОГІЇ ВПРОВАДЖЕННЯ СИМЕТРІЇ У НАВЧАННЯ: ДОСВІД УКРАЇНИ ТА МІЖНАРОДНІ ПРАКТИКИ.....	25
2.1. Симетрія в шкільній математиці.....	25
2.1.1. Вивчення теми симетрія та геометричні перетворення в Україні.....	25
2.1.2. Вивчення теми симетрія та геометричні перетворення в Німеччині.....	27
2.1.3. Порівняння вивчення симетрії в Україні та Німеччині.....	29
2.2. Технології впровадження симетрії у навчання.....	31
2.2.1. Використання ІКТ на уроках геометрії.....	31
2.2.2. Впровадження STEM/STEAM-освіти в сучасній школі України.....	33
2.2.3. Світовий досвід упровадження STEM/STEAM і німецька модель MINT-освіти в контексті STEM.....	38
2.2.4.. Інтеграція STEM/STEAM-освіти в навчання геометрії.....	45
ВИСНОВКИ ДО РОЗДІЛУ 2.....	49

РОЗДІЛ 3. МЕТОДИКА НАВЧАННЯ ТА РОЗВ’ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ	
ІЗ ТЕМИ «СИМЕТРІЯ».....	51
3.1. Метод геометричних перетворень у планіметрії.....	51
3.2. Місце методу симетрії у розв’язуванні задач.....	55
3.3. Методика розв’язування задач із теми «Симетрія» у німецькій школі...59	
3.4. Методичні рекомендації для вчителів щодо проведення факультативного курсу «Симетрія у навколишньому світі та її використання в геометричних задачах».....	63
ВИСНОВКИ ДО РОЗДІЛУ 3.....	68
ВИСНОВКИ.....	70
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ.....	72
ДОДАТКИ.....	81
Додаток 1.....	81
Додаток 2.....	92
Додаток 3.....	100
Додаток 4.....	114
Додаток 5.....	120
Додаток 6.....	173
Додаток 7.....	197

ВСТУП

Симетрія є однією з базових ідей математичної освіти та природничих наук. Вона відображає закономірності, пропорції та гармонію, що пронизують як геометричні фігури, так і явища навколишнього світу. Через вивчення симетрії учні досягають порядку і структуру простору, формують уміння аналізувати, узагальнювати, робити висновки, а також розвивають естетичне сприйняття математичних форм як прояву гармонії в природі, мистецтві й техніці.

Актуальність теми полягає в необхідності оновлення змісту навчання геометрії на основі компетентнісного, дослідницького та STEM/STEAM - орієнтованого підходів. Симетрія є одним із ключових понять шкільного курсу геометрії, зокрема в 9 класі, де завершується формування уявлень про рухи, інваріанти фігур і геометричні перетворення. Її вивчення сприяє розвитку просторового мислення, логічних міркувань, навичок доведення та побудови, а також показує міжпредметні зв'язки математики з фізикою, біологією, мистецтвом, архітектурою.

Зміна освітньої парадигми вимагає від учителя переходу від традиційного викладу матеріалу до створення умов для самостійного відкриття знань, дослідницької діяльності та творчого застосування математичних понять. Тому тема симетрії — з її наочністю, структурністю й універсальністю — відкриває широкі можливості для реалізації компетентнісного підходу, розвитку просторової уяви та формування математичної культури. Необхідно зазначити, що впровадженню теми «симетрія» у навчальний процес приділяється значна увага в багатьох європейських країнах [1-10].

Об'єкт дослідження — зміст і методика викладання теми «Симетрія» в шкільному курсі математики.

Предмет дослідження — дидактичні підходи, засоби ІКТ і STEM/STEAM-інтеграції, а також методика розробки навчальних занять і факультативного курсу з теми «Симетрія».

Мета роботи — теоретично обґрунтувати й методично розкрити можливості теми «Симетрія» для розвитку просторового мислення учнів 9 класу та створити систему навчально-методичних матеріалів і факультативний курс «Симетрія у навколишньому світі та її використання в геометричних задачах».

Завдання дослідження:

1. Висвітлити прояви симетрії у навколишньому середовищі, природі, мистецтві та науці.
2. Проаналізувати подання теми «Симетрія» в чинних шкільних підручниках і програмах.
3. Порівняти методику викладання симетрії в Україні та Німеччині, зокрема у контексті MINT-освіти.
4. Описати інструментальну базу ІКТ і STEM-технологій, релевантну темі симетрії.
5. Обґрунтувати методику використання симетрії для розв’язування геометричних задач і формування дослідницьких умінь.
6. Розробити факультативний курс для учнів 9 класу з прикладами уроків, презентацій і творчих завдань.

Методологічну основу дослідження становлять принципи наочності, діяльнісного підходу, наступності й інтеграції, а також цифровізації навчання, що поєднують математичну точність із творчими практиками (орнаментика, логотипіка, візуальний дизайн).

Інструментальна база включає використання програм GeoGebra, Desmos та інших цифрових середовищ, призначених для моделювання симетричних об’єктів і дослідження їх властивостей.

Практичне підґрунтя дослідження спирається на змістові лінії «симетрія відносно точки, прямої, площини», «осьова й центральна симетрія у просторі», «симетрія в рівняннях» із розширенням до елементів теорії груп симетрій та широким спектром прикладних контекстів (архітектура, дизайн, мистецтво, інженерія). У роботі систематизовано проектну діяльність, 3D-

модельовання, комп'ютерні візуалізації та міжпредметні STEAM-завдання як провідні методи опанування теми.

Наукова новизна полягає в інтеграції змістових, технологічних і методичних рішень у тему «Симетрія» як наскрізну ідею шкільної математики — від теоретичного обґрунтування значущості до розроблення системи занять і факультативного курсу.

Практична значущість полягає у створенні готових до використання програм занять, методичних рекомендацій і добірок завдань, придатних для впровадження у 9 класах.

Структура роботи відповідає меті та логіці дослідження:

Розділ 1 – теоретичні засади симетрії та її історичний розвиток, симетрія в навколишньому середовищі;

Розділ 2 – аналіз підручників і порівняння практик (Україна / Німеччина); технології впровадження симетрії у навчання: досвід України та міжнародні практики (ІКТ, STEM, MINT);

Розділ 3 – використання задач із теми «Симетрія» та методика їх розв'язування на уроках геометрії, розробка занять і методичних матеріалів для 9 класів, у тому числі факультативного курсу «Симетрія у навколишньому світі та її використання в геометричних задачах».

Апробація результатів дослідження.

За темою дипломної роботи було проведено заняття для учнів 9 класу в Комунальному закладі *«Харківський ліцей № 131 Харківської міської ради»*. Під час занять було апробовано факультативний курс «Симетрія у навколишньому світі та її використання в геометричних задачах», розроблений у межах дослідження. Отримані результати підтвердили ефективність запропонованої методики, її відповідність віковим особливостям учнів та позитивний вплив на формування просторового мислення, пізнавальної активності й інтересу до математики.

Результати дослідження опубліковано у роботах [10, 69]

РОЗДІЛ 1

ТЕОРЕТИЧНІ ЗАСАДИ СИМЕТРІЇ ТА ЇЇ ІСТОРИЧНИЙ РОЗВИТОК

1.1. Розвиток сучасного поняття симетрії

1.1.1. Роль Германа Вейля у розвитку сучасного поняття симетрії

Герман Вейль (1885–1955) — німецький математик, фізик і філософ, який зробив вагомий внесок у формування сучасного наукового світогляду. Його праця *Symmetry* (1952), створена на основі лекцій у Принстоні, започаткувала цілісний підхід до розуміння симетрії як універсального принципу, що поєднує закономірність, гармонію й естетику в природі, мистецтві та науці [11, с.16]. Вейль підкреслював, що симетрія є проявом внутрішнього порядку світу.

На його думку, симетрія — це ідея, що об'єднує різні галузі пізнання: від закономірного розташування листя чи кристалів до архітектури й мистецтва [11, с.25]. Математика, особливо теорія груп, слугує засобом точного опису симетрій і пояснює інваріантність об'єктів у геометрії та фізиці [11, с.62]. Закони збереження енергії, імпульсу чи заряду Вейль трактував як наслідок симетрії природних законів, розглядаючи її не лише як естетичний, а як фундаментальний фізичний принцип [11, с.118].

У книзі *Symmetry* Вейль поєднав наукову точність і філософську глибину. Він переходить від інтуїтивного сприйняття симетрії до її математичного визначення — інваріантності об'єкта щодо певних перетворень [11, с.25]. Починаючи з двосторонньої симетрії, дослідник показує, як вона виражає зв'язок між формою, функцією та красою [11, с.25]. Далі він розглядає динамічні форми — трансляційну та ротаційну симетрію, що відображають повторюваність і циклічність у природі та мистецтві. Вейль підкреслює, що ці типи симетрії пояснюють гармонію природних форм — від кристалів і сніжинок до квітів і архітектурних структур [11, с.48].

У мистецтві симетрія створює ритм, рівновагу та впорядкованість. Давні культури інтуїтивно використовували трансляційні й ротаційні симетрії в

орнаментах, що символізували прагнення до гармонії. Вейль розглядав орнамент як видимий вираз симетрії — поєднання розуму й почуття [1, с.93]. Особливу увагу він приділяв ісламським орнаментам, які поєднують математичну точність і змістовну глибину [11, с.98], а також європейській традиції — від античних пропорцій до ренесансних ідей Леонардо да Вінчі та Дюрера [11, с.99]. У XX ст. мистецтво Моріса Ешера стало прикладом поєднання художності та наукової точності у зображенні симетрій [11, с.102].

Вейль наголошував на ролі симетрії у природничих науках, особливо у кристалографії, де вона проявляється найвиразніше. Кристали, за його словами, є фізичним втіленням математичної закономірності: їхня структура підпорядкована трансляційним і ротаційним групам симетрій [11, с.115; 12, с.29]. Поняття інваріантності, тісно пов'язане з теорією відносності, показує сталість законів природи при різних перетвореннях [11, с.118]. Кожен тип симетрії відповідає певному закону збереження — енергії, імпульсу чи моменту.

Отже, для Германа Вейля симетрія — це універсальний принцип, що поєднує математику, фізику, мистецтво й філософію. Вона є не лише властивістю форм, а способом мислення, який відображає єдність закону, краси й гармонії. Ідеї Вейля залишаються актуальними й сьогодні, особливо в контексті STEM-освіти, де симетрія виступає містком між науковим і художнім осмисленням світу.

1.1.2. Історичний розвиток поняття симетрії за Іаном Стюартом

У книзі Іана Стюарта *Why Beauty is Truth: A History of Symmetry* (2007) історія симетрії постає як розвиток єдиної математичної ідеї протягом трьох тисячоліть [13, с.1–3]. Автор показує, що симетрія спершу виникла як практичний прийом у давніх цивілізаціях, у греків набула філософського змісту, у середньовіччі стала алгебраїчною категорією, а в XIX–XX ст. перетворилася на універсальну мову науки [13, с.1–3].

Вавилонський етап. У Вавилоні (2000–1600 рр. до н.е.) ще не існувало поняття симетрії, однак уже застосовувався прийом “доповнення до квадрата” при розв’язуванні рівнянь другого степеня [13, с.1–16]. Ця рівновага між невідомим і відомим стала ранньою інтуїцією симетрії в алгебраїчних структурах, що пізніше лягло в основу алгебри.

Античність. Грецька математика вивела симетрію за межі утилітарних обчислень. У *Елементах* Евклід систематизував знання про фігури, що зберігають рівність сторін і кутів, зробивши симетрію предметом раціонального аналізу [13, с.17–33]. Піфагор і Платон піднесли її до рівня принципу гармонії світу: правильні многогранники, описані у *Тимей*, стали моделями космосу.

Середньовіччя. Переклади античних творів арабською й латинською мовами створили новий простір, де геометричне мислення поєдналося з алгебраїчним. Аль-Хорезмі та його послідовники започаткували символічну алгебру, що дозволила трактувати симетрію як властивість рівнянь [13, с.33–45].

XIX століття — Еваріст Галоа. Галоа довів, що можливість розв’язати рівняння в радикалах визначається симетріями його коренів [13, с.97–122]. Якщо перестановки коренів утворюють “регулярну” групу, розв’язання існує; якщо ні — неможливе. Це й стало, за Стюартом, “народженням сучасної симетрії”.

XX століття — симетрія в фізиці. Ідеї симетрії вийшли за межі математики. Теорія відносності Ейнштейна ґрунтується на принципі інваріантності фізичних законів у різних системах відліку. Еммі Нетер довела зв’язок між симетріями й законами збереження: часовій відповідає енергія, просторовій — імпульс [13, с.165].

У сучасній фізиці групи симетрій визначають не лише об’єкти, а й самі взаємодії (Стандартна модель, теорія струн) [13, с.173–199].

Освітній вимір. Стюарт подає історію симетрії через постаті математиків — від Евкліда й Платона до Галоа та Нетер, що робить матеріал придатним для навчання й показує еволюцію математичного мислення.

Стюарт показує, що розвиток поняття симетрії — це безперервний процес: від вавилонських алгоритмів до теорії груп і сучасної фізики. Симетрія з “красивої форми” перетворюється на універсальний принцип збереження та основу наукових законів.

Докладніший виклад історичного розвитку поняття симетрії, зокрема розширені авторські матеріали за працями Германа Вейля та Іана Стюарта, подано у Додатку 1.

1.1.3. Симетрія як універсальний принцип: огляд книги «Світ симетрії»

Книга О. Ф. Новака та І. В. Трошина «*Світ симетрії*» є ґрунтовним міждисциплінарним дослідженням, що розкриває роль симетрії як універсального принципу організації світу. Автори переконливо доводять, що симетрія — це не лише математичне чи естетичне поняття, а фундаментальний закон природи, який визначає гармонію, закономірність і порядок у всіх сферах буття — від мікросвіту до архітектурних форм.

У вступі до книги наголошується: «Симетрія – одна із методологічних ідей, які об’єднують воедино всі науки про природу» [14, с.4]. Ця теза задає провідну ідею всього видання: симетрія розглядається не лише як властивість геометричних фігур чи фізичних систем, а як загальний принцип упорядкування природи та мислення. Такий підхід перегукується з ідеями Германа Вейля, який трактував симетрію як мову краси й істини у науці, та з поглядами Іана Стюарта, що розглядав її як ключ до розуміння гармонії світу.

Праця складається з чотирьох взаємопов’язаних розділів, які послідовно розкривають розвиток уявлень про симетрію — від геометричних форм до закономірностей мікросвіту. Кожен розділ має власну логіку, але разом вони

утворюють цілісну систему знань про симетрію як універсальне явище природи й мислення.

Перший розділ «Симетрія положень, форм і структур» формує теоретичну основу поняття симетрії та показує її прояви в геометричних і природних об'єктах. Симетрія тлумачиться як інваріантність об'єкта при певних перетвореннях — властивість зберігати свій вигляд попри зміни. Автори підкреслюють: «Симетричним називають об'єкт, який можна певним чином змінювати, дістаючи як наслідок те, з чого починали» [14, с.6].

У розділі подано класифікацію основних видів симетрії:

- осьова (дзеркальна) — характерна для фігур з віссю симетрії (листок, метелик, фасад собору);
- поворотна (обертальна) — збереження виду при обертанні навколо центра (соняшник, зірка, ромашка);
- трансляційна (паралельне перенесення) — повторюваність елементів уздовж напрямку (орнаменти, бордюри, кристалічні решітки);
- ковзна та дзеркально-поворотна симетрії, що поєднують кілька перетворень.

Окрім класичних типів, розглянуто явище самоподібності та фрактальності. На прикладах трикутника Серпінського й кривої Коха пояснено, що симетрія може виявлятися на різних рівнях масштабування, утворюючи практично нескінченну гармонію форм [14, с.45]. Такий аналіз допомагає побачити перехід від геометричних понять до загальнонаукових ідей структурної впорядкованості.

Значну увагу приділено симетрії функцій, що має безпосереднє педагогічне значення. Розглянуто властивості парних і непарних функцій та симетрію графіків відносно осей координат [14, с.53]. Цей матеріал поглиблює зв'язок математики з практичними аспектами побудови та аналізу форм.

У другому розділі «Фізичний світ і симетрія» поняття симетрії переходить із геометричної площини у сферу природничих наук. Автори розглядають структуру кристалів, хвильові процеси, закономірності в оптиці

й механіці, вказуючи, що симетрія лежить в основі закономірностей руху та взаємодій.

Особливо виділено зв'язок симетрії з ідеями спеціальної теорії відносності А. Ейнштейна. Сталість фізичних законів у різних системах відліку пояснюється інваріантністю простору і часу: «Інваріантність фізичних рівнянь при переході між системами відліку є найвищим проявом симетрії» [14, с.96]. Таким чином, симетрія розглядається як загальний принцип, що забезпечує єдність усіх фізичних процесів — від механічних до електромагнітних.

У третьому розділі «Закони механіки і просторово-часова симетрія» розкрито взаємозв'язок симетрії з основними законами механіки та збереження. Інваріантність простору зумовлює збереження імпульсу, а інваріантність часу — збереження енергії. Таким чином, сталість фізичних законів є наслідком глибинних симетрій простору-часу.

Автори спираються на закони Ньютона та спеціальну теорію відносності, показуючи, що симетрія виступає універсальним критерієм істинності фізичних законів. Тут симетрія втрачає суто геометричний зміст і постає як загальнонауковий закон порядку та стійкості руху.

Фінальний розділ «Світ елементарних частинок і симетрія» присвячено проявам симетрії у квантовій фізиці та світі елементарних частинок. Розглядаються закони збереження енергії, заряду та маси, СРТ-теорема й принципи Великого об'єднання, що підкреслюють універсальність симетрії на найглибшому рівні природи [14, с.155–195].

Окрему увагу приділено співіснуванню симетрії та асиметрії. Автори зазначають: «Асиметрія вносить життя в досконалість симетрії» [14, с.33]. Таке співвідношення розглядається як умова динамічної рівноваги в природі — асиметрія створює різноманітність, а симетрія забезпечує сталість та порядок.

Праця О. Ф. Новака та І. В. Трошина має високу педагогічну цінність. Вона може бути використана під час викладання математики, фізики,

інформатики та природознавства. Книга містить велику кількість прикладів, ілюстрацій і завдань, які сприяють розвитку просторового мислення й аналітичного підходу. Її матеріали підходять для створення міжпредметних STEM-курсів і факультативів, зокрема курсу «Симетрія в навколишньому світі та її використання в геометричних задачах».

Таким чином, книга «*Світ симетрії*» є не лише науковим дослідженням, а й дидактичною моделлю, у якій симетрія виступає інтеграційним принципом природи, науки та культури. Вона поєднує наукову глибину з практичною орієнтованістю й відображає сучасне українське бачення симетрії як універсального принципу пізнання.

1.2. Симетрія у навколишньому світі

1.2.1. Симетрія в природі

Один із найвідоміших сучасних популяризаторів математичної симетрії, Ієн Стюарт, показує, що природні форми — від сніжинок до квіток — поєднують красу та математичну закономірність [15].

Симетрія є одним із базових механізмів організації природних форм: вона зменшує “вартість” конструкцій, полегшує керування рухом і потоками речовини та енергії, підвищує стійкість до збурень і водночас створює впізнавані візуальні сигнали. У цьому сенсі симетрія — не просто естетика, а принцип економії, узгодженості та функціональної доцільності, який однаково проявляється у живому й неживому світі [15, с.14-27]. У найширшому розумінні йдеться про інваріантність форми за певних перетворень: від відбиття й повороту до перенесення та складних комбінацій.

У середовищах, де однаково важливі всі напрямки простору, природно виникають радіально симетричні структури. Морські зірки, медузи, морські їжаки організовані так, щоб сприймати подразники і взаємодіяти з потоками з будь-якого боку; це полегшує живлення, захист і переміщення по субстрату. У квітів типу ромашки або кошиків айстрових пелюстки та квіткові трубочки впорядковуються навколо центру, створюючи для запилювача «безадресний»

доступ: приземляйся з будь-якого напрямку — геометрія однаково зручна. Кошик соняшника має ще глибший рівень закономірності: насіння розташовується подвійними спіралями, кількість яких у лівому і правому напрямках — сусідні числа Фібоначчі; така організація максимально ущільнює «пакування» елементів, зменшуючи порожнини й механічні напруження, а разом з тим породжує впізнавану естетику [15].

Коли важливим стає спрямований рух і керованість, домінує *осьова (дзеркальна) симетрія*. У більшості рухливих тварин ліва і права половини тіла є дзеркально відповідними: парні очі дають стерео зір і точну оцінку дистанції, парні вуха — локалізацію звуку, парні кінцівки — стабілізацію траєкторії та зменшення енергетичних витрат на корекцію положення. Аеродинамічні та гідродинамічні контури риб і комах узгоджені саме з такою симетрією, що знижує опір середовища і забезпечує маневреність [14, с.49–50]. У рослин центральна жилка листка та дзеркальна будова лопатей пов'язані з механікою листкової пластинки, транспортуванням води і максимізацією освітлення. Для екологічних взаємодій дзеркальна симетрія корисна і хижаку, і жертві: перший отримує «кероване шасі» для атаки, друга — ефективні маневри ухилення.

Обертальна симетрія часто поєднується зі спіральними законами росту. Спіральна філотаксія листків мінімізує взаємне затінення, рівномірно розподіляє точки росту навколо осі стебла і поліпшує вентиляцію; у квітів (лілії, орхідеї) впорядковане розміщення пелюсток робить сигнали для запилювачів читабельними з багатьох напрямків; у щільних суцвіттях і шишках ми знову спостерігаємо «економну упаковку», де кут повороту визначає порядок симетрії і відповідає оптимальному заповненню площини [15, с.60-71]. Окремий і показовий випадок — *п'ятиразова обертальна симетрія*. Морські зірки з п'ятьма «променями» досягають одночасно механічної рівноваги, зручного розподілу опорних точок і високої відновлюваності втрачених частин; п'ятипелюсткові квіти типу барвінку формують виразний полярний маркер для запилювачів; у плодах (яблуко,

гранат) п'ятикамерність проявляється у внутрішній архітектоніці, помітній на поперечному зрізі [15, с.60-71]. Цей тип рідкісний у порівнянні з 2-, 3-, 4- чи 6-кратними і тим цікавий, що не породжує періодичних «решіток» у площині — отже, не продовжується нескінченно регулярним візерунком.

Людське тіло — наочний приклад *білатеральної організації*: симетрія парних органів поєднується з функціональною асиметрією внутрішніх систем (серце, печінка) — нагадування, що симетрія в біології майже завжди «працює» разом із відхиленнями від неї. Такі контрольовані асиметрії полегшують розміщення органів у обмеженому об'ємі, оптимізують прокладку судин і нервів, а на рівні поведінки забезпечують спеціалізацію (провідна рука, око, півкулі). Отже, функціональна доцільність часто потребує тонкого порушення симетрії — і саме цей баланс створює ефективну конструкцію живої системи.

Симетрія у неживій природі зумовлена мікроскопічною організацією речовини. Сніжинки — класичний образ: *гексагональна* ґратка льоду визначає обертальну симетрію шостого порядку, шість гілок ростуть синхронно, локально зберігаючи дзеркальність; конкретний «візерунок» диктують мікрозміни температури, вологості, турбулентності повітря — тому дві однакові сніжинки практично не трапляються [15, с.70-71]. Та сама логіка поширюється на кристалізацію мінералів і до закономірностей огранки — по суті, на макрорівні ми спостерігаємо відбиток симетрії міжатомних зв'язків. Для навчання ці приклади зручні тим, що вводять поняття кута 60° , центра симетрії, порядку повороту, а також мотивів фрактального нарощування гілок.

Функціональні ролі симетрії, що повторюються в різних таксонах і середовищах, можна підсумувати як «економія й узгодженість». По-перше, це стабільність руху і зниження енергетичних витрат (аеродинаміка / гідродинаміка у тварин з дзеркальною формою, регулярні опорні схеми у багатопроменевих організмів). По-друге, рівномірний доступ до ресурсів: світла — у філотаксії листків, нектару — у радіально симетричних квітів, поживних потоків — у коралових поліпів [14, с.16]. По-третє, механічна

надійність і «упаковка»: щільні суцвіття, шишки, плодові камери, кістякові структури організмів; регулярність розподіляє напруження, дає передбачувані «шляхи» для передачі навантаження. По-четверте, інформаційні сигнали: симетричні візерунки крил, квіткові корони, контрастні мітки виконують роль «азбуки Морзе» для партнерів і взаємодіючих видів; читабельність узору під різними кутами — очевидна перевага для запилення й розмноження. Нарешті, симетрія виступає «мовою програмування росту»: повторювані правила морфогенезу — від розміщення меристем до послідовностей гілкування — простіше кодуються і надійніше відтворюються в розвитку, ніж довільні схеми; саме тому у природі так багато регулярних орнаментів.

Водночас природа рідко вимагає ідеальної симетрії. Невеликі порушення — зсуви, скручування, асиметричні добавки — часто підвищують ефективність: листки трохи «ламають» геометрію, щоб уникати взаємного затінення; риби мають незримі асиметрії м'язових мас для специфіки плавання; у багатьох квітів помірна двобічність фокусує доступ певного запилювача, збільшуючи успішність перенесення пилку. Отже, оптимум лежить між суворим порядком і адаптивними відхиленнями — і саме цей діапазон створює різноманітність форм.

З педагогічної точки зору, природні приклади симетрії є прямим «містком» до шкільних понять осі, центра, кута повороту, порядку симетрії та інваріантності перетворень. Ілюстрація зрізу яблука, кошика соняшника, будови сніжинки чи фотографій крил метеликів дозволяє без абстракцій ввести геометричні ідеї, а далі — перейти до формалізації через побудови, координатний опис, елементи теорії перетворень. Такі кейси інтегруються у STEM-формат: на одному прикладі учні бачать біологічний сенс форми, фізичні обмеження середовища, хімічну/кристалічну структуру та математичну мову опису [14; 15]. Симетрія в природі постає як «граматика» формотворення, що з'єднує спостереження з математизацією і вчить бачити універсальні закони за різноманітним явищ.

1.2.2. Симетрія в архітектурі

Симетрія в архітектурі виступає узагальненою мовою гармонії: вона впорядковує простір відносно осей, точок і площин, робить будівлю читабельною, збалансованою та психологічно переконливою. Історія архітектури від античності до сьогодення відображає, як цей принцип слугує одночасно естетичним і конструктивним інструментом, що поєднує математичну логіку, художню інтуїцію та інженерну доцільність. У класичних культурах симетрія стала маркером «правильних» пропорцій: грецькі храми, зокрема *Парфенон на афінському Акрополі*, збудовано як осьово організовані цілісності, де фронтон, колонада і стіни співвіднесені з центральною віссю, а співвідношення висоти, ширини й довжини наближено до «золотого поділу»; навіть легкі виправлення форми колон (ентазис) працюють на візуальне підсилення симетрії та прямолінійності. Римський Пантеон продовжує цю лінію в об'ємі: ротонда і портик утворюють збалансовану композицію, а купол із центральним окулюсом репрезентує тривимірну симетрію, що узгоджує просторову форму з символікою небесного склепіння [16, с.306]. Ренесанс повертає симетрію як раціональний порядок, підкріплений математикою: у *Віллі Ротонда Андреа Палладіо* квадратний план і чотири ідентичні фасади створюють «тотальну» симетрію навколо центра, а купол підкреслює вертикальну вісь, завдяки чому будівля стає геометрично довершеною формою, інтегрованою в ландшафт [16, с.286]. Теоретично цю установку осмислює Леон Баттіста Альберті, для якого симетрія і пропорція є не лише способом зведення конструкцій, а й засобом емоційного впливу через числову впорядкованість частин [17; 11, с.50].

Поза «високою» класикою симетрія потужно присутня в народній традиції. *Українська селянська хата* кінця XIX – початку XX століття відображає формальну врівноваженість фасаду (вікна по обидва боки дверей, симетричний скатний дах) і внутрішню організацію простору, що тяжіє до дзеркальної відповідності приміщень відносно печі або осі входу. Декоративні

мотиви — від мальованих розет і стилізованих квітів до різьблених наличників — відтворюють геометричні схеми, де симетрія стає носієм смислів захисту, достатку та злагоди, поєднуючи утилітарність із символікою [18, с.14, 21]. У східноісламській традиції симетрія набуває ще більш абстрактного й універсального виміру: планувальні композиції мечетей і медресе організовані навколо центральних вузлів — двору, купола, міхраба — а поверхні стін, склепінь і порталів вкриваються геометричними теселяціями та каліграфічними фризами. Такі орнаменти, вибудовані на комбінаціях правильних багатокутників і криволінійних плетінок, створюють враження нескінченної впорядкованості й ритму, де кожен модуль симетрично відлунює в іншому [11, с.14, 49]. *Купол мечеті Шейха Лотфолли в Ісфахані* відображає концентричне розгортання мотиву, що підсилює вісєву й радіальну організацію поверхні, тоді як зали *Альгамбри у Гранаді* з їхніми мозаїчними «килимами» і сталактитовими склепіннями втілюють у камені та кераміці принцип регулярного симетричного заповнення площини [11, с.109].

Модерні та сучасні практики не відмовляються від симетрії, але трактують її гнучкіше, поєднуючи з новими матеріалами й вимогами аеродинаміки, енергоефективності та урбаністичної інтеграції. Вежа *30 St Mary Axe у Лондоні (Gherkin)* з її спіральною діагональною сіткою пропонує об'ємну обертальну впорядкованість: плавне звуження до вершини та регулярний рисунок фасаду зменшують вітрові навантаження, оптимізують освітлення і вентиляцію, а отже, переводять симетрію з площини естетики у сферу експлуатаційної раціональності. *Музей Сумайя в Мехіко*, вкритий «шестикутною шкірою» з алюмінієвих панелей, відображає інший варіант: глобальна форма є складною та ніби асиметричною, але її поверхневий узор організовано регулярною шестикутною мережею, що створює візуальну стабільність і впорядкованість навіть за мінливої кривизни. Поруч із цим симетрія у XX–XXI століттях нерідко вступає в свідомий діалог з асиметрією: музеї на кшталт *Гуггенхайма в Більбао* або *Центру Гейдара Алієва в Баку* працюють на контрасті — відмовляючись від суворої вісєвості, вони все ж

спираються на повторювані модулі й ритми, що забезпечують конструктивну логіку і читабельність форми. Це відповідає загальній тенденції до керованої асиметрії, коли симетрія зберігається на рівні модуля чи фасадного рисунку, але свідомо порушується на рівні об'єму будівлі для досягнення динамічності композиції. Таким чином, сучасна архітектура радше «налаштовує» симетрію, ніж копіює її канонічні схеми: в одних випадках підкреслює, в інших — порушує, але майже завжди використовує як інструмент керування навантаженнями, світлом, потоками повітря і людським рухом.

В архітектурі симетрія впізнається миттєво: центральна вісь, парні вікна, повтор колон, врівноважені об'єми. Парфенон в Афінах — приклад дзеркального фасаду та продуманих пропорцій; Пантеон у Римі поєднує круглий простір і портик так, що зовнішня й внутрішня логіка зливаються в єдину гармонію [16, с.306]. У добу Ренесансу Андреа Палладіо вибудовував вілли так, щоб кожна частина мала «пару», а план і фасади читалися як ясна симетрична схема [16, с.286]. І сьогодні симетрія допомагає архітекторам робити будівлі зрозумілими для користувача: там, де план врівноважений, легше орієнтуватися, простір здається цілісним і спокійним.

Освітній потенціал архітектурної симетрії очевидний: через конкретні приклади — фасад Парфенона, перетин Пантеону, план Вілли Ротонда, орнаментальні поля Альгамбри, народні українські хати — легко вводити шкільні поняття осі та центра симетрії, порядку обертання, подібності, пропорції, «золотого поділу». Такі кейси напряду пов'язують геометричні перетворення з реальними конструктивними рішеннями, дозволяючи інтегрувати математику з історією мистецтв, культурологією, технологіями матеріалів та основами інженерії. Симетрія в архітектурі, таким чином, постає не як декоративна опція, а як міждисциплінарний принцип, що узгоджує красу з функцією, традицію — з інноваціями, а ідеали гармонії — з вимогами сучасного міста.

1.2.3. Симетрія в мистецтві

Симетрія в мистецтві виступає універсальним засобом організації форми, що забезпечує гармонію, рівновагу та виразність композиції. Вона допомагає впорядкувати елементи твору, підкреслити головне й зробити його сприйняття більш цілісним. Збалансоване розміщення частин композиції дозволяє глядачеві швидко «зчитати» художній задум і відчутти узгодженість цілого. Від давніх часів симетрію розглядали як символ правильного порядку світу: у мистецтві Давнього Єгипту, Месопотамії та Греції вона виражала уявлення про гармонію Космосу [11, с.48]. Скульптор Фідій шукав «міру» в пропорціях людського тіла, а архітектори Парфенона створили фасад, у якому всі елементи врівноважені та підпорядковані чіткій системі пропорцій [6, с.306]. У добу Відродження до цього підходу додалася ідея «золотого поділу»: Леонардо да Вінчі пов'язав красу з простими та закономірними співвідношеннями [19]. У XX столітті митці навчилися поєднувати симетрію з легкими відхиленнями, завдяки чому твори одночасно зберігають відчуття порядку і живої динаміки.

У живописі симетрія відіграє важливу роль у композиційній побудові. Центральньо-осьова симетрія часто використовується у портретах, де очі, ніс і рот утворюють головну вісь, а другорядні елементи врівноважують зображення. У релігійних образах та мандалах переважають центральньо-радіальні структури, що спрямовують увагу до центру композиції [11, с.49]. У декоративному мистецтві поширені ритмічні повтори, розети, орнаментальні кола; навіть в абстракціях В. Кандинського відчувається внутрішня гармонія ритмів і форм [20]. Симетрія забезпечує структурний каркас, який підтримує цілісність художнього задуму.

У скульптурі симетрія слугує засобом створення відчуття природної краси та рівноваги. Класичні статуї — від Афродіти Мілоської до Давида Мікеланджело — мають ідеально узгоджені пропорції людського тіла, поєднуючи врівноваженість із природною пластичністю (через прийом

контрапосту). У сучасних інсталяціях симетрія часто поєднується з її свідомим порушенням, що надає простору руху та напруги, але водночас зберігає зрозумілу логіку композиції. Це відповідає загальній тенденції до керованої асиметрії, коли симетрія зберігається на рівні модуля або ритму, але порушується на рівні загального об'єму.

Народне мистецтво ґрунтується на принципах повтору й ритму, що робить симетрію природною частиною орнаментальної побудови. У вишивці, кераміці чи різьбі по дереву симетричні структури не лише прикрашають виріб, а й несуть символічне навантаження. В українських орнаментах симетрія виражає ідею цілісності світу, охорони та рівноваги [18, с.26]. У мусульманських геометричних орнаментах принцип безперервного повтору створює ефект нескінченності, утілюючи філософське уявлення про вічність і порядок.

У сучасному мистецтві й дизайні симетрія залишається важливим інструментом композиційної організації. Абстрактні композиції Кандинського та Мондріана показали, як прості геометричні форми та лінії можуть створювати гармонійні, логічно збалансовані структури [20; 21]. Цифрові технології розширили можливості її застосування: у комп'ютерній графіці поширені фрактальні структури, що поєднують точну повторюваність із природною варіативністю [14, с.46]; у графічному дизайні симетричні логотипи (наприклад, кільця Audi) викликають довіру та відчуття стабільності; у 3D-моделюванні принцип симетрії допомагає досягати реалістичності образів [22, с.61–65].

Симетричні образи традиційно сприймаються як гармонійні, впорядковані й приємні для ока [11, с.5–23]. Водночас легке відхилення від симетрії додає композиції виразності, динаміки та індивідуальності [14, с.52]. Таким чином, симетрія в мистецтві — це не лише засіб досягнення порядку, але й гнучкий інструмент художнього мислення, що дозволяє поєднувати стабільність і свободу творчого пошуку. Вона об'єднує традиційні принципи

краси з сучасними підходами до форми, залишаючись важливим чинником естетичного сприйняття.

ВИСНОВКИ ДО РОЗДІЛУ 1

У першому розділі кваліфікаційної роботи розглянуто теоретичні засади поняття симетрії та основні етапи її історичного розвитку. Показано, що в сучасному розумінні симетрія є не лише геометричною властивістю фігур, а універсальним принципом організації світу, який поєднує естетичний, філософський і науковий аспекти та проявляється в природі, архітектурі, мистецтві, фізиці й математиці.

На основі праці Германа Вейля встановлено, що симетрія може тлумачитися як інваріантність об'єкта відносно певної множини перетворень, а теорія груп є природною мовою опису таких перетворень. Історичний підхід Іана Стюарта дав змогу показати поступове розширення змісту поняття симетрії — від інтуїтивних уявлень про рівновагу й пропорцію до алгебраїчного апарату теорії груп та його застосувань у сучасній фізиці.

Аналіз книги О. Ф. Новака та І. В. Трошина «Світ симетрії» засвідчив, що симетрія може розглядатися як методологічна ідея, спільна для різних рівнів організації матерії, і має виразний дидактичний потенціал для шкільної освіти. Узагальнення проявів симетрії в природі, архітектурі та мистецтві показало, що вона забезпечує гармонізацію форми, доцільність структури й композиційну рівновагу, тоді як асиметрія доповнює її, надаючи динаміки та виразності.

Перший розділ сформував теоретичне підґрунтя подальшого дослідження і дав змогу перейти до аналізу сучасних підходів до викладання теми «Симетрія» та пошуку ефективних методів її інтеграції в шкільний курс математики, зокрема у форматі факультативного навчання для учнів 9 класу.

РОЗДІЛ 2

ТЕХНОЛОГІЇ ВПРОВАДЖЕННЯ СИМЕТРІЇ У НАВЧАННЯ: ДОСВІД УКРАЇНИ ТА МІЖНАРОДНІ ПРАКТИКИ

2.1. Симетрія в шкільній математиці

2.1.1. Вивчення теми симетрія та геометричні перетворення в Україні

Організація змісту математичної освіти в Україні здійснюється на центральному рівні Міністерством освіти і науки України (МОН), яке затверджує Державний стандарт, типові освітні програми та перелік підручників для закладів загальної середньої освіти. Це забезпечує єдність підходів до вивчення геометричних понять, зокрема й симетрії, на всіх рівнях школи. Програми укладаються за участю Національної академії педагогічних наук України, що дає змогу спиратися на актуальні психолого-педагогічні та методичні дослідження в галузі математичної освіти. Хоч окремі регіони можуть адаптувати освітні програми до своїх потреб, їх ядром залишаються державні стандарти, розроблені на центральному рівні.

У межах дослідження було проаналізовано зміст чинних підручників з геометрії для 9 класу (О. С. Істер [23]; Г. П., В. Г. Бевз [24]; М. І. Бурда, Н. А. Тарасенкова [25]; А. П. Єршова, В. В. Голобородько [26]; А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, М. С. Якір [27, 28]), що дало змогу конкретизувати, як саме реалізуються вимоги Державного стандарту щодо вивчення теми «Геометричні перетворення» та, зокрема, симетрії у 9 класі. Розгорнутий опис структури відповідних розділів, дидактичних акцентів та системи задач подано в Додатку 2 «Порівняльний аналіз подання теми “Симетрія” у підручниках з геометрії для 9 класу».

Вивчення симетрії в українській школі має наскрізний характер [29].

Початкова школа. У 1–4 класах учні знайомляться з найпростішими геометричними фігурами (коло, квадрат, трикутник) і з елементарними проявами симетрії. Це відбувається переважно у практичній діяльності (уроки

«Мистецтво», «Я досліджую світ»): складання аркуша, вирізання парних фрагментів, прості орнаменти, завдання з орігами. На цьому етапі формується вміння розпізнавати осьову симетрію в навколишніх об'єктах і відтворювати її у малюнку. Паралельно діти опановують роботу з лінійкою та циркулем: будують коло, трикутник, квадрат на папері в клітинку, визначають центр, радіус, діаметр тощо. [30]

Базова середня школа (8–9 класи). На цьому етапі поняття симетрії набуває власне геометричного змісту. В 8–9 класах учні систематизують уявлення про осьову симетрію, далі знайомляться з центральною та обертальною симетрією, а також з іншими геометричними перетвореннями — відображенням, поворотом, паралельним перенесенням. Завдання включають побудову симетричних фігур у координатній площині, знаходження координат симетричних точок, розв'язування задач на застосування симетрії в доведеннях і побудовах. Використання циркуля й лінійки тут уже супроводжується поясненням кроків побудови. [24; 28; 31]

Старша школа (10–11 класи). У старших класах симетрія розглядається в ширшому математичному контексті — алгебри, тригонометрії, стереометрії, а також у зв'язку з природничими дисциплінами. Учні виконують проєктні або практикоорієнтовані роботи, де симетрія виступає як засіб моделювання об'єктів у фізиці, хімії, біології. Побудови з використанням симетрії супроводжуються формальними доведеннями правильності, що пов'язано з підготовкою до ДПА/ЗНО. [32]

Таким чином, українська модель характеризується:

- централізованим нормуванням змісту;
- послідовним переходом від наочної до формалізованої симетрії;
- обов'язковим включенням задач на доведення та пояснення побудов;
- орієнтацією на підсумкову атестацію, де симетрія використовується і як самостійна тема, і як інструмент розв'язування інших задач.

2.1.2. Вивчення теми симетрія та геометричні перетворення в Німеччині.

На відміну від України, система шкільної освіти Німеччини децентралізована: навчальні плани розробляються на рівні федеральних земель, а Федеративне міністерство освіти та наукових досліджень задає лише загальні рамки. Важливу координувальну роль виконує Постійна конференція міністрів освіти і культури (КМК), яка встановлює спільні освітні стандарти, аби забезпечити зіставний рівень освіти в різних землях. Тому зміст теми «Симетрія» може частково відрізнятися, але її поетапне вивчення простежується в усіх програмах [33, 34, 35].

За навчальними програмами землі Тюрінгія тема симетрії вивчається протягом кількох класів, починаючи з початкової школи і продовжуючи в середній школі. У початковій школі у 4 класі учні отримують початкові знання з геометрії. Вони знайомляться з основними геометричними фігурами і поняттям осьової симетрії, яке вивчається через практичні заняття, такі як складання паперу або вирізання симетричних фігур. Учні також розпізнають симетричні об'єкти в навколишньому середовищі, що допомагає їм інтегрувати математику в повсякденне життя. Починаючи з 4 класу, учні знайомляться з побудовами за допомогою циркуля та лінійки, виконують задачі на побудову основних геометричних елементів і фігур, зокрема, визначають осі симетрії та застосовують поняття симетрії на практиці [36].

У нижній середній школі у 6 класі учні поглиблюють своє розуміння осьової симетрії, а також знайомляться з центральною та обертальною симетрією. Практичні заняття включають побудову симетричних фігур та пошук осей симетрії. У 6 класі вивчається осьова симетрія через побудову осей симетрії, що дозволяє учням краще розуміти властивості симетричних фігур. У 8 класі вивчаються більш складні геометричні перетворення: відображення, повороти та паралельне перенесення. Для цього використовують координатну площину. Завдання на розв'язування задач із застосуванням симетрії стають

більш складними. На уроках учні практикують побудову осьово-симетричних фігур, зокрема, визначають і креслять осі симетрії для різних фігур. Також практикується побудова обертально-симетричних об'єктів, що включає використання циркуля та лінійки для конструювання симетричних елементів навколо заданого центра. У 10 класі симетрія вже розглядається в алгебраїчному та геометричному контекстах, включаючи тригонометричні функції [37, 38].

В вищій середній школі, це 11 – 13 класи, учні вивчають симетрію в рамках вищої математики та природничих наук [39]. Поглиблене вивчення математичних теорій, таких як теорія груп, розглядається в контексті симетрії. Симетрія також використовується у фізиці та інших науках для пояснення природних явищ та процесів.

Однак, існують загальні освітні стандарти, розроблені Постійною конференцією міністрів освіти і культури, які спрямовані на забезпечення певної узгодженості в освіті по всій країні [34].

В початковій школі (1-4 класи) існують наступні рекомендації щодо вивчення симетрії, це фокус на наочному та практичному вивченні симетрії та використання ігор та творчих завдань для ознайомлення з поняттям симетрії.

В середній школі (5-10 класи) в контексті німецької освіти є наступні рекомендації щодо вивчення симетрії: поглиблення теоретичних знань про різні види симетрії, використання симетрії в розв'язуванні геометричних та алгебраїчних задач, введення в геометричні перетворення та їх властивості.

В вищій середній школі (11-13 класи) існують наступні рекомендації щодо вивчення симетрії: поглиблене вивчення математичних теорій, пов'язаних із симетрією, застосування симетрії в інших науках: фізиці, хімії, біології, розробка проєктів та дослідницьких робіт на тему симетрії.

У процесі вивчення теми симетрії та геометричних перетворень у німецьких школах практичні аспекти розглядаються через міжпредметні зв'язки з різними дисциплінами. Наприклад, симетрія знаходить застосування в архітектурі, живописі та навіть музиці, що дозволяє розширити розуміння

цієї математичної концепції через зв'язок із мистецтвом. Крім того, симетрія широко представлена у природі – це можна спостерігати в будові кристалів, структурі рослин і тварин. Використання симетрії в технологіях та інженерії показує, як математичні знання застосовуються для вирішення практичних завдань.

Розвиток компетенцій учнів у цьому контексті включає формування просторового та логічного мислення, а також вміння застосовувати математичні знання у реальних життєвих ситуаціях, таких як проектування, моделювання та аналіз об'єктів навколишнього середовища.

2.1.3. Порівняння вивчення симетрії в Україні та Німеччині

Вивчення симетрії в Україні та Німеччині має багато спільного, зокрема раннє введення цього поняття. В обох країнах симетрія починає вивчатися з початкових класів, і акцент робиться на практичних та наочних методах навчання.

Осева та центральна симетрія є ключовими темами в середніх класах у обох країнах. Учні знайомляться з цими видами симетрії через побудову та аналіз симетричних фігур.

У середніх класах в школах України та у середній школі в Німеччині учні вивчають геометричні перетворення, такі як відображення, повороти та паралельні перенесення, що дозволяє розширити розуміння симетрії.

Симетрія активно застосовується під час розв'язування геометричних задач, побудови фігур та аналізу їхніх властивостей. Це допомагає учням використовувати набуті знання у вирішенні практичних математичних завдань.

Обидві системи включають побудову з використанням симетрії і у обох системах циркуль і лінійка використовуються для розвитку точних побудов.

Відмінності у вивченні симетрії між Україною та Тюрінгією (Німеччина).

Методика викладання.

В Україні у навчанні симетрії робиться більший акцент на теоретичні аспекти, зокрема на формальні докази. Значна увага приділяється підготовці учнів до зовнішнього незалежного оцінювання (ЗНО), що вимагає глибокого розуміння теорії [29, 30, 31, 32].

У Тюрінгії (Німеччина) методика викладання більш орієнтована на практичний і дослідницький підхід. Важлива роль відводиться інтеграції симетрії з іншими предметами, такими як фізика та мистецтво, що дозволяє учням краще розуміти міждисциплінарні зв'язки [33, 36, 37, 39].

Глибина вивчення.

У старших класах в Україні вивчення симетрії включає поглиблені аспекти стереометрії та алгебраїчних властивостей симетрії, що забезпечує фундаментальну підготовку до математичних іспитів та вступу до університету [29, 30, 31, 32].

У Тюрінгії вивчення обертальної симетрії вводиться раніше, ніж в Україні, і значний акцент робиться на проєктній роботі, що сприяє розвитку міждисциплінарних навичок і практичного застосування знань [33, 36, 37, 39].

Оцінювання та стандарти.

Навчальний процес в Україні ґрунтується на чітко визначеній програмі, яка відповідає державним стандартам, що забезпечує уніфікацію освіти в усіх регіонах країни [29, 30, 31, 32].

Освітні плани в Німеччині більш гнучкі, що дозволяє враховувати індивідуальні потреби та інтереси учнів, надаючи більше свободи в адаптації навчальних програм [33, 36, 37, 39].

Побудова геометричних фігур за допомогою циркуля та лінійки.

Українська програма більше сфокусована на теоретичному аспекті побудов і формальних доказів, зокрема на аналізі властивостей фігур та їх симетрії. Учні застосовують знання теорем для вирішення задач на побудову, де важливе місце займає аргументація [29, 30, 31, 32].

У Німеччині застосування геометричних побудов більше орієнтоване на практичне використання, де учні вирішують задачі з реальними прикладами і міждисциплінарними зв'язками, такими як архітектура та інженерія. Циркуль і лінійка використовуються для розвитку точних побудов, що стимулює інтерес до практичного застосування геометрії. Геометричні перетворення часто вивчаються у контексті проектів [33, 36, 37, 39].

Узагальнюючи, можна зазначити: українська система забезпечує чітку, доказову й стандартизовану лінію вивчення симетрії; німецька — більш варіативну, практичну й міждисциплінарну. Саме поєднання цих двох підходів (доказовість + практичність) може бути продуктивним для подальшого методичного проектування.

2.2. Технології впровадження симетрії у навчання

2.2.1. Використання ІКТ на уроках геометрії

У сучасній освіті інформаційно-комунікаційні технології (ІКТ) стали невід'ємною складовою навчального процесу. Вони підвищують якість викладання, роблять уроки інтерактивними та змістовними, а для математики — зокрема геометрії — відкривають унікальні можливості: візуалізацію абстрактних понять і побудову динамічних моделей, що істотно полегшує розуміння матеріалу. Однією з тем, де ІКТ особливо доречні, є симетрія — фундаментальне поняття з широкими застосуваннями у природі, мистецтві, техніці та науці. Симетрія не лише є ядром шкільної геометрії, а й сприяє розвитку просторового мислення та формуванню міжпредметних зв'язків.

Використання ІКТ у вивченні симетрії дає змогу:

- забезпечити інтерактивність: учні керують моделями (вісь/центр, кут повороту, вектор перенесення) і спостерігають зміни в реальному часі;
- досягти глибшого засвоєння через динамічну візуалізацію та вияв інваріантів (збереження довжин, кутів, паралельності, площі);
- розвивати дослідницькі вміння та алгоритмічну культуру: учні виконують послідовні побудови, проводять перевірки й формулюють висновки;

- реалізувати персоналізацію: добирати завдання різного рівня складності, надавати можливість працювати у власному темпі;
- організовувати формувальне оцінювання за допомогою коротких інтерактивних перевірок і миттєвого зворотного зв'язку.

Застосування ІКТ у викладанні геометрії відповідає формуванню ключових компетентностей XXI століття: критичного мислення, інформаційної грамотності, самостійності в навчанні та цифрової компетентності [40 - 46].. Це особливо важливо там, де зміст має абстрактний характер і вимагає високого рівня просторових уявлень.

Ключові переваги для теми «симетрія»:

1. Підвищення наочності. Інструменти на кшталт GeoGebra та GRAN-2D дають змогу створювати динамічні моделі фігур, показувати властивості та перетворення. Наприклад, при вивченні осьової й центральної симетрії учні спостерігають, як фігура змінюється при відбитті відносно прямої чи точки.

2. Інтерактивність навчання. За допомогою LearningApps та бібліотеки електронних наочностей «Геометрія, 7–9 клас» (розробники ЗАТ «Мальва») учні самостійно досліджують властивості, виконують побудови й перевіряють результати, що підвищує залученість і мотивацію.

3. Персоналізація. Онлайн-платформи та динамічні моделі дають змогу варіювати рівень складності й підхід до опрацювання матеріалу, підтримуючи індивідуальний темп кожного учня.

Отже, ІКТ у темі «симетрія» — це не лише засіб ілюстрації, а інструмент дослідження: учні моделюють, перевіряють і аргументують результати. Далі розглянуто конкретні інструменти (GeoGebra, Desmos, GRAN-1D/2D/3D, бібліотека «Геометрія, 7–9 клас», PowerPoint/Google Slides) та способи їх ефективного використання під час опрацювання осьової й центральної симетрії, повороту (обертальної симетрії) та паралельного перенесення (трансляційної симетрії). Розгорнутий опис зазначених програмних засобів подано у Додатку 3.

2.2.2. Впровадження STEM/STEAM-освіти в сучасній школі України

STEM-освіта (Science, Technology, Engineering, Mathematics) є одним із провідних напрямів модернізації сучасної освіти. Вона спрямована на формування ключових компетентностей, необхідних для успішної професійної реалізації в умовах інноваційної економіки, що потребує фахівців із глибокими науково-технічними знаннями. Основою STEM-підходу є інтеграція природничих наук, технологій, інженерії та математики, що забезпечує практичну спрямованість навчання й формування здатності до вирішення реальних проблем.

Останніми роками концепція STEM еволюціонувала у формат STEAM-освіти, де до науково-технічного напрямку додається компонент Arts (мистецтво). Це підкреслює значення творчості, естетичного мислення та інноваційного підходу у навчальному процесі. STEAM-освіта орієнтована на розвиток міждисциплінарного мислення, у якому поєднуються точні науки, технології та мистецтво, що сприяє гармонійному формуванню особистості й креативного потенціалу учнів.

STEM/STEAM-освіта виконує важливу роль у підготовці молоді до викликів XXI століття, формуючи в учнів компетентності майбутнього.

Одним із провідних завдань є розвиток критичного мислення та дослідницьких навичок. Учні вчаться аналізувати складні проблеми, встановлювати причинно-наслідкові зв'язки, робити висновки та приймати обґрунтовані рішення [29; 47]. Ці навички є необхідними для адаптації до стрімких технологічних змін.

Не менш важливою складовою є формування креативності та інноваційного мислення [29; 47]. STEAM-підхід поєднує технічні дисципліни з елементами мистецтва, що стимулює творчість і здатність створювати оригінальні рішення, які поєднують естетику з функціональністю.

Суттєвою рисою STEAM-освіти є міждисциплінарна інтеграція, яка дозволяє учням бачити зв'язки між природничими, математичними, технологічними й мистецькими знаннями [29; 47]. Такий підхід формує

цілісне бачення світу, розвиває здатність застосовувати знання з різних галузей для розв'язання практичних завдань. Наприклад, вивчення симетрії в архітектурі поєднує математичні, інженерні та художні аспекти.

Важливою складовою STEM/STEAM-підходу є розвиток цифрової грамотності [29; 47]. Освітній процес доповнюється сучасними інформаційно-комунікаційними технологіями (ІКТ), що забезпечують інтерактивність, візуалізацію та практичну спрямованість навчання. Використання таких програм, як GeoGebra, Scratch чи TinkerCAD, сприяє моделюванню, експериментуванню та аналізу математичних і природничих явищ, формуючи в учнів навички роботи з цифровими інструментами.

STEM/STEAM-освіта є важливим засобом підготовки учнів до сучасних професій, які потребують володіння інженерними знаннями, програмуванням, робототехнікою, нанотехнологіями та іншими інноваційними напрямками. Інтегративний підхід забезпечує формування компетентностей, необхідних для роботи у високотехнологічному середовищі та подальшої професійної реалізації в умовах інноваційної економіки.

Особливе місце у структурі STEAM-освіти займає математика, що виступає базисом для вивчення природничих наук, технологій і технічної творчості. У цьому контексті тема «Симетрія» набуває особливого значення, адже вона є фундаментальним поняттям, яке поєднує науку, мистецтво, техніку та природу. Симетрія лежить в основі побудови геометричних моделей, аналізу закономірностей у природі, створення архітектурних і художніх композицій. Її вивчення сприяє розвитку просторового мислення, логічного аналізу та міжпредметних зв'язків.

Для ефективної реалізації принципів STEM/STEAM-освіти важливим є активне використання ІКТ, які забезпечують практичну взаємодію учнів із навчальним матеріалом. Використання цифрових ресурсів під час вивчення симетрії дає змогу візуалізувати геометричні об'єкти, виконувати побудови в динамічному режимі та розвивати дослідницькі навички. Застосування програмних засобів, таких як GeoGebra, Desmos, GRAN чи інтерактивні

мультимедійні презентації, підвищує мотивацію до навчання та сприяє глибшому засвоєнню матеріалу.

STEM/STEAM-освіта виступає важливим чинником формування в учнів ключових компетентностей XXI століття — критичного й креативного мислення, цифрової грамотності, вміння працювати в команді та розв’язувати практичні завдання. У поєднанні з темою «Симетрія» вона забезпечує інтеграцію математичних, природничих, технічних і мистецьких знань, формуючи цілісне бачення світу й готовність до інноваційної діяльності. Використання ІКТ у цьому процесі робить навчання сучасним, доступним і практично спрямованим.

STEM-освіта є одним із ключових напрямів модернізації сучасної освітньої системи України. Її впровадження спрямоване на підготовку молоді до викликів XXI століття, коли інновації, технології та наукові досягнення відіграють визначальну роль у розвитку суспільства. Україна поступово інтегрує STEM-компоненти у загальноосвітні школи, позашкільні установи та заклади вищої освіти, створюючи умови для формування компетентностей, необхідних для успішної кар’єри у високотехнологічному світі.

Основні завдання STEM/STEAM-освіти в Україні.

1. Підготовка молоді до інноваційної діяльності. STEM-освіта розвиває навички, необхідні для роботи у галузях, пов’язаних із сучасними технологіями — штучним інтелектом, нанотехнологіями, біоінженерією, екологією тощо. Завдяки практичній спрямованості навчання учні формують креативне мислення, здатність працювати в команді та розв’язувати комплексні проблеми.

2. Формування наукового світогляду. STEM інтегрує знання про взаємозв’язки між наукою, технікою та суспільством. Так, у межах проєктів з відновлюваної енергетики школярі не лише досліджують технічні аспекти, а й аналізують екологічні та соціальні наслідки, що сприяє формуванню цілісного світогляду.

3. Розвиток технічної грамотності та практичних навичок. Виконання завдань із моделювання у середовищах TinkerCAD, GeoGebra чи під час конструювання роботів сприяє набуттю практичних умінь, які відповідають вимогам сучасного ринку праці.

Міністерство освіти і науки України активно підтримує розвиток STEM-освіти, розробляючи нормативно-правову базу та методичні рекомендації. Важливим документом є Концепція розвитку природничо-математичної освіти (STEM-освіти) до 2027 року, затверджена постановою Кабінету Міністрів України від 5 серпня 2020 року. Для реалізації Концепції 13 січня 2021 року МОН ухвалило план заходів, який передбачає створення STEM-центрів і лабораторій, упровадження інноваційних методик навчання, підвищення кваліфікації педагогів та популяризацію наукової діяльності серед учнівської молоді [48; 49; 50].

Створення STEM-центрів і лабораторій.

У різних регіонах України активно створюються сучасні STEM-центри та лабораторії, що забезпечують учнів технічним обладнанням для експериментальної діяльності. Це сприяє популяризації науки серед молоді та забезпечує доступ до практичних знань.

Одним із прикладів є STEM-лабораторія МАНЛаб, створена Малою академією наук України. Цей віртуальний STEM-центр надає школярам можливість виконувати дослідження у різних галузях науки, застосовуючи сучасні технології. Важливу роль у розвитку STEM-освіти відіграє також громадська організація «СТЕМ ОСВІТА УКРАЇНА» [51], яка співпрацює зі школами, університетами та науковими установами, забезпечуючи доступність STEM-освіти для всіх дітей незалежно від місця проживання чи соціального статусу.

Підтримку надає і Міністерство освіти і науки України, сприяючи відкриттю STEM-лабораторій у школах та закладах позашкільної освіти. Такі простори формують середовище для науково-дослідницької діяльності учнів і популяризують інженерно-технологічні професії.

Попри складні умови повномасштабного вторгнення Росії в Україну, діяльність STEM-центрів триває. Багато з них адаптувалися до нових реалій, працюючи з дітьми внутрішньо переміщених осіб (ВПО) і підтримуючи педагогів в організації дистанційного навчання [47]. Показовим є приклад освітнього хабу «Навички майбутнього» у Черкасах, відкритого у вересні 2022 року за підтримки проєкту EU4Dialogue Європейського Союзу та Програми розвитку ООН (ПРООН). Простір оснащено сучасною технікою, що дає змогу проводити практичні заняття та забезпечує доступ дітей ВПО до цифрових ресурсів.

Українські освітні установи реалізують низку інноваційних проєктів, які відображають практичне застосування STEM-дисциплін у навчальному процесі. Приклади STEM-проєктів в Україні:

- Проєкт «Web-STEM-школа» — проведення STEM-днів, під час яких учні створюють моделі технічних об'єктів, вивчають фізичні та математичні закономірності через експериментальні дослідження [52, с.6]. Наприклад, у програмі GeoGebra школярі створюють симетричні мозаїки та візерунки, досліджуючи властивості осьової й центральної симетрії [53, с.79]. Це поєднує геометричні знання з художньою творчістю, формуючи креативність і технічні навички.
- Програма «Інженерія майбутнього» — учні працюють із сучасними технологіями, зокрема робототехнікою, програмуванням і 3D-друком [52, с.32]. Під час виконання завдань вони створюють симетричні конструкції, досліджуючи стійкість та функціональність моделей.
- Екологічні та енергетичні проєкти. Учні вивчають можливості використання відновлюваних джерел енергії, розраховуючи оптимальне, симетричне розташування сонячних панелей для максимальної ефективності [54, с.50].

Отже, STEM-освіта в Україні перебуває на етапі активного розвитку. Завдяки нормативній підтримці, створенню STEM-центрів і лабораторій, а також реалізації інноваційних проєктів учні отримують доступ до сучасних

знань і практичних навичок, необхідних для успішного майбутнього. Поєднання математичних, технічних та творчих компонентів забезпечує всебічний розвиток особистості, готує молодь до роботи у високотехнологічному середовищі та формує покоління фахівців, здатних розв'язувати складні глобальні проблеми.

Україна активно розвиває STEM/STEAM-освіту, спираючись на світові тенденції та адаптуючи їх до національних умов. Досвід інших країн, зокрема Німеччини, є важливим орієнтиром у подальшому вдосконаленні освітніх технологій, що розглянемо далі.

2.2.3. Світовий досвід упровадження STEM/STEAM і німецька модель MINT-освіти в контексті STEM

Досвід України щодо впровадження STEM/STEAM-освіти розвивається у контексті світових тенденцій. Важливо розглянути міжнародні практики, які визначають стратегічні орієнтири розвитку науково-технічної освіти у XXI столітті. STEM-освіта (Science, Technology, Engineering, Mathematics) є ключовим напрямом розвитку сучасної освіти, орієнтованим на формування в учнів компетентностей XXI століття — критичного мислення, креативності, технологічної грамотності та здатності розв'язувати практичні завдання. Її основна мета — підготувати молодь до життя в інноваційному суспільстві, де наука і технології визначають темпи розвитку економіки та культури.

STEM-освіта успішно реалізується в багатьох країнах світу, причому кожна держава адаптує її відповідно до власних національних пріоритетів і освітніх традицій.

Міжнародний досвід упровадження STEM-освіти.

У Сполучених Штатах Америки програма STEM 2026 спрямована на створення навчальних середовищ, які стимулюють дослідницьку діяльність і командну роботу над реальними проєктами [55]. Учні працюють із сучасними технологіями — робототехнікою, віртуальною реальністю, 3D-моделюванням, що сприяє розвитку навичок практичного застосування знань.

Фінляндія впроваджує STEM через міждисциплінарні навчальні проєкти. Наприклад, уроки екології поєднують елементи фізики, біології та математики, що дає змогу учням моделювати природні процеси та досліджувати симетрію у природі [56].

У Сінгапурі STEM-складова реалізується через державну програму Applied Learning Programme (ALP) та ініціативу STEM Inc при Science Centre Singapore, які за підтримки Міністерства освіти забезпечують школам доступ до STEM-курсів, робототехніки, цифрового моделювання та 3D-фабрикації [57]. Важливе місце відводиться підготовці вчителів, які проходять спеціалізовані тренінги для впровадження STEM-методик у школі.

У Німеччині, де STEM-освіта відома під назвою MINT (Mathematik, Informatik, Naturwissenschaften, Technik), особливий акцент робиться на прикладних інженерних завданнях [58]. Поширені міждисциплінарні проєкти, як-от «Моделювання мостів» чи «Симетрія в природі», у яких учні досліджують зв'язок між математикою, механікою та архітектурою.

Японія орієнтує STEM-/STEAM-освіту на розвиток технологічних інновацій і цифрових навичок. Згідно з оновленими навчальними програмами MEXT програмування стало обов'язковим елементом шкільної освіти, а в закладах активно застосовуються робототехніка та цифрове моделювання як форма проєктного навчання [59]. Під час виконання таких проєктів (у т.ч. з використанням 3D-друку) учні аналізують конструкції, у тому числі й симетричні, щоб забезпечити стійкість та збалансованість технічних моделей.

Таким чином, міжнародний досвід підтверджує, що STEM-освіта є універсальним засобом підготовки молоді до роботи в інноваційних галузях і стимулює формування креативного мислення, дослідницьких навичок і технологічної компетентності.

STEM-освіта забезпечує розвиток умінь аналізувати складні проблеми та приймати обґрунтовані рішення на основі міждисциплінарних знань. Учні вчаться знаходити ефективні способи розв'язання завдань, спираючись на практичний досвід і цифрові технології. Наприклад, під час моделювання

симетричних конструкцій у програмі GeoGebra школярі досліджують вплив симетрії на стійкість та функціональність об'єктів. Таке навчання розвиває здатність встановлювати причинно-наслідкові зв'язки, що є базовою компетентністю сучасної освіти.

Міжпредметна інтеграція STEM-підходу створює умови для цілісного сприйняття світу через поєднання знань із математики, фізики, біології, інформатики та мистецтва. Наприклад, у межах проєкту «Вивчення симетрії у природі» [53] учні досліджують структуру сніжинок, листя чи комах, створюючи їхні 3D-моделі в середовищі GRAN-3D. Це сприяє розвитку технічних, просторових і творчих навичок.

Цифрові інструменти є невід'ємною частиною STEM-навчання. Програми Scratch, Python, TinkerCAD, GeoGebra та Desmos допомагають учням поєднувати теорію з практикою. Так, у Scratch можна створювати симетричні орнаменти, програмуючи алгоритм їх побудови, а в TinkerCAD — моделювати тривимірні симетричні об'єкти. Такі завдання не лише розвивають цифрову грамотність, а й формують у школярів навички використання технологій у реальних життєвих і професійних ситуаціях.

STEM-освіта сприяє підготовці учнів до професій, пов'язаних із робототехнікою, нанотехнологіями, штучним інтелектом, екологією та біоінженерією. У процесі STEM-навчання школярі опановують програмування, конструювання, аналіз даних і моделювання, що забезпечує їхню конкурентоспроможність у високотехнологічних галузях. Виконуючи проєкти на основі симетрії — від створення механічних систем до архітектурних макетів — учні поєднують точність інженерних розрахунків із творчим підходом, формуючи навички аналітичного та критичного мислення.

Сучасна тенденція розвитку освіти полягає у переході від STEM до STEAM, що передбачає додавання складової Arts (мистецтво). Це розширює можливості для творчості, естетичного мислення та інноваційного підходу до навчання. STEAM-освіта гармонійно поєднує точні науки з мистецькими ідеями, сприяючи розвитку креативності та культурної обізнаності учнів.

Важливим напрямом розвитку є підготовка педагогів до використання STEM-технологій. Проведення тренінгів і семінарів із застосування програм GeoGebra, Scratch, TinkerCAD підвищує професійну компетентність учителів і забезпечує ефективну інтеграцію STEM-методик у навчальний процес.

Не менш значущою є міжнародна співпраця. Участь українських школярів у міжнародних STEM-олімпіадах, проєктах і програмах обміну сприяє поширенню інноваційних практик і розширює горизонти професійного розвитку.

STEM-освіта посідає важливе місце у глобальній освітній системі як ефективний засіб формування компетентностей XXI століття. Вона сприяє розвитку критичного та креативного мислення, формуванню цифрової грамотності, умінню працювати в команді та розв'язувати практичні завдання. Поєднання STEM-підходу з темою «Симетрія» забезпечує міжпредметну інтеграцію математики, природничих наук, технологій і мистецтва, формуючи цілісне уявлення про світ і готовність до інноваційної діяльності в сучасному суспільстві.

Розглянемо досвід Німеччини, де STEM-освіта розвивається під аббревіатурою *MINT*. *MINT (STEM) освіта в Німеччині* готує молодь до викликів сучасного технологічного світу, забезпечуючи глибоке розуміння наукових і технічних дисциплін [60, 61]. Вона охоплює вивчення математики, інформатики, природничих наук і техніки, забезпечуючи міждисциплінарний підхід. Особливу увагу приділяється інтеграції практичного навчання та інноваційних методів викладання, таких як проєктна робота, лабораторні експерименти й діджитал-інструменти, що сприяють активному залученню учнів до процесу навчання [61].

У Німеччині шкільні програми забезпечують систематичне вивчення MINT-дисциплін від початкової до старшої школи. Уроки побудовані з акцентом на виконання реальних завдань і лабораторних експериментів. Наприклад, Учні середніх шкіл вивчають основи робототехніки та програмування з використанням платформ LEGO Mindstorms і Arduino. В

межах проєктів із симетрії вони застосовують програми для 3D-моделювання, такі як Tinkercad або SketchUp, для створення архітектурних об'єктів із симетричними елементами, наприклад мостів, будівель чи декоративних конструкцій

MINT (STEM) освіта в Німеччині має багатогранну структуру, яка включає як теоретичне навчання в школах, так і активне залучення учнів до експериментальної діяльності. Це сприяє розвитку критичного мислення, креативності та навичок вирішення реальних проблем у молоді. Успішне впровадження MINT-програм базується на тісній співпраці шкіл, університетів, підприємств і громадських організацій.

На рівні федеральних земель, таких як Тюрингія, особлива увага приділяється підтримці викладачів через курси підвищення кваліфікації, які організовує ThILLM (Тюрінгійський інститут підвищення кваліфікації вчителів) [62, 63]. Цей інститут також забезпечує вчителів інноваційними навчальними матеріалами, такими як інтерактивні робочі листи, програми для моделювання (GeoGebra) та доступ до цифрових ресурсів.

Симетрія, як одна з ключових концепцій математики, широко використовується [64] у STEM-дисциплінах:

- Геометрія та дизайн: Уроки, присвячені симетрії, інтегруються в курси з інженерного дизайну. Наприклад, учні вивчають симетрію у створенні архітектурних споруд чи механізмів.
- Фізика: Дослідження властивостей хвиль, магнітних полів та електричних ланцюгів передбачає застосування принципів симетрії.
- Хімія: Симетрія молекул допомагає зрозуміти їхні властивості, такі як реактивність і полярність.
- Біологія: Структура ДНК та інших біологічних макромолекул має симетрію, що стає основою для вивчення їхньої функціональності.

MINT-освіта відіграє вирішальну роль у формуванні висококваліфікованих кадрів для ключових галузей економіки, таких як ІТ, інженерія, біотехнології та медицина. Згідно зі статистикою, випускники

MINT-дисциплін займають провідні позиції на ринку праці завдяки своїм прикладним знанням та інноваційному мисленню.

Дуальна система освіти в Німеччині [63] є ключовим елементом, який забезпечує поєднання теоретичних знань із практичними навичками. Учні старших класів проходять виробничу практику на підприємствах, що дозволяє їм одразу застосовувати отримані знання.

Унікальні аспекти MINT-освіти:

- Дослідницькі проєкти: Однією з найпопулярніших форм навчання є проєктна діяльність. Учні залучаються до реальних наукових досліджень, таких як аналіз екологічних даних, моделювання фізичних процесів або створення робототехнічних систем. MINT Zukunft schaffen [58] – створює умови для інтеграції STEM у школи, забезпечуючи вчителів ресурсами та методиками. Старшокласникам надаються можливості брати участь у курсах та стажуваннях, організованих університетами. Такі програми знайомлять учнів із сучасними технологіями та допомагають їм визначитися з майбутньою професією.
- STEM у дошкільній освіті: У Німеччині значну увагу приділяють ранньому залученню дітей до науки. У спеціалізованих STEM-центрах діти експериментують з матеріалами, дізнаються про властивості води, ґрунту, світла та інших природних явищ. Deutsche Telekom Stiftung [65] активно підтримує розвиток інноваційних методів навчання та популяризацію STEM-дисциплін серед учнів різного віку.
- Гендерна рівність: Програми, спрямовані на залучення дівчаток до технічних дисциплін, Girls' Day – спеціалізована програма для залучення дівчат до STEM, де вони можуть знайомитися з перспективними професіями в цих галузях.
- Позашкільні заходи є невід'ємною частиною MINT-освіти в Німеччині. Наприклад, центр "witelo" [66] у Тюрингії організовує майстер-класи з робототехніки, хімії та фізики, а також стажування для учнів старших класів у науково-дослідних установах. Також, у межах ініціативи "28 днів

MINT-освіти" [67] учні можуть відвідувати інтерактивні лекції, наукові шоу та брати участь у конкурсах, які стимулюють їхню цікавість до науки.

Інновації у сфері STEM-освіти забезпечують інтерактивність і практичну спрямованість навчального процесу. Застосування доповненої та віртуальної реальності, інтеграція симуляцій і 3D-моделювання сприяють кращому засвоєнню матеріалу. Наприклад, у Німеччині активно розробляються навчальні програми для роботи з технологіями AR у таких дисциплінах, як фізика чи хімія.

Заходи в MINT-освіті та позашкільних проєктах на базі "witelo" [66], де симетрія є ключовою концепцією, що знаходить застосування у різноманітних STEM-дисциплінах, від геометрії до біології. Позашкільні заходи, такі як майстер-класи та лабораторні роботи, часто включають завдання пов'язані з симетрією:

- Геометричні конструкції: Учні створювали мозаїки та орнаменти, досліджуючи осьову, центральну та обертальну симетрії. У рамках проєкту 'Гармонія природи' вони створювали симетричні малюнки, натхненні кристалічними структурами та природними об'єктами.
- Фізичні експерименти: Лабораторні заняття включали дослідження симетрії в оптиці. Фізичні експерименти включали дослідження симетричного розкладу білого світла на спектр кольорів за допомогою призми. Учні вивчали ефект заломлення світла, створювали моделі оптичних пристроїв, таких як перископи чи спектроскопи, щоб дослідити хвильові явища.
- Інженерія та робототехніка: Конструювання механізмів з використанням симетричних елементів, таких як колеса, осі та передачі, дозволяло учням розвивати інженерне мислення. Один із популярних проєктів включав побудову симетричних мостів із LEGO, де учасники мали враховувати стійкість конструкції.
- Біологія та хімія: Вивчення симетрії молекул у хімії або симетричних форм у природі (наприклад, стільників бджіл чи метеликів) показувало, як природна гармонія може бути використана у науці та техніці.

Завдяки завданням, пов'язаним із симетрією, учні отримують не лише базові знання, але й розуміння принципів, які лежать в основі багатьох технологічних і природних явищ. Такі активності сприяють формуванню просторового мислення, що є важливим у сучасних MINT-професіях.

MINT-освіта в Німеччині забезпечує підготовку молоді до технологічних викликів цифрової епохи, сприяючи формуванню інноваційної економіки та соціальної рівності [68]. Її успішна реалізація забезпечує конкурентоспроможність країни в глобальному світі, інноваційність її економіки та соціальну рівність через доступ до якісної освіти.

Таким чином, німецька модель MINT показує, що тема «Симетрія» може бути використана не лише в курсі геометрії, а як інтегративний зміст для проєктів з фізики, хімії, біології та робототехніки, що є важливим орієнтиром для адаптації українського досвіду. Міжнародний досвід, зокрема німецька модель MINT-освіти, може бути цінним орієнтиром для удосконалення підходів до навчання математики в українських школах, особливо в контексті теми «Симетрія», яка природно поєднує наукові, технічні та мистецькі компоненти.

2.2.4. Інтеграція STEM/STEAM-освіти в навчання геометрії

Симетрія є одним із базових понять у STEM-дисциплінах, оскільки поєднує знання з математики, фізики, біології, хімії, інформатики та інженерії [69, с.153-155]. Її універсальність робить симетрію зручною опорою для міждисциплінарного навчання: те, що учень бачить у шкільній геометрії, він може розпізнати в кристалі, молекулі, архітектурній споруді, роботі чи графічному інтерфейсі. Інтеграція STEM-підходу надає темі «Симетрія» прикладного змісту — учні не просто будують фігури, а аналізують реальні об'єкти й моделюють їх у цифрових середовищах.

Роль симетрії в основних STEM-напрямах

- Природничі науки (біологія, фізика). Симетрія використовується для опису природних структур (сніжинки, кристали, молекули, квіти, тіла

тварин). У фізиці принципи симетрії лежать в основі опису оптичних явищ, відбиття, хвильових процесів, а також пов'язані із законами збереження.

- Технології та інформатика. Симетрія — основа комп'ютерної графіки, дизайну, створення анімацій і ігор, алгоритмів візуалізації та генеративних візерунків.
- Інженерія. Симетричні конструкції забезпечують стійкість, рівномірний розподіл навантажень і водночас естетику (мости, ферми, корпуси механізмів).
- Математика. Симетрія — фундаментальна властивість геометричних об'єктів, що використовується у побудовах, доведеннях, класифікації фігур та вивченні ізометричних перетворень.

Отже, тема «Симетрія» природно «зшиває» теоретичну геометрію з природничими, технічними та мистецькими дисциплінами.

STEM-підхід у навчанні теми «Симетрія» може реалізовуватись у різних формах, зокрема через проєктну діяльність, практичні заняття та міжпредметні зв'язки.

Проєктна діяльність передбачає виконання учнями творчих і дослідницьких проєктів, спрямованих на застосування симетрії в реальному житті [69, с.153-155]. Наприклад, це може бути моделювання симетричних фігур та орнаментів для архітектурного чи художнього дизайну, створення симетричних об'єктів за допомогою 3D-друку, а також аналіз аеродинамічних і ергономічних форм, у яких симетрія впливає на стійкість і опір середовищу. Такий формат розвиває просторове мислення, креативність і навички дослідження.

Практичні заняття сприяють формуванню умінь спостерігати та відтворювати симетрію в навколишньому світі. Учні можуть досліджувати симетрію природних об'єктів (сніжинок, листя, квітів), виконувати побудови осьових і центральних симетрій за допомогою програмного середовища GeoGebra, а також порівнювати «ідеальну» математичну симетрію з реальною, що спостерігається в природі.

Міжпредметні зв'язки забезпечують інтеграцію знань з різних галузей. На уроках фізики вивчають явища дзеркального відбиття й оптики, у хімії — симетрію молекул і кристалів, у біології — двобічну та радіальну симетрію живих організмів. У мистецтві та архітектурі симетрія проявляється в орнаментах, фризах, мозаїках, композиціях фасадів. Такий підхід допомагає учням усвідомити, що симетрія є універсальною властивістю природи й людської творчості, а не лише окремою темою геометрії.

Такий формат показує учням симетрію як фундаментальну властивість світу, а не лише «ще одну геометричну тему».

Базові STEM-інструменти для вивчення симетрії для шкільного курсу:

- GeoGebra, GRAN-2D, GRAN-3D — побудова осьової, центральної, обертальної симетрії; у 3D — аналіз площин та осей симетрії тіл.
- Desmos — дослідження симетрії графіків (парні/непарні функції, відображення відносно осей).
- Електронні бібліотеки наочностей («Геометрія, 7–9 клас») — готові динамічні моделі, завдання з автоматичною перевіркою.
- Мультимедійні презентації — поетапна демонстрація побудови симетричних фігур, анімація перетворень.

Розширені/сучасні STEM-інструменти для вивчення симетрії:

- CAD і 3D-моделювання (Tinkercad, SketchUp for Schools, Onshape EDU). Використання команд Mirror, Rotate для створення тіл з осями/площинами симетрії, проектування теселяцій із подальшим 3D-друком.
- Робототехніка та фізичні обчислення (LEGO Spike/Mindstorms, VEX IQ, micro:bit, Arduino). Симетричне розташування датчиків для стабільності; дзеркальні механізми; світлодіодні кільця/матриці як моделі обертальної або осьової симетрії.
- Віртуальні лабораторії та симулятори (PhET, Algodoo, Crocodile/Yenka). Моделювання оптичних відбиттів, симетричних хвиль, молекулярних форм.

- Візуальне та алгоритмічне програмування (Scratch, Processing/p5.js, Python Turtle). Генерація орнаментів, фризів, мозаїк через код — учні «бачать» групи симетрій як алгоритми.
- AR/VR (GeoGebra AR, CoSpaces Edu, Merge EDU). Огляд осей і площин симетрії у доповненій реальності; створення «віртуальних музеїв симетрії».
- Векторна графіка (Inkscape, Gravit Designer). Побудова логотипів і бордюрів з осью чи центральною симетрією.
- Фізичне виготовлення (3D-принтери, лазерний різак, плотер). Друк модулів для мозаїк і тестування стійкості симетричних конструкцій.

Усі ці засоби інтегрують математику з сучасними технологіями, підвищують мотивацію й формують цифрову, інженерну та творчу компетентності.

Інтеграція STEAM-елементів у тему «Симетрія» робить вивчення геометрії дослідницьким і прикладним. Учні не лише опановують види симетрії, а й бачать їх у природі, техніці, мистецтві, архітектурі, що відповідає компетентнісному та діяльнісному підходам. Симетрія в цьому разі виступає зручною «точкою входу» для STEM/STEAM, оскільки одна тема дозволяє показати одразу кілька ліній інтеграції — математичну, природничу, технологічну й мистецьку.

Практична складова інтеграції STEM у навчання симетрії реалізується через конкретні приклади уроків і проєктів, що поєднують математику, мистецтво, природничі науки та технології. Практична реалізація STEM-підходу у вивченні симетрії дає змогу учням поєднувати теоретичні знання з їх застосуванням у реальних життєвих ситуаціях. Використання завдань і структур уроків, запропонованих у сучасних підручниках з геометрії, сприяє інтеграції міжпредметних зв'язків, розвитку креативності та формуванню просторового мислення. STEM-елементи в задачах, практичних вправах і проєктній діяльності розкривають універсальність симетрії та показують її значення в науці, технологіях, мистецтві й інженерії.

У підручнику [53] "Математика в STEM-освіті" наведено низку інтегрованих уроків, побудованих на ідеях симетрії, які сприяють розвитку STEM-компетентностей у студентів. Детальний опис цих уроків подано у Додатку 4.

Представлені у Додатку 4 приклади можуть бути адаптовані для факультативних курсів і практичних занять з геометрії, зокрема в межах авторського курсу «Симетрія в навколишньому світі та її використання в геометричних задачах», поданого у третьому розділі роботи.

Наведені у Додатку 4 уроки й проєкти показують, що симетрія може бути центральною темою для інтеграції знань із геометрії, фізики, хімії, мистецтва та технологій. Вона дає можливість працювати і з абстрактними моделями, і з реальними об'єктами, а використання ІКТ (GeoGebra, GRAN, Desmos, 3D-друк, мультимедійні презентації) робить навчання практичним і діяльнісним. Такий підхід сприяє формуванню STEM-компетентностей, підвищує мотивацію до вивчення математики та готує учнів до виконання завдань, наближених до професійної діяльності.

ВИСНОВКИ ДО РОЗДІЛУ 2

У другому розділі показано, що тема «Симетрія» в чинних українських підручниках з геометрії для 9 класу подається системно в межах розділу «Геометричні перетворення» й відповідає вимогам Державного стандарту. Осьова й центральна симетрія, поворот, паралельне перенесення, подібність і гомотетія розглядаються послідовно, із використанням наочних побудов, диференційованих задач і прикладів із природи, архітектури та мистецтва, що створює підґрунтя для компетентнісно орієнтованого й STEAM-спрямованого навчання.

Аналіз української та німецької (тюринзької) моделей засвідчив, що в обох системах симетрія вивчається поетапно — від наочно-практичного ознайомлення у початковій школі до більш формалізованих побудов і міжпредметних застосувань у старших класах. Водночас українська модель

характеризується високим рівнем стандартизації та акцентом на доказовості й підготовці до підсумкової атестації, тоді як німецька надає учителю більше свободи й орієнтується на практичні, проєктні та міждисциплінарні форми роботи. Поєднання цих двох підходів можна вважати перспективним напрямом оновлення шкільної геометрії.

З'ясовано, що використання інформаційно-комунікаційних технологій (GeoGebra, Desmos, GRAN, електронні бібліотеки наочностей, мультимедійні презентації) істотно розширює можливості вивчення симетрії: учні мають змогу динамічно змінювати параметри побудов, виявляти інваріанти, порівнювати математичні моделі з реальними об'єктами, виконувати дослідницькі й творчі завдання. Це переводить тему з площини «ілюстрації теорії» у площину активного моделювання.

Аналіз українських і зарубіжних підходів до STEM/STEAM-освіти показав, що симетрія є зручною «точкою входу» до інтегрованого навчання, оскільки природно об'єднує математику, природничі науки, технології, інженерію та мистецтво. Інтеграція STEM-елементів (проєктна діяльність, 3D-моделювання, дослідження природних симетрій, робота з цифровими середовищами) надає темі прикладного змісту, підвищує мотивацію здобувачів освіти й узгоджується з Концепцією розвитку природничо-математичної (STEM) освіти в Україні до 2027 року.

РОЗДІЛ 3

МЕТОДИКА НАВЧАННЯ ТА РОЗВ’ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ ІЗ ТЕМИ «СИМЕТРІЯ»

3.1. Метод геометричних перетворень у планіметрії

Метод геометричних перетворень є одним із ключових інструментів сучасної планіметрії та займає важливе місце у шкільному курсі геометрії. Його сутність полягає у заміні заданої конфігурації фігур іншою, простішою або зручнішою для аналізу, шляхом застосування певних перетворень площини. Такий підхід дозволяє виявити приховані властивості фігур, встановити між ними відповідності, а також суттєво спростити розв’язування задач, зокрема на доведення та побудову.

У науково-методичній літературі метод геометричних перетворень визначають як спосіб, що ґрунтується на встановленні інваріантів — величин, які зберігаються під час перетворення: відстаней, кутів, площ, відношень відрізків, паралельності чи перпендикулярності прямих тощо [71, 72, 73]. На думку В. І. Боровика, геометричні перетворення виступають природним інструментом для вивчення фігур і їх розташування: вони дають змогу спростити конфігурацію та одночасно виявити наявні в ній симетрії [64].

Метод перетворень особливо ефективний тоді, коли задача має приховану симетрію або містить рівні кути й відрізки, що не очевидно з початкового рисунка. Застосування цього методу робить розв’язування задач більш конструктивним і логічно завершеним, оскільки перетворення фігур відкриває можливість побачити потрібні геометричні зв’язки. [73]. Таким чином, метод перетворень сприяє розвитку просторового мислення, формує в учнів уміння аналізувати геометричні конфігурації та застосовувати раціональні прийоми доведення. Для динамічних демонстрацій властивостей і композицій рухів доцільно використовувати ІКТ-засоби (зокрема GeoGebra).

У шкільній математиці застосовують такі основні види геометричних перетворень:

- паралельне перенесення, яке зберігає форму й розмір фігури, переміщуючи її на заданий вектор;
- поворот навколо фіксованої точки на вказаний кут;
- центральна симетрія як окремий випадок повороту на 180° ;
- осьова симетрія щодо прямої;
- гомотетія як перетворення подібності;
- композиції геометричних перетворень, що утворюють рухи або подібності;
- інверсія (у старшій школі або на факультативах) як спеціальний метод розв'язування складних задач.

Згідно з підручником Г. П. Бевза та В. Г. Бевза, метод геометричних перетворень забезпечує універсальний підхід до розв'язування задач планіметрії і є не лише окремим розділом у навчальній програмі, а й методом мислення, що дозволяє інакше подивитися на геометричні об'єкти [24].

Важливими класами геометричних перетворень є рухи та подібності. До рухів належать ті перетворення, які зберігають відстані: паралельне перенесення, поворот і симетрії (осьова та центральна). До подібностей належить гомотетія та композиції рухів із пропорційним масштабуванням. Рухи відіграють особливу роль у методиці навчання, оскільки саме вони застосовуються для доведення рівності геометричних фігур. Рухи забезпечують [72] точне формулювання й доведення властивостей фігур та істотно збагачують понятійно-методичний апарат шкільної геометрії.

Основні властивості рухів у планіметрії:

- зберігають довжину відрізків;
- зберігають величину кутів;
- зберігають площу;
- зберігають взаємне розташування фігур (паралельність, перпендикулярність, належність).

Ці властивості активно використовують у шкільних задачах для обґрунтування рівності трикутників та інших фігур. Тому метод перетворень

природно інтегрується в традиційний аксіоматичний курс геометрії та доповнює класичні методи доведення — методи паралельних прямих, подібності трикутників та координатний метод.

Місце методу перетворень у шкільному курсі.

У чинних модельних програмах МОН (НУШ, 7–9 класи) системне вивчення теми «Перетворення фігур на площині» — паралельне перенесення, осьова та центральна симетрії, поворот і їх композиції — віднесено передусім до 9 класу; у 7–8 класах відповідні ідеї використовують епізодично як засіб опису властивостей фігур. На факультативі можливе розширення (зокрема ознайомлення з інверсією/афінними перетвореннями).

Метод перетворень у шкільному курсі має подвійну функцію:

1. навчальну – формує в учнів уміння бачити перетворення як інструмент аналізу конфігурацій;
2. розвивальну – розвиває просторове мислення, варіативність мислення, математичну творчість.

Як підкреслює І. В. Лов'янова, застосування геометричних перетворень у розв'язуванні задач активізує пошукову діяльність учнів і формує вміння аналізувати конфігурації з різних точок зору [71].

Ключові композиційні правила для рухів

1) Дві осьові симетрії з паралельними осями дорівнюють паралельному перенесенню (вектор дорівнює подвоєній відстані між осями; напрям перпендикулярний до них) [26, с.98-101].

2) Дві осьові симетрії з осями, що перетинаються, дорівнюють повороту на подвоєний кут між осями навколо точки їх перетину [24, с.199-216].

3) Поворот на 180° збігається з центральною симетрією (центр повороту = центр симетрії) [23, с.174–190].

4) Композиція парної кількості центральних симетрій дорівнює паралельному перенесенню; непарної — знов центральна симетрія [28, с.176-197].

5) Будь-який рух можна подати як композицію не більш ніж трьох осьових симетрій (універсальний інструмент розкладання) [25, с.142-160].

Метод перетворень і формування ключових компетентностей

Відповідно до Концепції математичної освіти в Україні (2019), одним з її завдань є розвиток дослідницької та логіко-аналітичної компетентностей.

Метод перетворень сприяє цьому завдяки:

- використанню індуктивно-дедуктивного підходу;
- роботі з інваріантами (збереження довжин, кутів, площ);
- розвитку алгоритмічного мислення;
- зв'язку з алгеброю через координатний підхід.

Залучення методу геометричних перетворень робить шкільний курс геометрії більш сучасним за змістом, оскільки вводить у нього апарат, близький до того, який використовується в сучасній математиці, і тим самим розширює поняттєві та методичні можливості навчання.

Застосування методу перетворень.

- Спрощення конфігурації задачі (перенесення точок, зведення симетричних елементів).
- Відкриття прихованих властивостей, наприклад, рівності кутів чи паралельності.
- Уніфікація способів доведень через інваріанти рухів.
- Варіативність розв'язків: одну і ту саму задачу можна розв'язати відображенням, паралельним перенесенням чи поворотом.
- Ефективність у складних конструктивних задачах (олімпіадна практика).

Отже, метод геометричних перетворень є одним із фундаментальних у планіметрії; він поєднує наочність із логічною строгістю, що робить його універсальним інструментом доведень. Застосування перетворень спрощує розв'язання задач і зменшує обсяг аналітичних міркувань, водночас формує в учнів просторову уяву, послідовність міркувань і дослідницькі навички.

Запровадження цього методу в навчанні має ґрунтуватися на принципах науковості, доступності та варіативності.

3.2. Місце методу симетрії у розв'язуванні задач

У 9-му класі симетрії входять до лінії «рухів» і працюють як базові перетворення: ними зручно «зшивати» фігуру, вирівнювати паралельності/перпендикулярності, швидко отримувати рівність фігур та переходити до зручнішої конфігурації. У підручнику Мерзляка [28] прямо підкреслено, що будь-який рух є композицією не більше ніж трьох осьових симетрій, а також що композиція двох осьових симетрій з паралельними осями дає паралельне перенесення, а з осями, що перетинаються, — поворот. Це пояснює «центрально» роль симетрії серед інших рухів і чому ми часто починаємо саме з неї. Для динамічної візуалізації відбиттів і композицій системно використовуємо GeoGebra.

Композиції симетрій перетворюються на простіші рухи.

- Дві осі, що паралельні, утворюють паралельне перенесення. Це зручно для «зближення» розрізнених елементів (точок або ребер), переведення трапеції чи паралелограма в конфігурацію з очевидними рівностями, а також для підготовки обчислень периметрів і площ після перенесення.

- Дві осі, що перетинаються, утворюють поворот на подвоєний кут між осями. Такий прийом «розкриває» рівнобедрені та правильні трикутники і дає прямі докази паралельності або рівності відрізків, коли обертання фігури вигідніше, ніж покрокове обчислення кутів.

Рівність і симетричні фігури.

В осьовій та центральній симетриях фігури переходять у рівні, оскільки рух зберігає довжини й кути. Тому відбиттям легко отримати збіг потрібних елементів без додаткових обчислень або ввести центр чи вісь симетрії як інваріант задачі.

Розпізнавання центрів і осей у стандартних конфігураціях.

- Многокутник із не менш ніж двома осями має їх перетин в одній точці; це природний кандидат на центр поворотної або центральної симетрії. Прийом корисний для паралелограмів, прямокутників, ромбів і правильних фігур.

- Через композиції осьових симетрій легко пояснити, чому паралелограм має центр симетрії (як наслідок повороту на 180 градусів, тобто центральної симетрії). Схему цієї ідеї подано поруч із теоремами про композиції.

Координатні задачі.

Для швидких перетворень рівнянь прямих і кіл часто достатньо знати, що осьова симетрія та паралельне перенесення є рухами. У поглибленому викладі подано компактний підсумок властивостей для застосування в обчисленнях.

Типові дидактичні «патерни» використання симетрії.

- «Відбиття — ідентифікація — висновок». Відбити одну частину конфігурації так, щоб шукані елементи співпали або стали паралельними чи перпендикулярними; далі, оскільки зберігаються довжини та кути, потрібна рівність або паралельність впливає одним кроком

- «Дві осі — інший рух». Якщо видно дві осі, що є паралельними або такими, що перетинаються, замінити пару відбиттів відповідно на паралельне перенесення або на поворот і вже працювати з простішим рухом (наприклад, звести складну конфігурацію до трикутника для застосування формули Герона або до прямокутного трикутника для теореми Піфагора).

- «Інваріанти». У задачах на доведення та обчислення корисно одразу фіксувати, що саме зберігає вибране відбиття: довжини, кути, паралельність і перпендикулярність. Параграфи про осьову та центральну симетрії у Мерзляку саме так і структурують матеріал.

Застосування осьової симетрії до розв'язування задач. Використання відбиття відносно прямої під час розв'язування геометричних задач називають методом осьової симетрії. Його суть у тому, що поряд із заданими чи шуканими точками (фігурами) розглядають їхні образи, симетричні відносно спеціально обраної прямої. Ефективність методу значною мірою залежить від

вдалого вибору осі симетрії. Оскільки бісектриса кута, а також діагоналі ромба й квадрата є осями симетрії відповідних фігур, метод доцільно застосовувати до задач, у яких серед даних фігурують елементи, що задають положення таких осей [73,74].

Застосування центральної симетрії. Застосування властивостей центральної симетрії для розв'язування геометричних задач називають методом центральної симетрії. Найефективніший він тоді, коли в умові є відрізок із відомою серединою [74].

Застосування повороту до розв'язування задач. Метод повороту — це прийом розв'язування геометричних задач, коли всю фігуру або її частину обертають навколо зручно вибраного центра на заданий кут [72,74]. Таке перетворення змінює взаємне розташування елементів у більш вигідний спосіб і тим самим спрощує обчислення, доведення або побудову. Особливо корисний цей метод для фігур, де відомий фіксований кут і є щонайменше два рівні відрізки: наприклад, для правильних і рівнобедрених трикутників, квадратів та інших правильних багатокутників.

Застосування паралельного перенесення. Властивості паралельного перенесення допомагають спростити розв'язування багатьох задач — як на обчислення, так і на доведення та побудову. Використання ідей паралельного перенесення під час розв'язування називають методом паралельного перенесення. Суть методу така: разом із заданими елементами фігури розглядають їхні образи при спеціально вибраному перенесенні. Переносити можна усю фігуру або лише потрібну її частину [74]. Такий підхід зручний, коли потрібно «зістикувати» розірвані частини фігур або вирівняти елементи — наприклад, у задачах про чотирикутники, трапеції, трикутники тощо.

У кожній задачі визначають:

- яку саме частину фігури доцільно перенести;
- вектор перенесення (пару відповідних точок), який задає переміщення й на який спираються подальші обчислення або міркування.

Іноді для досягнення мети виконують не одне, а кілька послідовних паралельних перенесень.

Метод симетрії займає базове місце серед рухів: він і сам по собі розв'язує чимало задач, і через композиції породжує інші потрібні рухи.

У шкільній геометрії симетрія може виступати не лише об'єктом вивчення, а й засобом розв'язування. Якщо учень бачить у конфігурації вісь, центр чи можливість відобразити фігуру так, щоб вона «спростилась», задача зазвичай розв'язується коротше. За дидактичними цілями доцільно виокремити щонайменше три групи задач, у яких симетрія є основним прийомом: обчислювальні, на побудову та на доведення [72,74].

Задачі на обчислення. Мета — знайти довжини, кути або площі, спростивши конфігурацію до стандартної за допомогою симетрії. Класифікаційно це задачі, де симетричне «перекроювання» фігури приводить до рівних елементів, зручних поділів або відомих формул без громіздких обчислень. Ефективна стратегія полягає у виборі руху, що зберігає потрібні величини і переводить конфігурацію до трикутника, паралелограма чи кола зі стандартними співвідношеннями; за потреби доцільний координатний опис образів точок для швидкого підрахунку. Перевірка правильності спирається на інваріанти вибраного руху та узгодженість отриманих значень з початковими обмеженнями.

Задачі на побудову. Це задачі, у яких потрібно сконструювати точку, пряму або фігуру, що задовольняє заданим умовам. Класифікаційна ознака тут така: чи відкрита в умові вісь або центр симетрії, чи їх потрібно відшукати за непрямыми ознаками (серединні перпендикуляри, діагоналі паралелограма, бісектриси тощо). Симетрія дає економні побудови: відбиття допомагає миттєво отримати серединні перпендикуляри та точки перетину, центральна симетрія і поворот забезпечують «накладання» рівних фігур без додаткових конструкцій. Верифікація побудови здійснюється через інваріанти рухів: збереження довжин, кутів і взаємного розташування елементів; для наочного контролю зручно використати GeoGebra.

Задачі на доведення. Цей тип охоплює твердження про рівність відрізків і кутів, паралельність і перпендикулярність прямих, а також належність, симетричність, центр або вісь фігури. Критерій виділення таких задач простий: шуканий факт має випливати з інваріантів певного руху, який переводить одну частину конфігурації в іншу. В методичному плані найкоротший шлях — підібрати симетрію, що «зшиває» відповідні елементи, або замінити пару відбиттів на рівносільний поворот чи паралельне перенесення, після чого потрібна рівність чи паралельність стає прямим наслідком. Доказ оформлюється як короткий ланцюжок міркувань: вибір руху, опис інваріантів, зіставлення образів і висновок.

Приклади типових задач на обчислення, побудову та доведення із застосуванням симетрії подано в «Додатку 5».

3.3. Методика розв’язування задач із теми «Симетрія» у німецькій школі

Вивчення симетрії в німецькій школі, на відміну від поширеного в Україні подання окремими темами «осьова симетрія» чи «центральна симетрія», включається до ширшого блоку *geometrische Abbildungen / Bewegung, Kongruenz und Symmetrie* (геометричні відображення, рух, конгруентність і симетрія). Цей блок у більшості федеральних земель вивчають у 7–9 класах як складову курсу планіметрії. Такий підхід відразу поміщає симетрію в контекст рухів площини, а не лише «красивих фігур», і дає можливість пов’язати її з наступними темами — подібністю, масштабуванням, елементами аналітичної геометрії.

Поданий нижче опис ґрунтується на типовому змісті німецьких шкільних програм (Thüringen, Bayern) [36, 37, 39]. та на матеріалах поширених підручників [75].

У німецьких підручниках симетрію не вивчають ізольовано. Спочатку вводиться загальне поняття *geometrische Abbildung* — відображення фігури,

яке зберігає її форму, а далі учні послідовно знайомляться з основними видами таких перетворень:

- Spiegelung – відображення (осьова симетрія);
- Punktspiegelung – відображення в точці (центральна симетрія);
- Drehung – поворот (обертальна симетрія);
- Verschiebung – паралельне перенесення;
- у старших класах – zentrische Streckung (центральне розтягнення)

як підготовка до теми подібності.

Отже, учень відразу бачить: симетрія — це частковий випадок руху, а рух — це відображення, що зберігає довжини та кути (Kongruenzabbildung). Це дуже зручно для задач: «знайти образ», «довести, що фігура має вісь симетрії», «побудувати фігуру з двома осями» — усе це розглядається як застосування одного й того ж загального принципу.

Класична частина німецької методики будується за сталою схемою: Definition → Konstruktion → Eigenschaften → Beispielaufgabe (означення → побудова → властивості → приклад задачі).

Для кожного виду симетрії підручник дає коротке означення, далі — покроковий опис побудови циркулем і лінійкою, потім — властивості і відразу — задачу на застосування.

Приклад 1. Spiegelung an einer Geraden (осьова симетрія).

Дано пряму g — вісь симетрії — і точку P . З точки P проводять перпендикуляр до прямої g . На продовженні цього перпендикуляра відкладають відрізок тієї самої довжини по другий бік осі. Отримана точка P' — образ точки P при відображенні. Вісь симетрії при цьому є серединним перпендикуляром до відрізка PP' .

Приклад 2. Punktspiegelung (центральна симетрія).

Дано точку Z — центр симетрії — і точку P . Проводять пряму ZP . Відкладають від точки Z на цій прямій відрізок, рівний ZP , у протилежний бік. Точка P' , для якої Z є серединою відрізка PP' , є образом точки P .

Приклад 3. Drehung (поворот).

Дано центр повороту Z і кут α . Через точку P проводять коло з центром у Z . На цьому колі відкладають кут α від променя ZP . Отримана точка є образом точки P при повороті на кут α .

У кожному випадку учнів підводять до узагальненого висновку: фігура симетрична відносно певного елемента, якщо вона суміщається сама з собою при відповідному перетворенні. Саме цей критерій потім застосовується і до багатокутників, і до орнаментів, і до реальних об'єктів.

У розділах про симетрію подають не лише побудови, а й задачі, що змушують учня аналізувати симетрію.

1. Побудова образу точки/фігури. Побудуй дзеркальний образ трикутника ABC відносно прямої g . Мета — сформувати базову техніку побудови.

2. Визначення осей або центру симетрії. Визнач центр симетрії квадрата / ромба. Мета — навчити бачити симетрію у вже заданих фігурах.

3. Поєднання перетворень. Виконай два відображення послідовно та опиши отримане перетворення. Учні експериментально відкривають, що дві послідовні осьові симетрії можуть дати поворот або перенесення.

4. Творчі побудови. Побудуй фігуру, яка має рівно дві осі симетрії. Мета — розвинути дослідницькі вміння й уміння обґрунтовувати вибір.

5. Зв'язок із властивостями фігур. Довести, що у рівнобедреного трикутника вісь симетрії проходить через вершину та середину основи; що коло має нескінченно багато осей симетрії; що паралелограм має центр симетрії тощо.

Отже, навіть у “паперовій” частині німецької методики симетрія не зводиться до однієї побудови — є і класифікація, і розпізнавання, і комбінування перетворень.

Відмінною рисою сучасної німецької школи є системне використання динамічних середовищ (GeoGebra, DynaGeo тощо) і відкритих завдань.

- Учні будують те саме відображення, що й циркулем, але в GeoGebra: перетягують вихідну точку — і відразу бачать, що образ завжди

лишається на перпендикулярі й на однаковій відстані. Так виявляється інваріант перетворення.

- Використовуються Entdecke-Aufgaben («задачі-відкриття»): учневі дають кілька прикладів, а він сам формулює правило — наприклад, що дві віддзеркалення відносно прямих, що перетинаються дають поворот, а відносно паралельних — перенесення.

- Зустрічаються практичні завдання: створити власний орнамент, логотип, мозаїку із заданими симетріями; пояснити, які саме перетворення використано.

Цифровий компонент робить тему «Симетрія» не лише теоретичною, а й конструктивною та візуально привабливою.

Типовий німецький урок будується так:

1. класична побудова циркулем і лінійкою;
2. цифрове “договорювання” у GeoGebra з можливістю змінювати вихідні дані;
3. творче/прикладне завдання (орнамент, фасад, знак).

Це поєднання дає і точність (через класичну конструкцію), і гнучкість (через моделювання).

Методичні акценти, характерні саме для німецької школи, полягають у тому, що симетрія постійно розглядається у зв'язку з конгруентністю та подібністю. У процесі навчання підкреслюється взаємозв'язок між різними видами геометричних перетворень: дві послідовні симетрії можуть утворювати поворот або паралельне перенесення. Значну увагу приділяють міжпредметним прикладам — симетрію розглядають у контексті архітектури, біології, техніки, дизайну. Завдання, запропоновані учням, часто мають кілька правильних рішень і потребують аргументованого пояснення вибору, що сприяє розвитку логічного мислення та вміння обґрунтовувати власну позицію.

Отже, методика розв'язування задач із теми «Симетрія» у німецькій школі спирається на дві опори:

1. класичну геометричну конструкцію (означення $\rightarrow$ побудова $\rightarrow$ властивості $\rightarrow$ задача), причому симетрія подається як окремий випадок руху;
2. сучасне цифрове та дослідницьке опрацювання (GeoGebra, відкриті завдання, проєкти), яке перетворює симетрію на інструмент моделювання.

Саме ця двокомпонентність відрізняє німецький підхід і може бути рекомендована для адаптації в українській школі.

3.4. Методичні рекомендації для вчителів щодо проведення факультативного курсу «Симетрія у навколишньому світі та її використання в геометричних задачах»

Методичні рекомендації адресовано вчителям математики, які планують упровадження факультативу з теми симетрії у 9 класі й хочуть показати учням, що симетрія — це не лише «дзеркальні фігури», а робочий інструмент для розв’язування задач і водночас універсальний принцип організації об’єктів у природі, мистецтві, архітектурі та техніці.

Основною метою курсу «Симетрія у навколишньому світі та її використання в геометричних задачах» є формування в учнів 9 класу цілісного уявлення про симетрію як універсальний принцип побудови об’єктів та навчання їх свідомо застосовувати симетрію під час розв’язування геометричних задач. Додаткові цілі – підвищити мотивацію до вивчення математики за рахунок міжпредметних прикладів, візуальності та використання цифрових інструментів (GeoGebra), а також розвивати просторове й логічне мислення.

Завдання курсу:

- розширити та поглибити шкільні уявлення про осьову, центральну, поворотну й трансляційну симетрії;
- сформувати вміння бачити симетрію в об’єктах природи, архітектури, мистецтва та техніки;

- відпрацювати прийоми застосування симетрії як методу спрощення задач (обчислення, побудова, доведення);
- ознайомити учнів з використанням цифрових засобів (GeoGebra) для моделювання симетричних перетворень;
- навчити виконувати геометричні перетворення як традиційними засобами (лінійка, циркуль), так і в середовищі GeoGebra;
- стимулювати творчу діяльність (створення орнаментів, симетричних композицій, мініпроектів);
- забезпечити міжпредметні зв'язки з інформатикою, фізикою, біологією, мистецтвом.

Організаційні умови.

Рекомендовано проводити факультатив у обсязі 8–12 занять по 45 хвилин (1 раз на тиждень), що дає змогу послідовно пройти всі види симетрії, відпрацювати побудови та виконати підсумковий проєкт. У межах експериментальної (практичної) частини даної роботи було реалізовано варіант курсу — 4 заняття по 2 академічні години, частину творчих і домашніх завдань винесено для самостійної роботи. Навчання організовується переважно у групових та індивідуальних формах з елементами мініпроектів.

Необхідне забезпечення: креслярські інструменти (лінійка, кутник, циркуль), підбірка зображень симетричних об'єктів (народні орнаменти, фасади, природні форми), мультимедійна презентація і доступ до GeoGebra (онлайн або встановлена версія).

Загальні методичні підходи.

Головне завдання вчителя — не «прочитати тему вдруге», а показати практичну цінність симетрії і перевести учня від споглядання симетричних форм до свідомого їх використання в задачі. Тому заняття доцільно будувати як дослідницько-практичні й поєднувати теорію з наочністю.

Раціональна структура заняття може бути такою:

1. Коротка візуальна мотивація (фото, орнамент, фриз, фасад, природна форма).

2. Пояснення потрібного виду симетрії (що зберігається, що змінюється).
3. Практична побудова (у зошиті / на аркуші / в GeoGebra).
4. Задача або мінікейс на застосування (обчислення, доведення, побудова).
5. Творче / проектне мінізавдання (створити орнамент, добудувати симетричну фігуру тощо).

Такий формат допомагає уникнути «сухої» геометрії й показати, що симетрія — це про реальні об'єкти.

Робота з GeoGebra та наочністю. Коли вводиться новий вид симетрії, бажано відразу показати його в динаміці: відобразити точку, перетягнути її, змінити положення осі чи центра. Це швидко висвітлює інваріанти симетрії (що не змінюється: довжини, кути, взаємне розташування) і знімає типову трудність «я не уявляю, як воно повернеться». На кожному уроці учні виконують побудови, працюють із прикладами з природи, архітектури, мистецтва, техніки та розв'язують задачі різних типів — на обчислення, доведення, побудову й аналіз симетричних фігур. Це сприяє розвитку логічного й просторового мислення, уважності та вміння робити висновки.

Важливо, щоб учні не просто запам'ятовували означення та властивості, а самостійно відкривали закономірності, спостерігаючи, як при симетрії зберігаються форма, розміри, кути та відстані. Для цього ефективно використовувати візуальні спостереження (фотографії, відео, зображення з навколишнього світу) та практичні побудови за допомогою креслярських інструментів або комп'ютерної програми GeoGebra.

У презентаціях курсу подано інтерактивні посилання, за якими учні можуть переглядати рух фігури під час осьової, центральної чи обертальної симетрії, змінювати положення точок і спостерігати результат. Таке поєднання традиційних і цифрових засобів підвищує інтерес до навчання й робить складні геометричні поняття більш зрозумілими.

Рекомендовано проводити заняття у формі активного діалогу. Під час пояснення нового матеріалу вчитель може ставити запитання типу:

- «Що спільного між цими двома фігурами?»
- «Як можна отримати одну фігуру з іншої?»
- «Які властивості зберігаються під час симетрії?»

Такі запитання спонукають учнів мислити, аналізувати й самостійно робити висновки.

На кожному занятті бажано поєднувати теорію, практику та творчість. Наприклад, після розгляду осьової симетрії учні можуть дослідити симетрію в українських орнаментах чи архітектурі свого міста, а під час теми обертальної симетрії — створити власні фігури, що повторюються при повороті. Такі завдання поєднують геометрію з мистецтвом і технологіями, розвивають естетичне сприйняття та творчу уяву.

Для оцінювання діяльності учнів доцільно застосовувати формувальне оцінювання, враховуючи не лише правильність виконання побудов, а й уміння аргументувати, робити висновки, використовувати симетрію для спрощення задачі. Наприкінці курсу учні можуть виконати мініпроект «Симетрія навколо нас», у якому опишуть власні спостереження або побудови.

Формування вмінь застосовувати симетрію у розв'язуванні задач доцільно здійснювати поступово, у кілька етапів:

1. Ознайомчий етап. Учні спостерігають симетрію в об'єктах навколишнього світу, вчать розпізнавати осі й центри симетрії, знаходити симетричні точки та фігури.

2. Аналітичний етап. Школярі аналізують властивості симетричних фігур, роблять висновки про рівність сторін, кутів, відрізків, що є наслідком симетрії.

3. Практичний етап. Учні виконують побудови симетричних фігур відносно точки або прямої, застосовують властивості симетрії для розв'язування задач на обчислення та доведення.

4. Узагальнювальний етап. Учні узагальнюють знання про різні види симетрії, знаходять між ними зв'язки (наприклад, дві осьові симетрії $\rightarrow$ поворот), розв'язують комбіновані задачі, створюють власні приклади або дослідження.

Такий підхід дає змогу перейти від спостереження до самостійного використання симетрії як методу розв'язування задач.

Для формування в учнів системного підходу до задач рекомендується ознайомити їх з алгоритмом розв'язування задач із симетрією:

1. Аналіз умови задачі. Визначити, які елементи фігури чи відношення можуть бути симетричними.
2. Вибір виду симетрії. З'ясувати, яка симетрія доцільна для розв'язання (осьова, центральна, поворотна, паралельне перенесення).
3. Побудова образу. Виконати симетричне відображення фігури, точки або лінії за допомогою креслення чи програми GeoGebra.
4. Використання властивостей симетрії. Застосувати рівність сторін, кутів, відстаней або інваріантність площ.
5. Розв'язання задачі. Виконати обчислення чи доведення, використовуючи отримані рівності.
6. Перевірка та узагальнення. Проаналізувати, як саме симетрія допомогла спростити задачу, зробити висновок про ефективність методу.

Такий алгоритм допомагає учням діяти свідомо й послідовно, що особливо важливо під час розв'язування задач підвищеної складності.

У процесі вивчення симетрії та застосування її до розв'язування задач спостерігаються певні типові помилки й труднощі:

1. Учні плутають вісь і центр симетрії. Метод подолання: порівняльне спостереження фігур (наприклад, метелик — осьова симетрія, квадрат — центральна), побудова за обома видами симетрії для однієї фігури.
2. Не розуміють, як відображається фігура відносно прямої. Метод подолання: виконання покрокових побудов із коментарями, використання GeoGebra для демонстрації руху точки й отримання образу.

3. Не можуть самостійно обрати вид симетрії для задачі. Метод подолання: тренувальні вправи на розпізнавання ситуацій, коли застосовується кожен вид симетрії, колективне обговорення «який рух тут доцільний».

4. Важко обґрунтовують доведення. Метод подолання: складання разом із учнями «словесних схем доведення» — коротких планів розв’язання, опора на інваріанти (що не змінюється при симетрії).

5. Невміння пояснити отриманий результат. Метод подолання: формувальне оцінювання з акцентом на усне пояснення; завдання типу «поясни, чому фігура залишилася тією самою» або «що змінилося, а що — ні».

6. Зниження мотивації. Метод подолання: мініпроекти й завдання на місцевому матеріалі (симетрія у вишивці, гербі міста, фасадах).

Подолання цих труднощів забезпечує свідоме засвоєння матеріалу та розвиток логічного мислення. Учні починають не лише виконувати побудови, а й розуміти, чому саме симетрія є ключем до розв’язання задачі.

Таким чином, методичні рекомендації спрямовані на те, щоб зробити процес навчання симетрії не лише теоретично обґрунтованим, а й практично насиченим, наочним і дослідницьким. Послідовне формування вмінь, чіткий алгоритм і своєчасне подолання труднощів допомагають учням глибше зрозуміти природу симетрії та ефективно застосовувати її в геометричних задачах.

Детальний опис структури факультативного курсу та проведених уроків з теми «Симетрія у навколишньому світі та її використання в геометричних задачах» подано у Додатку 6, презентації до уроків подано в Додатку 7.

ВИСНОВКИ ДО РОЗДІЛУ 3

У третьому розділі обґрунтовано, що метод геометричних перетворень (рухів) є одним із найефективніших підходів до розв’язування планіметричних задач у школі. Він спирається на ідею інваріантів (збереження довжин, кутів, паралельності, площ) і дає змогу замінювати початкову конфігурацію

простішою або симетричною, де шукані відношення виявляються без громіздких обчислень. Показано, що паралельне перенесення, осьова й центральна симетрії, поворот природно доповнюють класичні шкільні методи (подібність, паралельні прямі, координатний метод) і збагачують понятійно-методичний апарат геометрії.

Визначено місце симетрії серед інших рухів: вона є базовим перетворенням, з якого через композиції отримують поворот і паралельне перенесення, а отже може виступати універсальним прийомом розв'язування задач. На цій основі запропоновано дидактичний поділ задач із симетрією на три групи — на обчислення, побудову та доведення, а добір типових задач із розгорнутими зразками розв'язань подано в Додатку 5.

Показано, що в німецькій школі симетрію вивчають у контексті ширшого блоку геометричних відображень разом із конгруентністю та подібністю, поєднуючи класичні побудови з динамічним моделюванням у GeoGebra. Такий підхід робить перетворення «видимими» для учнів і сприяє самостійному відкриттю композиційних правил, що є доцільним для адаптації в українській школі. Розроблені методичні рекомендації до факультативного курсу «Симетрія у навколишньому світі та її використання в геометричних задачах» підтверджують мотиваційний потенціал теми за умови поєднання візуальної мотивації, практичних побудов, задач на застосування й творчих завдань; детальну структуру занять подано в Додатку 6.

ВИСНОВКИ

У виконаній кваліфікаційній роботі всебічно розглянуто поняття симетрії як фундаментальної ідеї математики та як важливого інструмента шкільної геометрії. На основі аналізу наукових джерел встановлено, що симетрія має міждисциплінарний характер і поєднує природні закономірності, культурні традиції та сучасні наукові підходи. В історичному аспекті простежено еволюцію уявлень про симетрію — від інтуїтивного розуміння до формалізованої системи геометричних перетворень, що стала складником сучасної математичної освіти.

Порівняльний аналіз українських і німецьких освітніх практик дав змогу визначити загальні й відмінні риси організації навчання теми «Симетрія». В обох системах симетрія розглядається як частина ширшої теми геометричних перетворень, проте німецькі програми виразніше орієнтовані на дослідницьку діяльність, інтеграцію з іншими предметами та застосування цифрових інструментів. Підтверджено, що використання динамічних математичних середовищ сприяє кращому розумінню властивостей рухів, розвитку просторової уяви та підвищенню мотивації учнів.

Метод геометричних перетворень проаналізовано як ефективний засіб розв'язування задач. Показано, що робота з інваріантами та зміна конфігурації за допомогою рухів дають змогу знаходити раціональні підходи до доведень, обчислень і побудов. Виокремлено три основні групи задач, у яких симетрія відіграє ключову роль: задачі на обчислення (спрощення фігури), задачі на побудову (використання осей чи центрів симетрії) та задачі на доведення (логічне обґрунтування через інваріантні властивості). Такий поділ забезпечує більш усвідомлене й цілеспрямоване застосування симетрії в навчальному процесі.

У практичній частині підготовлено й апробовано факультативний курс «Симетрія у навколишньому світі та її використання в геометричних задачах» для учнів 9 класу. Розроблені матеріали містять візуальний контент, задачі різних типів, приклади з природи й архітектури, а також цифрові моделі, що

дає змогу поєднати теоретичні знання з реальними проявами симетрії. Такий підхід створює умови для активної пізнавальної діяльності, формування просторового та логічного мислення, розвитку математичної культури й творчих здібностей учнів.

Загалом результати роботи підтверджують, що симетрія є потужним дидактичним ресурсом, здатним урізноманітнити традиційний курс геометрії, підвищити його практичну значущість і збагатити навчальний матеріал міжпредметними зв'язками. Поєднання класичних побудов, цифрових технологій і дослідницьких завдань відкриває широкі можливості для модернізації навчання геометричних перетворень у школі. Запропоновані напрацювання можуть бути використані у навчальному процесі, факультативах та STEM/STEAM-проєктах, а також слугувати основою для подальших методичних досліджень та вдосконалення системи формування просторового мислення учнів.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ:

1. Picciotto H. Symmetry Lessons. – 2020. – 27 p. – [Електронний ресурс]. – URL: <https://www.mathed.page/symmetry/lessons.pdf> (дата звернення: 30.10.2025).
2. Knuchel Ch. Teaching Symmetry in the Elementary Curriculum // The Montana Math Enthusiast (TME). – 2004. – Vol. 1, № 1. – P. 1–8. – [Електронний ресурс]. – URL: <https://scholarworks.umt.edu/tme/vol1/iss1/2/> (дата звернення: 30.10.2025).
3. Pascual I., Montes M., Contreras L. C. The Pedagogical Knowledge Deployed by a Primary Mathematics Teacher Educator in Teaching Symmetry // Mathematics. – 2021. – Vol. 9(11). – 1241. – [Електронний ресурс]. – URL: <https://www.mdpi.com/2227-7390/9/11/1241> DOI: <https://doi.org/10.3390/math9111241> (дата звернення: 30.10.2025).
4. Rajput Sh., Joshi S. Innovative Ways to Teach Symmetry in Mathematics Class // International Journal of Research Trends and Innovation (IJRTI). – 2024. – Vol. 9, Issue 4. – P. 492–500. – [Електронний ресурс]. – URL: <https://ijrti.org/papers/IJRTI2404069.pdf> (дата звернення: 30.10.20245).
5. Kinsey L. Ch., Moore T. E., Prassidis E. Geometry and Symmetry. – Wiley, 2010. – 480 p. – [Електронний ресурс]. – URL: <https://www.amazon.com/Geometry-Symmetry-L-Christine-Kinsey/dp/0470499494/> (дата звернення: 30.10.2025).
6. Spitsa K. Implementation of “Symmetry in Mathematics”. – Teach With Europeana. – 2024. – [Електронний ресурс]. – URL: <https://teachwitheuropeana.eun.org/stories-of-implementation/implementation-of-symmetry-in-mathematics-sol-gr-572/> (дата звернення: 30.10.2025).
7. Ng O.-L., Sinclair N. Young Children Reasoning about Symmetry in a Dynamic Geometry Environment // ZDM Mathematics Education. – 2015. – Vol. 47. – P. 421–434. – [Електронний ресурс]. – URL:

https://www.researchgate.net/publication/276242768_Young_children_reasoning_about_symmetry_in_a_dynamic_geometry_environment (дата

звернення: 30.10.2025).

8. Lorenz J. H. Symmetrie – Entwicklung einer Idee über dreizehn Schuljahre // Schönbeck J. (Hrsg.). Mosaiksteine moderner Schulmathematik. Werner Ast zum 65. Geburtstag. – Heidelberg: Mattes Verlag, 2008. – S. 127–136.
9. Heitzer J. Symmetrie im Mathematikunterricht // mathematik lehren. – 2010. – Nr. 161. – S. 4–11.
10. Лисиця В. Т., Ломоносова Н. О. Симетрія як інструмент формування міжпредметних зв'язків і розвитку математичних компетентностей // Актуальні питання у сучасній науці. – 2025. – № 11(41). – С. 1639 - 1653.
11. Weyl, H. Symmetry. — Princeton, New Jersey : Princeton University Press, 1952. — 168 с.
12. Conway J. H., Burgiel H., Goodman-Strauss C. The Symmetries of Things. — Natick, Massachusetts: A K Peters Ltd., 2008. — 426 с.
13. Stewart I. Why Beauty Is Truth: A History of Symmetry. — New York: Basic Books, 2007. — 303 с.
14. Новак О.Ф., Трошин І.В. Світ симетрії. Тернопіль: Навчальна книга – Богдан, 2012. 208 с.
15. Stewart I. What Shape is a Snowflake? : Magical Numbers in Nature. – London : Weidenfeld & Nicolson, 2001. – 232с.
16. Kemp, M. The History of the Concept of Symmetry. [Електронний ресурс]. — URL: <https://www.researchgate.net/publication/299595785> (дата звернення: 30.10.2024).
17. Alberti, L.B. On the Art of Building in Ten Books / translated by J. Rykwert, R. Tavernor, N. Leach. — Cambridge: MIT Press, 1988. — 480 с.
18. Щербаківський, В. Орнаментація українських хат. — Київ: Мистецтво, 1929. — 112 с.
19. Kemp, M. Leonardo da Vinci: The Marvellous Works of Nature and Man. — Oxford : Oxford University Press, 2006. — 368 с.

20. DÜchting, H. Kandinsky. — Köln : Taschen, 2007. — 96 с.
21. Janssen, H. Piet Mondrian: 1872–1944. — Köln : Taschen, 2017. — 96 с.
22. Капустін П. Р. Цифрове мистецтво та його вплив на традиційне мистецтво початку ХХІ століття // Український мистецтвознавчий дискурс. — 2024. — Вип. 2. — С. 61–65. — URL: <https://doi.org/10.32782/uad.2024.2.7> (дата звернення: 01.11.2024).
23. Істер О.С. Геометрія: підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закл. / О.С.Істер. — Київ: Генеза, 2017. — 240 с.
24. Бевз Г. П. Геометрія : підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закл. / Г. П. Бевз, В. Г. Бевз, Н. Г. Владімірова. — К. : Видавничий дім «Освіта», 2017. — 272 с.
25. Бурда М. І. Геометрія : підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закл. / М. І. Бурда, Н. А. Тарасенкова. — К. : УОВЦ «Оріон», 2017. — 224 с.
26. Геометрія : підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закл. / А.П.Єршова, В.В.Голобородько, О.Ф.Крижановський, С.В.Єршов. — Харків : Вид-во «Ранок», 2017. — 256 с.
27. Мерзляк А. Г. Геометрія : підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закладів / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, М. С. Якір. — Харків: Гімназія, 2017. — 240 с.
28. Мерзляк А. Г. Геометрія для загальноосвітніх навчальних закладів з поглибл. вивч. математики : підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закладів / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, М. С. Якір. — Харків : Гімназія, 2017. — 304 с.
29. Офіційний сайт Міністерства освіти і науки України/ Електронний ресурс. – URL: <https://mon.gov.ua/> (дата звернення: 08.11.2024).
30. Навчальні програми для 1-4 класів школи України. URL: <https://mon.gov.ua/osvita-2/zagalna-serednya-osvita/osvitni-programi/navchalni-programi-dlya-1-4-klasiv> (дата звернення: 08.11.2024).
31. Навчальні програми для 8-9 класів (Державний стандарт базової і повної загальної середньої освіти. URL: <https://mon.gov.ua/osvita-2/zagalna->

- [serednya-osvita/osvitni-programi/navchalni-programi-dlya-6-9-klasiv](https://mon.gov.ua/osvita-2/zagalna-serednya-osvita/osvitni-programi/navchalni-programi-dlya-6-9-klasiv) (дата звернення: 08.11.2024).
32. Навчальні програми для 10-11 класів школи України. URL: <https://mon.gov.ua/osvita-2/zagalna-serednya-osvita/osvitni-programi/navchalni-programi-dlya-10-11-klasiv> (дата звернення: 08.11.2024).
 33. Офіційний портал для шкіл землі Тюрінгія. URL: <https://www.schulportal-thueringen.de/start> (дата звернення: 08.11.2024).
 34. Постійна конференція міністрів освіти та культури федеральних земель Німеччини, яка визначає загальні освітні стандарти для забезпечення єдиних вимог до навчальних програм у всій країні. URL: <https://www.kmk.org/de/dokumentation-statistik/rechtsvorschriften-lehrplaene.html> (дата звернення: 08.11.2024).
 35. Федеральне міністерство освіти та наукових досліджень Німеччини. URL: https://www.bmbf.de/bmbf/de/bildung/bildung-in-regionen/bildung-in-regionen_node.html (дата звернення: 08.11.2024).
 36. Навчальна програма з математики в Тюрінгії, початкова школа. URL: <https://www.schulportal-thueringen.de/media/detail?tspi=1262> (дата звернення: 08.11.2024).
 37. Навчальна програма з математики в Тюрінгії, середня школа. URL: <https://www.schulportal-thueringen.de/media/detail?tspi=1386> (дата звернення: 08.11.2024).
 38. Günther Rolles, Dr. Michael Unger (Hrsg.). Basiswissen Schule – Mathematik 5 bis 10 Klasse. 7. aktualisierte Auflage. Berlin: Bibliographisches Institut GmbH, 2021.
 39. Навчальна програма з математики в Тюрінгії, старша школа. URL: <https://www.schulportal-thueringen.de/media/detail?tspi=1392> (дата звернення: 08.11.2024).
 40. Інноваційні інформаційно-комунікаційні технології навчання математики: навч. посіб. / Т. Г. Крамаренко, В. В. Корольський, С. О.

- Семеріков, С. В. Шокалюк ; наук. ред. М. І. Жалдак. Вид. 2, перероб. і доп. Кривий Ріг: Криворізький держ. пед. ун-т, 2019. 444 с.
41. Методика компетентнісно орієнтованого навчання математики в ліцеї на рівні стандарту : методичний посібник [Електронне видання]. — Київ : КОНВІ ПРИНТ, 2021. — 175 с. — URL: https://znayshov.com/News/Details/navchalnometodychni_posibnyky_dlia_pedahohichnykh_pratsivnykiv/9#google_vignette. (дата звернення: 08.11.2024).
 42. Яременко Ю. В., Гелевер І. Г. Використання інформаційно-комунікаційних технологій при зображенні фігур в геометрії //Наукові записки. Серія: Педагогічні науки. Випуск 177, частина II. — Кропивницький: Центральноукраїнський державний педагогічний університет імені Володимира Винниченка, 2019. — С. 172–176.
 43. Димченко О. В., Смиш О. Р., Жежерун О. П. Графічний інтерфейс для рекомендаційної системи // Наукові записки НаУКМА. Комп'ютерні науки. — 2021. — Т. 4. — С. 93–97.
 44. Групові форми роботи на уроках математики : Метод. посіб. / Л. Л. Букалова, Д. В. Васильєва. — К. : Видавничий дім «Освіта», 2023. — 80 с.
 45. М.І. Жалдак, Ю.В. Горошко, Є.Ф. Вінниченко. Математика з комп'ютером. Посібник для вчителів. — 3-тє вид. — К.: Вид-во НПУ імені М.П. Драгоманова, 2015. — 315 с.
 46. Іваненко І. І., Петрова О. О. Проектування, створення та використання навчальних мультимедійних презентацій як засобу розвитку мислення учнів // Освіта і сучасність. — 2020. — №5. — С. 45–57.
 47. Програма розвитку ООН (ПРООН). Розвиток STEM та освітніх інновацій в умовах повномасштабної російсько-української війни [Електронний ресурс]. — Київ : ПРООН в Україні, 2023. — URL: <https://www.undp.org/uk/ukraine/stories/rozvytok-stem-ta-osvitnikh->

[innovatsiy-v-umovakh-povnomasshtabnoyi-rosiysko-ukrayinskoyi-viyny](#).

(дата звернення: 08.11.2024).

48. Віртуальний STEM-центр Малої академії наук України [Електронний ресурс]. — URL: <https://stemua.science/> (дата звернення: 08.11.2024).
49. Концепція розвитку природничо-математичної освіти (STEM-освіти) до 2027 року / Розпорядження Кабінет Міністрів України від 05.08.2020 № 960-р // Міністерство освіти і науки України. URL: <https://mon.gov.ua/ua/news/uryad-ukhvaliv-koncepciyu-rozvitku-stem-osviti-do-2027-roku> (дата звернення: 08.11.2025).
50. Кабінет Міністрів України. Про затвердження Плану заходів щодо реалізації Концепції розвитку природничо-математичної освіти (STEM-освіти) до 2027 року : розпорядження від 13 січня 2021 р. № 131-р [Електронний ресурс]. — URL: <https://mon.gov.ua/ua/news/oprilyudneno-plan-zahodiv-shodo-realizaciyi-koncepciyi-rozvitku-stem-osviti-do-2027-roku> (дата звернення: 08.11.2025).
51. Громадська організація «СТЕМ Освіта Україна». Офіційний сайт [Електронний ресурс]. — URL: <https://stemosvita.org.ua/#activity> (дата звернення: 02.12.2024).
52. Збірник матеріалів «STEM-школа – 2021» / уклад.: Н. І. Гущина, І. П. Василяшко, О. О. Патрикєєва, О. В. Коршунова, Л. Г. Булавська — К. : Видавничий дім «Освіта», 2021. 155 с.
53. Крамаренко Т. Г., Пилипенко О. С. Математика в STEMі: навч.- метод. посіб. Кривий Ріг : Криворізький держ. пед. ун-т, 2023. 274 с.
54. Використання елементів STEM-освіти на уроках математики. Збірник матеріалів роботи творчої групи викладачів математики. – Рівне: НМЦ ПТО, 2019. – 95 с.
55. U.S. Department of Education; American Institutes for Research. STEM 2026: A Vision for Innovation in STEM Education [Електронний ресурс]. — Washington, D.C. : U.S. Department of Education, 2016. — URL:

<https://www.ed.gov/sites/ed/files/2016/09/AIR->

[STEM2026_Report_2016.pdf](#) (дата звернення: 08.11.2024).

56. Finnish National Agency for Education. National core curriculum for primary and lower secondary (basic) education [Електронний ресурс]. — URL: <https://www.oph.fi/en/education-and-qualifications/national-core-curriculum-primary-and-lower-secondary-basic-education> (дата звернення: 08.11.2024).
57. Science Centre Singapore. STEM Inc : About us [Електронний ресурс]. — URL: <https://www.science.edu.sg/stem-inc/about-us/about-stem-inc> (дата звернення: 08.11.2024).
58. MINT Zukunft schaffen!. STEM – creating the future [Електронний ресурс]. — URL: <https://mintzukunftschaften.de/stem-creating-the-future/> (дата звернення: 08.11.2024).
59. Ono E., Susono H., Koyama K. Promoting STEAM education using Codey Rocky in Japan [Електронний ресурс] // The Journal of Applied Instructional Design (EdTech Archives), 14 (2), 2016. — URL: <https://www.edtecharchives.org/journal/2222/20816> (дата звернення: 08.11.2024).
60. Асоціація «MINT Zukunft e.V.» [Електронний ресурс]. – URL: <https://mintzukunftschaften.de/der-verein/> (дата звернення: 09.11.2024).
61. Федеральне міністерство освіти та досліджень Німеччини [Електронний ресурс]. — URL: https://www.bmbf.de/bmbf/de/bildung/digitalisierung-und-mint-bildung/digitalisierung-und-mint-bildung_node.html (дата звернення: 09.11.2024).
62. Тюрингський закон про підготовку вчителів (ThürLbG) [Електронний ресурс]. — URL: <https://landesrecht.thueringen.de/bsth/document/jlr-LehrBiGTHrahmen> (дата звернення: 09.11.2024).
63. Закон «Про професійно-технічну освіту та професійну освіту» (Berufsbildungsgesetz – BBiG) [Електронний ресурс]. — URL:

- https://www.gesetze-im-internet.de/bbig_2005/ (дата звернення: 09.11.2024).
64. Тюрингійський інститут підготовки вчителів, розробки навчальних програм та медіа (*ThILLM*) [Електронний ресурс]. – URL: <https://www.schulportal-thueringen.de/thillm> (дата звернення: 09.11.2024).
 65. Програма Національного STEM-форуму в Німеччині [Електронний ресурс]. – URL: <https://www.telekom-stiftung.de/aktivitaeten/nationales-mint-forum> (дата звернення: 09.11.2024).
 66. Мережа науково-технічних місць навчання в Єні (Німеччина) – witelo e.V. [Електронний ресурс]. – URL: <https://www.witelo.de/newsletter-24-04/> (дата звернення: 09.11.2024)
 67. Лекції для вчителів на форумі «28 днів математичної та наукової освіти в Німеччині» [Електронний ресурс]. – URL: <https://www.schulportal-thueringen.de/catalog/detail?tspi=153274> (дата звернення: 09.11.2024).
 68. Тюрингійські шкільні навчальні програми [Електронний ресурс]. – URL: <https://www.schulportal-thueringen.de/web/guest/lehrplaene/gymnasium> (дата звернення: 09.11.2024).
 69. Ликова О.В., Ломоносова Н.О. Роль вивчення теми «Симетрія» при впровадженні STEM-навчання в закладах загальної середньої освіти // Збірник матеріалів VI Всеукраїнської науково-практичної конференції «Сучасні інформаційні технології в освіті і науці» (м. Умань, 14–15 листопада 2024 р.). Умань, 2024. – С. 153–155.
 70. Кузьменко О. С., Дембіцька С. В. Формування STEM-компетентностей студентів під час розв’язування фізичних задач з урахуванням принципу симетрії у вищих технічних навчальних закладах // Збірник наукових праць. Кіровоградська льотна академія Національного авіаційного університету. – 2017. – С. 20–22.
 71. Лов’янова І. В. Методика навчання математики у запитаннях і відповідях. Навчальний посібник для підготовки студентів до атестації здобувачів вищої освіти. Базовий рівень підготовки / І. В. Лов’янова. –

- Кривий Ріг: Криворізький державний педагогічний університет. 3-тє видання, доповнене і перероблене— 2022. — 128 с.
72. Методика навчання математики в поняттях, схемах і таблицях: навчально-методичний посібник / уклад. Л. А. Благодир. — Умань :ВПЦ «Візаві» — 2018р. — 144 с.
 73. Слєпкань З.І. Методика навчання математики: Підручник. — 2-ге вид., допов. і переробл. — К.: Вища шк., 2006. — 582 с.
 74. Боровік В.Н., Зайченко І.В., Мурач М.М., Яковець П.П. Геометричні перетворення площини: Навчальний посібник. Суми: ВТД “Університетська книга”, 2003. 504 с.
 75. Duden. Basiswissen Schule. Mathematik. 5. bis 10. Klasse. 7., aktualisierte Auflage. Berlin : Dudenverlag, 2021. 408 S.
 76. Лов’янова І. В. Вибрані методи і прийоми розв’язування геометричних задач (матеріали для факультативних занять та курсів за вибором). 11 клас / І. В. Лов’янова; за заг. ред. проф. Н. А. Тарасенкової. — Черкаси: видавець Чабаненко Ю. А. — 2014. — 68 с.
 77. Бурда М. І., Волошена В. В., Тарасенкова Н. А. Практикум з геометрії для 7–9 класів [електрон. вид.] : збірник практико-орієнтованих задач. — Київ : Видавництво «Оріон», 2024. — 152 с.
 78. Коростіянець Т.П. Планіметрія в шкільному курсі математики. Навчально-методичний посібник для організації самостійної роботи та дистанційного навчання за курсом "Методика навчання шкільного курсу математики" для здобувачів освітнього рівня "бакалавр". Спеціальність 014 середня освіта (Математика). Одеса, Університет Ушинського, 2023. 155 с.
 79. Єршова А. П., Голобородько В. В., Крижановський О. Ф. Геометрія. 9 клас: Збірник самостійних і контрольних робіт. — Харків : Видавництво «Ранок», 2009. — 96 с.

Розширений виклад історичного розвитку поняття симетрії (за Г. Вейлем та І. Стюартом)

Герман Вейль (1885–1955) — відомий німецький математик, фізик і філософ, який зробив вагомий внесок у становлення сучасного наукового світогляду. Його наукова діяльність охоплювала теорію чисел, диференціальну геометрію, математичну фізику та філософію науки. Однією з найвідоміших праць ученого стала книга *Symmetry* (1952), створена на основі лекцій, прочитаних у Прінстонському університеті. Саме ця праця започаткувала цілісний підхід до осмислення симетрії як універсального принципу, що поєднує закономірність, гармонію та естетику у природі, мистецтві й науці. Вейль підкреслював, що симетрія не обмежується геометрією — вона є проявом порядку, закладеного у світі.

На думку автора, симетрія є однією з тих ідей, які об'єднують різні галузі людського пізнання. Вейль зазначав, що вона проявляється в багатьох контекстах — від закономірного розташування листя на гілках дерев і будови кристалів до структури художніх композицій чи архітектурних ансамблів. Як писав дослідник: «Симетрія, яку ми бачимо в природі, є відображенням універсальних законів, що формують наш світ» [11, с.16]. Вейль розглядав математику як засіб точного опису симетрії. Особливе місце в його системі посідала теорія груп, яка, за словами автора, дає змогу математично відобразити всі можливі типи симетрій. Саме поняття групи перетворень Вейль вважав теоретичною основою для пояснення інваріантності об'єктів у геометрії та фізиці. Через поняття симетрії він встановлює зв'язок між геометричними формами, аналітичними методами та законами природи.

Учений наголошував, що поняття симетрії відіграє ключову роль і в сучасній фізиці — особливо у квантовій механіці та теорії відносності. Закони збереження енергії, імпульсу та електричного заряду Вейль трактував як прямий наслідок симетрії природних законів. Таким чином, симетрія для нього

— це не лише естетичний принцип, а й фундаментальна властивість фізичної реальності. Окрему увагу Вейль приділяв ролі симетрії у розвитку математичної освіти. Він вважав, що вивчення симетричних властивостей фігур допомагає учням усвідомити зв'язок між красою та логікою, між інтуїтивним відчуттям гармонії й формальною строгістю математичного мислення. Саме тому багато сучасних підручників з геометрії, де розглядаються осьова, центральна та поворотна симетрії, спираються на ідеї, сформульовані у працях Вейля.

Книга *Symmetry* побудована у формі послідовних лекцій, у яких автор переходить від загальних філософських міркувань до конкретних прикладів із природи, науки й мистецтва. Завдяки цьому виклад матеріалу поєднує наукову точність і художню образність. Вейль підкреслював, що гармонійність симетрії проявляється не тільки у формах навколишнього світу, але й у тій простоті, з якою її можна виразити засобами математики [11, с.62].

У першій лекції він вводить поняття симетрії як універсальної категорії, що відображає прагнення людства до порядку, узгодженості та гармонії. Автор поступово переходить від інтуїтивного сприйняття симетрії до її точного математичного означення — як інваріантності об'єкта відносно певної множини перетворень. Такий підхід дозволяє поєднати філософський зміст симетрії з її математичною сутністю. Вейль розпочинає аналіз із найпростішої та найзрозумілішої форми — *двосторонньої симетрії*, або білатеральності, яку можна спостерігати в природі, архітектурі та геометрії. Учений визначає її як властивість фігури залишатися незмінною при відображенні відносно певної площини: «Тіло є симетричним щодо площини E , якщо воно перетворюється у себе відображенням відносно цієї площини» [11, с.25]. Ця форма симетрії, за Вейлем, найчіткіше виражає взаємозв'язок між формою, функцією та красою.

У подальших розділах книги Герман Вейль переходить від статичних форм симетрії до динамічних — *трансляційної* та *ротаційної*, які відображають рух, повторюваність і циклічність у природі та мистецтві.

Учений розглядає їх як прояви фундаментального принципу інваріантності: система залишається незмінною, навіть якщо змінюється її положення у просторі або напрямок обертання. На думку Вейля, трансляційна та ротаційна симетрії відображають закономірні повторення, через які геометрія поєднується з природними й художніми ритмами [11, с.68].

Трансляційна симетрія полягає у збереженні форми об'єкта при його перенесенні вздовж певного напрямку на однакову відстань. Математично це можна описати як інваріантність функції $F(x,y)$ при переході до $F(x+a,y+b)$. Іншими словами, об'єкт повторюється нескінченно багато разів у просторі, зберігаючи свою форму. Тоді умову трансляційної симетрії можна записати у вигляді (1.1):

$$F(x, y) = F(x + a, y + b) \quad (1.1)$$

де a, b — координати вектора перенесення. Ця залежність виражає інваріантність системи при паралельному перенесенні, тобто збереження її структури під час руху у просторі. Учений зазначав, що безперервне повторення елементів формує відчуття впорядкованості та гармонії [1, с.47]. Такі закономірності легко спостерігати у природі: кристалічні решітки, лусочки шишок чи розташування листків на стеблі виявляють ритмічне повторення елементів, характерне для трансляційної симетрії. Подібну класифікацію повторюваних структур подають сучасні автори, зокрема Дж. Конвей, Х. Бургієль та Ч. Гудман-Строс, які описують 17 типів площинних (шпалерних) груп симетрій [12, с.29, с.185]

Ротаційна симетрія — це інваріантність об'єкта при обертанні навколо певної осі. Якщо фігура повертається на певний кут θ і при цьому збігається сама із собою, вона має ротаційну симетрію. Із геометричного змісту повороту видно, що кількість положень фігури, у яких вона збігається сама із собою, визначається співвідношенням (1.2):

$$n = \frac{360^\circ}{\alpha}. \quad (1.2)$$

де n — кратність симетрії, α — кут повороту. Вейль розглядав ротаційну симетрію як прояв єдності геометричних і фізичних закономірностей, що відображають циклічність природних процесів [11, с.60]. У природі цей тип симетрії проявляється надзвичайно широко: квіти (наприклад, соняшники чи ромашки) мають багатократну ротаційну симетрію, медузи й морські зірки мають радіальну побудову тіла, а сніжинки — класичний приклад шестикратної симетрії. Такі структури не лише красиві, а й функціональні: симетричне розташування елементів допомагає природним формам бути стійкими, гармонійними та економними у будові.

У мистецтві динамічні симетрії використовуються для створення ритму та впорядкованості. Трансляційна симетрія надає орнаментам та архітектурним фризам відчуття руху й безперервності, тоді як ротаційна — гармонії та зосередженості навколо центра. На думку Вейля, у мистецтві симетрія стає засобом створення ритму, рівноваги й гармонії пропорцій [11, с.48]. Повторювані мотиви у тканинах, мозаїках, декоративних бордюрах і куполах мечетей — це наочне відтворення математичних принципів симетрії у художній формі.

Вейль також простежує історичний розвиток трансляційної та ротаційної симетрії — від перших орнаментів стародавніх цивілізацій до їхнього математичного осмислення у XIX столітті. Давні єгиптяни й месопотамці інтуїтивно використовували повторювані геометричні візерунки, створюючи фризи й орнаменти з елементами трансляційної симетрії [11, с.54]. Пізніше, в античній Греції, філософи-математики, зокрема Піфагор і Платон, розглядали коло та сферу як ідеальні форми, що зберігають свою досконалість при обертанні [11, с.4]. Платонові тіла — куб, октаедр, ікосаедр — стали символами гармонії та порядку, поєднуючи математичну строгість і естетичну довершеність. У добу Відродження і пізніше, в епоху Нового часу, інтерес до симетрії у природі посилюється завдяки відкриттям у фізиці та природознавстві. Сніжинки стають улюбленим прикладом геометричної досконалості, про що писали Томас Браун і Йоган Кеплер [11, с.64]. Такі

спостереження заклали підґрунтя для формування сучасного уявлення про симетрію як універсальний принцип — від природних форм до законів руху й будови речовини. Таким чином, Герман Вейль показує, що динамічні види симетрії — трансляційна та ротаційна — є проявами глибинної впорядкованості світу. Вони розкривають зв'язок між природними формами, художньою творчістю та математичними моделями. Саме через ці види симетрії Вейль пояснює, як абстрактні ідеї гармонії та порядку знаходять своє відображення у видимих структурах природи й мистецтва.

Розглядаючи прояви симетрії в культурі, Герман Вейль особливу увагу приділяє *орнаментальним структурам*, у яких поєднуються геометричні закономірності та естетична досконалість. Учений підкреслює, що саме орнамент є одним із найдавніших і найяскравіших виявів людського прагнення до впорядкованості. Він зазначав: «*Орнамент — це не прикраса; це видимий вираз симетрії, що втілює гармонію між розумом і почуттям*» [11, с.91]. На думку Вейля, художній орнамент виник як інтуїтивне відображення симетрії, тобто природного потягу людини до повторення, ритму та балансу. Уже найдавніші культури — шумерська, єгипетська, грецька, індійська — створювали орнаментальні композиції, у яких використовувалися основні типи симетрій: осьова, ротаційна, трансляційна. Вейль наголошував, що навіть у найпростіших орнаментах спостерігається прагнення до впорядкування простору за допомогою геометричних закономірностей [11, с.93].

Художники різних епох інтуїтивно застосовували ті ж принципи, які згодом були математично осмислені в теорії груп. Розташування елементів у стрічкових орнаментах, плитках чи мозаїках відповідає певним типам рухів — паралельним перенесенням, обертанням, відображенням. Учений зазначав, що орнаментальне мистецтво побудоване на свідомому використанні симетрії, де гармонія й краса виникають із впорядкованої структури [11, с.95].

Особливе місце у своїй книзі Вейль відводить ісламському мистецтву, яке досягло надзвичайної складності у використанні симетричних побудов. Математично точні орнаменти на стінах мечетей і палаців є зразком поєднання

трансляційної, ротаційної та дзеркальної симетрій. Ці візерунки не мають випадкових елементів: кожен фрагмент підпорядковується строгим закономірностям повторення, що створює відчуття нескінченного простору. Вейль підкреслював, що в ісламській орнаментиці геометрія набуває майже сакрального звучання, адже сувора симетрія тут поєднується з духовним змістом [11, с.98].

У європейському мистецтві поняття симетрії теж відігравало важливу роль, однак його осмислення змінювалося з часом. Якщо для античності симетрія означала рівновагу й пропорційність, то в добу Відродження вона набула значення математичного закону гармонійної побудови простору. Леонардо да Вінчі, Альбрехт Дюрер та інші митці використовували принципи симетрії для створення ідеальних пропорцій людського тіла, архітектури та композиції. Вейль зазначав, що мистецтво та математика є різними шляхами досягнення гармонії, де краса поєднується з логічною структурою [11, с.99].

У новий час розвиток симетрії в мистецтві пов'язується з появою *кристалографії* та розширенням математичних уявлень про просторові групи. Орнаментальна побудова стає не лише художнім, а й науковим завданням: художники й архітектори починають свідомо використовувати математичні закономірності у своїх композиціях. Так, у XX столітті роботи Моріса Ешера стали своєрідним символом поєднання мистецтва й науки: його гравюри ілюструють різноманітні види симетрій — від дзеркальної до трансляційної та ротаційної. Мистецтво надає емоційного змісту тим закономірностям, які математика розкриває у вигляді структур і форм [11, с.102], вважав вчений. Отже, орнаментальна симетрія є не просто художнім прийомом, а універсальним способом пізнання й вираження закономірностей світу. Через орнамент людина відтворює природну впорядкованість у культурі, а через геометрію — надає цій впорядкованості форми. Саме тому симетрія, на думку Вейля, є містком між точними науками та естетичним сприйняттям дійсності.

Розглядаючи симетрію як універсальну категорію, Герман Вейль звертав особливу увагу на її значення у природничих науках, передусім у

кристалографії. Він зазначав, що саме в кристалах і структурах речовини симетрія виявляється найчіткіше, оскільки їхня внутрішня будова підпорядковується певним законам просторової впорядкованості. *«Кристал є найкращим прикладом гармонійного поєднання форми та структури, у якому симетрія виступає як закон природи»* [11, с.115]. Вейль підкреслював, що кристали володіють не лише зовнішньою, а й внутрішньою симетрією. Їхні атоми розташовуються у просторі згідно з певними трансляційними і ротаційними закономірностями, які можна описати мовою математики — через групи симетрій. Такі групи визначають, як саме елементи структури повторюються у просторі, утворюючи закономірні ґратки. У цьому сенсі симетрія стає не лише геометричним, а й фізичним принципом організації матерії.

Вейль звертає увагу на те, що поняття інваріантності відіграє ключову роль у фізичних теоріях. Закони природи залишаються незмінними при певних перетвореннях — просторових, часових або координатних. Саме ця ідея лежить в основі теорії відносності Ейнштейна, з якою Вейль активно полемізував і співпрацював. Учений вважав, що в сучасній фізиці роль симетрії фактично виконує інваріантність: вона відображає сталість законів природи при зміні систем відліку [11, с.118]. Отже, симетрія виступає як глибинна властивість світу, що забезпечує узгодженість між математичними моделями та реальними фізичними явищами. У фізиці поняття симетрії набуває особливого значення завдяки законам збереження. Вейль пояснює, що кожен тип симетрії пов'язаний із певною сталою величиною: симетрія в часі відповідає збереженню енергії, у просторі — імпульсу, а симетрія відносно обертання — моменту імпульсу. Таким чином, симетрія перетворюється на ключ до розуміння фундаментальних принципів будови Всесвіту. Кристалографічна симетрія, на думку Вейля, є особливо наочною формою цього загального принципу. Коли ми розглядаємо кристал, ми фактично спостерігаємо фізичне втілення математичної закономірності. Вейль підкреслював, що краса кристала полягає не лише у зовнішній формі, а й у

внутрішньому порядку, який можна виразити через групи симетрій. На його думку, кристал є вдалим прикладом того, як матеріальний об'єкт відтворює закладену в ньому математичну впорядкованість [11, с.119]. Він вважав, що саме вивчення кристалографічної симетрії допомагає людині досягнути єдності природи й абстрактного мислення. Через дослідження симетрії в кристалах наука наближається до розуміння гармонії, яка лежить в основі Всесвіту. Так, для Вейля симетрія стає не лише науковим поняттям, а й філософською категорією — символом порядку, узгодженості та краси світу.

Герман Вейль розглядав симетрію як універсальний принцип, який поєднує математику, природознавство, мистецтво і філософію. У його розумінні симетрія — це не лише зовнішня властивість форм, а спосіб мислення, який відображає єдність закону, краси та гармонії. Праця *Symmetry* стала важливою віхою у розвитку сучасного наукового світогляду, оскільки сформулювала мову, спільну для різних галузей знань. Саме тому ідеї Вейля залишаються актуальними й сьогодні, особливо в контексті STEM-освіти, де поєднання наукового і художнього погляду на симетрію сприяє цілісному розумінню світу. Розуміння симетрії, подане Германом Вейлем, формує сучасний концептуальний підхід до цього поняття. Проте його зміст став можливим завдяки тривалому історичному розвитку математичних ідей. Подальший аналіз, спираючись на дослідження Іана Стюарта, дозволяє простежити еволюцію симетрії від найдавніших алгоритмів до групових та фізичних інтерпретацій.

У книзі Іана Стюарта *Why Beauty is Truth: A History of Symmetry* (2007) історія симетрії подається не як опис “красивих фігур”, а як послідовне розгортання однієї математичної ідеї упродовж майже трьох тисячоліть. Дослідник показує [13, с.1–3], що симетрія спершу виникає як практичний прийом у задачах давніх цивілізацій, далі осмислюється греками як принцип гармонії та пропорції, у середньовіччі та Новий час набуває алгебраїчної форми, а в XIX–XX ст. перетворюється на універсальну мову у сучасній математиці і фізиці.

Давньо вавилонський етап. Стюарт звертає увагу, що у Вавилоні (бл. 2000 – 1600 рр. до н.е.) ще не говорили про симетрію як про окрему математичну категорію, однак у численних табличках уже зафіксовано дії, які сьогодні можна трактувати як роботу з “врівноваженими” виразами. Насамперед це стосується відомого прийому “доповнення до квадрата” при розв’язуванні рівнянь другого степеню. Такий прийом фактично вирівнює дві частини рівняння та відновлює рівновагу між невідомим і відомими величинами, що можна розглядати як найдавнішу інтуїцію симетрії в алгебраїчних структурах [13, с.1–16]. Вавилоняни робили це з практичних міркувань — для землемірних і будівельних розрахунків, — однак саме ці схеми пізніше стали основою для формування алгебри.

Античний етап: від геометричної рівноваги до філософії форми. У грецькій математиці симетрія вперше виходить за межі утилітарних обчислень і починає розглядатися як властивість форми. Евклід у *Елементах* систематизував знання про фігури, що зберігають рівність сторін і кутів, ввів доведення як обов’язкову процедуру та тим самим зробив симетрію предметом раціонального аналізу, а не лише візуального споглядання [13, с.17–33]. Паралельно вчення Піфагора і, особливо, Платона підносить симетрію до рівня онтологічного принципу: у “Тімеї” правильні многогранники виступають моделями побудови світу, оскільки вони зберігають свої властивості за численних перетворень. Грецький ідеал гармонії, пропорцій і “досконалих форм” став тим культурним тлом, на якому поняття симетрії пізніше стало легко інтегрувати в архітектуру, мистецтво й науку.

Арабсько-латинська ланка та перехід до алгебраїчної симетрії. За Стюартом, важливою фазою розвитку було середньовічне переосмислення античної спадщини. Переклади праць Евкліда, Птоломея, Архімеда арабською, а згодом — латинською мовою створили спільний математичний простір, у якому геометрична традиція була поєднана з новим — алгебраїчним — способом мислення. Арабські математики (Аль-Хорезмі та його

послідовники) розробили систематичні методи розв’язування рівнянь і фактично започаткували символічну алгебру. Це дало змогу розглядати симетрію вже не тільки як “дзеркальність” фігур, а як властивість самих рівнянь: зміна місцями членів, перетворення виразів, збереження рівності після перетворення — усе це вказувало на існування глибинної “структури збереження” в математиці [13, с.33–45]. Саме в цей період формується уявлення, що важливим є не вигляд об’єкта, а ті перетворення, за яких він лишається тим самим.

Алгебраїчний прорив XIX століття: Еваріст Галоа. Кульмінацією історії, яку описує Стюарт, стає робота молодого французького математика Еваріста Галоа. Проблема, яку він вирішував, на перший погляд була суто технічною — чи можна розв’язати алгебраїчне рівняння довільного степеню в радикалах. Однак Галоа виявив, що відповідь на це запитання прихована у “симетриях коренів” рівняння: якщо перестановки коренів утворюють достатньо “регулярну” (групову) структуру, то рівняння розв’язується; якщо ж структура надто складна або “неправильна”, розв’язання в радикалах неможливе [13, с.97–122]. Так симетрія з описової категорії перетворилася на інструмент класифікації й доведення. Галоа фактично створив теорію груп — узагальнений апарат для опису всіх можливих перетворень, які зберігають даний об’єкт. Саме в цьому Стюарт бачить “народження сучасної симетрії”: відтепер симетрія — це не форма, а сукупність допустимих перетворень.

Сучасний етап: симетрія як мова фізики. Далі, за Стюартом, ідея симетрії виходить за межі чистої математики. На початку XX ст. саме вимоги симетрії (інваріантності) стали вихідним пунктом для побудови спеціальної та загальної теорії відносності А. Ейнштейна: фізичні закони мають однаковий вигляд у різних системах відліку, тобто вони симетричні відносно певних перетворень простору й часу [13, с.173–199]. Ще один принципово важливий крок зробила Еммі Нетер, яка довела відповідність між симетріями фізичної системи та законами збереження: часовій інваріантності відповідає збереження енергії, просторовій — збереження імпульсу тощо [13, с.165]. У

такий спосіб математична ідея, що виникла з вавилонських задач, стала фундаментальним законом природи.

У фізиці другої половини XX ст. (калібрувальні теорії, Стандартна модель елементарних частинок, перші версії теорії струн) групи симетрій уже не просто описують об'єкти — вони визначають можливі взаємодії між ними. Саме тому Стюарт підкреслює: історія симетрії — це історія поступового усвідомлення того, що “дозволені” перетворення важливі не менше, ніж самі об'єкти.

Освітній і методичний вимір підходу Стюарта. Окремою цінністю книги Стюарта є те, що він подає розвиток симетрії через історії конкретних математиків — від Евкліда й Платона до Галоа та Нетер. Такий персоніфікований виклад робить матеріал придатним для шкільної й університетської методики: історичний сюжет можна використати як вступ до тем “симетрія фігур”, “групи перетворень”, “закони збереження у фізиці”. Крім того, показ зв'язку між давніми практичними задачами й сучасними абстракціями сприяє формуванню в учнів уявлення про безперервність розвитку математичної думки та відповідає принципам STEM-орієнтованого навчання.

Отже, інтерпретація Іана Стюарта показує, що поняття симетрії розвивалося не стрибками, а як послідовне розширення змісту: від практичних вавилонських алгоритмів до грецької геометричної гармонії, від середньовічної алгебри — до групової теорії Галоа. Ключовим поворотом стало усвідомлення того, що симетрія — це не лише “красива форма”, а структура перетворень, які залишають об'єкт незмінним. У XX столітті така інтерпретація дала можливість застосувати симетрію як принцип побудови фізичних теорій та законів збереження. Саме тому підхід Стюарта є цінним не лише з історико-наукового, а й з педагогічного погляду, оскільки він показує учневі живу еволюцію математичних ідей та пояснює, чому така “естетична” концепція стала універсальною мовою науки.

***Симетрія у шкільних підручниках з геометрії для 9 класу:
порівняльний аналіз***

Підручник *О. С. Істєра «Геометрія. 9 клас»* є сучасним навчальним виданням, що забезпечує системне та послідовне подання теми *«Геометричні перетворення»* [23, с.169–194]. У розділі розглядаються основні види рухів: осьова й центральна симетрія, поворот, паралельне перенесення, перетворення подібності та гомотетія. Теоретичний матеріал поєднано з прикладами різного рівня складності, що сприяє практичному засвоєнню понять і використанню симетрії як інструменту доведення та побудови. Автор наводить етимологію терміна: «Слово симетрія має грецьке походження (сим — з, метрон — міра) і дослівно означає співмірність» [23, с.181]. Підручник підкреслює прояви симетрії у природі, архітектурі та мистецтві, а також подає історичні довідки про Вітрувія, Леонардо да Вінчі, Рафаеля, Луї Пастера й братів Кюрі. Таким чином, симетрія постає не лише як геометричне, а й як культурно-наукове поняття. Структура матеріалу логічна та послідовна: після ознайомлення з поняттям руху послідовно розглядаються симетрія відносно точки, симетрія відносно прямої, поворот, паралельне перенесення, а далі — перетворення подібності та гомотетія. Така побудова забезпечує поступовість у формуванні понять. Завдання диференційовані за рівнем складності — від побудови симетричних точок і визначення їхніх координат до доведення властивостей симетричних фігур та розв’язування задач із рівняннями. Така система забезпечує поступовий розвиток умінь учнів від практичних навичок до аналітичного мислення. Окремо виділена рубрика «Цікаві задачі для учнів неледачих», що сприяє розвитку творчого мислення та просторової уяви. Матеріал ілюстровано численними схемами й малюнками, які допомагають унаочнити поняття симетрії та встановити її зв’язок із реальним світом. Поєднано історичні відомості, математичну строгість і практичне спрямування. Такий підхід забезпечує цілісне сприйняття симетрії як

фундаментальної властивості геометричних фігур і водночас як універсального принципу гармонії в природі, науці та мистецтві.

Підручник *Г. П. Бевза та В. Г. Бевза «Геометрія. 9 клас»* є одним із базових навчальних видань, що системно розкриває тему *«Геометричні перетворення»* [24, с.184–231]. Розділ охоплює основні види рухів — осьову й центральну симетрії, поворот, паралельне перенесення, подібність та гомотетію. Матеріал подано послідовно й доступно, із численними прикладами та ілюстраціями, що підкреслюють практичну роль симетрії в науці, техніці, архітектурі та мистецтві. У вступі до розділу наголошено, що геометричні перетворення — універсальна мова науки й мистецтва, якою користуються інженери, архітектори та дизайнери. Автори підкреслюють, що симетрія дозволяє описувати закономірності природи й створювати гармонійні форми в техніці та архітектурі. Теоретичний матеріал викладено логічно: після введення поняття руху подаються визначення центральної та осьової симетрії, повороту й паралельного перенесення. Усі означення супроводжуються рисунками, які візуалізують відображення точок і фігур. Центральна симетрія визначається через центр, який є серединою відрізка між симетричними точками, а осьова — через вісь симетрії як серединний перпендикуляр. Поворот трактується як перетворення навколо точки O на заданий кут α , а паралельне перенесення — як зміщення фігури в заданому напрямі на однакову відстань. Важливою особливістю є поєднання геометричних понять із прикладами з реального життя. Симетрію учні спостерігають у візерунках, фасадах будівель, архітектурних елементах, орнаментах вишиванок, природних об'єктах — кристалах, листі, сніжинках. Паралельне перенесення пов'язується з утворенням повторюваних структур — плиткових замощень, секцій огорож, орнаментів. Перетворення подібності і гомотетія подаються як узагальнення симетрій, що зберігають форму фігур, змінюючи їхні розміри. Описано їхні властивості та застосування, зокрема вплив на довжини, площі та пропорції фігур. Значну увагу приділено композиціям перетворень, зокрема ковзній симетрії, що поєднує паралельне

перенесення та відбиття відносно тієї самої прямої. Такі приклади допомагають учням зрозуміти складніші рухи та застосовувати їх у практичних ситуаціях. Завдання диференційовано за складністю — від елементарних обчислень і побудов до доведень і проектних робіт. Окрім традиційних вправ, передбачено творчі завдання й навчальні проекти («Замощення площини», «Орнаменти і геометричні перетворення»), де учні створюють моделі мозаїк та досліджують роботи Мауріца Ешера. Це видання відзначається високим рівнем ілюстративності та міждисциплінарним підходом. Автори інтегрують геометрію з мистецтвом, природничими науками та технологіями, підтримуючи принципи STEM-освіти. Завдяки поєднанню теоретичної точності й практичної спрямованості підручник Бевз і Бевз сприяє розвитку математичного мислення, творчих здібностей та розумінню симетрії як універсального закону гармонії у навколишньому світі.

У підручнику *М. І. Бурди та Н. А. Тарасенкової «Геометрія. 9 клас»* тема симетрії подана в розділі 5 «Геометричні перетворення» [25, с.142–173]. Матеріал подано послідовно: спочатку розглядаються основні види рухів (центрально та осьова симетрія), далі — поворот і паралельне перенесення, після цього — подібність і гомотетія як узагальнювальні перетворення. Така побудова відповідає дидактичному принципу поступовості й забезпечує поетапне формування в учнів уявлень про симетрію. Осьова симетрія визначається як відображення відносно прямої, що є серединним перпендикуляром до відрізка між відповідними точками [с. 150]; центральна симетрія — як відображення відносно точки, що є серединою відрізка між парою симетричних точок [15, с.148]. Усі означення супроводжені чіткими рисунками та прикладами на багатокутниках, що сприяє візуалізації поняття. Поворот подано як рух навколо фіксованої точки на заданий кут, із зазначенням центра та кута повороту [25, с.156]; паралельне перенесення — як переміщення всіх точок фігури в одному напрямі на однакову відстань [25, с.161]. Автори постійно підкреслюють зв'язок цих перетворень із реальними об'єктами — орнаментами, архітектурними фасадами, повторюваними

елементами декору. Важливо, що в підручнику наявний короткий блок про подібність і гомотетію [25, с.166–168], де подібність трактується як перетворення, що зберігає форму фігури, а гомотетія — як її спеціальний випадок із фіксованим центром. Це дозволяє побачити симетрію у ширшому контексті масштабних перетворень. Завдання подано з диференціацією за складністю: від побудови симетричної точки у координатній площині — до задач на доведення та творчих завдань, пов'язаних із реальними симетричними об'єктами. Такий підхід дає змогу врахувати різний рівень підготовки учнів. Характерною рисою цього підручника є звернення до реальних і художніх джерел симетрії (природа, архітектура, орнаментика) та включення матеріалу про фрактали як приклад самоподібності. Це розширює традиційне шкільне уявлення про симетрію і наближає викладання до ідей STEM/STEAM-освіти. Тема геометричних перетворень подана компактно, наочно й методично виважено: основні види симетрії розкрито через чіткі означення, рисунки та практичні завдання, а зв'язок із повсякденним життям підсилює мотивацію учнів до вивчення теми.

Підручник *А. П. Єршової, В. В. Голобородька «Геометрія. 9 клас»* містить розділ III «Геометричні перетворення» [26, с.91–142], де послідовно розглядаються основні види рухів і перетворень. Матеріал побудовано логічно, із поєднанням теоретичних означень, прикладів, властивостей і вправ різних рівнів складності. Осьова симетрія визначається як відображення фігури відносно прямої, перпендикулярної до відрізка між симетричними точками [26, с.100]; центральна — як відображення відносно точки, що є серединою відрізка між відповідними точками [26, с.98]. Усі поняття супроводжуються рисунками та прикладами симетрії у багатокутниках і природних формах. Поворот трактується як рух навколо центра на заданий кут [26, с.106], а паралельне перенесення — як переміщення фігури в одному напрямі на однакову відстань [26, с.108]. Автори подають приклади симетрії в орнаментах, фасадах, декоративних елементах і предметах побуту, що розкриває практичне значення теми. Подібність і гомотетія розглядаються як

перетворення, що зберігають форму фігури, змінюючи її масштаб [26, с.117–118], з акцентом на їхнє використання у кресленні та технічному моделюванні. Завдання поділено на усні, графічні та письмові. Усні вправи перевіряють розуміння понять, графічні орієнтовані на побудову симетричних точок і фігур, а письмові — на доведення властивостей. Система трирівневого оцінювання (А — базовий, Б — підвищений, В — творчий) сприяє диференційованому навчанню. Ілюстративний матеріал охоплює приклади симетрії у природі (листя, квіти, кристали), архітектурі та мистецтві (орнаменти, фасади, арки). Після кожного параграфа наведено підсумки й питання для самоперевірки, а рубрика «Для тих, хто хоче знати більше» містить задачі підвищеної складності, історичні довідки й цікаві факти про симетрію. Підручник акцентує зв'язок геометрії з реальним світом і сучасними технологіями, відповідаючи принципам STEM-освіти. Поєднання чітких означень, візуального супроводу та практичних завдань робить його сучасним і методично продуманим ресурсом для формування в учнів цілісного уявлення про симетрію.

Підручник *А. Г. Мерзляка, В. Б. Полонського, М. С. Якіра «Геометрія. 9 клас»* є одним із найпоширеніших у шкільній практиці. У розділі «Геометричні перетворення» [27, с.157–208] системно подано основні види рухів і перетворень: осьову та центральну симетрію, поворот, паралельне перенесення, подібність і гомотетію. Матеріал побудований за принципом поступового ускладнення, з логічною послідовністю та численними ілюстраціями. Осьова симетрія визначається як відображення фігури відносно прямої, що є серединним перпендикуляром до відрізка між симетричними точками [27, с.167]. Центральна симетрія — як відображення відносно точки, яка є серединою відрізка між точками A і A_1 [27, с.175]. Поняття супроводжуються рисунками та прикладами побудови симетричних фігур у координатній площині. Поворот трактується як перетворення, при якому всі точки фігури обертаються навколо центра на певний кут [27, с.178], а паралельне перенесення — як переміщення фігури в напрямі заданого вектора

[27, с.158]. Подібність і гомотетія подаються як узагальнення рухів, що зберігають форму фігури й пропорційність сторін [27, с.188]. Значну роль відіграє ілюстративний матеріал: рисунки симетричних трикутників, ромбів, багатокутників, а також приклади симетрії у природі (метелики, листя, кристали) й архітектурі (фасади, арки, плитка). Це сприяє розвитку просторового мислення та кращому розумінню геометричних властивостей. Завдання подано з урахуванням рівнів складності — від базових побудов і обчислень до аналітичних і творчих задач, що сприяє індивідуалізації навчання. Такий підхід забезпечує індивідуалізацію навчання й розвиток логічного мислення. Підручник акцентує практичну роль симетрії у природі, мистецтві та техніці. Окремі рубрики «Спостерігайте, рисуйте, фантазуйте» стимулюють творчість, а завдання для самоперевірки формують навички рефлексії. Видання поєднує чіткий теоретичний виклад із практичною спрямованістю, що відповідає вимогам сучасної математичної освіти.

Підручник *А. Г. Мерзляка, В. Б. Полонського, М. С. Якіра «Геометрія. 9 клас»* для поглибленого вивчення математики відзначається ґрунтовністю, логічністю викладу та орієнтацією на розвиток аналітичного мислення. У розділі 6 «Геометричні перетворення» [28, с.176–244] подано поглиблене вивчення симетрії як фундаментального поняття геометрії. Послідовно розглянуто осьову та центральну симетрію, поворот, паралельне перенесення, подібність і гомотетію. Порівняно з базовим курсом, матеріал подано докладніше, із детальним аналізом властивостей та застосувань симетрії. Усі означення супроводжуються ілюстраціями, прикладами з архітектури, природи та мистецтва, що підкреслюють зв'язок геометрії з навколишнім світом. Особливістю підручника є наявність додаткових тем, зокрема інверсії [28, с.238–239], яку розглянуто як складне перетворення, корисне для розв'язання задач підвищеної складності. Практичні завдання поділено за рівнями складності — від базових до творчих і олімпіадних. Рубрика «Коли зроблено уроки» містить задачі для факультативів і гурткової роботи [28, с.203–204]. Видання містить значний ілюстративний матеріал: схеми,

побудови, приклади симетрії у сніжинках, квітах, кристалах, фасадах і мостах [28, с.208]. Підручник інтегрує симетрію з реальним життям і STEM-напрямами — завдання пов'язано з моделюванням, дизайном, технічним кресленням і дослідженням природних форм. Методика подання матеріалу відповідає принципу «від теорії до практики» та забезпечує поступовий розвиток логічного мислення. Підручник сприяє формуванню математичної культури, готує учнів до ДПА та олімпіад, а також формує вміння бачити симетрію як універсальний принцип організації світу.

Поданий аналіз шести чинних підручників з геометрії для 9 класу (О. С. Істера, Г. П. та В. Г. Бевза, М. І. Бурди, Н. А. Тарасенкової, А. П. Єршової, В. В. Голобородька та співавт., а також обох версій підручника А. Г. Мерзляка, В. Б. Полонського, М. С. Якіра — базової й поглибленої, 2017 р.) дає підстави стверджувати, що тема симетрії у сучасному шкільному курсі подається системно й відповідає вимогам Державного стандарту.

В усіх розглянутих виданнях симетрія входить до розділу про геометричні перетворення і охоплює мінімальний обов'язковий зміст: осьову та центральну симетрію, поворот, паралельне перенесення, подібність і гомотетію. Подача супроводжується означеннями, рисунками та вправами, що забезпечує поетапне формування просторових уявлень і вмінь виконувати побудови. Водночас простежуються відмінності у дидактичних акцентах.

Підручники О. С. Істера та А. П. Єршової орієнтовані насамперед на системне базове засвоєння матеріалу й поступове ускладнення задач.

Видання Г. П. і В. Г. Бевза, а також М. І. Бурди, Н. А. Тарасенкової виразніше інтегрують симетрію з реальними об'єктами (архітектура, орнаментика, природні форми), що відповідає компетентнісному та STEM-підходам.

Підручники Мерзляка, особливо для поглибленого вивчення, мають підвищений рівень теоретичності: подають розгорнуті доведення, складні композиції перетворень, додаткові теми (інверсія), а також задачі олімпіадного характеру. Усі розглянуті посібники використовують диференціацію завдань

(від базових побудов до аналітичних і творчих вправ), рубрики для самоконтролю та узагальнення, що створює умови для індивідуалізації навчання.

Таким чином, сучасна лінійка підручників з геометрії для 9 класу дає вчителю можливість обирати методично доцільну модель опрацювання теми «Симетрія» — від суто теоретичної й доказової до практичної, міждисциплінарної — та використовувати її у власних методичних розробках, факультативних і проєктних курсах.

Приклади використання програмних засобів GeoGebra, Desmos, GRAN та ППЗ «Геометрія» у вивченні теми «Симетрія»

Система динамічної математики GeoGebra.

Система динамічної математики *GeoGebra* — це сучасне інтерактивне програмне забезпечення для побудови та візуалізації математичних об'єктів, яке поєднує інструменти геометрії, алгебри, роботи з графіками та 3D-модельовання. Під час опрацювання теми «Симетрія» *GeoGebra* дає змогу:

- будувати фігури та їхні образи при осьовій і центральній симетрії з миттєвим відображенням результату;
- змінювати параметри побудови (координати точок, довжини, кути) й спостерігати збереження властивостей симетрії;
- організовувати інтерактивні вправи, у межах яких учні самостійно відтворюють послідовність побудов.

У посібнику [40] *«Інноваційні інформаційно-комунікаційні технології навчання математики»* *GeoGebra* визначено як одну з найпотужніших систем динамічної математики з широким спектром освітніх застосувань. Автори підкреслюють, що середовище дає можливість створювати геометричні об'єкти, досліджувати їхні властивості, виконувати динамічні перетворення та використовувати інтерактивні елементи для формування математичних понять [40, с.121–142]. У розділі 1.6 посібника подано опис ключових модулів програми:

- Модуль «Геометрія» — містить базові інструменти для побудови двовимірних геометричних фігур і їх перетворень, що особливо важливо під час вивчення осьової та центральної симетрії [40, с.121];
- Модуль «Графіки» — призначений для побудови та аналізу графіків функцій, зокрема для з'ясування їхньої симетрії [30, с.130];

- Модуль «3D Геометрія» — забезпечує роботу з просторовими об'єктами, побудову многогранників та аналіз їх симетричних властивостей (осей, площин, центру симетрії) [40, с.137].

Програма містить готові інструменти для реалізації всіх основних геометричних перетворень, які вивчаються у 9 класі: «Симетрія відносно прямої», «Симетрія відносно точки», «Поворот навколо точки», «Паралельне перенесення», «Гомотетія відносно точки» тощо [40, с.126]. Інтерфейс GeoGebra є інтуїтивно зрозумілим, кожен інструмент супроводжується контекстними підказками, що робить середовище доступним для учнів, які лише починають працювати з ІКТ.

У підручнику наведено низку завдань із теми «Симетрія», які можуть бути безпосередньо використані на уроці:

- «Побудова фігури, що має вісь симетрії» — учням пропонується створити замкнену ламану та отримати її образ при осевій симетрії відносно заданої прямої; подано послідовність дій і приклад готової побудови [40, с.127].
- «Графічний аналіз симетрії функцій» — учні будують графік функції та з'ясовують, чи є він симетричним відносно осі Oy або початку координат; звертається увага на зручність динамічної зміни параметрів функції [40, с.133].
- «3D Геометрія: симетрія куба» — у тривимірному режимі будується куб, після чого учні можуть розглядати його з різних ракурсів та встановлювати наявні в ньому осі й центр симетрії [40, с.137].

У підрозділі 1.6.2 докладно показано, як за допомогою зміни параметрів фігур (довжини, кути, положення точки) можна простежити збереження симетрії при заданому перетворенні, а також організувати пошукову діяльність учнів, коли вони самостійно формулюють висновок про інваріантність фігури [40, с.130–137].

Використання модуля «3D Геометрія» є важливим для формування просторових уявлень. Учні можуть бути запропоновано завдання на побудову куба і з'ясування, які осі та площини симетрії він має, а також як у многогранниках проявляється центральна симетрія [40, с.137]. Такі завдання

доцільно використовувати в контексті STEM-орієнтованого навчання, коли потрібно показати зв'язок шкільної геометрії з реальними об'єктами. У розділі, присвяченому використанню ІКТ у навчанні математики, подано рекомендації щодо включення GeoGebra в структуру уроку як:

- засобу візуалізації (показ побудови та перетворення в реальному часі);
- засобу самостійної роботи (учні відтворюють подану вчителем побудову або модифікують її, змінюючи параметри);
- інструмента для навчальних проєктів (дослідження симетрії в орнаментах, архітектурних формах, природних об'єктах) [40, с.190–195].

Окремо подано добірку наочних матеріалів — колекцію «Геометричні перетворення на площині» (рис. 2.2.1.1), де розміщено приклади навчальних побудов, зокрема мініпроєкт «Великодня писанка», що ілюструє застосування осової симетрії в українському народному мистецтві [40, с.190–192].

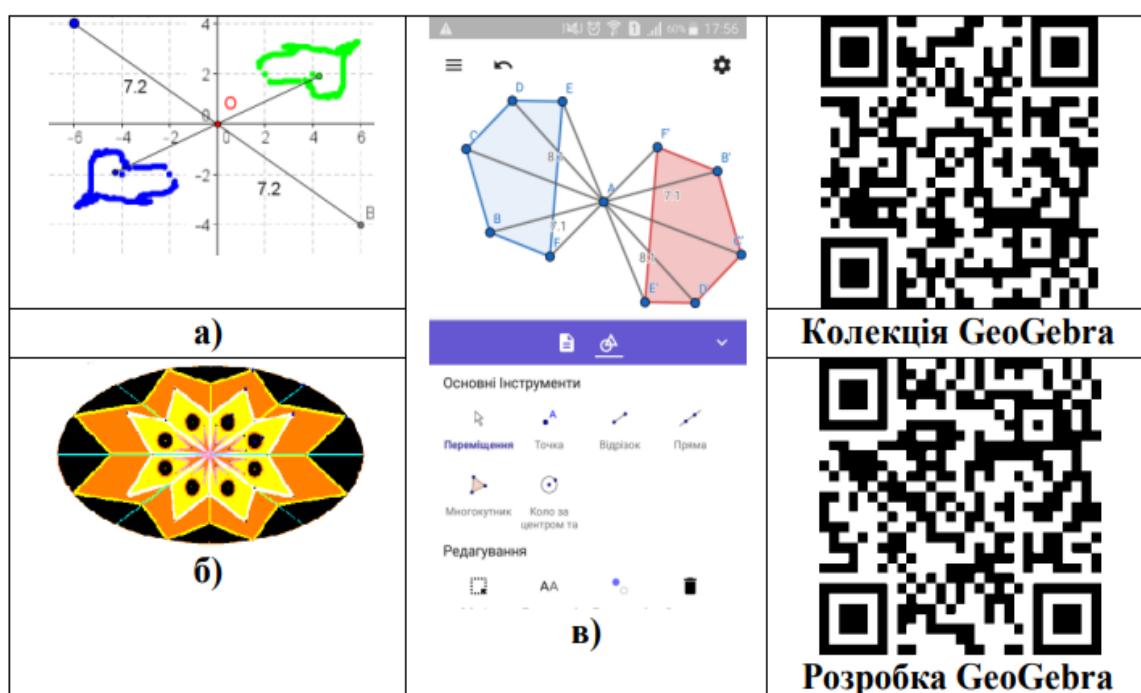


Рис. 2.2.1.1. Колекція «Геометричні перетворення на площині»

У посібнику «Методика компетентісно орієнтованого навчання математики в ліцеї на рівні стандарту» GeoGebra також названо одним з основних інструментів для інтерактивного вивчення математики; підкреслено

можливість учителя використовувати як власні моделі, так і вже підготовлені українськомовні матеріали [41, с.57].

У статті *«Використання інформаційно-комунікаційних технологій при зображенні фігур у геометрії»* зазначено, що GeoGebra є ключовим засобом візуального подання геометричних побудов, оскільки програма відтворює не тільки кінцевий результат, а й послідовність кроків розв’язання, що важливо для засвоєння алгоритмів побудови [42, с.172–176].

У публікації *«Графічний інтерфейс для рекомендаційної системи»* звернуто увагу на перспективи використання GeoGebra та Desmos у створенні інтерактивних систем з автоматизованою перевіркою побудов, що є актуальним для закладів освіти з обмеженим матеріально-технічним забезпеченням [43, с.93–97].

Таким чином, використання GeoGebra у вивченні теми «Симетрія» відповідає вимогам компетентнісного й діяльнісного підходів, оскільки поєднує наочність, інтерактивність і можливість організації самостійної та дослідницької роботи учнів. Інструменти системи забезпечують коректне відтворення осьової, центральної, обертальної та трансляційної симетрії, що робить GeoGebra доцільним засобом як на етапі пояснення нового матеріалу, так і під час формувального оцінювання.

Використання Desmos у навчальному процесі.

Desmos — це безкоштовний онлайн-графічний калькулятор, що поєднує інструменти для побудови графіків функцій, створення простих геометричних об’єктів та динамічних моделей. Платформа працює у браузері, не потребує встановлення програмного забезпечення й орієнтована на інтерактивне вивчення математики. Завдяки цьому Desmos доцільно застосовувати як на очних уроках, так і в умовах дистанційного та змішаного навчання.

Платформа забезпечує можливість:

- будувати графіки функцій у реальному часі та змінювати параметри рівнянь із миттєвим відображенням результату;

- створювати базові геометричні об'єкти (точки, відрізки, прямі, кути) для виконання графічних і аналітичних завдань;
- досліджувати симетрію функцій і фігур шляхом відображення відносно осей координат або зміни знаків у рівняннях;
- організовувати інтерактивні завдання, у яких учні самостійно роблять висновки щодо властивостей побудованих об'єктів.

Desmos є зручним інструментом для опрацювання теми «Симетрія», насамперед у контексті функцій.

- Осьову симетрію зручно розглядати на прикладі парних функцій, наприклад $y = x^2$ або $y = |x|$, коли учні спостерігають симетричність графіка відносно осі Oy і перевіряють, як зміна коефіцієнтів впливає на цю властивість.
- Центральну симетрію можна проілюструвати на прикладі непарних функцій, зокрема $y = x^3$, графік яких має центр симетрії в початку координат. Учні змінюють параметри рівняння і з'ясовують, чи зберігається даний тип симетрії.
- За потреби вчитель може запропонувати побудову «дзеркальної копії» вже наявного графіка відносно осі Ox або Oy , що наочно показує дію відображення.

Ключова перевага Desmos у цій темі — інтерактивність: учні відразу бачать наслідки змін, а візуальне подання полегшує розуміння абстрактних понять.

У посібнику *«Групова форма діяльності учнів у навчанні математики»* звернено увагу на те, що Desmos може виступати ефективним засобом організації парної та групової роботи, особливо в онлайн-форматі. Платформа дає змогу створювати спільні інтерактивні завдання, до яких учні під'єднуються за посиланням, працюють у власних вікнах, а вчитель відстежує хід виконання в інформаційній панелі [44, с.75–76]. Наводиться приклад завдання з теми «Площа трикутника», у якому учні перетягують вершини трикутника та спостерігають, як змінюється площа залежно від розташування точок. Такий формат підтримує співпрацю, а також дає можливість швидко

виявити учнів, які потребують додаткового пояснення. Серед переваг групового використання Desmos відзначають:

- наявність готових шаблонів і завдань (Teacher Desmos);
- можливість адаптації завдань під конкретний клас;
- автоматизований зворотний зв'язок для вчителя;
- підтримку дослідницького стилю навчання.

Водночас наголошується на певних обмеженнях: для стабільної роботи потрібен надійний інтернет-зв'язок, а перед початком роботи бажано провести короткий інструктаж щодо введення формул та використання повзунків.

У посібнику *«Інноваційні інформаційно-комунікаційні технології навчання математики»* Desmos подано як інструмент для роботи з функціями та дослідження їх властивостей, зокрема симетрії відносно осей координат; при цьому рекомендується поєднувати Desmos із GeoGebra для розширення спектру задач (аналітичні — у Desmos, класичні побудови — у GeoGebra) [40, с.219]. У посібнику [41] підкреслюється, що використання Desmos сприяє формуванню ключових і предметних компетентностей, активізує пізнавальну діяльність учнів і відповідає вимогам сучасного уроку математики; окремо відзначено можливість застосування мобільного застосунку Desmos Calculator для автономної роботи [41, с.57].

У науковій публікації *«Графічний інтерфейс для рекомендаційної системи»* зазначено, що Desmos ефективний для візуалізації графіків і динамічної зміни параметрів, однак менш пристосований до класичних задач на побудову, тому його доцільно поєднувати з динамічними геометричними системами (наприклад, GeoGebra) [43, с. 94].

Отже, Desmos є сучасним і доступним онлайн-середовищем, яке розширює можливості викладання та вивчення математики, у тому числі теми «Симетрія». Інтерактивний функціонал платформи дає змогу будувати графіки, аналізувати їхню симетрію, виконувати прості геометричні дії та організовувати спільну роботу учнів. Поєднання Desmos з іншими ІКТ-засобами (GeoGebra, інтерактивні дошки, віртуальні класи) підвищує

наочність і забезпечує реалізацію діяльнісного й компетентнісного підходів у навчанні математики.

Програмні засоби GRAN-1D, GRAN-2D і GRAN-3D

Система GRAN — це комплекс програмних засобів Gran-1D, Gran-2D та Gran-3D, призначених для графічного аналізу математичних об'єктів в одному, двох і трьох вимірах. Ці програми широко застосовуються у навчанні математики, оскільки дозволяють виконувати побудови, проводити дослідження та аналізувати властивості геометричних фігур у наочній формі. Їх використання сприяє розвитку просторового мислення учнів, формуванню навичок дослідження та узагальнення результатів.

Призначення програмних модулів системи GRAN.

- Gran-1D (Graphic Analysis 1-Dimension) призначений для графічного аналізу одновимірних математичних об'єктів. За його допомогою можна візуалізувати числові дані у вигляді графіків і діаграм, що є корисним при вивченні функцій, рядів та інших об'єктів одновимірного простору.
- Gran-2D (Graphic Analysis 2-Dimension) забезпечує побудову та дослідження двовимірних геометричних фігур. Програма дозволяє створювати точки, відрізки, прямі, кути, багатокутники, досліджувати їх взаємне розташування, будувати симетричні відображення відносно точки чи осі. Завдяки інтерактивному середовищу учні можуть змінювати параметри побудов і спостерігати за динамічними змінами об'єктів, що допомагає краще розуміти властивості фігур.
- Gran-3D (Graphic Analysis 3-Dimension) орієнтований на роботу з тривимірними об'єктами. Він дозволяє моделювати просторові фігури, виконувати їх обертання, паралельне перенесення та досліджувати симетрію у просторі. Це робить програму особливо цінною при вивченні стереометрії, оскільки вона надає змогу візуалізувати складні просторові конструкції.

У посібнику «Математика з комп'ютером» [45, с.3–6] наголошено, що застосування інформаційно-комунікаційних технологій у навчанні математики сприяє гуманізації освітнього процесу, розвитку творчих

здібностей і пізнавальної активності учнів. Автори підкреслюють, що використання GRAN дає змогу розв'язувати навчальні задачі без надмірного занурення в аналітичні обчислення, зосереджуючи увагу на розумінні суті математичних процесів і результатів. У посібнику подано приклади створення симетричних зображень у середовищі Gran-1D [45, с.41–47] і завдань з побудови фігур, що мають осі симетрії, за допомогою Gran-2D [45, с.78–97]. Програма дозволяє створювати фігури з поворотною симетрією, використовуючи інструмент «Кут повороту» (рис. 2.2.1.2), а також виконувати побудови за допомогою вкладки «Паралельне перенесення» (рис. 2.2.1.3), що забезпечує створення дзеркальних зображень і перевірку властивостей симетрії.



Рис. 2.2.1.2. «Кут повороту»

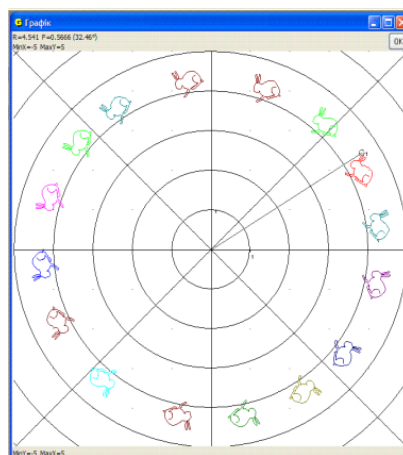


Рис. 2.2.1.3. «Паралельне перенесення»

Важливою функцією GRAN-2D є можливість створення калейдоскопічних фігур із симетрією n -го порядку (рис.2.2.1.4). Для цього користувач будує базову ламану лінію, а програма автоматично створює її обернені копії. Будь-яка зміна початкової фігури миттєво відображається на всіх інших, що дозволяє учням динамічно спостерігати закономірності симетрії. Також передбачено опцію «Залишення сліду», яка візуалізує траєкторію руху точок під час трансформацій, полегшуючи аналіз геометричних властивостей об'єктів [40, с.108–110].

У підручнику *«Інноваційні інформаційно-комунікаційні технології навчання математики»* докладно розглянуто можливості GRAN-2D і GRAN-

3D як основних програм для вивчення геометричних перетворень, зокрема симетрії [40, с.97–120].

- GRAN-2D забезпечує побудову об'єктів, симетричних відносно осі або точки, та динамічну зміну параметрів побудови в реальному часі [40, с.99–107].
- GRAN-3D використовується для моделювання симетрії у просторі, наприклад, побудови куба, піраміди або інших багатогранників і їх обертання навколо заданих осей [40, с.114–120].



Рис. 2.2.1.4. «Калейдоскоп»

Програми системи GRAN поєднують простоту використання, інтуїтивний інтерфейс і потужний функціонал. Вони підтримують динамічні моделі, доступні як у класі, так і під час самостійної роботи учнів, що дозволяє використовувати їх у різних формах навчання — від демонстрацій до проектних і дослідницьких завдань.

Програмні засоби системи GRAN це інструменти для інтеграції інформаційно-комунікаційних технологій у процес навчання математики. Вони забезпечують ефективну візуалізацію симетрії на площині та у просторі, сприяють розвитку просторового мислення й пізнавальної активності учнів. Використання GRAN допомагає поєднати традиційні методи навчання з сучасними цифровими технологіями, підвищуючи ефективність і наочність вивчення теми «Симетрія».

Бібліотека електронних наочностей «Геометрія»

Одним із ефективних засобів візуалізації понять симетрії у шкільному курсі геометрії є педагогічний програмний засіб (ППЗ) навчального

призначення «Бібліотека електронних наочностей: Геометрія, 7–9 клас» та «Геометрія, 11 клас». Цей електронний ресурс містить мультимедійні компоненти для інтерактивного опрацювання навчального матеріалу та забезпечує динамічну візуалізацію геометричних об'єктів, зокрема під час вивчення теми «Симетрія».

Програмний засіб розроблено з метою підвищення ефективності навчання, активізації пізнавальної діяльності учнів і формування просторового мислення. Він підтримує інтерактивну взаємодію, дає змогу створювати уроки з можливістю редагування та адаптації до потреб учителя. Серед основних переваг засобу виокремлюють інтегрованість (наочності для різних дидактичних цілей), конструктивність (поетапне створення й модифікація фігур) та гнучкість використання (підтримка лекцій, групової та індивідуальної роботи).

У посібнику *«Інноваційні інформаційно-комунікаційні технології навчання математики»* [40, с.87–97] подано детальні рекомендації щодо використання ППЗ «Геометрія, 7–9 клас» і «Геометрія, 11 клас» у навчальному процесі. Автори підкреслюють, що ресурс сприяє формуванню стійких знань про властивості геометричних фігур і перетворень завдяки динамічному підходу до подання матеріалу.

Основні можливості програмного засобу:

- Інтерактивні завдання – учні взаємодіють із матеріалом у динамічному режимі, виконуючи побудови з використанням симетрії, поворотів, осьових відображень тощо.
- Візуалізація понять – передбачено інструменти для створення моделей геометричних фігур, аналізу їхніх властивостей і взаємозв'язків, дослідження осьової та центральної симетрії через поетапні побудови.
- Розробка вправ з ІКТ – учитель має можливість створювати авторські завдання, експерименти й інтерактивні вправи, підключаючи додаткові мультимедійні ресурси.

- Автоматизована перевірка знань – більшість завдань супроводжується вбудованою системою оцінювання, що забезпечує миттєвий зворотний зв'язок щодо правильності виконання.

- Дослідницькі проекти – програма інтегрується з іншими освітніми засобами, зокрема GeoGebra та GRAN, що розширює можливості для міжінструментального аналізу й створення комплексних завдань.

У підручнику [40, с.91–92] зазначено, що «Бібліотеку електронних наочностей» доцільно використовувати на уроках для:

- ілюстрації властивостей симетрії, рухів і геометричних перетворень;
- організації групової роботи над завданнями на симетричні побудови;
- поєднання цифрових інструментів із традиційними методами навчання для поглиблення розуміння теоретичного матеріалу.

Окрему увагу в бібліотеці приділено візуалізації уроку «Геометрія українського орнаменту» [40, с.92], що показує застосування осової та центральної симетрії у візерунках народного мистецтва (рис. 2.2.1.5).



Рис. 2.2.1.5. Наочність до уроку «Геометрія українського орнаменту»

Педагогічний програмний засіб «Геометрія, 7–9 клас» є ефективним інструментом сучасного навчання геометрії, який забезпечує активну взаємодію учнів із навчальним матеріалом, стимулює дослідницьку діяльність і розвиває просторове мислення. У [40, с.92] підкреслено, що використання динамічних моделей, тестових завдань і творчих проектів сприяє інтеграції

теоретичних знань із практичним досвідом, поглиблюючи розуміння поняття симетрії як одного з центральних елементів шкільного курсу геометрії.

«Бібліотека електронних наочностей: Геометрія» є важливим педагогічним інструментом, який поєднує традиційне навчання з цифровими технологіями та сприяє формуванню компетентностей XXI століття у процесі вивчення симетрії.

Мультимедійні презентації (PowerPoint, Google Slides)

Мультимедійні презентації, створені за допомогою програм PowerPoint або Google Slides, це інструмент для візуалізації, моделювання та інтерактивного представлення навчального матеріалу. Їх використання у викладанні теми «Симетрія» сприяє поєднанню традиційних і сучасних форм навчання, активізує пізнавальну діяльність учнів і підвищує якість засвоєння знань.

Завдяки вбудованим графічним засобам мультимедійні презентації дають змогу наочно показувати симетрію, показуючи приклади з природи, архітектури та мистецтва, що сприяє розвитку естетичного сприйняття учнів. Крім того, вони дозволяють створювати інтерактивні завдання із запитаннями, варіантами відповідей, побудовою фігур або визначенням виду симетрії. Використання анімаційних ефектів допомагає відтворити динамічний процес побудови осьової, центральної чи обертальної симетрії, роблячи пояснення більш наочними та зрозумілими для учнів.

Такі можливості роблять мультимедійні презентації важливим засобом для реалізації принципів STEM-освіти, адже вони поєднують візуалізацію, інтерактивність і дослідницький підхід.

У посібнику *«Інноваційні інформаційно-комунікаційні технології навчання математики»* [40, с.145–167, 364] наголошується, що мультимедійні технології є невід’ємною складовою сучасного освітнього процесу. Автори рекомендують використовувати мультимедійні презентації для демонстрації складних геометричних понять і алгоритмів побудови, візуалізації та

модельовання математичних об'єктів, а також для організації інтерактивних уроків, що залучають учнів до активної й творчої діяльності.

Мультимедійні засоби можна інтегрувати у вивчення теми «Геометричні перетворення», зокрема під час ознайомлення з видами симетрії. Вони забезпечують візуальне представлення симетрії у природі, мистецтві та архітектурі, дають змогу відтворювати за допомогою анімації процеси відображення, повороту й паралельного перенесення, а також створювати інтерактивні завдання, що сприяють самостійному відкриттю й усвідомленню учнями властивостей симетрії.

У статті *«Проектування, створення та використання навчальних мультимедійних презентацій як засобу розвитку мислення учнів»* [46, с. 45–57] підкреслюється роль презентацій у розвитку пізнавальних і творчих умінь школярів. Автори зазначають, що мультимедійні презентації забезпечують наочність і логічну послідовність подання навчального матеріалу, сприяють розвитку в учнів навичок аналізу, синтезу та узагальнення, дають можливість адаптувати темп навчання до індивідуальних потреб кожного учня, а також підвищують мотивацію завдяки поєднанню тексту, графіки, відео та звукового супроводу.

Серед методичних рекомендацій підкреслюється доцільність створення мультимедійних презентацій для ілюстрації понять симетрії у природі, архітектурі та мистецтві; використання анімаційних ефектів для наочного пояснення алгоритмів побудови симетричних фігур; упровадження інтерактивних елементів, таких як тести, завдання на побудову або вибір правильної відповіді, що активізують пізнавальну діяльність учнів; а також навчання педагогів розробці власних мультимедійних продуктів, які поєднують текст, графіку, відео, звук і гіперпосилання.

Презентації також доцільно застосовувати для самостійної роботи учнів і створення навчальних проєктів, пов'язаних із дослідженням симетрії в навколишньому світі.

Використання мультимедійних презентацій у навчанні симетрії підвищує мотивацію учнів, сприяє розвитку просторового мислення та дозволяє організувати навчання на основі інтерактивності й візуалізації.

Інструменти PowerPoint, Google Slides, GeoGebra та Desmos у комплексі забезпечують сучасний підхід до викладання геометрії, роблячи абстрактні поняття доступними для розуміння і водночас привабливими для учнів.

Інформаційно-комунікаційні технології роблять опрацювання теми «Симетрія» динамічним і керованим: учні моделюють осьову, центральну та обертальну симетрію, перевіряють інваріанти й отримують миттєвий зворотний зв'язок. Надалі ці інструменти використовуються у STEM-сценаріях як засоби проєктування й дослідження (орнаменти, мозаїки, логотипи, моделі з обертальною симетрією).

Приклади STEM- і STEAM-уроків та проєктів із теми «Симетрія»

STEAM – проєкт "Геометрія писанки" [53, с.77-91] має на меті навчити учнів застосовувати геометричні трансформації (симетрія, поворот, паралельне перенесення) для створення моделі "писанки", поєднуючи математику, мистецтво та технології. Урок інтегрує математику, мистецтво та технології. Основний зміст полягає у створенні ескізу "писанки" на папері, моделюванні її в GeoGebra із використанням симетрії, повороту та паралельного перенесення, а також застосуванні інструменту "Бігунок" для створення динамічної моделі. Учні створюють цифрову модель "писанки" та презентують її результати, розвиваючи логічне і творче мислення, а також навички роботи з програмним забезпеченням. Особливістю уроку є інтеграція традиційної культури з сучасними технологіями.

STEAM-проєкт "Геометрія паркетів" [53, с.73-77] спрямований на вивчення правильних многокутників і їх застосування для створення паркетів, що мають естетичні та функціональні властивості. Урок інтегрує геометрію, інформатику, трудове навчання, мистецтво та креслення, акцентуючи увагу на зв'язку математики з реальними дизайнерськими завданнями. Учні працюють у групах або індивідуально, аналізують геометричні властивості многокутників і їх комбінації в заощенні площини, створюють зразки паркетів у GeoGebra або креслять вручну, а також розраховують вартість проєкту. Протягом проєкту учасники дізнаються про однорідні й неоднорідні паркети, застосовують алгоритми побудови правильних многокутників та виводять формули для радіусів вписаних і описаних кіл, площ многокутників і кілець. В результаті учасники створюють колекцію макетів паркетів, складають кошторис проведення робіт, а також презентують свої розробки з поясненням використаних геометричних принципів. Особливістю є участь у творчому процесі з можливістю вибору завдань відповідно до здібностей учнів, використання цифрових (GeoGebra, GRAN-2D) та фізичних

інструментів (креслярські прилади) для побудови макетів. Цей проєкт сприяє розвитку пізнавального інтересу, рефлексії та здатності до практичного застосування математичних знань у повсякденному житті.

STEAM-урок "Симетрія навколо нас. Фрактали" [53, с.81-83] має на меті навчити учнів знаходити симетрію у складних об'єктах та вивчати фрактали як приклади самоподібності. Урок інтегрує геометрію та інформатику, знайомлячи учнів із поняттям фракталів і їх симетричних властивостей. Основні етапи включають побудову фракталів у GeoGebra та моделювання природних об'єктів, таких як листя папороті. Учні створюють симетричні фрактали, аналізують їх структуру та презентують результати. У процесі вони розвивають навички роботи з моделями, аналітичне мислення та здатність використовувати технології. Особливістю уроку є створення динамічних фракталів із можливістю зміни параметрів.

STEAM-урок "Мистецтво орнаменту" [53, с.63-72] спрямований на навчання застосуванню осьової та центральної симетрії для створення орнаментів. Урок інтегрує геометрію та мистецтво, зосереджуючи увагу на аналізі симетрії у традиційних орнаментах різних культур. Учні будують власні орнаменти, використовуючи принципи симетрії, та створюють точні зображення за допомогою програмного забезпечення. У результаті учні створюють орнаменти з поясненням використаних видів симетрії, розвиваючи творчість, просторове мислення та здатність інтегрувати математичні знання у мистецтво. Особливістю уроку є дослідження історичних прикладів симетричних орнаментів.

STEAM-урок "Геометричні форми в архітектурі" [53, с.86] має на меті навчити учнів розробляти стійкі конструкції з урахуванням симетрії, яка забезпечує баланс і естетичність. Урок інтегрує геометрію та інженерію, ознайомлюючи учнів із симетричними конструкціями в архітектурі та техніці, такими як мости й будівлі. Учні будують моделі конструкцій із використанням центральної та осьової симетрії, аналізують їхню міцність і роблять висновки про стійкість. У процесі уроку розвиваються навички моделювання, аналізу

симетричних структур, а також інтеграція математичних і технічних знань. Особливістю є використання симетрії для реальних завдань із проєктування конструкцій.

STEAM-урок "Конструктивна геометрія" [53, с.88-94] спрямований на використання симетрії для побудови конструкцій і виробів із естетичними та функціональними властивостями. Урок інтегрує геометрію, інженерію та мистецтво, зосереджуючись на створенні симетричних форм для реальних об'єктів, таких як меблі, будівлі чи декоративні елементи. Учні використовують креслярські інструменти та програмне забезпечення для побудови моделей, а також тестують стійкість симетричних конструкцій. У результаті вони розробляють моделі, презентують результати разом із технічними розрахунками та розвивають практичні навички моделювання, інтеграцію геометричних знань і креативність. Особливістю уроку є використання цифрових і фізичних інструментів, таких як GeoGebra, креслярські інструменти та 3D-принтер.

STEAM-урок «Симетрія в природі та техніці» [53, с.82] спрямований на розвиток розуміння видів симетрії (осьова, центральна, обертальна) і навчання знаходженню симетрії в природних і технічних об'єктах. Урок інтегрує геометрію, біологію та технології, знайомлячи учнів із симетрією в природі (сніжинки, квіти) та техніці (архітектура, механізми). Основні етапи уроку включають аналіз фотографій реальних об'єктів із використанням математичних методів, а також побудову симетричних фігур у GeoGebra. Учні презентують проєкти, що показують симетрію у реальних об'єктах, розвиваючи навички аналізу, критичне мислення та вміння працювати з програмним забезпеченням. Особливістю уроку є використання реальних фотографій для аналізу симетрії.

STEAM-урок "Симетрія у природі та архітектурі" [53, с.82] спрямований на дослідження видів симетрії у живій природі та архітектурних об'єктах із використанням програмного забезпечення GeoGebra. Урок інтегрує геометрію, біологію, мистецтво та архітектуру, зосереджуючись на вивченні

симетрії у природних об'єктах (листя, квіти, кристали) та симетричних спорудах. Учні фотографують реальні об'єкти, аналізують їхню симетрію, будують цифрові моделі у GeoGebra та готують звіт про симетрію в обраній сфері. У результаті вони розвивають навички аналізу, роботи з програмним забезпеченням і інтеграції знань із різних предметів. Особливістю уроку є використання сучасних інструментів, таких як 3D-принтер, для створення фізичних моделей симетричних об'єктів.

STEAM-урок "Симетрія в геометричній конфігурації молекул" [53, с.82] має на меті ознайомити учнів із симетрією в хімії та кристалографії, використовуючи приклади молекул і кристалів. Урок інтегрує геометрію, хімію та фізику, зосереджуючись на аналізі геометричних конфігурацій молекул і симетричних структур кристалів за допомогою таблиць і фотографій. Учні використовують GeoGebra для побудови моделей молекул із різними типами симетрії та аналізу їхньої структури. У результаті вони розвивають розуміння взаємозв'язку між геометрією та хімією, просторове мислення й навички моделювання. Особливістю уроку є практичне використання симетрії для пояснення хімічних і фізичних властивостей речовин.

STEM-урок "Симетрія навколо нас" спрямований на розвиток навичок аналізу та створення симетричних фігур за допомогою математичних методів і сучасних інструментів, таких як GeoGebra. Урок інтегрує геометрію, технології, мистецтво, біологію та фізику, демонструючи практичне застосування симетрії у природі, архітектурі та мистецтві. Основними етапами є ознайомлення з видами симетрії (осьова, центральна, обертальна), побудова фігур із центральною та осьовою симетрією, дослідження фракталів у GeoGebra, а також презентація створених моделей і аналіз результатів. Учні працюють над задачами, наприклад: побудова симетричної фігури відносно прямої, знаходження центру симетрії природного об'єкта чи моделювання фракталу. Урок реалізується через дослідницький підхід і проектну діяльність. Результатом є створення симетричних моделей, розвиток критичного

мислення, творчості, аналітичних здібностей та роботи з технологіями. Особливістю є використання реальних прикладів симетрії, таких як сніжинки, листя чи орнаменти.

У збірнику матеріалів «STEM-школа – 2021» [52] автори пропонують дослідницькі проєкти, які інтегрують математику, мистецтво та інформатику.

Проєкт "Симетрія в математиці та архітектурі" спрямований на вивчення практичного застосування симетрії та пропорції у створенні архітектурних шедеврів і мистецьких об'єктів, що належать до світової культурної спадщини. Цей STEM-проєкт [52, с.24-26] пропонує учасникам дослідити практичне використання симетрії та пропорції у створенні всесвітньо відомих культурних пам'яток, таких як Тадж Махал в Індії чи Альгамбра в Іспанії. Учасники вивчають властивість симетрії як здатність об'єктів відтворювати себе при певних змінах, що є ключовою в мистецтві та архітектурі. У ході проєкту вони аналізують застосування симетрії та пропорції в архітектурних шедеврах, досліджують параболу як елемент дизайну у спорудах, наприклад, Тріумфальній арці чи палаці Гуеля, і здійснюють віртуальні екскурсії через Google Arts & Culture. Цей проєкт розвиває креативність, полікультурну компетентність та когнітивні навички, такі як пошук, аналіз і перевірка даних. Учні створюють презентації, доповіді або проєкти, які відображають зв'язок симетрії з культурною спадщиною, поглиблюючи розуміння значення математики у створенні гармонійних архітектурних форм. Особливістю є використання віртуальних прогулянок, що дозволяють учасникам побачити культурні особливості та естетику архітектурних шедеврів. Цей проєкт сприяє усвідомленню значущості математичних знань і формуванню мотивації до саморозвитку та досліджень.

У статті [70, с.20-22] "Формування STEM-компетентностей студентів під час розв'язування фізичних задач із використанням принципу симетрії" автори О. С. Кузьменко та С. В. Дембіцька пропонують приклад STEM-уроку, який спрямований на формування STEM-компетентностей учнів через дослідження симетричних електричних кіл.

STEM-урок "Симетричні електричні кола" спрямований на дослідження впливу симетрії на струми та напругу в електричних схемах. Урок інтегрує фізику, математику та інформатику, поєднуючи теоретичне навчання з практичними розрахунками та моделюванням. Основні етапи включають ознайомлення з поняттями симетрії у фізиці (площина, вісь, центр симетрії), визначення типу симетрії в схемі, аналіз еквіпотенціальних вузлів, побудову еквівалентних схем і розрахунків опору, а також перевірку результатів у програмних симуляторах. Учні створюють моделі симетричних електричних кіл, розробляють звіт із висновками про роль симетрії у фізиці, розвиваючи критичне мислення, навички роботи з електричними схемами та аналітичні здібності. Особливістю уроку є інтеграція реальних завдань, що спрощують складні розрахунки завдяки симетрії, наприклад, визначення еквіпотенціальних вузлів або розрахунків еквівалентного опору симетричної схеми.

Приклади типових задач на обчислення, побудову та доведення із застосуванням симетрії

3.2.1. Задачі на обчислення

Застосування осьової симетрії до розв'язування задач.

Задача 3.2.1.1.

Вказати рівняння кола, яке на площині є симетричним до кола $(x-4)^2+(y+5)^2=9$ відносно осі Oy .

Розв'язання. Маємо коло з центром $C(4;-5)$ і радіусом $r = 3$. При осьовій симетрії відносно осі Oy абсциси точок змінюють знак, а ординати та радіус зберігаються. Отже центр відобразиться в точку $C'(-4;-5)$, радіус залишиться $r = 3$. Тому шукане рівняння: $(x+4)^2+(y+5)^2=9$, (див. рис.3.2.1.1)

Відповідь: $(x+4)^2 + (y+5)^2 = 9$.

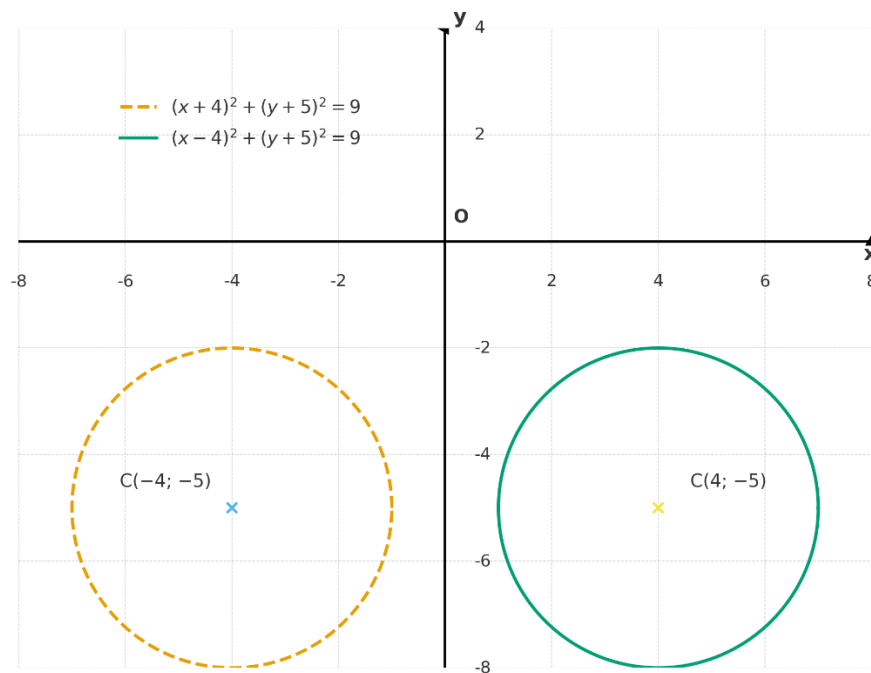


Рис. 3.2.1.1. Образ кола $(x-4)^2+(y+5)^2=9$ при симетрії відносно осі Oy

Задача 3.2.1.2.

Побудуйте дзеркальний відбиток прямої $y=2x+1$ відносно осі Oy і запишіть рівняння отриманої прямої [74, с.78].

Розв'язання.

1. На прямій $y=2x+1$ візьмемо дві зручні точки: $A(0;1)$ — перетин з Oy , $B(-\frac{1}{2};0)$ — перетин з Ox .

2. Відобразимо їх відносно Oy : $A \mapsto A$ (не змінюється), $B \mapsto B'(-\frac{1}{2};0)$.

3. Пряма через A і B' є шуканою.

4. Залежність між координатами симетричних відносно осі Oy точок виражається формулами $x'=-x$, $y'=y$. Тому у відбитті відносно Oy підставляємо $x \mapsto -x$: $y=2(-x)+1 \Rightarrow y=-2x+1$, (див. рис. 3.2.1.2).

Відповідь: $y=-2x+1$.

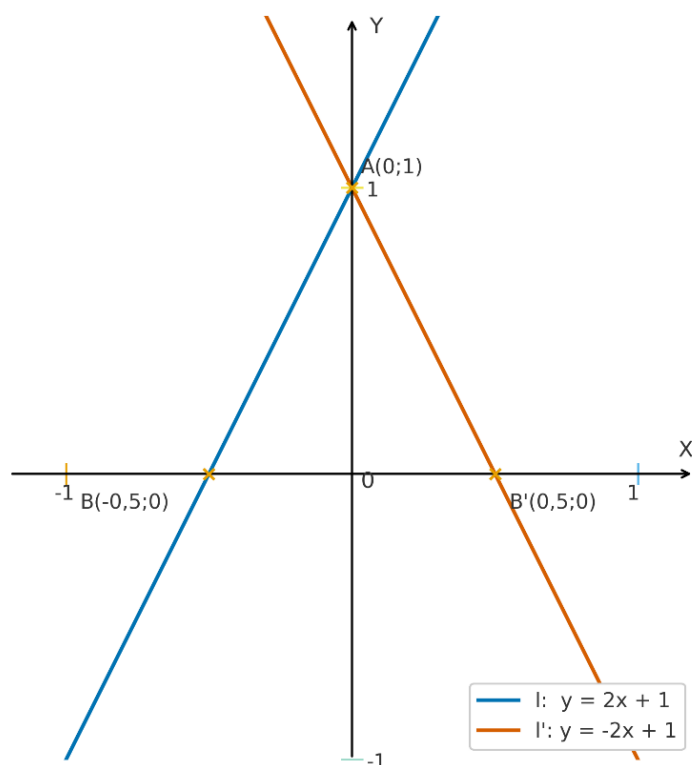


Рис. 3.2.1.2. Відображення прямої $y=2x+1$ відносно осі Oy

Задача 3.2.1.3.

Осями симетрій ромба є осі координат. Серединою однієї сторони ромба є точка $M(2; 3)$. Знайти координати вершин ромба [76, с.46].

Розв'язання.

Оскільки осі координат збігаються з осями симетрії ромба, а осі симетрії ромба проходять уздовж його діагоналей, то вершини фігури лежать на осях Ox і Oy .

Нехай $ABCD$ — ромб, його вершини A і C лежать на осі абсцис, а точки B і D — на осі ординат. Тоді вершини ромба матимуть координати: $A(x;0)$, $B(0;y)$, $C(-x;0)$, $D(0;-y)$.

Розглянемо прямокутний трикутник ABO . Точка $M(2;3)$ є серединою гіпотенузи AB . За властивістю медіани прямокутного трикутника, що виходить з вершини прямого кута, маємо: $OM = MA = MB = \frac{1}{2} AB$.

Знайдемо довжину OM як відстань від початку координат до точки M :
 $OM = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13}$

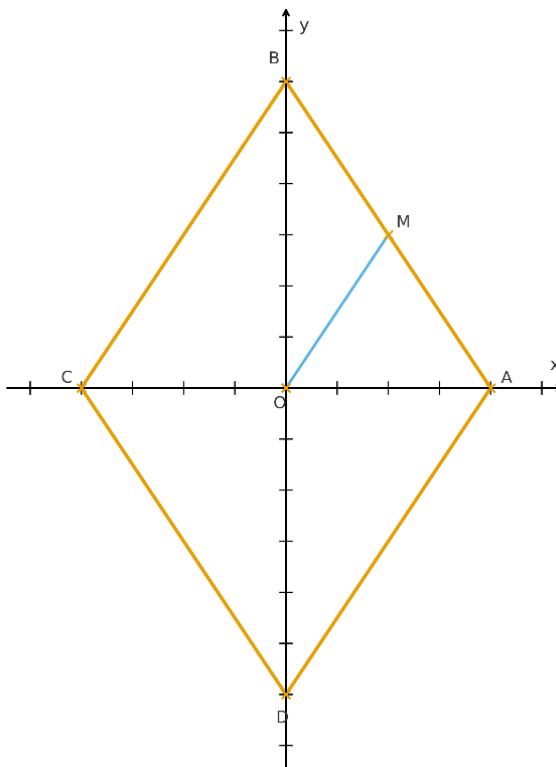


Рис. 3.2.1.3. Ромб $ABCD$ з діагоналями на осях; $M(2;3)$ — середина AB

Оскільки $AM = OM$, то $AM^2 = (x-2)^2 + 9 = 13$. Звідси $x = 4$. Отже, абсциса точки A дорівнює 4: $A(4;0)$. Точка C симетрична точці A відносно осі ординат, тому її абсциса дорівнює -4 : $C(-4;0)$.

Оскільки $OM = BM$, то $BM^2 = OM^2 = 4 + (y-3)^2 = 13$. Звідси $y=6$. Отже, ордината точки B дорівнює 6: $B(0;6)$.

Точка D симетрична точці B відносно осі абсцис, (див. рис. 3.2.1.3), тому ордината точки D дорівнює -6 : $D(0;-6)$.

Відповідь: $A(4;0)$, $B(0;6)$, $C(-4;0)$, $D(0;-6)$.

Задача 3.2.1.4.

Діагоналі прямокутника лежать на прямих $y=3x$ та $y=-3x$. Відомо, що одна зі сторін проходить через точку $(2;6)$. Знайдіть координати вершин прямокутника [74, с.79].

Розв'язання.

Проведемо прямі $y=3x$ і $y=-3x$. Вони перетинаються в точці $O(0;0)$ і є діагоналями шуканого прямокутника, отже O — його центр. Для прямокутника осями симетрії є прямі, що проходять через центр і паралельні його сторонам.

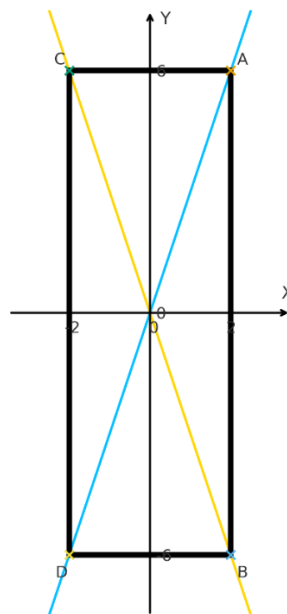


Рис. 3.2.1.4. Прямокутник $ABCD$: $A(2;6)$, $B(2;-6)$, $C(-2;6)$, $D(-2;-6)$

Пара ліній $y = \pm 3x$ симетрична відносно осей Ox і Oy , тому саме осі координат є осями симетрії цього прямокутника. Звідси сторони прямокутника паралельні осям.

Одна зі сторін проходить через точку $(2;6)$, маємо дві сторони: $x = 2$ та $y = 6$. Відбиваючи їх відносно осей симетрії, дістаємо ще дві сторони: $x = -2$ та $y = -6$. Перетинами цих прямих, (див. рис. 3.2.1.4) визначаємо вершини: $A(2;6)$, $B(2;-6)$, $C(-2;6)$, $D(-2;-6)$.

Відповідь: $A(2;6)$, $B(2;-6)$, $C(-2;6)$, $D(-2;-6)$.

Задача 3.2.1.5.

У прямокутному трикутнику $\triangle ABC$ ($\angle C = 90^\circ$) медіана $AM = m$ проведена до меншого катета й утворює з більшим кут 15° . Знайдіть площу трикутника [76, с.12].

Розв'язання.

$\triangle ABC$ – прямокутний, $\angle C = 90^\circ$, $\angle MAC = 15^\circ$, AM – медіана, $AM = m$. Побудуємо точку M_1 симетричну точці M відносно прямої AC . Таким чином $\triangle AMC = \triangle AM_1C$ (по двом катетам).

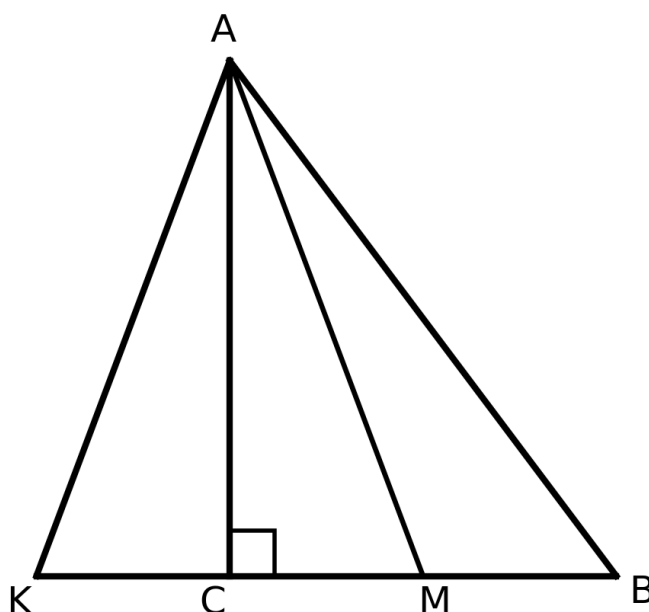


Рис. 3.2.1.5. Осьова симетрія відносно AC : $M \mapsto KM$; медіана AM

$$AM = AM_1 = m; \angle MAC = \angle M_1AC = 15^0, \text{ тоді } \angle MAM_1 = 30^0.$$

$$\Delta S_{MAM_1} = \frac{1}{2} m \cdot m \cdot \sin(30^0) = \frac{m^2}{4}$$

Доведемо, що ΔCAM рівновеликий ΔAMB , тобто їх площі рівні.

$$S_{\Delta CAM} = \frac{1}{2} AC \cdot MC, S_{\Delta AMB} = \frac{1}{2} AC \cdot BM, \quad MC = MB, \text{ за умовою.}$$

Отже, $S_{\Delta ABC} = S_{\Delta MAM_1}$, тому $S_{\Delta ABC} = \frac{m^2}{4}$, (див. рис. 3.2.1.5)

$$\text{Відповідь: } S_{\Delta ABC} = \frac{m^2}{4}$$

Застосування центральної симетрії в задачах на обчислення.

Задача 3.2.1.6.

Знайти пряму [76, с.35], симетричну до $y = 2x - 3$ відносно початку координат.

Правило: Центральна симетрія відносно початку координат $O(0;0)$ задається заміною $(x,y) \mapsto (-x,-y)$.

Тому для прямої $y = kx + b$ образ має той самий кутовий коефіцієнт k , а вільний член змінює знак: $y = kx - b$.

Розв'язання. Виконаємо заміну $(x,y) \rightarrow (-x,-y)$:

$$-y = 2(-x) - 3 \Rightarrow -y = -2x - 3 \Rightarrow y = 2x + 3, \text{ (див. рис.3.2.1.6).}$$

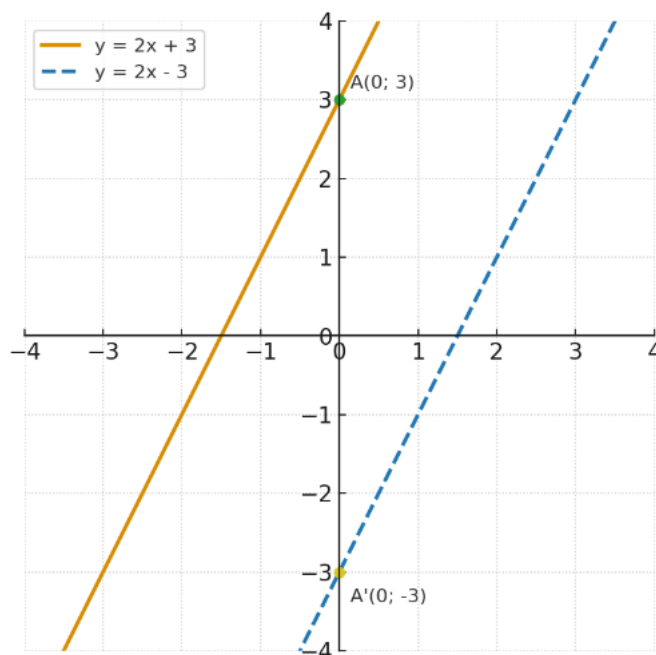


Рис. 3.2.1.6. Симетрія прямої $y = 2x - 3$ відносно початку координат

(Те саме впливає з правила: $k = 2$ зберігається, $b = -3$ змінює знак на $+3$.)

Відповідь: $y = 2x + 3$.

Задача 3.2.1.7.

Точки $B(x; -3)$ і $B'(-5; y)$ симетричні відносно точки $C(2; 1)$. Потрібно знайти x та y .

Розв'язання.

Точка C є серединою відрізка BB' , отже $x_c = \frac{x_B + x_{B'}}{2}$, $y_c = \frac{y_B + y_{B'}}{2}$

Підставимо координати точок $C(2; 1)$, $B(x; -3)$ і $B'(-5; y)$:

$$1. \text{ Для абсциси точки } C: 2 = \frac{x + (-5)}{2}$$

$$\text{Звідси: } 4 = x - 5 \Rightarrow x = 9$$

$$2. \text{ Для ординати точки } C: 1 = \frac{-3 + y}{2}$$

$$\text{Маємо: } 2 = -3 + y \Rightarrow y = 5$$

Відповідь: $B(9; -3)$, $B'(-5; 5)$, (див.рис. 3.2.1.7).

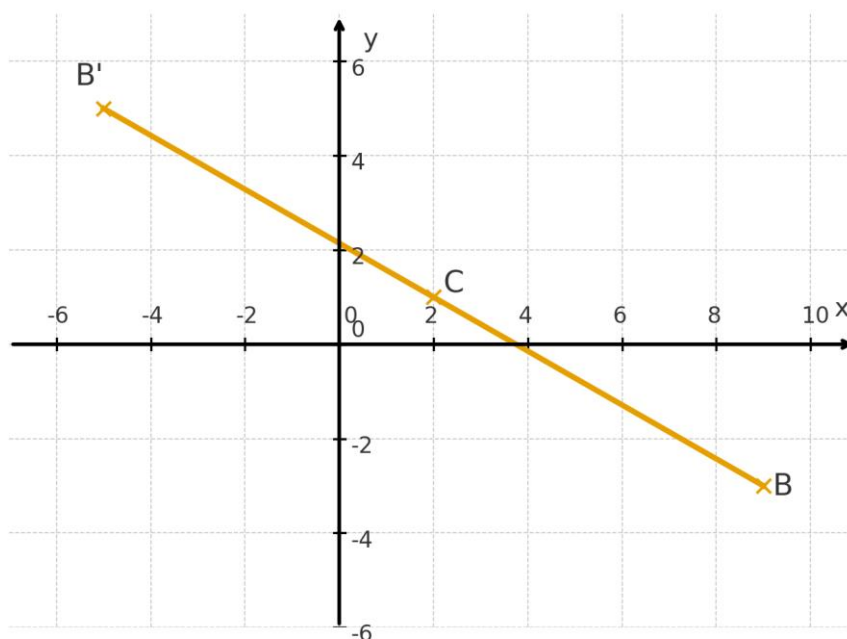


Рис. 3.2.1.7. Центральна симетрія точки та її образу

Задача 3.2.1.8.

Діагоналі паралелограма $ABCD$ лежать на прямих $y=0$ та $y=x$. Середина однієї зі сторін — точка $M(3;1)$ [76, с.37]. Знайти координати вершин паралелограма.

Розв'язання.

Прямі $y=0$ (вісь Ox) і $y=x$ перетинаються у початку координат, отже центр симетрії паралелограма — $O(0;0)$. Тоді протилежні вершини лежать попарно на цих прямих: нехай $A(x,0)$ $C(-x,0)$ і $B(t,t)$ $D(-t,-t)$. Оскільки M — середина сторони AB , маємо:

$$M\left(\frac{x+t}{2}, \frac{0+t}{2}\right) = (3,1)$$

Звідси $t = 2$ і $x = 4$. Отже, $A(4,0)$, $B(2,2)$, $C(-4,0)$, $D(-2,-2)$.

Перевірка: діагоналі AC і BD справді лежать відповідно на $y = 0$ та $y = x$, (див.рис.3.2.1.8).

Відповідь. $A(4,0)$, $B(2,2)$, $C(-4,0)$, $D(-2,-2)$.

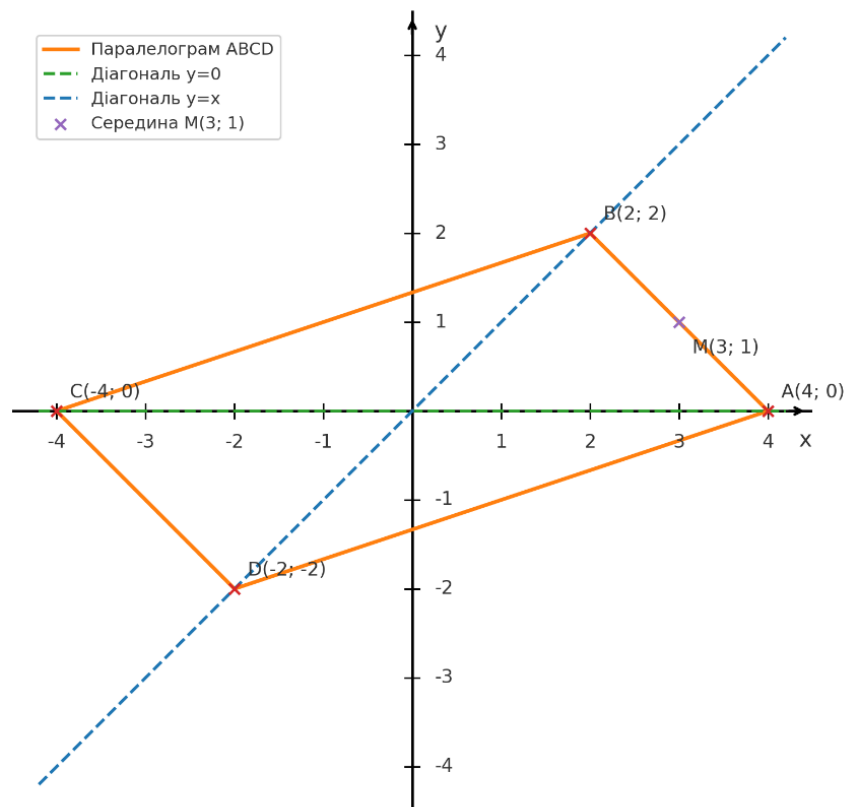


Рис. 3.2.1.8. Центр симетрії паралелограма $ABCD$ у точці $O(0;0)$ за умови $y=0$ та $y=x$, $M(3;1)$

Задача 3.2.1.9.

Обчислити площу земельної ділянки, яка має форму трапеції $ABCD$, якщо:

- Бічна сторона $AB = 10$ м і перпендикулярна до основи AD ;
- Точка E — середина другої бічної сторони CD ;
- Відстань від вершини A до точки E дорівнює 18 м [76, с.44].

Розв'язання.

Нехай трапеція $ABCD$ є зображенням даної земельної ділянки:

$AB = 10$ м, $AB \perp AD$, E — середина DC , тобто $CE = ED$, $AE = 18$ м.

З'єднаємо точку A з серединою сторони CD точкою E . Прийmemo точку E за центр симетрії. Тоді $C = S_E(D)$ (точка C є образом точки D при центральній симетрії відносно точки E). Побудуємо точку $F = S_E(A)$ (точка F є образом точки A при центральній симетрії відносно точки E).

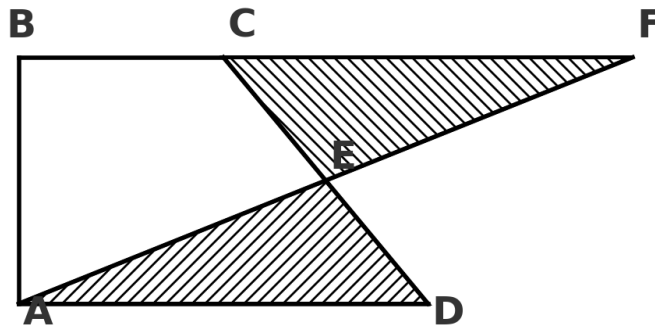


Рис.3.2.1.9. Площа ділянки у формі трапеції. Центр. симетрія відносно т. E

Тоді за властивостями центральної симетрії $CF \parallel AD$ і $CF = AD$. Оскільки трикутники AED і FEC симетричні відносно точки E , то вони мають однакові площі. Отже, площа трапеції $ABCD$ дорівнює площі прямокутного трикутника ABF , у якого $AB = 10$ м і $AF = 2 \cdot AE = 36$ м. (рис.3.2.1.9).

За теоремою Піфагора:

$$\sqrt{AF^2 - AB^2} = \sqrt{36^2 - 10^2} = \sqrt{1196} \approx 35.$$

$$S_{ABF} = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 35 = 175.$$

Відповідь. 175 м².

Застосування повороту до розв'язування задач на обчислення.

Задача 3.2.1.10.

Знайти рівняння образу прямої $3x-4y+2=0$ після повороту навколо початку координат на 90^0 проти годинникової стрілки [74, с.135].

Розв'язання.

Використаємо координатні формули повороту. Поворот на кут α навколо початку:

$$\begin{cases} x' = x \cos \alpha - y \sin \alpha \\ y' = x \sin \alpha + y \cos \alpha \end{cases}$$

Щоб отримати рівняння образу прямої, у вихідне рівняння треба підставити обернене перетворення

$$\begin{cases} x = x' \cos \alpha - y' \sin \alpha \\ y = -x' \sin \alpha + y' \cos \alpha \end{cases}$$

Для $\alpha = 90^0$: $\cos \alpha = 0$, $\sin \alpha = 1$, тому $x = y'$, $y = -x'$.

Підставляємо у $3x-4y+2=0$:

$$3(y') - 4(-x') + 2 = 0 \Rightarrow 4x' + 3y' + 2 = 0.$$

Відповідь. Рівняння образу: $4x' + 3y' + 2 = 0$, (див.рис.3.2.1.10).

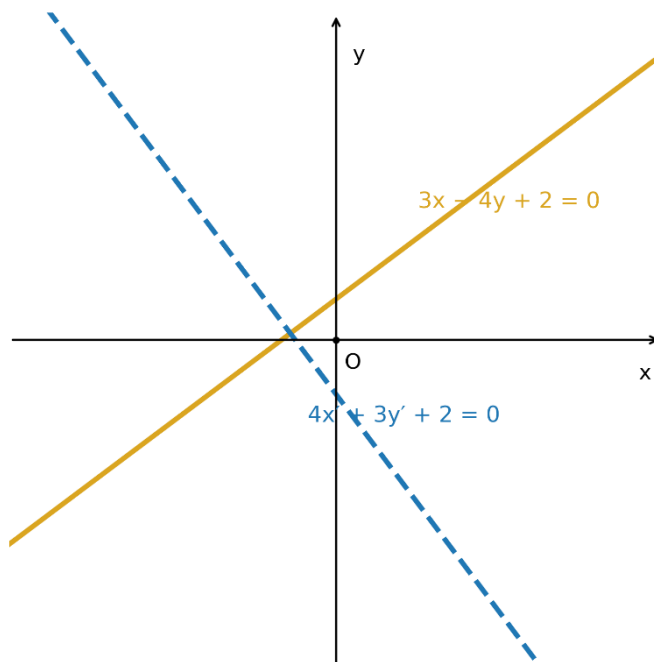


Рис. 3.2.1.10. Поворот на 90^0 навколо O

Задача 3.2.1.11.

Знайти координати точки перетину прямої $3x + 2y - 5 = 0$ і образу прямої $y = x - 3$ після повороту навколо початку координат на 90° проти годинникової стрілки [74, с.135].

Розв'язання.

Поворот на $\alpha = 90^\circ$ навколо $O(0,0)$ задається

$$\begin{cases} x' = -y \\ y' = x \end{cases}$$

Щоб отримати рівняння образу у змінних (x, y) , у вихідному рівнянні підставляємо обернене перетворення:

$$\begin{cases} x = y' \\ y' = -x' \end{cases}, \Rightarrow x \mapsto y, y \mapsto -x.$$

Отже, для прямої $y = x - 3$ маємо: $-y = y - 3 \Rightarrow y = -x + 3$.

Шукаємо перетин із $3x + 2y - 5 = 0$:

$$\begin{cases} 3x + 2y - 5 = 0 \\ y = -x + 3 \end{cases} \Rightarrow 3x + 2(-x + 3) - 5 = 0 \Rightarrow x = -1, y = 4, \text{ (рис.3.2.1.11).}$$

Відповідь: $(-1; 4)$.

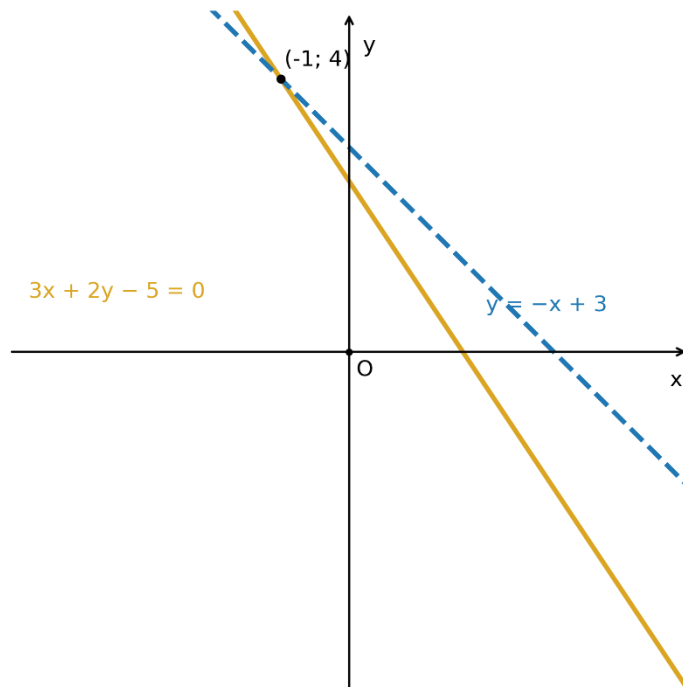


Рис. 3.2.1.11. Перетин прямих

Задача 3.2.1.12.

У рівносторонньому трикутнику ABC на його сторонах CA та CB обрано точки M і N відповідно так, що, $CM + CN = AC$.

Нехай O — точка перетину медіан трикутника. Знайти $\angle MON$ [74, с.136].

Розв'язання.

Нехай у рівносторонньому трикутнику ABC проведено медіани AA_1 , BB_1 , CC_1 , що перетинаються в точці O . Для такого трикутника медіани рівні між собою, а центральні кути при O , які спираються на сторони трикутника, однакові: $\angle AOC = \angle COB = \angle BOA = 120^\circ$.

Щоб показати існування потрібних точок, беремо $M = B_1 \in CA$ і $N = A_1 \in CB$. Тоді, $CB_1 + CA_1 = AC$, $\angle B_1OA_1 = 120^\circ$, отже умова задачі виконується.

Отже, візьмемо довільну точку M на стороні CA . Точку N на стороні CB виберемо так, щоб $CN = AM$, тоді $CM + CN = CM + AM = AC$, тобто вимога щодо довжин задоволена. Поворот на кут 120° навколо точки O переводить вершину A у вершину C і водночас точку M — у точку N , (див.рис.3.2.1.12). Отже, $\angle MON = \angle AOC = 120^\circ$.

Відповідь. $\angle MON = 120^\circ$.

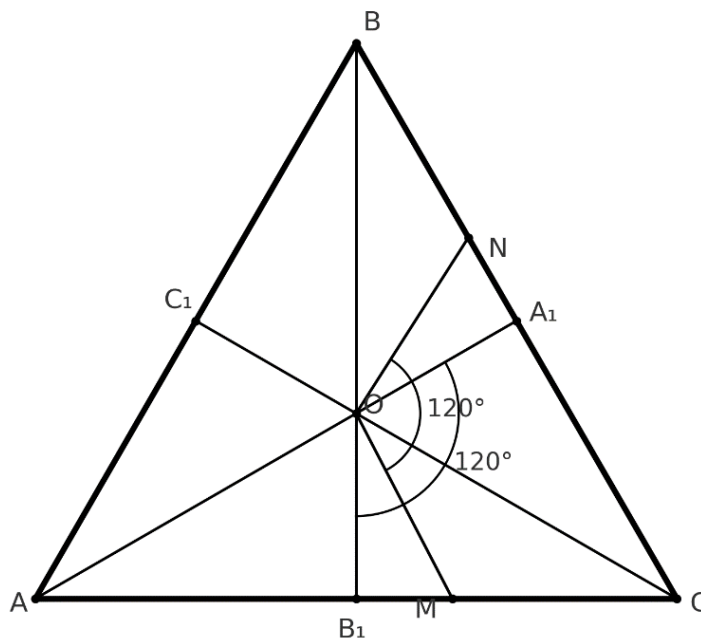


Рис. 3.2.1.12. Поворот на 120° навколо O у $\triangle ABC$

Задача 3.2.1.13.

Стрілки годинника показують 12 годин. Який час показуватиме годинник, якщо хвилинна стрілка здійснить поворот: 1) на 60° ; 2) на 120° ; 3) на 150° ? [77, с.126].

Розв'язання.

О 12:00 хвилинна стрілка повернулась на кут φ у напрямі її руху. Випадки: $\varphi_1=60^\circ$, $\varphi_2=120^\circ$, $\varphi_3=150^\circ$.

За 60 хв хвилинна стрілка проходить $360^\circ \Rightarrow$ кутова швидкість

$$\omega = \frac{360^\circ}{60 \text{ хв}} = 6^\circ \text{ хв}$$

Звідси:

$$t = \frac{\varphi}{6} (\text{хв}).$$

1. $t_1 = \frac{60^\circ}{6} = 10 \text{ хв} \Rightarrow 12:10.$
2. $t_2 = \frac{120^\circ}{6} = 20 \text{ хв} \Rightarrow 12:20.$
3. $t_3 = \frac{150^\circ}{6} = 25 \text{ хв} \Rightarrow 12:25.$

Відповідь. Годинник показуватиме час: 12:10; 12:20; 12:25, (див. рис.3.2.1.13).

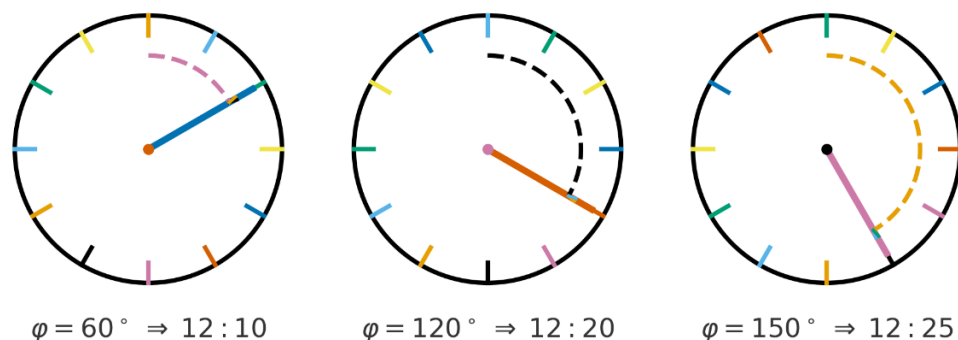


Рис. 3.2.1.13. Кути повороту хвиливної стрілки від 12:00.

Застосування паралельного перенесення до розв'язування задач на обчислення.

Задача 3.2.1.14.

Дано точки $A(3; -2)$ і $B(5; -4)$. При паралельному перенесенні відрізка AB образом його середини є точка $M_1(-4; 3)$. Знайдіть образи точок A і B при такому паралельному перенесенні.

Розв'язання.

Дано: $A(3; -2)$ і $B(5; -4)$; точка $M_1(-4; 3)$ є образом середини відрізка AB ; Знайдемо середину відрізка AB .

Нехай $C(x; y)$ – є середина відрізка AB .

$$x = \frac{3+5}{2} = 4; \quad y = \frac{-2-4}{2} = -3; \quad C = (4; -3);$$

Тоді $C(4; -3) \rightarrow M_1(-4; 3)$. Знайдемо a і b (рис.3.2.1.14).

$$-4 = 4 + a; \quad a = -8;$$

$$3 = -3 + b; \quad b = 6;$$

Відповідь. $A(3; -2) \rightarrow A_1(-5; 4)$; $B(5; -4) \rightarrow B_1(-3; 2)$.

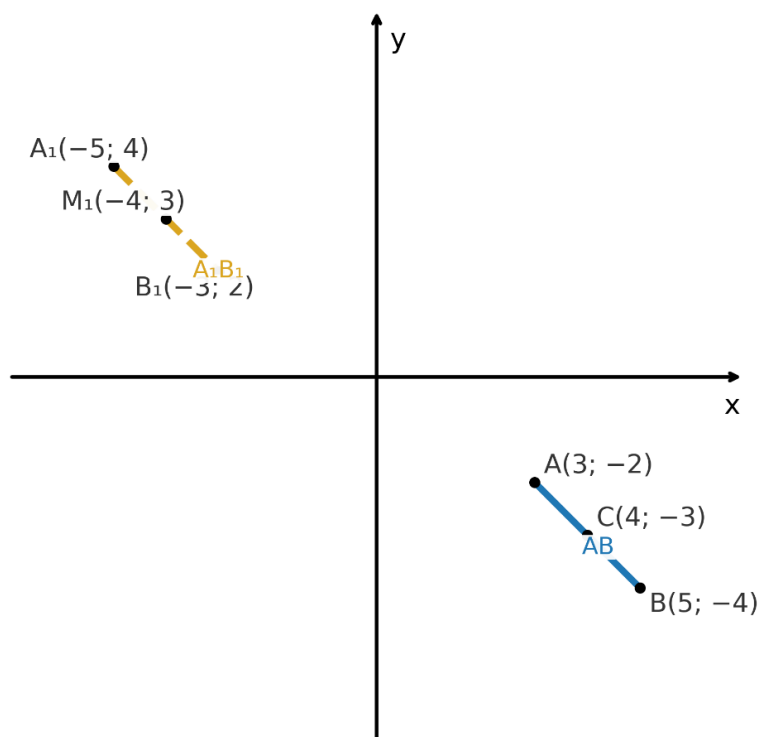


Рис. 3.2.1.14. Перенесення відрізка AB

Задача 3.2.1.15.

Сума довжин основ трапеції дорівнює 21 см, а довжини діагоналей дорівнюють 13 см і 20 см. Обчислити площу трапеції [76, с.51].

Розв'язання.

Нехай у трапеції $ABCD$ $AD + BC = 21$ см, $AC = 13$ см, $BD = 20$ см.

Виконаємо паралельне перенесення діагоналі BD на вектор $\overrightarrow{BC}$; тоді точка B перейде в точку C , точка D – у D_1 . Тоді $CD_1 = BD = 20$, $DD_1 = BC$, тому $AD_1 = 21$. Отже, у $\triangle ACD_1$ відомі всі сторони, його площу можна знайти за формулою Герона:

$$S\Delta\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}, \quad p = \frac{P}{2} = \frac{21+13+20}{2} = 27$$

$$\text{Тоді } S_{\triangle ACD_1} = \sqrt{27 \cdot 14 \cdot 7 \cdot 6} = 126$$

Площа трапеції $ABCD$ дорівнює площі трикутника ACD_1 ($S_{\triangle ABC} = S_{\triangle DCD_1}$), (див. рис.3.2.1.15).

Відповідь. 126 см².

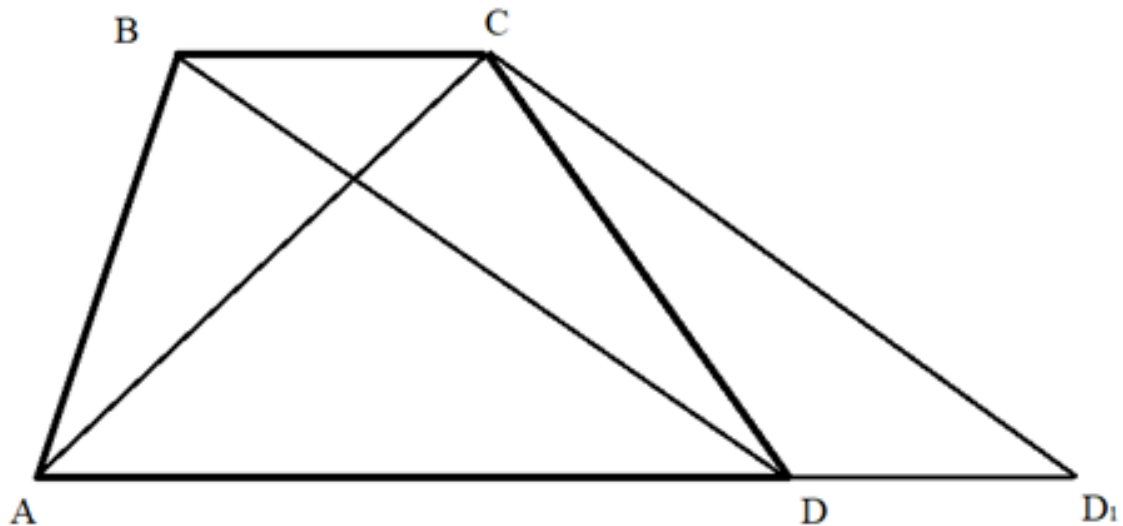


Рис. 3.2.1.15. Обчислення площі трапеції за допомогою паралельного переносу

Задача 3.2.1.16.

У рівнобедреній трапеції довжина більшої основи дорівнює 20 см, довжина бічної сторони дорівнює 8 см, а величина одного з кутів – 60° . Обчислити довжину меншої основи трапеції [74, с.208].

Розв'язання.

Нехай у трапеції $ABCD$ $AB = CD = 8$ см, $AD = 20$ см, $\angle BAD = 60^\circ$. Виконаємо паралельне перенесення сторони AB на вектор $\overrightarrow{BC}$; при цьому точка A перейде в точку A_1 , точка B – у точку C .

Тоді $A_1C = AB = 8$, $CD = 8$, $\angle CA_1D = 60^\circ$, отже, $\triangle A_1CD$ – рівносторонній, тоді $A_1D = 8$, $BC = AA_1 = AD - A_1D = 20 - 8 = 12$ (див. рис.3.2.1.16).

Відповідь. 12 см.

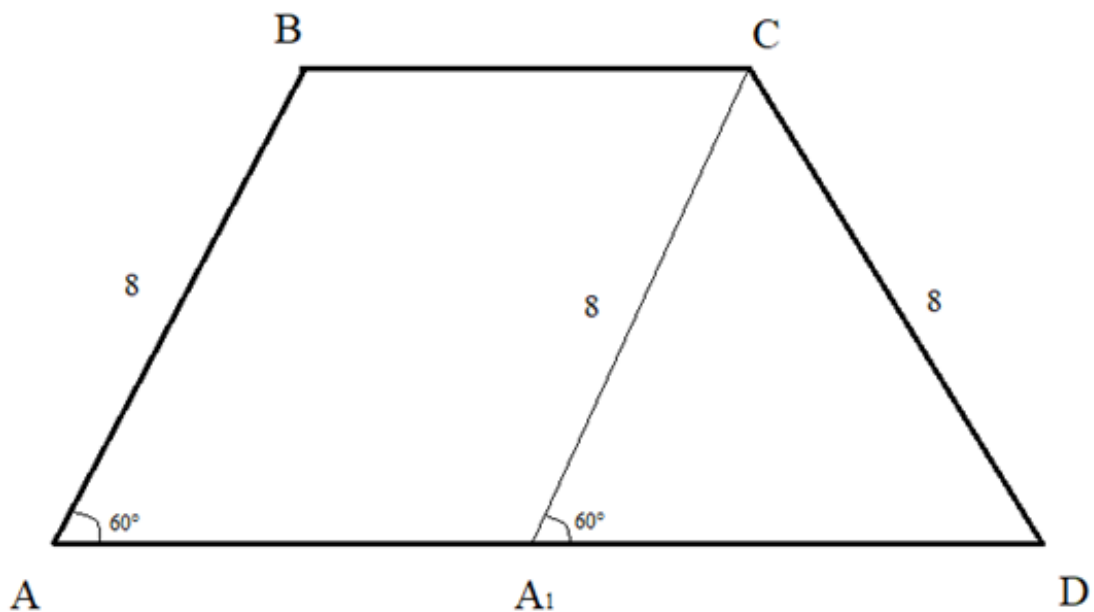


Рис. 3.2.1.16. Перенесення AB на вектор BC : $A \rightarrow A_1$

3.2.2. Задачі на побудову

Застосування осової симетрії в задачах на побудову.

Задача 3.2.2.1.

На мапі України побудуйте пряму, відносно якої Львів та Івано-Франківськ є симетричними. Які області перетинає ця пряма? [26, с.103].

Побудова.

Позначимо Львів точкою L , Івано-Франківськ — точкою F . Проведемо відрізок LF і знайдемо його середину M . Через точку M проведемо пряму, перпендикулярну до LF . За означенням, серединний перпендикуляр до відрізка, що з'єднує дві точки, є віссю їхньої симетрії, отже побудована пряма є шуканою віссю (рис.3.2.2.1).

Відповідь. Вісь симетрії — серединний перпендикуляр до відрізка LF ; пряма перетинає Закарпатську, Львівську, Івано-Франківську, Тернопільську, Хмельницьку, Житомирську, Київську, Чернігівську, Сумську області.



Рис. 3.2.2.1. Побудова осі симетрії для міст Львів та Івано-Франківськ

Задача 3.2.2.2.

Побудуйте трикутник, симетричний трикутнику ABC відносно прямої l , яка:

- 1) не перетинає трикутник;
- 2) перетинає трикутник;
- 3) містить сторону АВ трикутника.

Побудова.

1) Пряма l не перетинає трикутник

Побудуємо вісь симетрії l , яка знаходиться поза $\triangle ABC$. Відобразимо кожну вершину трикутника A , B і C симетрично відносно прямої l , отримаємо точки A' , B' і C' . З'єднаємо точки A' , B' , і C' , щоб отримати симетричний $\triangle A'B'C'$, (див. рис.3.2.2.2а).

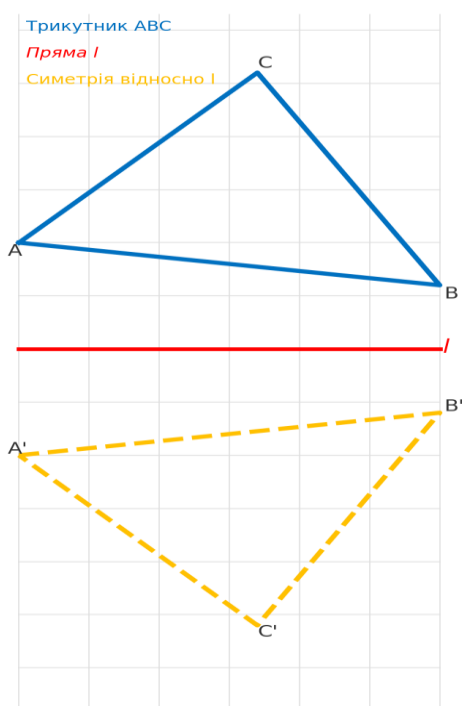
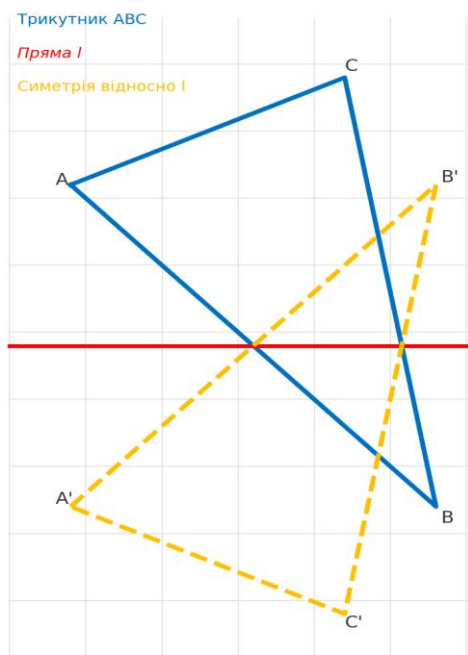


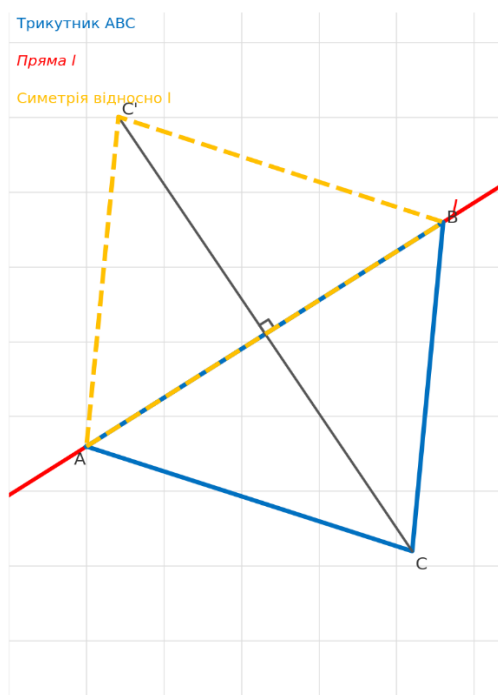
Рис. 3.2.2.2а. Пряма l не перетинає трикутник

2) Пряма l перетинає трикутник

Побудуємо вісь симетрії l , яка проходить через одну зі сторін або внутрішню частину $\triangle ABC$. Відображаємо вершини, відносно прямої l , отримуючи симетричні точки для них. З'єднаємо симетричні точки та точки, що залишились, щоб отримати новий трикутник, (див. рис.3.2.2.2б).

Рис. 3.2.2.2б. Пряма l перетинає трикутник3) Пряма l містить сторону AB трикутника

Пряма l проходить через сторону AB трикутника. Відобразимо тільки вершину C симетрично відносно l , отримаємо точку C' . Оскільки A і B лежать на l , їх положення не змінюється. З'єднаємо точки A , B , і C' для отримання симетричного трикутника (рис.3.2.2.2с).

Рис. 3.2.2.2с. Пряма l містить сторону AB трикутника

Задача 3.2.2.3.

Дано три прямі a , b , c , що попарно перетинаються. Побудуйте відрізок PQ , перпендикулярний до прямої b , середина якого лежить на прямій b , а кінці на прямих a і c [76].

Побудова.

Припустимо, що задачу розв'язано. Нехай відрізок PQ — шуканий. Оскільки пряма b — вісь осьової симетрії, то точки P та Q симетричні відносно прямої b . За умовою задачі точки P та Q повинні належати прямим a і c .

Для довільної точки P , симетричною буде точка, що належить прямій c_1 , яка є симетричною прямій c відносно прямої b , отже, є точкою перетину прямих a та c_1 .

Проведемо пряму c_1 , симетричну прямій c відносно прямої b .

Точка K — точка перетину прямих b і c , при симетрії відносно прямої b переходить у себе. Отже, для побудови прямої c_1 достатньо побудувати ще одну точку M_1 , симетричну точці M , що належить прямій c , відносно прямої b .

Точка Q є точкою перетину прямих c_1 і a : $c_1 \cap a = Q$. З точки Q проведемо перпендикуляр $QA \perp b$ до перетину з прямою c у точці P . Відрізок PQ — шуканий (рис.3.2.2.3).

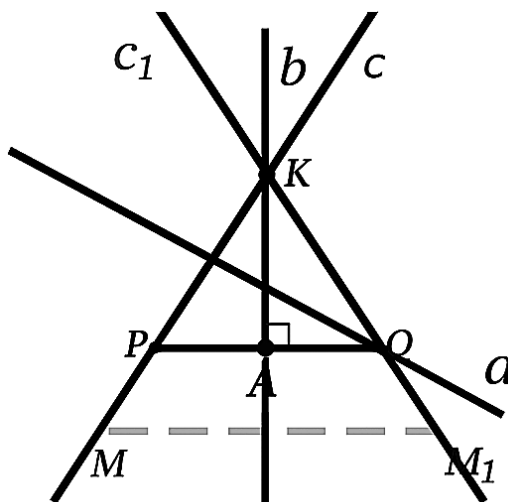


Рис. 3.2.2.3. Побудова відрізка, що $\perp$ прямій b , з кінцями на прямих a і c та серединою на прямій b

Задача 3.2.2.4.

Накреслили нерівнобедрений трикутник ABC . Провели пряму l , яка містить бісектрису кута C . Потім рисунок витерли, залишивши лише точки A і B та пряму l . Відновіть трикутник ABC [28, с.195].

Побудова.

Оскільки пряма l є віссю симетрії кута ACB , то точка A_1 , де $A_1 = S_l(A)$, належить променю CB . Тоді перетином прямих l і BA_1 є вершина C шуканого трикутника ABC . Ці міркування підказують, як побудувати шуканий трикутник: будемо точку A_1 , симетричну точці A відносно прямої l .

Знаходимо вершину C як точку перетину прямих l і BA_1 , (див. рис.3.2.2.4).

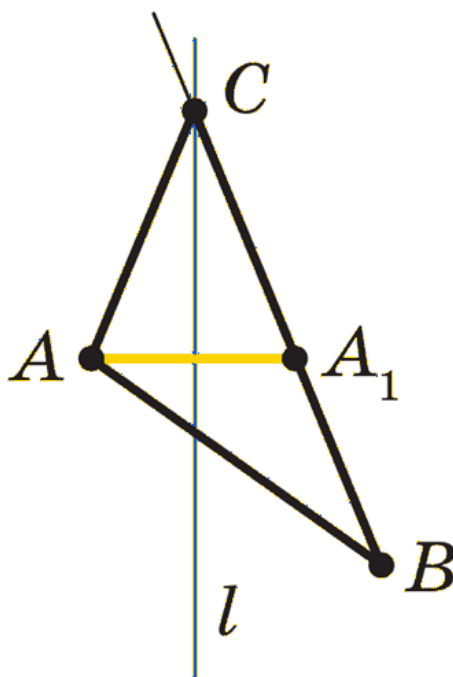


Рис. 3.2.2.4. Відновлення трикутника за двома вершинами та бісектрисою кута при третій вершині

Застосування центральної симетрії в задачах на побудову.

Задача 3.2.2.5.

Дано трикутник ABC . Побудуйте фігуру, симетричну трикутнику ABC відносно:

- 1) вершини C
- 2) точки K , яка лежить поза трикутником.

Побудова.

Для побудови трикутника, симетричного $\triangle ABC$ відносно вершини C , продовжимо сторони AB і BC за точку C і відкладаємо $CA' = CA$, $CB' = CB$. Тоді $A'B'$ — симетричний AB і $\triangle CA'B'$ симетричний $\triangle ABC$ відносно точки C , (див.рис.3.2.2.5a).

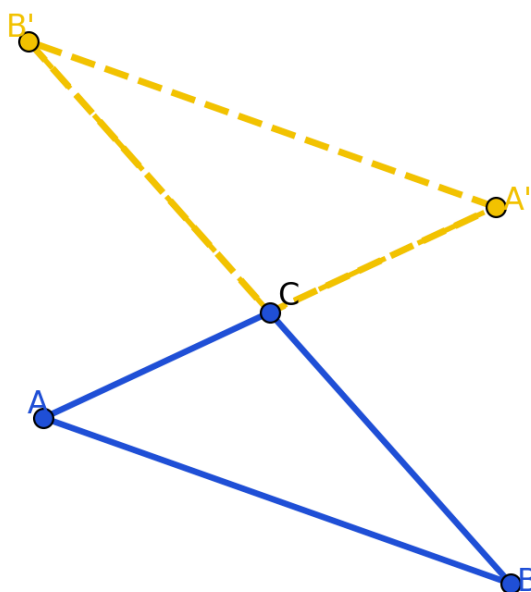


Рис. 3.2.2.5a. Побудова симетричного трикутника вершини C

Для побудови трикутника, симетричного $\triangle ABC$ відносно точки K , яка лежить поза трикутником, проведемо прямі BK , CK , AK і відкладаємо від точки K на цих прямих відрізки $KB' = KB$, $KA' = KA$, $KC' = KC$, тоді $\triangle A'B'C'$ симетричний $\triangle ABC$ відносно точки K (див. рис.3.2.2.5б).

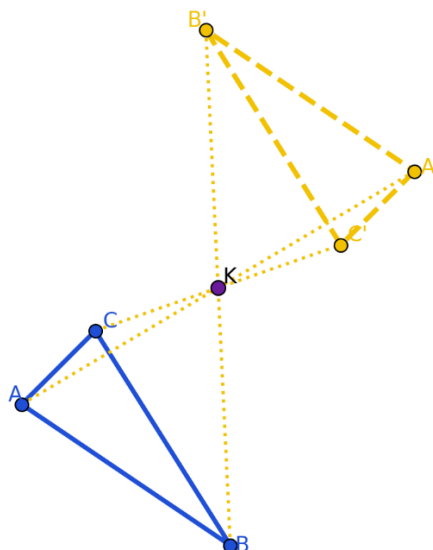


Рис. 3.2.2.5б. Побудова симетричного трикутника відносно точки K

Задача 3.2.2.6.

Точка M належить куту ABC . На сторонах BA і BC кута побудуйте такі точки E і E_1 , щоб точка M була серединою відрізка EE_1 [28, с.207].

Побудова.

Нехай пряма A_1B_1 — образ прямої AB при центральній симетрії відносно точки M . Позначимо буквою E_1 точку перетину прямих A_1B_1 і BC . Знайдемо прообраз точки E_1 . Очевидно, що він лежить на прямій AB . Тому достатньо знайти точку перетину прямих E_1M і AB . Позначимо цю точку буквою E .

Тоді E і E_1 — шукані точки (рис.3.2.2.6).

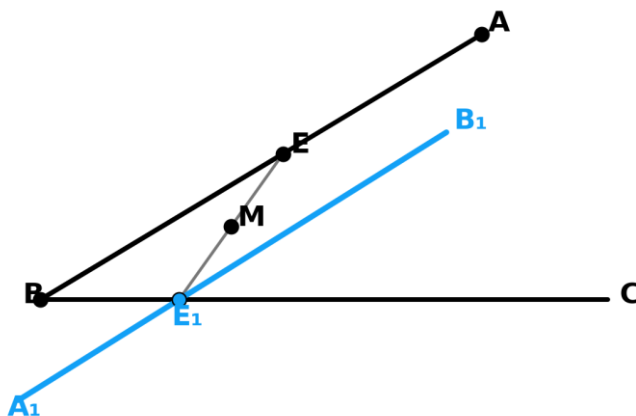


Рис. 3.2.2.6 Побудова точок E і E_1 , симетричних відносно точки M

Задача 3.2.2.7.

Побудувати трикутник, якщо відомі довжини його трьох медіан m_a, m_b, m_c [74, с.52].

Хід міркувань. Нехай трикутник ABC має медіани $AA_1=m_a, BB_1=m_b, CC_1=m_c$. Позначимо M — точку перетину медіан, (див.рис. 3.2.2.7).

Щоб спростити побудову, відобразимо точку M симетрично відносно точки B_1 — отримаємо точку M' . Розглянемо чотирикутник $AMCM'$. Оскільки $MB_1=B_1M'$ і $\angle AB_1C=\angle CB_1A$, цей чотирикутник є паралелограмом. Відомо, що медіани трикутника поділяються точкою їх перетину у відношенні 2:1, рахуючи від вершини. Тому:

$$MM' = \frac{2}{3}m_b, MC = AM' = \frac{2}{3}m_a,$$

Отже, задача побудови трикутника за медіанами зводиться до побудови допоміжного трикутника — CMM' або AMM' .

Побудова:

Будуємо трикутник CMM' із заданими сторонами $\frac{2}{3}m_a, \frac{2}{3}m_b, \frac{2}{3}m_c$. Його вершина C є вершиною шуканого трикутника.

Знаходимо точку B_1 — середину відрізка MM' . Відображаємо точку C відносно B_1 і отримуємо точку A . Відображенням точки M' відносно M одержуємо точку B . Отримана фігура ABC — шуканий трикутник.

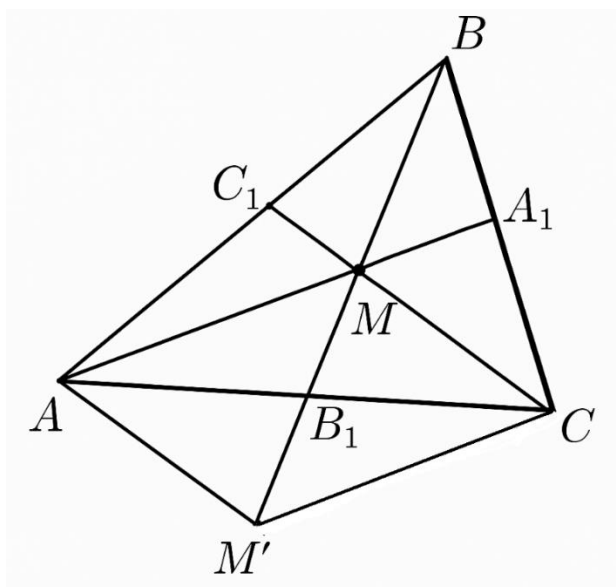


Рис. 3.2.2.7. Побудова трикутника за трьома медіанами

Обґрунтування. Побудова правильна, оскільки $AA_1 = m_a$, $BB_1 = m_b$, $CC_1 = m_c$.

Дослідження. Єдиний розв'язок існує тоді, коли задані відрізки задовольняють умову: $|m_a - m_b| < m_c < m_a + m_b$.

Задача 3.2.2.8.

Побудувати трикутник $ABCA$, якщо відомо: сторона a , висота h , проведена до цієї сторони, та медіана m_b , проведена до іншої (невідомої) сторони [74, с.53].

Аналіз. Нехай у трикутнику ABC відомі елементи: $BC = a$, $AD = h$, $BO = m_b$ (рис. 3.2.2.8). Щоб спростити побудову, відобразимо точку B симетрично відносно точки O — отримаємо точку B' . Якщо розглянути трикутник $BB'C$, то його побудова є простішою, і від нього можна легко перейти до шуканого трикутника ABC .

Побудова.

На довільній прямій відкладаємо відрізок $BC = a$. Проводимо пряму l , паралельну BC , на відстані h від неї. Із центра в точці B описуємо коло радіусом $BB' = 2m_b$. Точка перетину цього кола з прямою l визначає положення точки B' . Визначаємо точку O — середину відрізка BB' . Відображаємо точку C симетрично відносно точки O ; отримуємо вершину A .

Отже, трикутник ABC є шуканим.

Обґрунтування. У побудованому трикутнику сторона $BC = a$, висота $AD = h$, а медіана $BO = m_b$, тобто всі умови задачі виконані.

Дослідження. Кількість розв'язків залежить від розташування кола і прямої: якщо вони мають дві спільні точки, існує два розв'язки; якщо одну — єдиний; якщо ж не перетинаються, розв'язків немає.

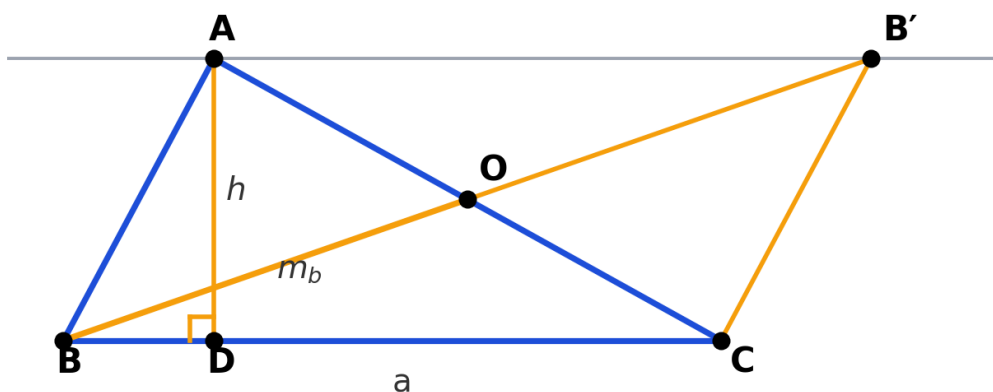


Рис. 3.2.2.8. Побудова трикутника за стороною, висотою та медіаною

Застосування повороту в задачах на побудову.

Задача 3.2.2.9.

Дано пряму a і точку O , яка не належить цій прямій. Побудуйте образ прямої a при повороті навколо точки O проти годинникової стрілки на кут 45° [28, с.214].

Побудова.

Оскільки поворот є рухом, образом прямої буде також пряма. Для побудови достатньо знайти дві будь-які її точки. Візьмемо на прямій a довільні точки A і B (рис. 3.2.2.9). Побудуємо точки A_1 і B_1 — їхні образи при повороті навколо точки O проти годинникової стрілки на кут 45° . Тоді пряма A_1B_1 є образом прямої a .

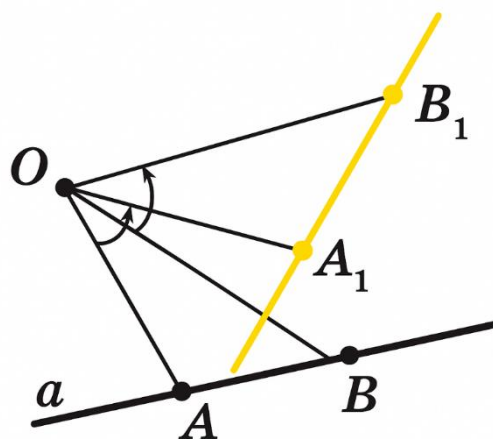


Рис. 3.2.2.9. Побудова образу прямої при повороті навколо точки O на кут 45°

Задача 3.2.2.10.

Точка P належить куту ABC , але не лежить на його сторонах. Побудуйте рівносторонній трикутник, одна з вершин якого — точка P , а дві інші — на сторонах BA і BC цього кута [28, с.215].

Побудова.

Нехай пряма A_1B_1 є образом прямої AB при повороті навколо центра P проти годинникової стрілки на кут 60° (рис.3.3.2.10). Позначимо буквою F точку перетину прямих A_1B_1 і A_1B_1 . Нехай E — прообраз точки F при цьому повороті. Тоді точка E лежить на стороні BA кута ABC , (дис.рис.3.2.2.10).

Отже, щоб побудувати шуканий трикутник, виконуємо такі кроки:

- Будуємо пряму A_1B_1 — образ прямої AB при повороті навколо центра P проти годинникової стрілки на кут 60° .
- Знаходимо точку F — перетин прямих A_1B_1 і BC .
- Будуємо кут $MPF = 60^\circ$.
- Прямі MP і AB перетнуться в точці E , яка є прообразом точки F .

Маємо: $PF=PE$ і $\angle FPE=60^\circ$. Отже, трикутник EPF — рівносторонній.

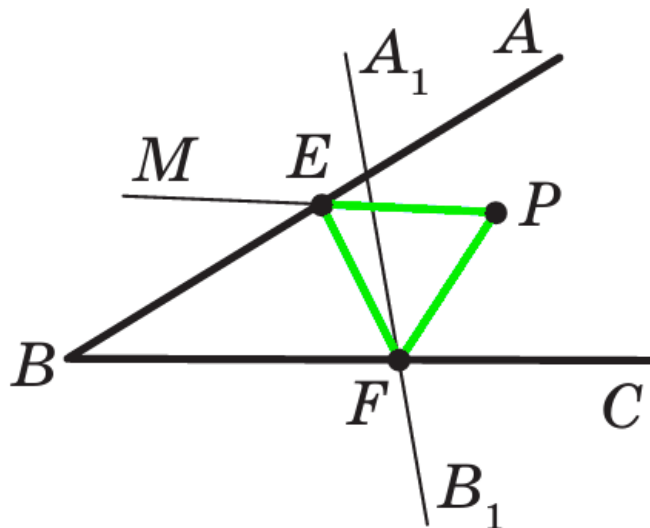


Рис. 3.2.2.10. Побудова рівностороннього трикутника при повороті навколо точки P на кут 60° .

Задача 3.2.2.11.

Побудувати рівносторонній трикутник так, щоб його вершина збігалася з даною точкою C , одна вершина розташовувалась на даній прямій a , а інша — на колі $K(O,R)$ [74, с.156].

Розв'язання.

Нехай рівносторонній трикутник ABC потрібно побудувати так, щоб вершина C збігалася з даною точкою, вершина A лежала на прямій a , а вершина B — на колі $K(O,R)$, (див.рис.3.2.2.11).

Оскільки $AC = BC$ і $\angle ACB = 60^\circ$, то при повороті фігури навколо точки C на кут -60° точка A відобразиться у B , а пряма a — у пряму a' . При цьому точка B має належати колу $K(O,R)$ і одночасно прямій a' .

Таким чином, точку B знаходимо як точку перетину кола $K(O,R)$ із прямою:

$$a' = R_C^{-60}(a).$$

У такому разі точка A буде образом точки B при повороті навколо точки C на кут 60° .

Побудова.

Через точку C побудуємо пряму $a' = R_C^{-60}(a)$.

Позначимо $B = a' \cap K(O,R)$.

Знайдемо точку $A = R_C^{60}(B)$.

Отриманий трикутник ABC — шуканий.

Доведення. З побудови випливає, що $AC = BC$ та $\angle ACB = 60^\circ$. Отже, трикутник ABC є рівностороннім.

Кількість можливих розв'язків визначається числом точок перетину кола $K(O,R)$ з прямою a' . Можливі два, один або жоден варіант розв'язку.

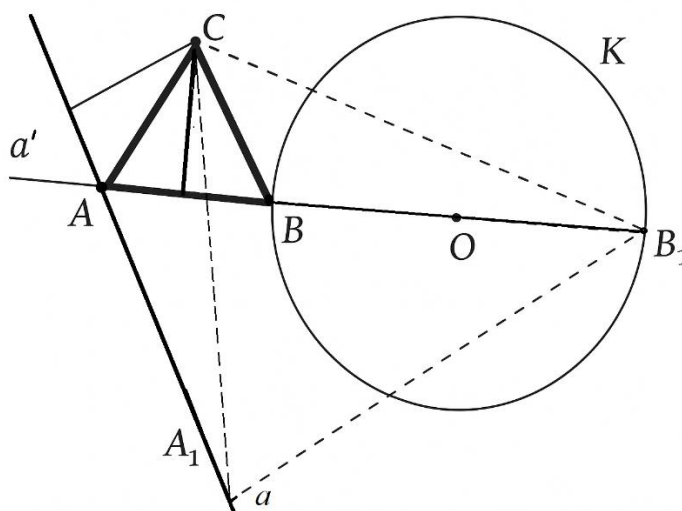


Рис. 3.2.2.11. Побудова рівностороннього трикутника за допомогою повороту навколо точки C на кут 60° .

Задача 3.2.2.12.

У трикутнику ABC , кожен із кутів якого менший за 120° , знайдіть таку точку T , щоб сума $TA + TB + TC$ була найменшою [28, с.215].

Побудова.

Нехай T — довільна точка трикутника ABC (рис. 3.2.2.12). Розглянемо поворот із центром у точці A на кут 60° за годинниковою стрілкою. Позначимо T_1 і C_1 — образи точок T і C відповідно. Оскільки поворот — це рух, маємо $T_1C_1 = TC$. Очевидно, що трикутник ATT_1 рівносторонній, тому $AT = TT_1$. Отже: $TA + TB + TC = TT_1 + TB + T_1C_1$. Сума $TT_1 + TB + T_1C_1$ буде найменшою, коли точки B, T, T_1, C_1 лежатимуть на одній прямій. Оскільки $\angle 1 = \angle 2 = 60^\circ$, ця умова виконується, коли $\angle 3 = \angle 4 = 120^\circ$. А оскільки кут AT_1C_1 є образом кута ATC при даному повороті, отже $\angle ATC = 120^\circ$.

Таким чином, точки B, T, T_1, C_1 лежатимуть на одній прямій тоді й лише тоді, коли $\angle ATB = \angle ATC = 120^\circ$.

Звідси $\angle BTC = 120^\circ$.

Отже, сума $TA + TB + TC$ буде найменшою, якщо

$$\angle ATB = \angle BTC = \angle ATC = 120^\circ.$$

Точку T можна знайти, побудувавши геометричне місце точок ($ГМТ$), з яких відрізки AB і AC видно під кутом 120^0 . Якщо ж один із кутів трикутника ABC не менший за 120^0 , то точка перетину побудованих дуг не лежатиме всередині трикутника. У цьому випадку доведено, що точка T , для якої сума відстаней $TA+TB+TC$ мінімальна, збігається з вершиною тупого кута.

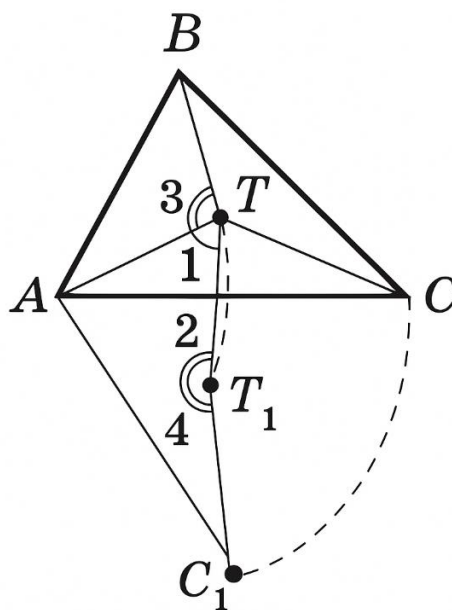


Рис. 3.2.2.12. Побудова точки T , для якої сума відстаней до вершин трикутника є найменшою.

Задача 3.2.2.13.

На трьох даних паралельних прямих $a \parallel b \parallel c$ побудувати прямокутний рівнобедрений трикутник ABC так, щоб його вершини лежали відповідно на цих прямих [74, с.168].

Побудова.

Якщо $\angle A = 90^0$ і $AB=AC$, то образ відрізка AB при повороті на 90^0 навколо вершини A збігається з AC . Тому візьмемо поворот R_A^{90} (проти годинникової стрілки). Тоді:

- пряма c переходить у пряму $c_1 = R_A^{90}(c)$, паралельну c ;
- точка $C \in c$ переходить у $B = R_A^{90}(C)$, отже $B \in c_1$.

Щоб знайти B , перетнемо c_1 з прямою b : $B = b \cap c_1$. Далі $C = R_A^{-90}(B)$ (обернений поворот).

Для побудови:

Виберіть довільно точку A на прямій a .

Побудуйте поворот R_A^{90} і образ прямої c : пряму $c_1 = R_A^{90}(c)$

Точку B візьміть як перетин $B = b \cap c_1$.

Побудуйте $C = R_A^{-90}(B)$ (поворот на -90° навколо A).

Трикутник ABC — шуканий (рис.3.2.2.13).

Оскільки $B = R_A^{90}(C)$, маємо $AB = AC$ і $\angle BAC = 90^\circ$. За побудовою $A \in a$, $B \in b$, $C \in c$. Отже, ABC — прямокутний рівнобедрений і вершини лежать на заданих прямих.

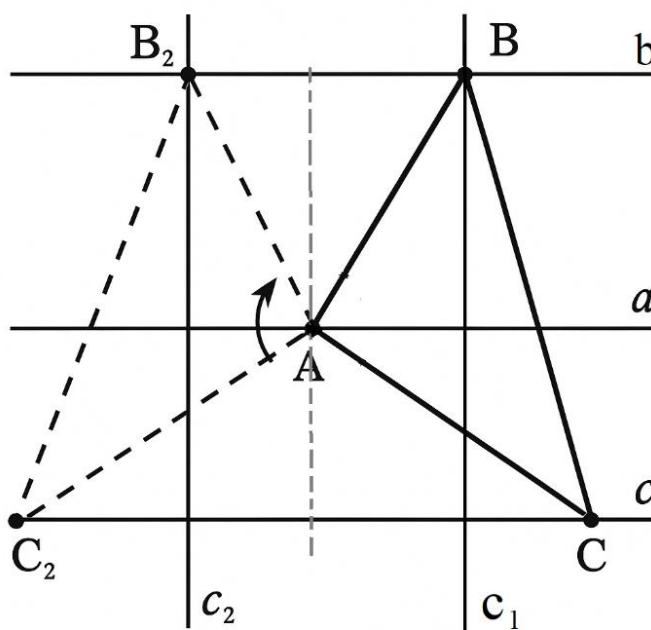


Рис.3.2.2.13. Побудова ABC на прямих a, b, c методом повороту навколо A

Застосування паралельного перенесення в задачах на побудову.

Задача 3.2.2.14.

Дано кут ABC і пряму p , яка не є паралельною жодній зі сторін цього кута. Побудувати пряму p_1 , паралельну прямій p , так, щоб сторони кута відтинали на ній відрізок заданої довжини a [28, с.188].

Побудова.

Розглянемо вектор MN такий, що $MN \parallel p$ і $|MN| = a$, (див. рис.3.2.2.14).

Проведемо промінь B_1A_1 , який є образом променя BA при паралельному перенесенні на вектор MN . Позначимо точку перетину променів BC і B_1A_1 через E . Нехай точка F — прообраз точки E при паралельному перенесенні, яке розглядається. Тоді $FE = MN$, звідки $|FE| = a$ і $FE \parallel p$.

Наведені міркування дають такий алгоритм побудови:

Побудувати образ променя BA при паралельному перенесенні на вектор MN .

Знайти точку перетину побудованого променя з BC .

Через знайдену точку провести пряму p_1 , паралельну прямій p .

Отримана пряма p_1 є шуканою.

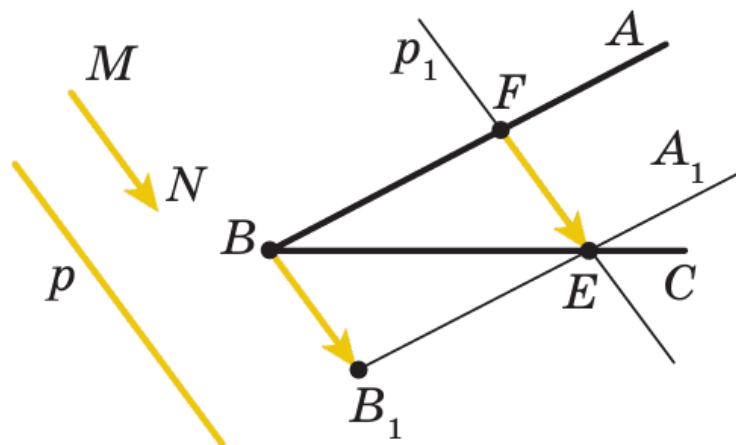


Рис. 3.2.2.14. Побудова прямої, паралельної даній, яка відтинає на сторонах кута відрізок заданої довжини a .

Задача 3.2.2.15.

Населені пункти A і B розділені двома каналами, кожен із яких має паралельні береги. Потрібно знайти такі місця для мостів через ці канали, щоб пункти A і B були сполучені найкоротшим шляхом [74, с.224].

Побудова.

Визначити місця для мостів можна кількома способами.

1-й спосіб. Побудуємо точку B' — образ точки B при паралельному перенесенні на відстань, що дорівнює ширині каналу (a, b_1) у напрямі від берега b_1 до берега a_1 (на вектор MN). Потім побудуємо точку B'' — образ точки B' при паралельному перенесенні на відстань, рівну ширині каналу (a, b) у напрямі від берега b до берега a (на вектор KL).

Пряма $B''A$ перетне пряму a у шуканій точці K . Відрізок $CD \perp b_1$ позначає положення моста на каналі (a, b_1), а відрізок DB' перетне берег a_1 у точці E так, що $EF \perp b_1$ — положення моста на каналі (a_1, b_1).

Ламана $ACDEFB$ є найкоротшим шляхом між пунктами A і B . Справді, ця ламана складається з відрізків сталої довжини CD і EF , а сума відрізків $AC + DE + FB = AC + CB''$. Останні два відрізки утворюють прямолінійний відрізок AB'' , тому їх сума є найменшою. Положення пунктів A і B , а також берегів каналів a, a_1, b, b_1 (зображено на рис.3.2.2.15а).

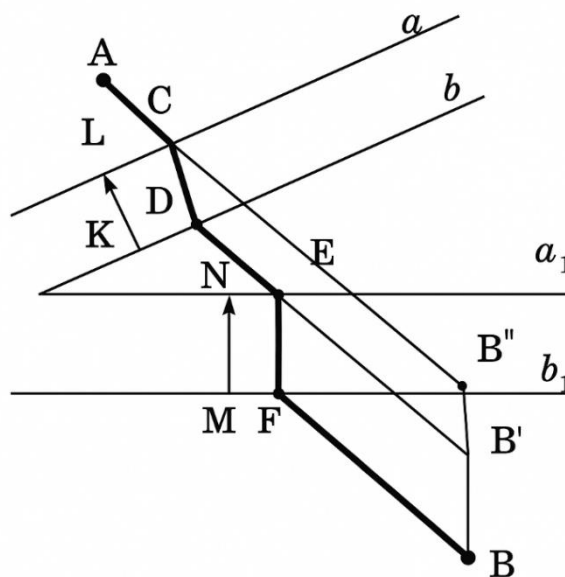


Рис. 3.2.2.15а. Найкоротший шлях між пунктами A і B .

2-й спосіб. Побудуємо точку A' — образ точки A при паралельному перенесенні на відстань між берегами a_1 і b_1 у напрямі від a_1 до b_1 (вектор LK), і точку B' — образ точки B при паралельному перенесенні на відстань між берегами a і b у напрямі від b до a (вектор MN).

Відрізок $A'B'$ перетне береги a і b_1 відповідно в точках D і E , що задають положення мостів (рис. 3.2.2.15б). Отже, ламана $ACDEFB$ є шуканим найкоротшим шляхом між пунктами A і B .

Правильність побудови випливає з того, що відрізки CD і EF у складі ламаної мають постійну довжину. За побудовою $AC = AD$, $FB = E'B'$, тому сума $AC + DE + FB = AD + DE + E'B' = AB'$, що є прямолінійним відрізком найменшої можливої довжини.

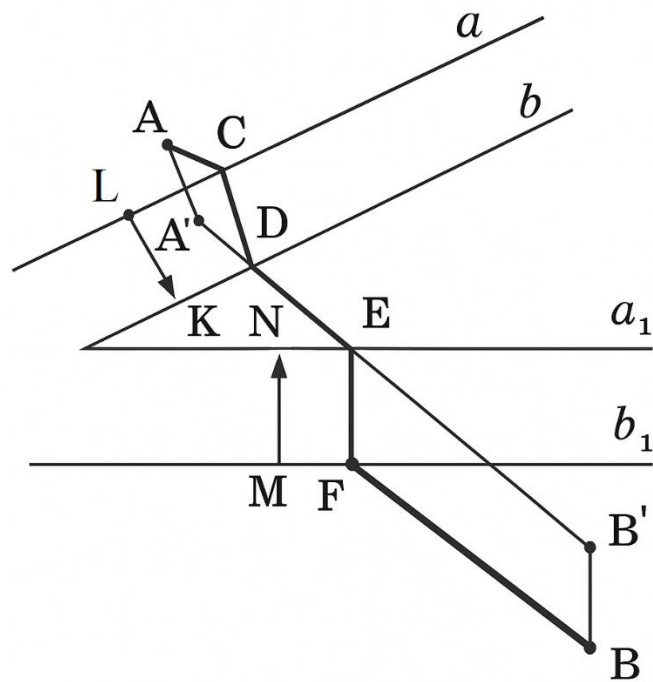


Рис. 3.2.2.15б. Побудова точок для мостів, що забезпечують найкоротший шлях між пунктами A і B .

Задача 3.2.2.16.

Дані три прямі, дві з яких паралельні. Побудувати рівносторонній трикутник із заданою стороною так, щоб його вершини лежали по одній на кожній з даних прямих [74, с.229].

Побудова.

Нехай дано прямі $a \parallel b$, а пряма c перетинає їх, утворюючи відрізок t (рис.3.3.2.16). Спочатку побудуємо допоміжний рівносторонній трикутник $A_1B_1C_1$, вершини A_1 і B_1 якого лежать на прямих a і b , а сторона $A_1B_1 = t$.

Якщо точка C не належить прямій c , то проведемо через точку C_1 пряму, паралельну прямій a . Вона перетне пряму c у точці C — вершина шуканого трикутника. Дві інші вершини A і B будуть відповідно образами точок A_1 і B_1 при паралельному перенесенні на вектор C_1C , (див. рис.3.2.2.16).

Доведення. Коректність побудови впливає зі властивостей паралельного перенесення: $\triangle A_1B_1C_1 \cong \triangle ABC$.

Якщо довжина відрізка t більша за відстань між паралельними прямими, то можна побудувати чотири рівних між собою, але розташованих по різні боки від прямої c , рівносторонніх трикутники. Якщо ж довжина t дорівнює відстані між паралельними прямими, то задача має два розв'язки; якщо ж відстань між прямими менша, то задача розв'язків не має.

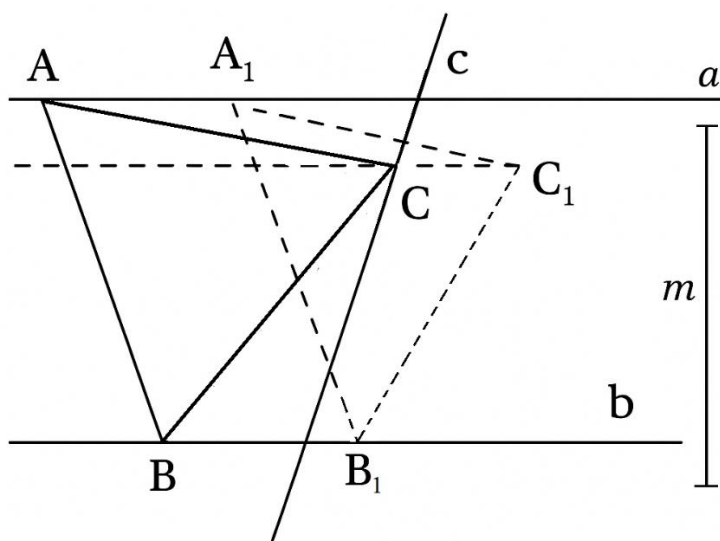


Рис. 3.2.2.16. Рівносторонній трикутник на трьох прямих $a \parallel b$ і c .

Задача 3.2.2.17.

Побудувати трикутник за даними його двома медіанами і кутом між ними [74, с.229].

Аналіз. Нехай шуканий трикутник ABC , у якого медіани $AA_1 = m_a$, $BB_1 = m_b$, а кут між ними $\angle AOB = \alpha$, (див. рис. 3.2.2.17). Виконаємо паралельне перенесення медіани BB_1 на вектор B_1A_1 , отримаємо відрізок DA_1 .

Трикутник AA_1D можна побудувати за двома сторонами $AA_1 = m_a$, $DA_1 = m_b$ і кутом α між ними. Від цього трикутника легко перейти до шуканого, враховуючи властивості точки перетину медіан.

Побудова.

Будуємо трикутник AA_1D із сторонами $AA_1 = m_a$, $DA_1 = m_b$, і кутом $\angle AA_1D = \alpha$. Ділимо відрізок m_a на три рівні частини і відкладаємо на AA_1 відрізок $AO = \frac{2}{3}m_a$. Через точку O проводимо пряму, паралельну прямій DA_1 ; вона перетинає сторону AD у точці B . На прямій BO відкладаємо відрізок $OB_1 = \frac{1}{3}m_b$. Прямі A_1B_1 і BA_1 у точці перетину визначають вершину C . Трикутник ABC — шуканий.

Доведення. Оскільки $OB_1 \parallel A_1D$, то $\angle AOB = \angle AA_1D = \alpha$, а $AA_1 = m_a$, $BB_1 = m_b$ — за побудовою. Отже, трикутник ABC відповідає умовам задачі.

Розв'язання задачі зводиться до побудови трикутника за двома сторонами і кутом між ними, а така побудова завжди можлива і є єдиною.

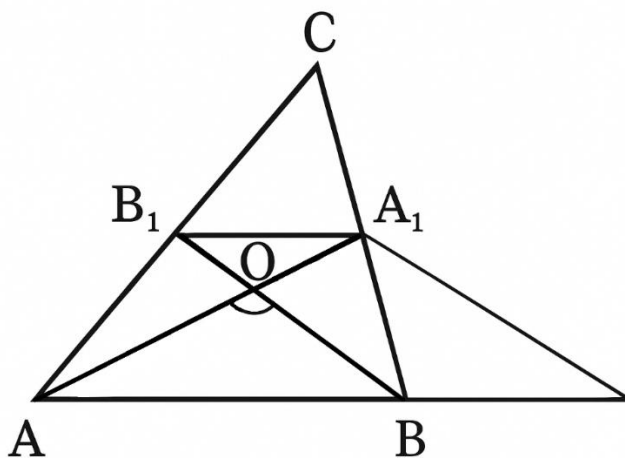


Рис. 3.2.2.17. Побудова трикутника за даними його двома медіанами і кутом між ними.

Задача 3.2.2.18.

Побудувати трапецію за даними її основами і кутами при одній із основ [74, с.232].

Побудова.

Нехай $ABCD$ — трапеція, у якої $AD = a$, $DC = b$, $\angle BAD = \alpha$, $\angle CDA = \beta$, де a, b, α, β — задані величини, (див.рис. 3.2.2.18).

Побудуємо відрізок CA , який є образом відрізка AB при паралельному перенесенні на вектор BC . Тоді $\angle CAD = \angle BAD = \alpha$, $AD = a - b$, $\angle CDA = \beta$. Отже, трикутник A_1CD можна побудувати, оскільки відомі дві сторони та кут між ними.

Після побудови трикутника A_1CD виконаємо паралельне перенесення відрізка A_1C на вектор, довжина якого дорівнює b , а напрям — співнапрямлений із вектором DA_1 . Отримаємо чотирикутник $ABCD$, який і буде шуканою трапецією.

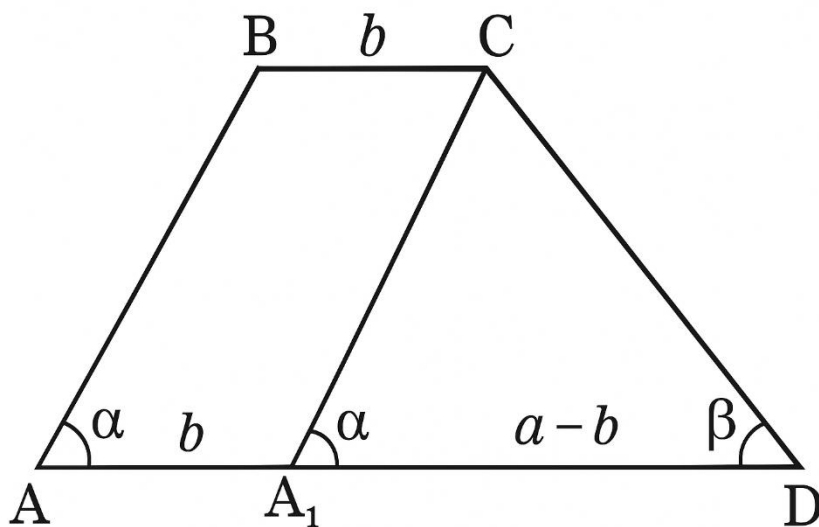


Рис. 3.2.2.18. Побудова трапеції за даними її основами і кутами при одній із основ.

3.2.3. Задачі на доведення

Застосування осової симетрії в задачах на доведення.

Задача 3.2.3.1.

Дано пряму a і точки A, B , що лежать в одній півплощині відносно неї. Довести, що сума відстаней від точки $X \in a$ до точок A і B найменша тоді і тільки тоді, коли $X = A_1B \cap a$, де A_1A — симетричний до A відносно a [28, с.196].

Доведення.

Нехай $S_a(A) = A_1$. Покажемо, що шуканою точкою X є точка перетину прямих A_1B і a . Нехай Y — довільна точка прямої a , відмінна від точки X (рис.3.2.3.1), відрізки A_1X і A_1Y є образами відрізків AX і AY при симетрії відносно прямої a відповідно, тому $AX = A_1X$, $AY = A_1Y$.

Маємо $AX + BX = A_1X + BX = A_1B < A_1Y + YB = AY + YB$.

Отже, сума $AX + XB$ найменша саме в точці X .

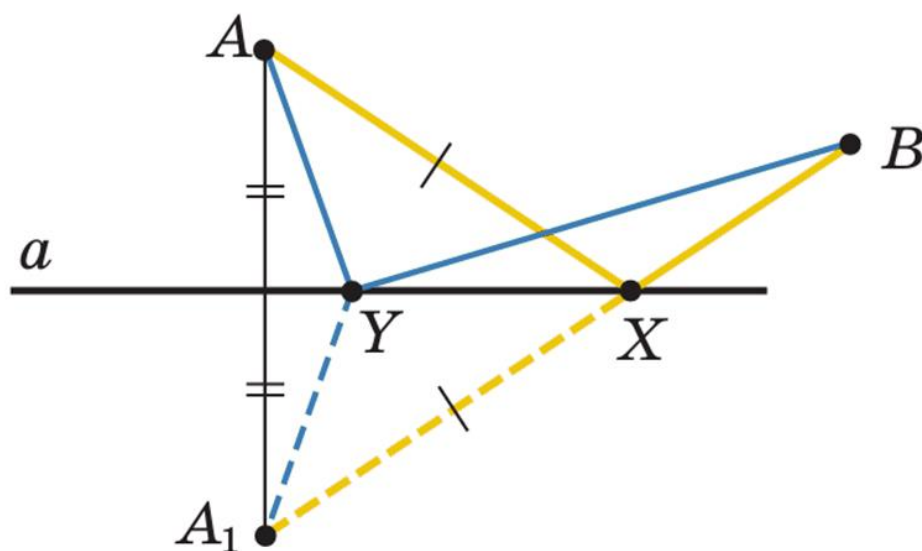


Рис. 3.2.3.1. Застосування осової симетрії для знаходження найкоротшої відстані

Задача 3.2.3.2.

У гострому куті ABC взято точку O . На відрізках BA і BC потрібно знайти такі точки E та F , щоб трикутник OEF мав найменший можливий периметр [28, с.196].

Доведення.

Відобразимо точку O симетрично: через сторону BA одержимо точку $O_1 = S_{BA}(O)$, а через сторону BC — точку $O_2 = S_{BC}(O)$ (рис. 3.2.3.2). Пряма O_1O_2 перетне BA і BC у точках E та F відповідно. Покажемо, що саме ці точки й потрібні.

Оскільки O_1 є відбитком точки O відносно BA , маємо $EO_1 = EO$. Так само з симетрії відносно BC : $FO_2 = FO$. Тому периметр трикутника OEF дорівнює:

$$OE + EF + FO = EO_1 + EF + FO_2 = O_1O_2,$$

бо точки O_1, E, F, O_2 лежать на одній прямій.

Візьмемо довільні точки $K \in BA$ і $M \in BC$, принаймні одну не на прямій O_1O_2 , і розглянемо трикутник KOM . За побудовою: $KO = KO_1$, $MO = MO_2$, отже

$$P_{KOM} = KO + KM + MO = O_1K + KM + MO_2.$$

Це довжина ламаної від O_1 до O_2 через точки K і M , а вона не може бути коротшою за відрізок O_1O_2 . Маємо: $O_1K + KM + MO_2 \geq O_1O_2$.

Отже, трикутник OEF , побудований через відбиття точки O відносно сторін кута, має найменший периметр серед усіх трикутників із вершиною в O і двома вершинами на сторонах кута.

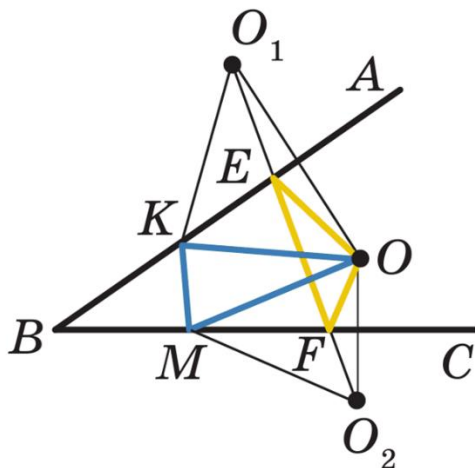


Рис. 3.2.3.2. Трикутник найменшого периметра у куті ABC

Задача 3.2.3.3.

Доведіть, що пряма l , яка проходить через бісектрису кута BAC , є віссю симетрії цього кута [26, с.101].

Доведення.

Нехай пряма l проходить через бісектрису кута BAC (рис.3.2.3.3). Візьмемо на стороні AB довільну точку X . Оскільки відбиття відносно прямої є переміщенням, то промінь AB при симетрії відносно l перейде в деякий промінь AB' , а точка X перейде в точку X' на цьому промені AB' .

Позначимо через O точку перетину відрізка XX' з прямою l . Оскільки точки X і X' симетричні відносно l , то $l \perp XX'$ і $OX = OX'$. У прямокутних трикутниках AOX і AOX' маємо: AO — спільний катет; $OX = OX'$.

Отже, $\triangle AOX \cong \triangle AOX'$ за двома катетами, звідки $\angle OAX = \angle OAX'$.

За аксіомою відкладання кутів рівні кути з вершиною в точці A , що лежать усередині кута OAC , повинні збігатися своїми сторонами. Отже, промінь AX' (та промінь AB') збігається з променем AC .

Оскільки точку X було вибрано на промені AB довільно, то при осьовій симетрії відносно прямої l кожна точка променя AB переходить у відповідну точку променя AC . Отже, пряма l , що містить бісектрису кута BAC , є віссю його симетрії.

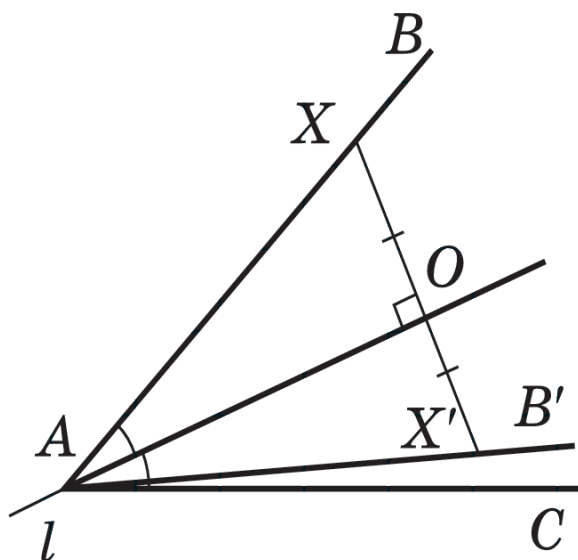


Рис. 3.2.3.3. Бісектриса кута є його віссю симетрії.

Задача 3.2.3.4.

Точки перетину двох кіл симетричні відносно прямої, що проходить через їхні центри. Доведіть [78, с.136].

Доведення.

Нехай M — точка перетину OO_1 з AB . Радіуси кіл рівні: $OA = OB$ (як радіуси) і $O_1A = O_1B$ (як радіуси).

Трикутники $\triangle OAO_1 = \triangle BOO_1$ рівні за трьома сторонами, оскільки OO_1 — спільна сторона, $OA = OB$ (радіуси), $O_1A = O_1B$ (радіуси).

Отже, $\triangle OAO_1 = \triangle BOO_1$, що означає рівність кутів $\angle AOO_1 = \angle BOO_1$. З рівності цих кутів випливає, що пряма OM є бісектрисою кута $\angle AOB$ і водночас є висотою та медіаною.

Оскільки $AB \perp OO_1$ і $AM = BM$, точки A і B симетричні відносно прямої OO_1 , яка проходить через центри кіл, що і треба було довести, (див.рис.3.2.3.4).

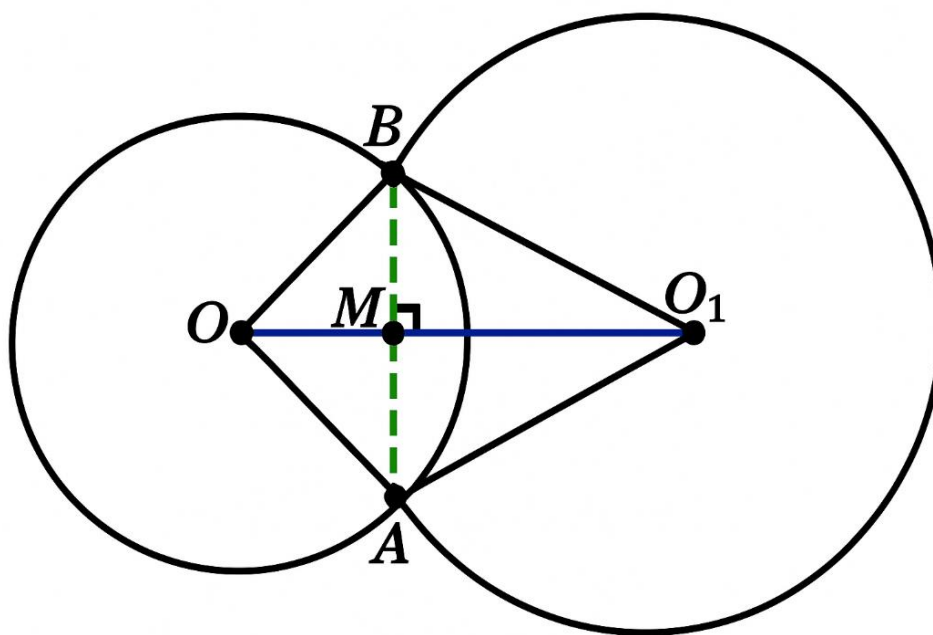


Рис. 3.2.3.4. Симетрія точок перетину кіл відносно прямої, що сполучає центри

Застосування центральної симетрії в задачах на доведення.

Задача 3.2.3.5.

Доведіть, що образом даної прямої l при симетрії відносно точки O , яка не належить прямій l , є пряма, паралельна даній [28, с.205].

Доведення.

Оскільки центральна симетрія — це рух, то образом прямої l буде пряма. Для побудови прямої достатньо знайти дві будь-які її точки. Виберемо на прямій l довільні точки A і B . Нехай точки A_1 і B_1 — їхні образи при центральній симетрії відносно точки O . Тоді пряма A_1B_1 — образ прямої l . Оскільки $AO = OA_1$, $BO = OB_1$, кути $\angle AOB$ і $\angle A_1OB_1$ рівні як вертикальні, то трикутники $\triangle AOB$ і $\triangle A_1OB_1$ рівні за першою ознакою рівності трикутників (рис.3.2.3.5). Звідси $\angle 1 = \angle 2$. Отже, за ознакою паралельності прямих $l \parallel A_1B_1$.

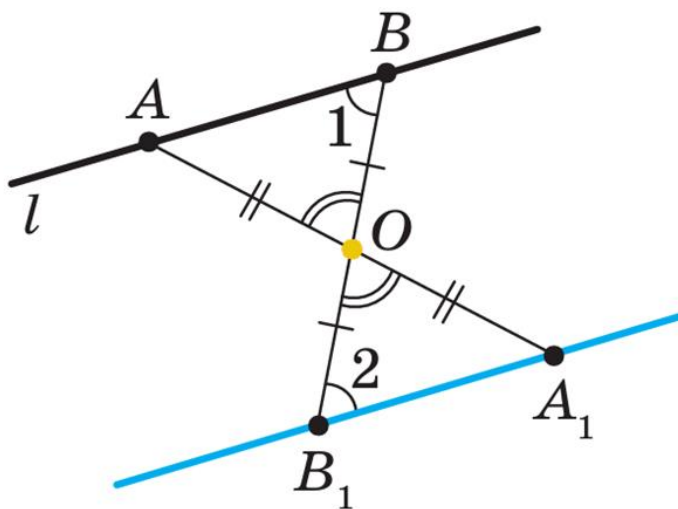


Рис. 3.2.3.5. Образ прямої l при симетрії відносно точки O .

Задача 3.2.3.6.

Довести, що всі три медіани трикутника перетинаються в одній точці, і ця точка ділить кожну з них у відношенні $2 : 1$, рахуючи від вершини [74, с.39].

Доведення.

Нехай у трикутнику ABC проведено медіани AA_1 , BB_1 і CC_1 , які перетинаються в точці O , (див. рис. 3.2.3.6.). Проведемо через точку C пряму

CO . Виконаємо центральну симетрію відносно точки A_1 . У результаті трикутник COB перейде у трикутник $B_1O_1C_1$. Отримані фігури разом утворюють паралелограм $COBO_1$, з якого випливає, що $CO_1 = OO_1$ і $CO_1 \parallel OO_1$.

Аналогічно, якщо розглянути центральну симетрію трикутника COA відносно точки B_1 , отримаємо ще один паралелограм A_1O_2CO , де $CO = O_2O$. Таким чином, точки O , O_1 і O_2 лежать на одній прямій, причому $CO_1 = OO_2 = OB$, (див.рис.3.2.3.6).

Оскільки ці рівності справджуються для всіх трьох медіан, виходить, що вони перетинаються в одній точці, яка ділить кожну медіану у відношенні $2 : 1$ — дві частини від вершини і одна від основи.

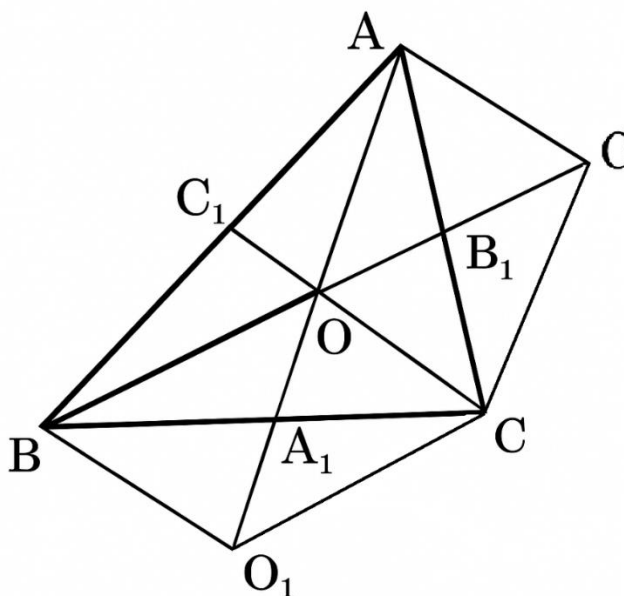


Рис. 3.2.3.6. Перетин медіан трикутника.

Задача 3.2.3.7.

Два рівні кола дотикаються в точці M . Довести, що будь-яка пряма, проведена через точку дотику M , відтинає на цих колах рівні хорди [74, с.42].

Доведення.

Оскільки кола мають однаковий радіус і дотикаються в точці M , їх центри є симетричними відносно цієї точки, (див.рис. 3.2.3.7).

Через точку M проведемо довільну пряму, яка перетинає перше коло в точці A , а друге — у точці B . За означенням центральної симетрії точки A і B є симетричними відносно точки M , тому $AM = BM$.

Отже, будь-яка пряма, що проходить через точку дотику двох рівних кіл, відтинає на них рівні хорди.

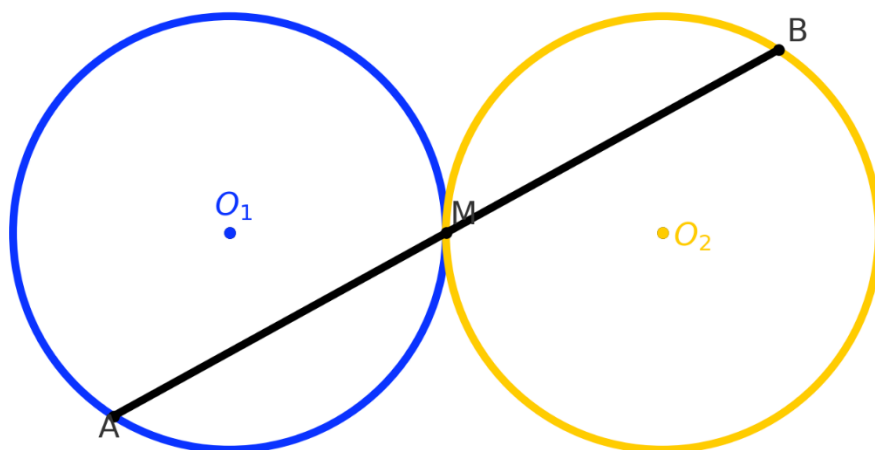


Рис. 3.2.3.7. Дотичні зовнішньо кола O_1 і O_2 з точкою дотику M ; січна AB через M .

Застосування повороту в задачах на доведення.

Задача 3.2.3.8.

Доведіть, що рівносторонній трикутник при повороті навколо точки перетину його висот на кут 120° переходить у себе.

Доведення.

Нехай у трикутнику ABC всі сторони рівні ($AB = BC = CA$). Позначимо через O точку перетину висот. Для рівностороннього трикутника ця точка одночасно є центром описаного кола, а також центром симетрії та точкою перетину медіан і бісектрис.

Оскільки $OA = OB = OC$, маємо, що трикутники AOB , BOC і COA — рівнобедрені. Кут при вершині кожного з них дорівнює

$$\angle AOB = \angle BOC = \angle COA = 120^\circ, \text{ адже } \angle AOB = 180^\circ - 2 \cdot 30^\circ = 120^\circ.$$

Якщо повернути трикутник ABC навколо точки O на кут 120° за годинниковою стрілкою, вершини переходять так: $A \rightarrow B$, $B \rightarrow C$, $C \rightarrow A$.

Отже, сторони переходять: $AB \rightarrow BC$, $BC \rightarrow CA$, $CA \rightarrow AB$.

Таким чином, після такого повороту трикутник повністю суміщається сам із собою, що й треба було довести, (див.рис.3.2.3.8).

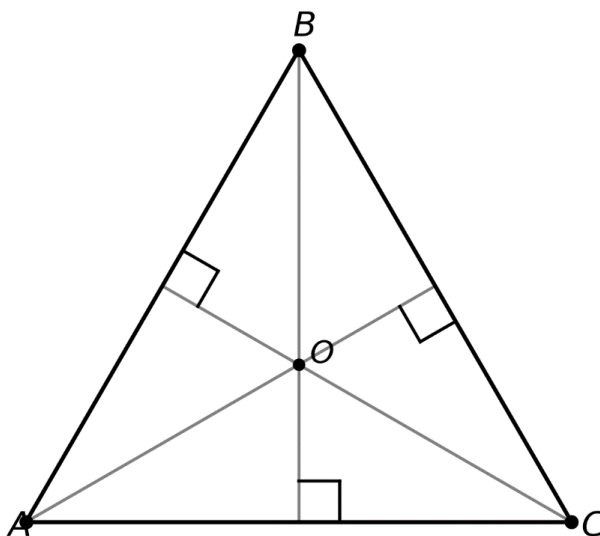


Рис. 3.2.3.8. Поворот рівностороннього трикутника на 120° навколо центра O

Задача 3.2.3.9.

Доведіть, що квадрат при повороті навколо точки перетину його діагоналей на кут 90° переходить у себе.

Доведення.

Позначимо через O точку перетину діагоналей квадрата $ABCD$. Оскільки в квадраті діагоналі AC і BD перпендикулярні та діляться навпіл, то

$$OA = OB = OC = OD.$$

Точка O є центром повороту, (див.рис.3.2.3.9).

Повернемо квадрат на 90° навколо точки O (за годинниковою стрілкою).

У результаті вершини переходять так:

$$A \rightarrow B, B \rightarrow C, C \rightarrow D, D \rightarrow A.$$

Відповідно сторони змінюються:

$$AB \rightarrow BC, BC \rightarrow CD, CD \rightarrow DA, DA \rightarrow AB.$$

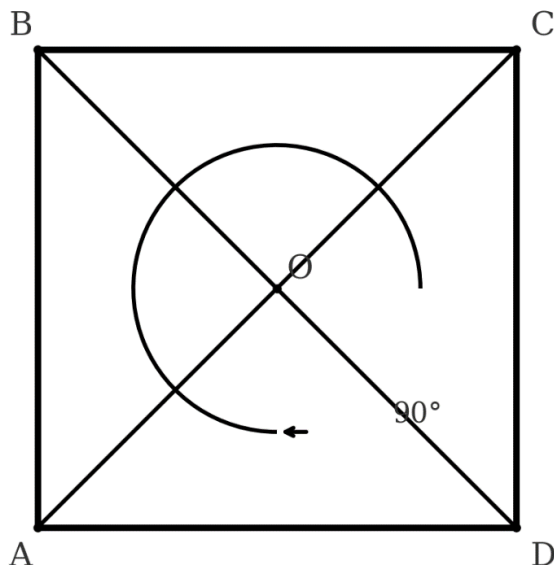


Рис. 3.2.3.9. Поворот квадрата на 90° довкола O

Задача 3.2.3.10.

Два рівних кола перетинаються в точках A і B . Довести, що будь-яка пряма, яка сполучає довільну точку одного кола з її образом при повороті навколо точки A , який переводить це коло на інше, проходить через точку B [74, с.151].

Доведення.

Нехай M — довільна точка кола $K(O; R)$, а пряма MB перетинає друге коло $K_1(O_1; R)$ у точці M_1 , (див.рис.3.2.3.10).

Позначимо $\angle OAO_1 = \alpha$, де O і O_1 — центри рівних кіл.

Поворот навколо точки A на кут $-\alpha$ (за годинниковою стрілкою) переводить коло K у коло K_1 . Необхідно довести, що при цьому точка M кола K переходить у точку M_1 кола K_1 .

Оскільки $\angle ABM = \angle A_1M_1B = \angle AOO_1 = \angle AO_1O$, то $\triangle AMM_1$ є рівнобедреним, і $AM = AM_1$ та $\angle MAM_1 = \alpha$. Звідси випливає, що $M_1 = R_A^{-\alpha}(M)$, тобто пряма MM_1 проходить через точку B (рис.3.2.3.10).

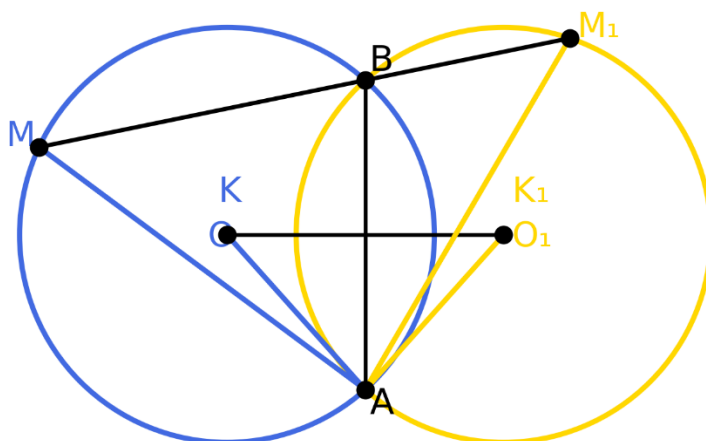


Рис. 3.2.3.10. Відображення кола K у коло K_1 поворотом навколо точки A

Задача 3.2.3.11.

У коло $K(O, R)$ вписано два рівносторонні трикутники ABC і $A_1B_1C_1$. Довести, що точки перетину $A_2 = BC \times B_1C_1$, $B_2 = CA \times C_1A_1$, $C_2 = AB \times A_1B_1$ є вершинами рівностороннього трикутника [74, с.152].

Доведення.

Нехай у коло $K(O, R)$ вписано два рівносторонні трикутники ABC і $A_1B_1C_1$, причому сторони цих трикутників перетинаються попарно в точках A_2 , B_2 , C_2 (рис. 3.2.3.11). Оскільки у рівносторонньому трикутнику, вписаному в коло, центральні кути при вершинах рівні, маємо $\angle AOB = \angle BOC = \angle COA = 120^\circ$.

Поворот навколо центра кола O на 120° відображає сторону AB на BC , сторону BC — на CA , а CA — на AB . Аналогічно, цей самий поворот переводить сторони трикутника $A_1B_1C_1$ у відповідні:

$$A_1B_1 \rightarrow B_1C_1, B_1C_1 \rightarrow C_1A_1, C_1A_1 \rightarrow A_1B_1.$$

Відомо, що при повороті точки перетину прямих переходять у точки перетину їхніх образів. Отже, $A_2 = R_{O, 120^\circ}(B_2)$, $B_2 = R_{O, 120^\circ}(C_2)$, $C_2 = R_{O, 120^\circ}(A_2)$.

Звідси випливає, що трикутник $A_2B_2C_2$ є рівностороннім (рис.3.3.3.11).

Отже, точки перетину сторін двох рівносторонніх трикутників, вписаних у одне коло, утворюють ще один рівносторонній трикутник.

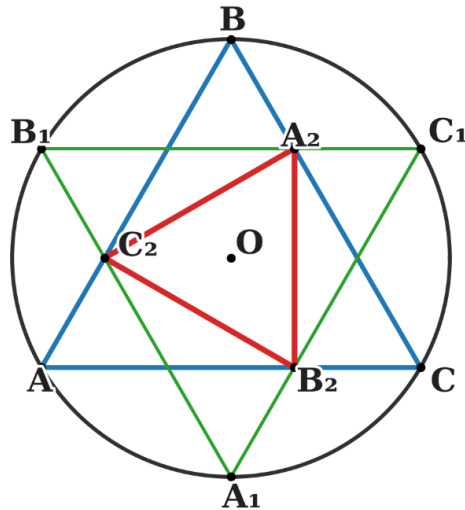


Рис. 3.2.3.11. Точки A_2, B_2, C_2 — вершини рівностороннього трикутника

Застосування паралельного перенесення в задачах на доведення.

Задача 3.2.3.12.

У рівнобічній трапеції гострий кут дорівнює 60° . Доведіть, що бічна сторона трапеції дорівнює різниці її основ [25, с.164].

Доведення.

Нехай a, b — основи, c — бічна сторона рівнобічної трапеції.

Доведемо, що $c = a - b$. Виконаємо паралельне перенесення так, щоб точка B бічної сторони AB перейшла в точку C . Тоді точка A перейде в точку K .

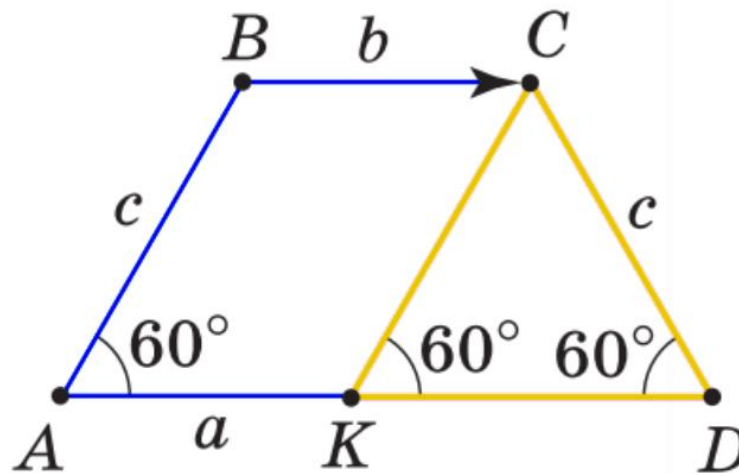


Рис. 3.2.3.12. Доведення рівності $c = a - b$ у рівнобічній трапеції при $\angle A = 60^\circ$ (перенесення $AB \parallel CK$).

Оскільки паралельне перенесення є переміщенням, то воно переводить кут у рівний йому кут, (див.рис.3.2.3.12).

Отже, $\angle DKC = \angle KAB = 60^\circ$. Тоді $\angle KCD$ — рівносторонній і $KD = c$. З іншого боку, $KD = AD - AK = AD - BC = a - b$.

Маємо: $c = a - b$.

Задача 3.2.3.13.

Всередині прямокутника $ABCD$ довільним чином вибрали точку M . Доведіть, що існує опуклий чотирикутник з перпендикулярними діагоналями, сторони якого дорівнюють AM , BM , CM , DM [76].

Доведення.

Виконаємо паралельне перенесення трикутника AMD на вектор $\overrightarrow{AB}$. При цьому він перейде у трикутник $BM'C$. Оскільки

$$BM' = AM, CM' = CM, MM' \parallel AB, AB \perp BC,$$

то чотирикутник $BM'CM$ — шуканий (рис.3.2.3.13).

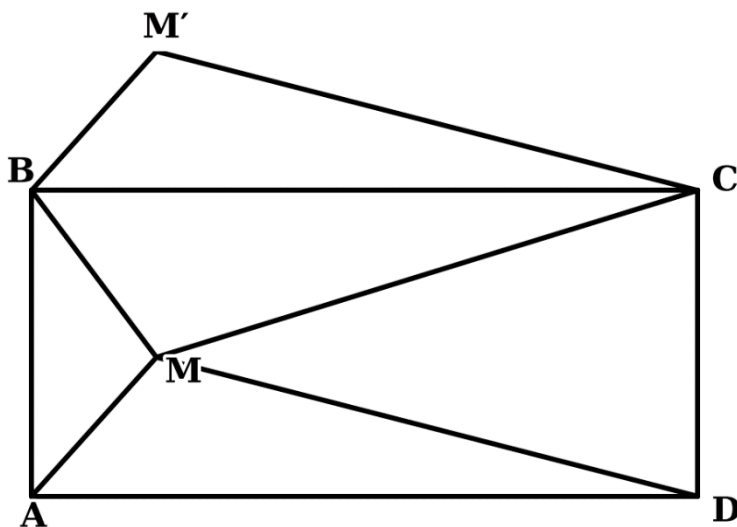


Рис. 3.2.3.13. Прямокутник $ABCD$, довільна точка M та її образ M' при паралельному перенесенні

Задача 3.2.3.14.

Довести, що різниця довжин основ трапеції завжди є меншою за суму її бічних сторін, але більшою за їх різницю [76].

Доведення.

Дана трапеція $ABCD$, $BC \parallel AD$, $AD > BC$. Виконаємо паралельне перенесення бічної сторони CD на вектор $\overrightarrow{CB}$: точка C перейде в точку B , точка D – в точку D_1 . Одержали трикутник ABD_1 , двома сторонами якого є бічні сторони трапеції, а третьою – різниця основ $AD - BC = AD_1$.

За властивістю сторін трикутника $AD_1 < AB + BD_1$, тобто $AD_1 < AB + DC$. Звідси також випливає, що $AD_1 > AB - DC$ (рис.3.2.3.14).

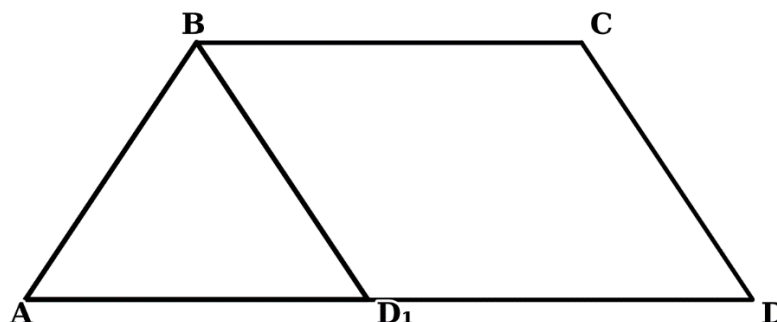


Рис. 3.2.3.14. Трапеція $ABCD$ і допоміжна побудова точки D_1 для доведення нерівності між основами

Задача 3.2.3.15.

Якщо дві медіани трикутника рівні між собою, то трикутник рівнобедрений. Довести [74, с.212].

Доведення.

Нехай у трикутнику ABC медіани $AA_1 = CC_1$. Потрібно довести, що $\angle BAC = \angle BCA$, тобто що трикутник ABC рівнобедрений. Побудуємо відрізок DC_1 – образ відрізка AA_1 при паралельному перенесенні на вектор $\overrightarrow{A_1C_1}$. За властивостями паралельного перенесення $AA_1 \parallel DC_1$,

$$\text{тому } \angle A_1AC = \angle C_1DA. \quad (1)$$

Крім того, $\triangle DC_1C$ – рівнобедрений ($DC_1 = C_1C$),

тому $\angle C_1DA = \angle C_1CD$ (2).

З рівностей (1) і (2) маємо: $\angle A_1AC = \angle C_1CA$. Тоді $\triangle CAC_1 = \triangle ACA_1$ ($CC_1 = AA_1$, AC – спільна, $\angle A_1AC = \angle C_1CA$). Із рівностей цих трикутників випливає рівність кутів C_1AC і A_1CA , тобто $\angle BAC = \angle BCA$. Трикутник ABC рівнобедрений (рис.3.2.3.15).

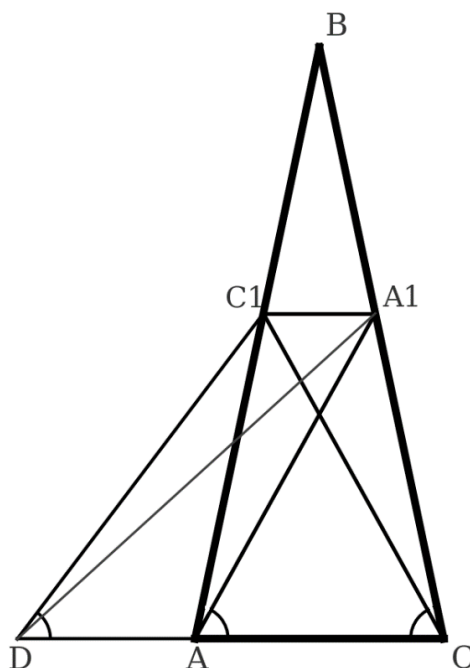


Рис. 3.2.3.15. Трикутник ABC з медіанами AA_1 і CC_1 ($AA_1 = CC_1$)

Задача 3.2.3.16.

Довести, що у рівнобедреному трикутнику різниця відстаней будь-якої точки, розташованої на продовженні основи, до його бічних сторін (або до їхніх продовжень) має сталу величину, яка дорівнює висоті, опущеній на бічну сторону [74, с.212].

Доведення.

Розглянемо трикутник ABC , у якого $AC = BC$, а висота $BB_1 \perp AC$ (рис.3.2.3.16). Візьмемо на продовженні основи AB довільну точку M і проведемо $MN \perp AC$ та $MK \perp CB$. Відстані MN і MK — це відстані від точки M до бічних сторін (або їхніх продовжень).

Потрібно довести, що $MN - MK = BB_1$.

Побудуємо точку L — образ точки N при паралельному перенесенні на вектор BB_1 . Чотирикутник BB_1NL — прямокутник, тому $BB_1 = LN$.

Із рівності прямокутних трикутників MBL і MBK маємо $MK = ML$. Отже, $BB_1 = LN = MN - ML = MN - MK$, що й треба було довести (рис.3.2.3.16).

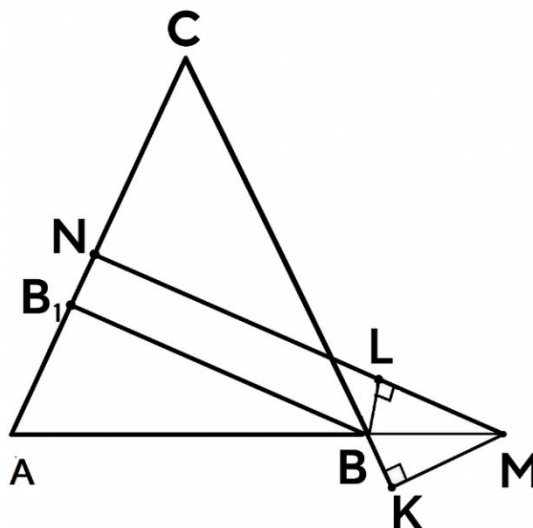


Рис. 3.2.3.16. Різниця відстаней від точки на продовженні основи до бічних сторін дорівнює висоті, опущеній на бічну сторону.

Задача 3.2.3.17.

Довести, що якщо площа трикутника ABC дорівнює S_1 , то площа трикутника, утвореного медіанами цього трикутника ABC , становить $\frac{3}{4} S_1$ [74, с.212].

Доведення.

Нехай у трикутнику ABC відрізки AA_1 , BB_1 , CC_1 — його медіани (див. рис. 3.2.3.17). Виконаємо паралельне перенесення на вектор B_1C , при якому точка B переходить у точку B' , тоді $B'C = B_1B$. При іншому паралельному перенесенні на вектор A_1C_1 образом відрізка AA_1 буде відрізок C_1B' .

Розглянемо трикутник CC_1B' , сторони якого є медіанами даного трикутника ABC . Середня лінія C_1A_1 відтинає від даного трикутника ABC

трикутник C_1BA_1 , площа якого дорівнює чверті площі вихідного трикутника:
 $S_{aC_1B_{a1}} = \frac{1}{4} S_1$.

Оскільки трикутники C_1BA_1 і $C_1B'A_1$ рівновеликі, то площа трикутника $C_1B'A_1$ також становить четверту частину площі вихідного трикутника. Аналогічно можна показати, що трикутники $A_1B'C_1$ і C_1A_1C також мають площу, рівну чверті площі трикутника ABC (рис.3.2.3.17).

Отже, $S_{aC_1B'C} = S_{aC_1B_{a1}} + S_{aC_1A_1C} + S_{aA_1C_1B'} = \frac{3}{4} S_1$.

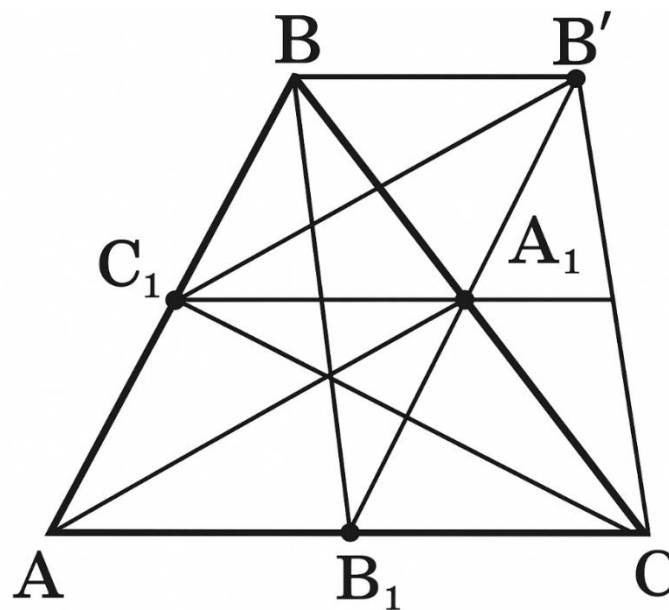


Рис. 3.2.3.17. Площа трикутника, утвореного медіанами, дорівнює $\frac{3}{4}$ площі вихідного трикутника.

3.2.4. Задачі з просторової симетрії (елементи стереометрії)

Задачі на обчислення.

Задача 3.2.4.1. Обертальна симетрія.

Дано точку $A(-\sqrt{2}; \sqrt{2}; 0)$.

Знайти образ точки A при повороті навколо осі OZ на 45° за годинниковою стрілкою. Знайти довжину вектора $\overrightarrow{OA}$.

Розв'язання.

1) Довжина вектора $\overrightarrow{OA}$

$$|\overrightarrow{OA}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Підставляємо координати точки A :

$$|\overrightarrow{OA}| = \sqrt{(-\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2 + 0^2} = \sqrt{2 + 2} = 2$$

2) Образ точки при повороті навколо осі OZ

Поворот навколо осі OZ на кут φ задається формулами:

$$\begin{cases} x' = x \cos \varphi - y \sin \varphi \\ y' = x \sin \varphi + y \cos \varphi \\ z' = z \end{cases}$$

Оскільки поворот здійснюється за годинниковою стрілкою на 45° , то

$$\varphi = 45^\circ, \cos(-45^\circ) = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \sin(-45^\circ) = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Підставимо координати точки $A(-\sqrt{2}; \sqrt{2}; 0)$:

$$x' = (-\sqrt{2}) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - (\sqrt{2}) \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -1 - (-1) = 0$$

$$y' = (-\sqrt{2}) \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + (\sqrt{2}) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 1 + 1 = 2,$$

$$z' = 0.$$

Отже, образ точки: $A_1(0; 2; 0)$.

Відповідь: $|\overrightarrow{OA}| = 2$, $A_1(0; 2; 0)$.

Задача 3.2.4.2. Центральна симетрія

Точки $M(5; -3; 4)$ та $N(-3; 1; -2)$ симетричні відносно точки K . Знайти координати точки K .

Розв'язання.

За означенням центральної симетрії точка K — середина відрізка MN .

Тоді:

$$x_K = \frac{5 + (-3)}{2} = 1, \quad y_K = \frac{-3 + 1}{2} = -1, \quad z_K = \frac{4 + (-2)}{2} = 1,$$

Відповідь: $K(1; -1; 1)$.

Задача 3.2.4.3. Центральна симетрія.

Які координати має точка O , відносно якої симетричні точки $B(2; -7; 8)$ і $B'(0; 1; -10)$?

Розв'язання.

Оскільки точки B і B' симетричні відносно точки O , то точка O є серединою відрізка BB' .

Тому:

$$\begin{aligned} x_O &= \frac{x_B + x_{B'}}{2} = \frac{2 + 0}{2} = 1 \\ y_O &= \frac{y_B + y_{B'}}{2} = \frac{-7 + 1}{2} = -3 \\ z_O &= \frac{z_B + z_{B'}}{2} = \frac{8 + (-10)}{2} = -1 \end{aligned}$$

Відповідь: $O(1; -3; -1)$.

Задача 3.2.4.4. Центральна симетрія

Точки $M(x; 2; -7)$ і $M'(2; y; z)$ симетричні відносно точки $O(1; 0; -1)$. Знайдіть x, y, z .

Розв'язання.

Оскільки точки M і M' симетричні відносно точки O , то точка O — середина відрізка MM' .

$$x_O = \frac{x_M + x_{M'}}{2}$$

$$y_0 = \frac{y_M + y_{M'}}{2}$$

$$z_0 = \frac{z_M + z_{M'}}{2}$$

1) За координатою x:

$$1 = \frac{x + 2}{2}$$

$$2 = x + 2$$

$$x = 0$$

2) За координатою y:

$$0 = \frac{2 + y}{2}$$

$$0 = 2 + y$$

$$y = -2$$

3) За координатою z:

$$-1 = \frac{-7 + z}{2}$$

$$-2 = -7 + z$$

$$z = 5$$

Відповідь: $x = 0$, $y = -2$, $z = 5$.

Задача 3.2.4.5. Дзеркальна симетрія

Точки $E(-3; 8; 7)$ та F симетричні відносно площини xu . Знайдіть довжину відрізка EF .

Розв'язання.

За властивістю дзеркальної симетрії відносно площини xu координати точки F матимуть вигляд:

$$F(-3; 8; -7).$$

Тоді за формулою довжини відрізка маємо:

$$EF = \sqrt{(-3 - (-3))^2 + (8 - 8)^2 + (-7 - 7)^2}$$

$$EF = \sqrt{0 + 0 + 196} = 14$$

Відповідь: $EF = 14$.

Задача 3.2.4.6. Дзеркальна симетрія

Записати координати точок, симетричних точці $A(5; -3; 2)$ відносно площин xu , yz , xz .

Розв'язання.

1) площини xu

Якщо точка симетрична площині xu , то в неї змінюється лише значення координати по осі z .

$$A'(5; -3; -2).$$

2) площини yz

Якщо точка симетрична площині yz , то в неї змінюється лише значення координати по осі x .

$$A'(-5; -3; 2).$$

3) площини xz

Якщо точка симетрична площині xz , то в неї змінюється лише значення координати по осі y .

$$A'(5; 3; 2).$$

Задача 3.2.4.7. Паралельне перенесення.

Паралельне перенесення задається формулами:

$$x_1 = x + 2, \quad y_1 = y - 2, \quad z_1 = z + 5.$$

В яку точку при цьому паралельному перенесенні переходить точка $A(-1; 3; -2)$?

Розв'язання.

Нехай при даному паралельному перенесенні точка

$A(x; y; z)$ переходить у точку $A_1(x_1; y_1; z_1)$.

Підставимо координати точки $A(-1; 3; -2)$ у формули паралельного перенесення:

$$x_1 = -1 + 2 = 1, \quad y_1 = 3 - 2 = 1, \quad z_1 = -2 + 5 = 3.$$

Відповідь

$$A_1(1; 1; 3).$$

Задача 3.2.4.8. Паралельне перенесення.

Паралельне перенесення задається формулами:

$$x_1 = x + 2, \quad y_1 = y - 1, \quad z_1 = z + 4.$$

Точка **A** при цьому паралельному перенесенні переходить у точку **B(4; -3; 5)**. Знайдіть координати точки **A**.

Розв'язання

Нехай

$$A(x; y; z) \rightarrow B(x_1; y_1; z_1).$$

За умовою маємо:

$$x_1 = 4, \quad y_1 = -3, \quad z_1 = 5.$$

Підставимо у формули паралельного перенесення:

$$4 = x + 2, \quad -3 = y - 1, \quad 5 = z + 4.$$

Звідси:

$$x = 2, y = -2, z = 1.$$

Відповідь

$$A(2; -2; 1).$$

Задача 3.2.4.9. Паралельне перенесення.

Дано точку **A** у просторі, для якої $\overrightarrow{OA} = (3; 3; 3)$. Виконати паралельне перенесення точки **A** на вектор $\overrightarrow{OA}$.

Знайти координати точки **A₁** — образу точки **A** при цьому паралельному перенесенні.

Розв'язання

Нехай початок координат **O** (0; 0; 0).

$$\text{Оскільки } \overrightarrow{OA} = (3; 3; 3).$$

то координати точки **A** дорівнюють: **A(3;3;3)**.

При паралельному перенесенні на вектор

що $\overrightarrow{OA} = (3; 3; 3)$. координати нової точки **A₁** обчислюються за формулами:

$$\begin{cases} x_{A1} = x_A + 3, \\ y_{A1} = y_A + 3, \\ z_{A1} = z_A + 3. \end{cases}$$

Підставляємо координати точки **A**:

$$x_{A1} = 3 + 3 = 6,$$

$$y_{A1} = 3 + 3 = 6,$$

$$z_{A1} = 3 + 3 = 6.$$

Відповідь: $A_1(6; 6; 6)$

Задача 3.2.4.10. Паралельне перенесення.

Дано точку $M(3; -2; 1)$. Точка O — початок координат, тобто $O(0; 0; 0)$.

Знайдіть координати точки M_1 , у яку переходить точка M внаслідок паралельного перенесення на вектор $\overrightarrow{OM}$.

Розв'язання.

1) Знайдемо координати вектора:

$$\overrightarrow{OM} = (x_M - 0; y_M - 0; z_M - 0) = (3; -2; 1).$$

2) При паралельному перенесенні на вектор $(a; b; c)$ координати точки змінюються так:

$$(x; y; z) \mapsto (x + a; y + b; z + c).$$

Тому:

$$M_1 = M + \overrightarrow{OM} = (3 + 3; -2 + (-2); 1 + 1) = (6; -4; 2).$$

Відповідь:

$$M_1(6; -4; 2).$$

Задача 3.2.4.11.

Чи існує паралельне перенесення, при якому точка A переходить у точку B , а точка C — у точку D , якщо $A(1; 3; 5)$, $B(4; 0; 1)$, $C(2; 4; 3)$, $D(5; 1; 1)$?

Розв'язання:

При паралельному перенесенні точки зміщуються по паралельним (або таким, що збігаються) прямим на одну й ту саму відстань, тобто точки зміщуються на один і той самий вектор $\vec{a}$. Отже, якщо при паралельному

перенесенні точка А переходить у точку В, а точка С — у точку D, то вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CD}$ повинні бути рівними.

Порівняємо координати векторів $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CD}$: $\overrightarrow{AB} (3;-3;-4)$, $\overrightarrow{CD} (3; -3; -4)$.
Оскільки $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, то доходимо висновку, що при паралельному перенесенні на вектор $\overrightarrow{AB}$ точка А переходить у точку В, а точка С — у точку D

Задача 3.2.4.12. Паралельне перенесення.

Знайдіть значення a, b, c у формулах паралельного перенесення $x' = x + a$, $y' = y + b$, $z' = z + c$, якщо при цьому паралельному перенесенні точка А (4;5;3) переходить у точку А' (3; -2;7).

Розв'язання:

Урахуємо координатні формули паралельного перенесення, при якому точка $(x;y;z) = (4;5;3)$ переходить у точку $(x'; y'; z') = (x+a; y+b; z+c) = (3; -2; 7)$.

Підставляючи у формули паралельного перенесення координати точок А і А', тобто $x=4, y=5, z=3$ та $x'=3, y'=-2, z'=7$, одержуємо рівняння $3 = 4 + a$, $-2 = 5 + b$, $7 = 3 + c$.

Звідси $a = -1, b = -7, c = 4$.

Задача 3.2.4.13.

Вказати рівняння сфери, симетричної сфері $(x-4)^2+(y+5)^2+(z-1)^2=9$ відносно: 1) площини xOy; 2) осі Ox; 3) осі Oy.

Розв'язання.

Дана сфера має центр $C(4; -5; 1)$ і радіус $r=3$.

1) Симетрія відносно площини xOy

При відбитті відносно площини xOy координати x і y не змінюються, а z змінює знак: $z \rightarrow -z$. Тому центр переходить у $C_1(4; -5; -1)$.

Отже, шукане рівняння:

$$(x - 4)^2 + (y + 5)^2 + (z + 1)^2 = 9.$$

2) Симетрія відносно осі Ox

Симетрія відносно осі Ox (поворот на 180° навколо осі Ox) задається перетворенням:

$$(x, y, z) \rightarrow (x, -y, -z).$$

Тому центр переходить у $C_2(4; 5; -1)$.

Отже, шукане рівняння: $(x - 4)^2 + (y - 5)^2 + (z + 1)^2 = 9$

3) Симетрія відносно осі Oy

Симетрія відносно осі Oy (поворот на 180° навколо осі Oy) задається перетворенням:

$$(x, y, z) \rightarrow (-x, y, -z).$$

Тому центр переходить у $C_3(-4; -5; -1)$.

Отже, шукане рівняння: $(x + 4)^2 + (y + 5)^2 + (z + 1)^2 = 9$

Відповідь:

$$1. \quad (x - 4)^2 + (y + 5)^2 + (z + 1)^2 = 9.$$

$$2. \quad (x - 4)^2 + (y - 5)^2 + (z + 1)^2 = 9;$$

$$3. \quad (x + 4)^2 + (y + 5)^2 + (z + 1)^2 = 9.$$

Задачі на доведення.

Задача 3.2.4.14.

Чи симетричні точки A та A' відносно початку координат, якщо $A(3; 4; -2)$ і $A'(-3; -4; 2)$?

Розв'язання.

Нехай O — середина відрізка AA' .

Тоді:

$$x_0 = \frac{3 + (-3)}{2} = 0, \quad y_0 = \frac{4 + (-4)}{2} = 0, \quad z_0 = \frac{-2 + 2}{2} = 0$$

Отже, $O(0; 0; 0)$ — початок координат.

Висновок: Точки A і A' симетричні відносно початку координат.

Задача 3.2.4.15.

Чи є точка $O(1; 5; 3)$ центром симетрії для точок $A(3; -2; 4)$ та $A'(-1; 12; 2)$?

Розв'язання.

Нехай O — середина відрізка AA' . Тоді:

$$1 = \frac{3 + (-1)}{2}, \quad 5 = \frac{-2 + 12}{2}, \quad 3 = \frac{4 + 2}{2}$$

Обчислюємо:

$$1 = \frac{2}{2} = 1, \quad 5 = \frac{10}{2} = 5, \quad 3 = \frac{6}{2} = 3$$

Отже, усі рівності виконуються.

Відповідь: точка O є центром симетрії.

Задачі на побудову та комбіновані

Задача 3.2.4.16.

Запишемо координати точки A' , що симетрична відносно початку координат точці $A(2; 3; 1)$.

Розв'язання.

Нехай O — середина відрізка AA' , тоді $O(0; 0; 0)$. Отже,

$$0 = \frac{2 + x_{A'}}{2}, \quad 0 = \frac{3 + y_{A'}}{2}, \quad 0 = \frac{1 + z_{A'}}{2}$$

Помножимо обидві частини рівностей на 2:

$$0 = 2 + x_{A'}, \quad 0 = 3 + y_{A'}, \quad 0 = 1 + z_{A'}$$

Звідси маємо:

$$x_{A'} = -2, \quad y_{A'} = -3, \quad z_{A'} = -1$$

Відповідь: $A'(-2; -3; -1)$.

Задача 3.2.4.17.

Дано точку $(2; 3; 5)$. Знайдіть точки, симетричні даній відносно координатних площин.

Розв'язання:

Для побудови точки, симетричної заданій точці $A(2; 3; 5)$ відносно площини xOy , потрібно провести пряму $AA' \perp \text{пл. } xOy$ і від точки $A1$ перетину цієї прямої з площиною xOy відкласти відрізок $A1A' = AA1$. Тоді точки A' і A

матимуть однакові координати x і y , а координати z у них відрізнятимуться тільки знаком

Точка A' , симетрична точці $A(2;3;5)$ відносно площини xOy , лежить на прямій, перпендикулярній до площини xOy , тому має ті самі координати x і y : $x=2$, $y=3$. Симетрична точка розташована на тій самій відстані від площини xOy , але по інший бік від неї. Тому координата z у неї відрізняється тільки знаком, тобто $z=-5$. Отже, точкою, симетричною точці $A(2;3;5)$ відносно площини xOy , буде точка з координатами $(2;3;-5)$. Аналогічно точкою, симетричною точці $A(2;3;5)$ відносно площини xOz , буде точка з координатами $(2;3;5)$ і точкою, симетричною точці $A(2;3;5)$ відносно площини yOz , буде точка з координатами $(-2; 3; 5)$.

Задача 3.2.1.18.

Побудувати дзеркальний відбиток прямої $y = 2x + 1$, $z = 0$ відносно площини yOz та записати рівняння отриманої прямої.

Розв'язання

1) Пряма лежить у площині xOy , тому:

$$\begin{cases} y = 2x + 1, \\ z = 0. \end{cases}$$

2) Площина yOz має рівняння: $x=0$.

При дзеркальній симетрії відносно yOz : $(x, y, z) \mapsto (-x, y, z)$.

У рівнянні прямої замінюємо $x \rightarrow -x$: $y = 2(-x) + 1 = -2x + 1$.

Координата z не змінюється: $z = 0$.

Відповідь:

$$\begin{cases} y = -2x + 1, \\ z = 0. \end{cases}$$

Загальна структура факультативного курсу «Симетрія у навколишньому світі та її використання в геометричних задачах» та опис проведених уроків

Факультативний курс «Симетрія у навколишньому світі та її використання в геометричних задачах» розроблений для учнів 9 класу і має на меті поглибити їхні знання про симетрію як про універсальний принцип організації об'єктів у природі, мистецтві, архітектурі та техніці, а також показати можливості використання симетрії під час розв'язування геометричних задач.

Актуальність курсу зумовлена тим, що симетрія є одним із базових понять не лише геометрії, а й природничих та мистецьких дисциплін. Звернення до реальних об'єктів (рослин, тварин, архітектурних споруд, орнаментів, технічних конструкцій) робить вивчення теми наочним і мотивувальним. Курс має міждисциплінарний характер і спирається на матеріал математики, біології, образотворчого мистецтва, інформатики.

Мета курсу – розширити та систематизувати уявлення учнів про види симетрії (осьову, центральну, обертальну, трансляційну), сформувати вміння розпізнавати симетрію в навколишньому середовищі й застосовувати її для розв'язування геометричних задач, а також розвинути просторове, креативне та творче мислення, логіку.

Основні завдання курсу:

- ознайомити учнів з видами симетрії (осьова, центральна, обертальна, трансляційна) та їх геометричним змістом;
- формувати вміння виконувати геометричні перетворення як традиційними засобами (креслення), так і в середовищі GeoGebra;
- розвинути навички розв'язування геометричних задач із використанням симетрії;

- показати прояви симетрії в природі, українському декоративно-ужитковому мистецтві, архітектурі світу, дизайні та техніці;
- забезпечити міждисциплінарні зв'язки з біологією, мистецтвознавством, фізикою та інформатикою;
- стимулювати інтерес до математики через творчі завдання (створення орнаментів, симетричних композицій, теселяцій);
- розвивати просторове та логічне мислення, естетичний смак і вміння бачити математику в навколишньому світі.

Структура курсу:

Курс складається з 4 тем, кожна з яких вивчається протягом двох уроків (загалом 8 годин). Темы курсу:

1. *«Симетрія та її види»*. Вступне заняття, на якому подається поняття симетрії, показуються її прояви в природі, архітектурі, мистецтві, вводяться основні види симетрії; використовуються інтерактивні моделі GeoGebra та підсумкове тестування.
2. *«Симетрія відносно прямої»*. Розглядаються означення, властивості та координатні формули осьової симетрії, приклади з реального життя (прапори, дорожні знаки, орнаменти), виконується серія практичних задач та творче завдання (монотипія).
3. *«Симетрія відносно точки. Поворот»*. Вивчається центральна симетрія, властивості повороту, оберտальна симетрія; демонструються природні, архітектурні та дизайнерські приклади; виконується проєктне завдання «Побудуй власний замок».
4. *«Паралельне перенесення. Трансляційна симетрія»*. Розглядається паралельне перенесення як рух, показуються його прояви в орнаментах, вишивці, архітектурі, роботах М. Ешера; учні створюють власні теселяції та орнаменти.

Методи навчання

- Лекції-презентації з інтерактивними елементами.
- Практичні заняття з розв'язання задач.

- Виконання творчих завдань: створення симетричних малюнків, теселяцій, аналіз архітектурних об'єктів.
- Робота з цифровими інструментами, такими як GeoGebra, для моделювання симетричних об'єктів.

Очікувані результати

- Учні зможуть використовувати поняття симетрії у вирішенні геометричних задач.
- Розпізнаватимуть види симетрії у навколишньому світі та пояснюватимуть їх значення.
- Розвинуть просторове мислення, логіку та творчі здібності.

Курс пропонує інтегрований підхід, що поєднує математику з іншими дисциплінами, і дозволяє учням побачити практичну цінність симетрії в різних аспектах життя. Він спрямований на формування ключових компетентностей XXI століття та мотивацію до подальшого вивчення математики.

1 урок «Симетрія та її види»

Початок уроку. На початку уроку учні були ознайомлені із загальною структурою факультативного курсу "Симетрія у навколишньому світі та її використання в геометричних задачах".

Тема уроку "*Симетрія та її види*" була визначена як вступ до курсу. Учні запропонували звернути увагу на різноманітність проявів симетрії у навколишньому світі (слайд 1).

Знайомство з поняттям симетрії. Урок присвячено ознайомленню учнів із поняттям симетрії, її математичними властивостями та видами. Основний акцент зроблено на:

- Осьовій симетрії,
- Центральній симетрії,
- Обертальній симетрії,
- Трансляційній симетрії,

які розглядаються через призму геометричних перетворень.

Обговорення проявів симетрії. Учням запропоновано визначити, які з об'єктів, представлених на зображенні, мають симетрію. Ця активність мала на меті виявити базове розуміння учнями поняття симетрії та розпочати аналіз її проявів у реальних об'єктах (слайд 2).

Після цього учні обговорювали прояви симетрії у щоденному житті. Було зроблено акцент на тому, що симетрія — це не лише математичне явище, але й принцип гармонії та естетики, який використовується (слайди 3, 4):

- у природі,
- архітектурі,
- техніці,
- побуті.

Формулювання поняття симетрії. Учням було запропоновано розглянути зображення об'єктів, що мають різні види симетрії, і спробувати сформулювати загальне визначення цього поняття.

На основі обговорення зроблено висновок: *Симетрія — це властивість фігури або об'єкта залишатися незмінною після виконання певних геометричних перетворень* (слайд 5).

Теоретичне визначення симетрії:

- Формулювання визначення симетрії та етимологія терміна представлені на слайді 6.
- Розглянуто геометричні перетворення та їх зв'язок із симетрією (слайд 7).
- На слайді 8 учням представлено поняття руху (ізометрії) як основу для розуміння симетрії.

Розгляд видів симетрії.

1) Осьова симетрія:

- Поняття осьової симетрії: представлено її визначення та приклад осьової симетрії відносно осі ординат (слайди 9, 10).
- Розглянуто геометричні фігури з їх симетричними образами (слайд 11).

- Визначено, що таке вісь симетрії, а також фігури з осями симетрії (слайд 12).

- Для закріплення поняття використано інтерактивну програму GeoGebra (слайд 13).

Учні ознайомилися з прикладами осьової симетрії: у природі, в техніці та архітектурі (слайди 14, 15).

2) Центральна симетрія

- Визначення *центральної симетрії* та розгляд координат симетричних точок (слайди 16, 17).

- Приклади фігур із центральною симетрією та їх практичне застосування (слайди 18, 19).

- Використання GeoGebra для ілюстрації центральної симетрії у геометричних задачах (слайд 20).

- Приклади центральної симетрії у природі, техніці, дизайні та мистецтві представлені на слайді 21.

3) Обертальна симетрія

- Визначення *обертальної симетрії*: фігура залишається незмінною після обертання на певний кут (слайди 22-27).

- Наведено приклади об'єктів з обертальною симетрією: у природі, техніці, дизайні (слайд 28).

4) Трансляційна симетрія

- Означення *паралельного перенесення та трансляційної симетрії* (слайди 29-31).

- Розгляд прикладів у програмі GeoGebra: паралельне перенесення фігур, композиції симетрій (слайд 34).

- Приклади трансляційної симетрії в дизайні, побуті та мистецтві (слайд 36).

Огляд симетрії у навколишньому світі. Після ознайомлення зі всіма видами симетрії учням було представлено приклади:

- Симетрії у природі (слайди 37, 38).

- Симетрії у декоративно-ужитковому мистецтві, зокрема в українському орнаменті (слайди 39, 40).

- Симетрії в архітектурі: приклади світових архітектурних шедеврів, які простежують використання симетрії як принципу гармонії та стабільності (слайди 41, 42).

На слайді 43 підкреслено універсальність симетрії у природі, мистецтві, техніці та повсякденному житті.

Тестування. *Тестування по темі "Симетрія та її види"* було проведено із використанням інтерактивних інструментів презентації (слайди 44-74).

Мета тестування:

1. Перевірка рівня засвоєння теоретичного матеріалу.
2. Оцінювання вміння розпізнавати види симетрії у різних контекстах.
3. Формування практичних навичок застосування знань.

Структура тесту:

- 30 питань з вибором правильної відповіді.
- Обговорення всіх правильних відповідей.

Висновок. Симетрія — це універсальна мова природи та мистецтва, яка поєднує красу й математику. Учні успішно засвоїли поняття симетрії, ознайомилися з її видами та навчилися визначати їх у різних контекстах.

Урок сприяв розвитку:

- математичної точності,
- логічного мислення,
- просторового уявлення.

Цей урок став основою для подальшого вивчення симетрії у рамках факультативного курсу.

2 урок «Симетрія відносно прямої»

Вступна частина уроку. Тема уроку: *"Симетрія відносно прямої"*. Вчитель наголошує, що цей тип симетрії є одним із ключових у геометрії та

важливим для розуміння гармонії і пропорційності у навколишньому світі (слайд 1). Мета вступу: Зацікавити учнів, підготувати їх до вивчення теоретичних і практичних аспектів симетрії.

Теоретична частина. Визначення осової симетрії. Що таке осова симетрія:

- Властивість фігури залишатися незмінною при відображенні відносно прямої (осі симетрії).
- При цьому одна частина фігури є дзеркальним відображенням іншої (слайд 2).

Приклади осової симетрії в природі: листя дерев, крила метеликів, архітектурні фасади, технічні об'єкти. Учні аналізують, як симетрія допомагає створювати гармонію в різних сферах життя (слайд 3).

Математичне означення осової симетрії. Формальне визначення осової симетрії. (слайди 4–6).

Розглянуто Теореми, доведення та властивості осової симетрії.

- Теорема. Композиція двох осових симетрій із паралельними осями є паралельним перенесенням (слайд 7).
- Теорема. Осова симетрія є рухом, який зберігає відстані між точками (слайди 10–11).
 - Координатні формули симетрії (слайди 8–9).
 - Властивості осової симетрії: зберігає розміри фігури, рівність сторін і кутів, симетричність осей (слайд 12)

Аналіз геометричних фігур. Симетричні фігури: рівнобедрений трикутник, квадрат, ромб, прямокутник, коло, правильний шестикутник (слайди 13–16). Для кожної фігури показано всі осі симетрії.

Фігури без осей симетрії: різносторонній трикутник, трапеція, паралелограм (слайд 17).

Практична частина. Розв'язування задач (слайди 19- 49).

Робота з абеткою та цифрами: Визначити, які літери в абетці та цифри мають вертикальну, горизонтальну або обидві осі симетрії (слайди 50–56).

Розгляд симетрія в реальному світі.

Симетрія у прапорах (слайди 57–73)

- Симетрія в прапорах України, Канади, Німеччини, Польщі, Албанії та ще 88 країн.
- Аналіз прапора Землі, символи фінішного прапора.

Симетрія у дорожніх знаках (слайди 74–87) розказано про роль симетрії у дизайні знаків для швидкого розпізнавання та безпеки. Дорожні знаки аналізуються учнями на симетричність.

Монотипія. Ознайомлення з технікою монотипії (слайди 88–100). Приклади монотипії та інструкція для створення симетричних малюнків. Учні створюють власні симетричні зображення.

Закріплення знань: Учні повторюють теоретичний матеріал та аналізують приклади. Учні оволодіють:

- Вмінням визначати осьову симетрію в геометричних фігурах і реальних об'єктах.
- Навичками застосування симетрії для розв'язання задач і творчих завдань.
- Знанням про значення симетрії у різних галузях життя.

Учні відповідають на запитання: "Як симетрія впливає на наше сприйняття світу?"

Домашнє завдання: Знайти об'єкти осьової симетрії у навколишньому середовищі та створити симетричний малюнок методом монотипії.

3 урок «Симетрія відносно точки. Поворот»

На початку уроку учням було оголошено тему уроку: «Симетрія відносно точки та поворот» (слайд 1). Учитель пояснив значення цих понять у математиці, геометрії та їхню роль у реальному житті. Метою уроку було ознайомлення з центральною симетрією, поворотом, обертальною симетрією, а також з їхніми властивостями та прикладами з навколишнього світу.

Огляд об'єктів з навколишнього середовища, які мають центральну симетрію (слайд 2)

Теоретична частина (слайди 3 – 7). Визначення симетрії відносно точки. Координатні формули симетрії відносно точки. Означення руху.

Огляд теореми: Центральна симетрія є рухом. Доведення цієї теореми.

Вивчення властивостей центральної симетрії (слайд 8). Означення фігури яка має центр симетрії (слайд 9).

Приклади фігур, які мають центр симетрії (слайди 10-12): відрізок, ромб, квадрат, еліпс, правильний шестикутник тощо.

Приклади геометричних фігур, які не мають центр симетрії (слайд 13): трикутники, правильні багатокутники з непарною кількістю сторін.

Розв'язування задач на уроці (слайд 14-30).

Огляд наступного виду геометричних перетворень - повороту. Визначення повороту (слайд 31-34).

Розгляд Теореми: Поворот є рухом, тобто зберігає відстані між точками (слайд 35). Доведення теореми.

Теорема: Будь-який поворот площини навколо точки можна подати у вигляді композиції двох осьових симетрій площини (слайд 36). Доведення теореми.

Розглянуто Теорему: Будь-який рух фігури є композицією не більше ніж трьох осьових симетрій (слайд 37).

Обертальна симетрія (слайд 38). Визначення. Приклади геометричних фігур, що мають обертальну симетрію (слайд 39-41): квадрат (обертальна симетрія 4-го порядку), ромб (2-го порядку), правильний трикутник (3-го порядку), правильний шестикутник (6-го порядку).

Розв'язування задач (слайд 42-46).

На слайді наведено приклади об'єктів навколишнього середовища, які мають обертальну симетрію (слайд 47). Учні визначають обертальну симетрію якого порядку мають всі ці об'єкти.

Ознайомлення з прикладами обертальної симетрії в органічному світі (слайд 48), зокрема: квіти родини розоцвітих, морські зірки, плоди.

Ознайомлення з обертальною симетрією в структурі кристалів, розділену за порядком симетрії (слайд 49).

Ці приклади показують учням, як обертальна симетрія впливає на формування і властивості матеріалів.

Демонстрація на слайді обертальну симетрію шостого порядку (C_6) на прикладі природних сніжинок (слайд 50). Цей приклад не тільки пояснює поняття обертальної симетрії, але й привертає увагу до краси симетричних форм у природі.

Приклади з реального життя. Логотипи. Учням продемонстровано логотипи з обертальною симетрією, центральною та осьювою симетріями (слайди 51-57).

Симетрія в архітектурі. Практичний проект: Побудуй власний замок (слайди 58-64).

Учням запропоновано створити схему симетричного замку.

- Вибір базової форми: квадрат, коло або правильний багатокутник.
- Застосування центральної та обертальної симетрії: додавання веж, арок, балконів, що повторюються за заданими правилами.
- Додавання деталей: флагштоки, вікна, ворота, які підкреслюють симетрію.

Результати: Учні створили генеральний план замку «Кастель-дель-Монте» із використанням геометричних принципів симетрії, що розвиває їхні просторові уявлення та творчі навички.

Огляд прикладів шедеврів архітектури від стародавніх до сучасних часів. Розглянуто симетричні будівлі, як-от замок Кастель-дель-Монте, Тадж-Махал, Apple Park.

- Замок Кастель-дель-Монте (Італія) восьмикутна форма замку і його башт є прикладом обертальної симетрії.

- Тадж-Махал (Індія). Цей мавзолей є взірцем центральної симетрії, де кожна частина відображається відносно головної осі.
- Apple Park (США). Кільцеподібна структура офісного центру має обертальну симетрію.

Також розглянуто симетрію в архітектурних спорудах: замок Шато де Шамбор, Музей Соломона Р. Гуггенхайма, Церква Сан-Карло алле Кваттро Фонтане, Храм Лотоса, Офіс Bloomberg HQ, будівлю Пентагону в США.

Розгляд реальних прикладів з архітектури та логотипів допоміг учням побачити практичне застосування симетрії в сучасному світі. Практичний проект "Побудуй власний замок" розвинув їхню творчість та розуміння геометричних принципів симетрії.

У кінці уроку вчитель узагальнює, що симетрія відносно точки та поворот — це основа багатьох геометричних перетворень. Учні обговорюють, як ці поняття використовуються у математиці, природі, техніці та мистецтві. Завершується урок рефлексією та подякою за увагу.

4 урок "Паралельне перенесення Трансляційна симетрія"

Визначення теми уроку - *"Паралельне перенесення"*. Звернення уваги на те, що паралельне перенесення є основою багатьох практичних застосувань геометрії у реальному житті.

Демонстрація на слайді 2 прикладів трансляційної симетрії: мотиви, візерунки, вишивка, паркет, шпалери.

Визначення паралельного перенесення (слайд 3).

Учням було надано чітке означення паралельного перенесення (слайд 3 - 6) та властивості паралельного перенесення.

Надано означення трансляційної симетрії (слайд 4), та нагадування учням поняття руху (слайд 7)

На слайді 8 розглянуто Теорему: Паралельне перенесення є рухом. Вчитель довів, що паралельне перенесення належить до рухів, тобто ізометрій, що зберігають відстані між точками.

Пояснено, як трансляційна симетрія пов'язана з повторенням фігур у певному напрямку без змін їх властивостей.

Практична частина. Роз'язок задач (слайди 8-25). Учні розв'язують задачі на всі види симетрії. Використання задач і практичних вправ дозволило учням зрозуміти теоретичний матеріал.

Теселяції: мистецтво геометрії.

Вступ до теселяцій – показані природні приклади: мозаїка луски змії, бджолині соти, ананас (слайд 28). Теселяції, або заощення, є прикладом використання паралельного перенесення у мистецтві, дизайні та архітектурі.

Вчитель пояснив, що теселяції — це візерунки, які покривають площину без проміжків і накладень, зберігаючи симетрію.

Наведено приклади теселяцій у природі, архітектурі :будинки у вигляді великих ананасів, хмарочос Gherkin, музей Сумайя, мечеть Шейха Лотфолли, парк Гуель (слайд 29-33). Також продемонстровані теселяції у роботах Мауріца Ешера.

Розглянуто візерунок фігур – теселяції. Означення теселяцій. Основні характеристики теселяцій, види теселяцій (слайди 34-45). Вчитель пояснив, що теселяції — це візерунки, які покривають площину без проміжків і накладень, зберігаючи симетрію. Учні розглянули на слайдах приклади теселяції. Обговорили теселяції в архітектурі та природі.

Наступним кроком було створення власної теселяції. Учнім було запропоновано створити одну теселяцію за прикладом теселяції Мауріца Ешера (46-49). Та мозаїку династії Насрідів - Альгамбра (слайди 50-55). На слайдах було показано кроки створення теселяції та мозаїки.

Учні ознайомилися з теселяціями, як прикладом використання паралельного перенесення в декоративно-прикладному мистецтві. Виконали вправу зі створення власної теселяції.

Дослідили геометричні принципи в роботах *Мауріца Ешера*.

- На уроці учні ознайомилися з роботами Мауріца Ешера — художника, який поєднав геометрію з мистецтвом у своїх теселяціях.

- Обговорювали такі його роботи, як "День і ніч" та "Рибки", де він демонструє плавні переходи фігур, використовуючи паралельне перенесення та обертання.

- Учні побачили, як Ешер застосовував математичні принципи для створення ілюзій нескінченності та гармонії.

- Розглянуто многогранники Ешера та Різдвяні павуки української народної творчості, які є сакральними геометричними фігурами в народній українській творчості..

Орнаментация українських хат. Розглянуто українські орнаменти, якими прикрашались та прикрашаються українські хати.

Учні ознайомилися з традиційними українськими мотивами та орнаментами, зокрема:

- Розписи на хатах, значення розписів, дослідження симетрії в розписах.
- Розглянуто, як паралельне перенесення застосовується для створення симетричних візерунків у вишивці.
- Симетрія та трансляційна симетрія в узорах.

Розглянуто:

- геометричні орнаменти (слайд 75-85) та приклади орнаментациї цими мотивами хат.

- рослинні орнаменти (слайд 86-101): значення та приклади.

- тваринні мотиви в орнаментациї (слайд 102-111)

Практичне завдання: створення власної вишивки (по Володимирі Підгірняку) (слайд 112-118)

- Учням було запропоновано створити схему для власної вишивки, використовуючи он-лайн програму зі створення вишивки Ornament Name.

Розглянуто приклади, де теселяції застосовуються у сучасному дизайні:

- Декорування інтер'єрів.
- Створення сучасного текстилю.
- Візерунки на обкладинках книг.

В результаті творчої роботи

- Учні створили власні ескізи орнаментів, які показують розуміння принципів паралельного перенесення.
- Завдання розвивало креативність, увагу до деталей і навички роботи з геометричними перетвореннями.

Висновки

- Симетрія та паралельне перенесення є не тільки основою геометрії, а й фундаментом для багатьох мистецьких та дизайнерських рішень.
- На уроці учні навчилися бачити зв'язок між математикою та мистецтвом, а також застосовувати отримані знання для створення власних творчих робіт.
- Теселяції та приклади з мистецтва показали, як математичні принципи інтегруються у творчість та дизайн.
- Паралельне перенесення є фундаментальним поняттям у геометрії та має численні застосування у повсякденному житті.

Презентації та розробки уроків факультативного курсу «Симетрія у навколишньому світі та її використання в геометричних задачах»

Посилання:

https://drive.google.com/drive/folders/1rvrxSbGXBZrs0mJNZjneyGRpyj_NAft6?usp=drive_link