

Міністерство освіти і науки України
Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна

О. В. Резуненко

**ВСТУП
ДО ТЕОРІЇ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ
РІВНЯНЬ ІЗ ЗАГАЮВАННЯМ**

Навчально-методичний посібник
для студентів факультету математики і інформатики

Харків – 2024

Рецензенти:

В. І. Коробов – доктор фіз.-мат. наук, професор кафедри прикладної математики Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна;

В. Д. Гордевський – доктор фіз.-мат. наук, професор кафедри фундаментальної математики Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна.

*Затверджено до друку рішенням Науково-методичної ради
Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна
(протокол № 5 від 14 травня 2024 року)*

Резуненко О. В.

Р 34 Вступ до теорії звичайних диференціальних рівнянь із загаюванням: навчально-методичний посібник / О. В. Резуненко. – Харків : ХНУ імені В. Н. Каразіна, 2024. – 35 с.

Цей посібник присвячено питанням існування розв'язків, їх єдиності, неперервної залежності від початкових функцій та іншим властивостям розв'язків звичайних диференціальних рівнянь із загаюванням.

Посібник складений для студентів факультету математики і інформатики.

УДК 517.91 (075.8)

© Харківський національний університет
імені В. Н. Каразіна, 2024
© Резуненко О. В., 2024

ЗМІСТ

Вступ	4
Попередні розгляди	6
Неперервні розв'язки	8
Метод кроків	13
Оператор зсуву	17
Неперервна залежність від початкової функції	23
Приклад крайової задачі	26
Завдання для самоперевірки	30
Література	33

1 Вступ

Метою даного короткого практичного вступу є допомога студентам молодших курсів у надбанні початкових навичок роботи з диференціальними рівняннями із загаюваним аргументом i , як наслідок, роботи з нескінченномірними динамічними системами. Такі диференціальні рівняння ще називають функціонально-диференціальними, рівняннями із запізненням, рівняннями із пам'яттю (в англійській літературі - delay equations, functional differential equations, equations with retarded arguments).

Назва "практичний" вступ зовсім не означає, що практику можна поставити на перший план, відсунувши теорію на другий! Практика без теорії - це подорож із зав'язаними очима! Ідея написання "практичного" вступу була викликана кількома причинами. Одна з них – це існування чудових книг з теорії диференціальних рівнянь із загаюваним аргументом (англійською та іншими мовами), і про них йтиметься нижче. Таким чином, знайти формулювання загальних теорем і докладні докази нескладно. З іншого боку, студентам молодших курсів буває нелегко самотійно розібратися у загальних теоремах, викладених у книгах для науковців, аспірантів та студентів старших курсів. Набагато простіше зрозуміти загальне твердження, якщо мати простий приклад, що ілюструє основну ідею. Приклади простих диференціальних рівнянь із загаюванням, як сподівається автор, повинні допомогти студентам у освоєнні *теорії*.

Другою, найголовнішою метою даного посібника є якомога більш раннє знайомство студентів із нескінченномірними динамічними системами. Такі системи природним чином виникають при дослідженні диференціальних рівнянь у частинних похідних та рівнянь із загаюванням. Традиційно до вивчення рівнянь у частинних похідних приступають, придбавши елементарні навички роботи зі звичайними диференціальними рівняннями. Водночас, до вивчення рівнянь із загаюванням можна приступати паралельно зі звичайними диференціальними рівняннями. Таким чином, студенти вже на молодших курсах мають можливість познайомитися з нескінченномірними динамічними системами. Вивчення теорії абстрактних динамічних систем та її застосування до диференціальних рівнянь у частинних похідних ми рекомендуємо почати з книг [12, 13,

14]. На цей час отримала розвиток і теорія диференціальних рівнянь у частинних похідних із загаюванням. Ряд цікавих результатів цієї теорії представлено у книзі [15] (див. також п.2.8 [12]), інші результати викладені в статтях, які публікуються в математичних журналах.

Третьою, найбільш гострою та актуальною метою цього видання є виправлення (неприродної як на 2024 рік) ситуації браку наукової літератури українською мовою для студентів університетів в Україні.

Рівняння із загаюванням аргументом природним чином з'являються, наприклад, при описі різних біологічних процесів. Наприклад, у задачі "хижак" і "жертва", загаюванням враховує вік частини популяції чи інші характеристики їх розвитку, народжуваності чи вимирання. В інших задачах загаюванням може характеризувати час транспортування молекул від місця їх синтезу до місця їх включення до системи реакції; час формування клітин, що беруть участь у імунній реакції; тривалість реакції частини популяції на фактори довкілля тощо. У задачах керування об'єктами на відстані необхідність введення загаюванням продиктована скінченністю швидкості поширення сигналу тобто об'єкт отримує команду віддану з пульта керування з певним загаюванням (див. приклад 1 далі, а також вступ до книги [1] і додаток у книзі [19] для великої кількості прикладів та посилань).

Теорія диференціальних рівнянь із загаюванням має багату історію і продовжує інтенсивно розвиватися в теперішній час. Існує ціла низка книг, які вже стали класичними. Однією з найвідоміших є книга Дж. Хейла (J. Hale) [1] та її доповнене друге видання [2]. Чудові книги [6, 5, 4, 3, 8] представляють глибокі результати в різних областях теорії диференціальних рівнянь із загаюванням. Крім того, глибоке розуміння сучасної теорії таких рівнянь неможливо без функціонального аналізу (назвемо, для стислості, лише кілька джерел [20], [9, 10]).

Першими питаннями під час розгляду будь-яких рівнянь є: "Що називається розв'язком?" і "Чи існує розв'язок?". Тільки відповівши на ці питання, можна приступати до дослідження різних властивостей (наприклад, єдиність, асимптотичні властивості, залежність від параметрів тощо). Саме обговоренню різних типів розв'язків рівнянь із загаюванням та питаннями існування та єдиності розв'язків присвячено цей посібник.

Цей текст є другим, переробленим виданням посібника, що включає

матеріали (вступної частини) курсу, який автор викладає студентам Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна з 1996 року. Перше видання [18] видано у 2004 році.

2 Попередні розгляди

Перш ніж надати точне означення розв'язку розглянемо простий ілюстративний приклад диференціального рівняння із загаюваним аргументом

$$\dot{x}(t) = x(t - 1). \quad (1)$$

На відміну від звичайних диференціальних рівнянь $\dot{x}(t) = f(x(t))$, в рівнянні (1) похідна шуканої функції $\dot{x}(t)$ залежить не від значення $x(t)$, а від значення в деякий момент часу "в минулому," в даному випадку $t - 1$ -на одиницю часу "раніше" ніж t . Звідси і назва "із загаюванням." У більш загальній ситуації, похідна $\dot{x}(t)$ може залежати від значень функції $x(\tau)$ на деякому інтервалі часу $\tau \in [t - r, t]$, де величина $r \geq 0$ називається *загаюванням*, а відповідне рівняння називається *рівнянням із загаюванням*. У свою чергу загаювання r може бути скінченим або нескінченим. Легко бачити, що звичайні диференціальні рівняння без загаювання є частковим випадком рівнянь із загаюванням при $r = 0$.

Наведемо приклад біологічної системи, стан якої описується рівнянням із загаюванням.

Приклад 1. Наступне рівняння описує процес поширення інфекційної хвороби у міському середовищі.

$$\dot{x}(t) = -\beta(t)x(t)[2\gamma + x(t - 14) - x(t - 12)] + \gamma,$$

де $x(t)$ -кількість сприйнятливих до інфекції індивідів у момент часу t , γ -швидкість, з якою сприйнятливі індивіди включаються до популяції, $\beta(t)$ -функція, що характеризує популяцію. Індивід, заражений у момент t , буде заразним протягом інтервалу часу $[t + 12, t + 14]$ (див. вступ до книги [1] та доповнення до книги [19] для великої кількості інших прикладів та посилань).

Перше питання під час розгляду будь-яких рівнянь: що називається розв'язком? Безпосередньо підставляючи в рівняння (1) функцію $x(t) \equiv$

$0, t \in \mathbb{R}$, переконуємося, що вона задовольняє рівнянню (рівняння (1) лінійне). Аналогічна спроба підставити в рівняння (1) функцію

$$y(t) = \begin{cases} 1, & t \in [-1, 0), \\ t + 1, & t \in [0, 1) \end{cases} \quad (2)$$

стикається з певною складністю: хоча функція $y(t)$ і визначена для всіх $t \in [-1, 1)$, але підставити її в (1) можна тільки для $t \in (0, 1)$ (чому не можна для $t \in [-1, 0)$? при $t = 0$?). Ці міркування приводять нас до висновку, що якщо розглядається деяка функція $x(t)$ (“кандидат” на розв’язок), визначена для $t \in [a, b)$, то (намагатися) підставляти $x(t)$ в рівняння (1) можна тільки для $t \in [a + 1, b)$ (тільки для цих значень визначено праву частину (1)). Аби множина $[a + 1, b)$ не була порожньою, необхідно $b > a + 1$, тобто проміжок часу, на якому визначена функція, має бути більше, ніж величина загаювання (у рівнянні (1) $r = 1$).

В якості *попереднього означення* поняття розв’язку рівняння (1) прийемо наступне: *функція $x(t), t \in [a, b), b - a > 1$ називається розв’язком рівняння $\dot{x}(t) = x(t - 1)$, якщо вона задовольняє рівняння для всіх $t \in [a + 1, b)$ (при $t = a + 1$ тепер мається на увазі права похідна функції).*

У сенсі цього означення, функція (2) є розв’язком (1).

Вправа 1 *Перевірити чи є розв’язками рівняння (1) наступні функції*

$$x^{(1)}(t) = \begin{cases} -1, & t \in [-1, 0), \\ 1 - t, & t \in [0, 1); \end{cases} \quad x^{(2)}(t) = \begin{cases} t, & t \in [-1, 0), \\ -t + t^2/2, & t \in [0, 1); \end{cases}$$

$$x^{(3)}(t) = \begin{cases} 1, & t \in [-1, 0), \\ t, & t \in [0, 1). \end{cases}$$

Намалювати графіки цих функцій. Чи є розв’язками функції $x^{(1)}(t) + x^{(3)}(t)$, $x^{(2)}(t) + x^{(3)}(t)$?

Вправа 2 *Запропонувати свої розв’язки рівняння (1), визначені для $t \in [0, 2)$.*

Введемо наступне важливе позначення [1], за допомогою якого записуються багато диференціальних рівнянь із загаюванням. Для

довільної функції $x(t)$, визначеної при $t \in [\sigma - r, \sigma + A]$ ($\sigma \in \mathbb{R}; r, A > 0$) зі значеннями в \mathbb{R}^m . Для значень параметра $t \in [\sigma, \sigma + A]$ визначимо функцію $x_t : [-r, 0] \rightarrow \mathbb{R}^m$ наступним співвідношенням $x_t(\theta) \equiv x(t + \theta)$, $\theta \in [-r, 0]$. Розглянемо наступний приклад. Функція $x(t) = t : [-1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, $r = 1$. За означенням, при $t = 0; t = 1; t = 1,7$ ми отримуємо функції $x_0(\theta) = x(\theta) = \theta : [-1, 0] \rightarrow \mathbb{R}$; $x_1(\theta) = x(1 + \theta) = 1 + \theta : [-1, 0] \rightarrow \mathbb{R}$; $x_{1,7}(\theta) = x(1,7 + \theta) = 1,7 + \theta : [-1, 0] \rightarrow \mathbb{R}$. Як легко бачити, графіки функцій $x_0, x_1, x_{1,7}$ (намалюйте їх) можна отримати вирізанням з графіка функції $x(t)$ частин, які завжди мають проєкцію на вісь Ot , яка має довжину, що дорівнює величині загаювання ($r = 1$), і крайню праву точку з координатою t (параметр в x_t). Таким чином, щоб отримати графік x_{t_0} , потрібно вирізати з графіка $x(t)$ частину, яка проєктується на $[t_0 - r, t_0]$, та перемістити її на відрізок $[-r, 0]$ паралельним перенесенням.

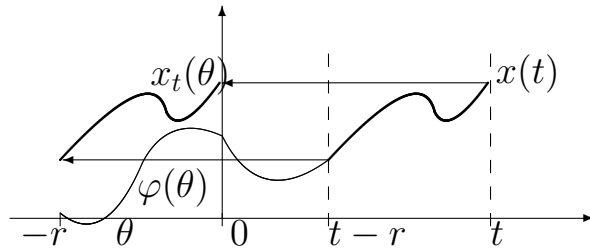


Рис. 1. Знаходження функції $x_t(\theta)$, $\theta \in [-r, 0]$.

Вправа 3 Для функції $x(t) = t^2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ і загаювання $r = 1$ знайти формули, що задають функції $x_1; x_2; x_{2,3}; x_{-1}; x_0; x_{-1,4}$ і намалювати графіки цих функцій. Зробити те саме для загаювання $r = \frac{1}{2}$.

3 Неперервні розв'язки

Для будь-якої системи диференціальних рівнянь є принципово важливим обрати (усвідомити) з якими функціями (з якого класу функцій) ми плануємо працювати, шукати розв'язки. Ще у 1959 році Н. М. Красовський зазначив, що дослідження рівнянь із загаюванням стає більш наочним і зручним, якщо розглядати їх у функціональних просторах. Як буде зрозуміло з подальших розглядів, обираючи різні функціональні простори, ми приходимо до вивчення різних типів розв'язків. Традиційним для рівнянь із загаюванням є розгляд неперервних розв'язків, тому нам

знадобиться банаховий простір $C([a, b]; \mathbb{R}^m)$ неперервних функцій (див. наприклад [9, Гл.ІІ, п.8, стор.17]), що відображають відрізок $[a, b]$ в \mathbb{R}^m . Будемо використовувати в $C([a, b]; \mathbb{R}^m)$ стандартну норму $|\varphi|_C \equiv \max_{t \in [a, b]} |\varphi(t)|_{\mathbb{R}^m} = \sup_{t \in [a, b]} |\varphi(t)|_{\mathbb{R}^m}$ (початкові відомості про нормовані простори див. наприклад [9, Гл.ІІІ], [10]). У випадку $[a, b] = [-r, 0]$, для стислості, будемо писати $C \equiv C([-r, 0]; \mathbb{R}^m)$.

Нехай $D \subset \mathbb{R} \times C$, $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ є задана функція і крапка над функцією позначає правосторонню (це важливо) похідну, тоді ми розглянемо наступне диференціальне рівняння загаюваного типу

$$\dot{x}(t) = f(t, x_t). \quad (3)$$

Аби звикнути до запису рівнянь у формі (3), розглянемо

Приклад 2. Знайдемо функції f , які задають праву частину (3) для конкретних рівнянь. Почнемо з рівняння (1) $\dot{x}(t) = x(t-1)$. Нам необхідно знайти функцію $f : \mathbb{R} \times C \rightarrow \mathbb{R}$ таку, що $f(t, x_t) = x(t-1)$, де $x(t)$ - розв'язок (1). В загальному випадку це функція $f(s, \psi) = \psi(-1)$, де (s, ψ) -довільний елемент $\mathbb{R} \times C$. Аналогічно, рівняння $\dot{x}(t) = 5x(t-1)$ записується у вигляді (3) з функцією $f(s, \psi) = 5\psi(-1)$;

рівняння $\dot{x}(t) = 7 \cdot t \cdot x(t-1)$ з функцією $f(s, \psi) = 7 \cdot s \cdot \psi(-1)$;

рівняння $\dot{x}(t) = 11t^3 + \sin^2(5x(t-1))$ з функцією $f(s, \psi) = 11s^3 + \sin^2(5\psi(-1))$;

рівняння $\dot{x}(t) = \int_{-1}^0 x(t+\theta) \cdot g(\theta) d\theta$ (g -задана функція) з функцією $f(s, \psi) = \int_{-1}^0 \psi(\theta) \cdot g(\theta) d\theta$.

Вправа 4 Знайти функцію f , за допомогою якої наступні рівняння записуються у вигляді (3):

- a) $\dot{x}(t) = x(t-r)$; b) $\dot{x}(t) = a \cdot x(t) + b \cdot x(t-r)$, $a, b = \text{const}$;
c) $\dot{x}(t) = x(t) \cdot x(t-r)$; d) $\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^k a_i(t) \cdot x(t-r_i)$, $r_i \in [-r, 0]$;
e) $\dot{x}(t) = 5 \int_{-r}^0 x^3(t+\theta) \cdot h(\theta) d\theta$ (h -задана функція).

Означення 1 (див. [1]). Функція x називається неперервним розв'язком рівняння (3) на $[\sigma-r, \sigma+A]$, якщо $\sigma \in \mathbb{R}$ і $A > 0$ такі, що $x \in C([\sigma-r, \sigma+A]; \mathbb{R}^m)$, причому $(t, x_t) \in D$ і $x(t)$ задовольняє рівнянню (3) для $t \in [\sigma, \sigma+A]$.

Для даних $\sigma \in \mathbb{R}$, $\varphi \in C$ ми назвемо $x(\sigma, \varphi, f)$ розв'язком, з початковим значенням $\varphi \in C$ в момент σ або, простіше, розв'язком, що

починається в (σ, φ) , якщо існує $A > 0$, таке що $x(\sigma, \varphi, f)$ є розв'язком (3) на $[\sigma - r, \sigma + A]$ і $x_\sigma(\sigma, \varphi, f) = \varphi$.

Розглянемо рівняння (3) з початковими даними φ в момент σ . Нас цікавить питання існування та єдиності розв'язу задачі Коші

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x_t) \\ x_\sigma = \varphi \end{cases} \quad (4)$$

тобто розв'язок рівняння (3), який задовольняє початковій умові $x_\sigma = \varphi$ (див. означення 1).

Приклад 3. Функція, задана рівностями $x(t) = t + 1$ для $t \in [-1, 0]$ і $x(t) = \frac{t^2}{2} + 1$ для $t \in [0, 1]$, є розв'язком (перевірити підстановкою!) рівняння $\dot{x}(t) = x(t - 1)$ з початковим даним $\varphi(\theta) = \theta + 1$ в момент $\sigma = 0$ тобто $x_0(\theta) = \varphi(\theta) = \theta + 1$.

Справедлива наступна

Теорема 1. Нехай Ω -відкрита множина в $\mathbb{R} \times C$, $(\sigma, \varphi) \in \Omega$, функція $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ задовольняє наступним умовам

- 1) f -неперервна;
- 2) f -ліпшицева за другою змінною, тобто

$$\exists L > 0 : \forall (t, \psi^1), (t, \psi^2) \in \Omega \implies |f(t, \psi^1) - f(t, \psi^2)| \leq L \cdot |\psi^1 - \psi^2|_C.$$

Тоді існує $\alpha > 0$ і єдиний неперервний розв'язок (4) на $[\sigma - r, \sigma + \alpha]$ (розв'язок, що починається в (σ, φ)).

Доведення теореми 1. Наведене нижче доведення не складне та ґрунтується на принципі стискаючих відображень. Ми наводимо його для повноти викладання. Інше доведення можна знайти, наприклад, у п.2.2 книги [1], а також у [2, с.43].

Для простоти, проведемо доведення для $\sigma = 0$ (у разі довільного $\sigma \in \mathbb{R}$ міркування аналогічні). В цьому випадку ми припускаємо, що $(0, \varphi) \in \Omega$.

Інтегруючи (4), бачимо, що функція $x(t)$ є розв'язком (4) тоді і тільки тоді (доведіть це), коли вона задовольняє

$$x(t) = \begin{cases} \varphi(0) + \int_0^t f(\tau, x_\tau) d\tau, & t \in [0, \alpha], \\ \varphi(t), & t \in [-r, 0]. \end{cases} \quad (5)$$

Розглянемо допоміжну функцію

$$\bar{\varphi}(t) \equiv \begin{cases} \varphi(0), & t \in [0, \alpha], \\ \varphi(t), & t \in [-r, 0]. \end{cases} \quad (6)$$

Ми шукатимемо x у вигляді $x(t) = y(t) + \bar{\varphi}(t)$, де $y(t)$ має задовольняти (див. (5),(6))

$$y(t) = \begin{cases} \int_0^t f(\tau, y_\tau + \bar{\varphi}_\tau) d\tau, & t \in [0, \alpha], \\ 0, & t \in [-r, 0]. \end{cases} \quad (7)$$

На множині

$$\mathcal{A}(\alpha, \beta) = \{y \in C([-r, \alpha]; \mathbb{R}^m) : y_0 \equiv 0, \max\{|y(t)|, t \in [0, \alpha]\} \leq \beta\}$$

ми розглянемо оператор $T : \mathcal{A}(\alpha, \beta) \rightarrow C([-r, \alpha]; \mathbb{R}^m)$, який визначений формулою (порівняйте з (7))

$$T(y)(t) = \begin{cases} \int_0^t f(\tau, y_\tau + \bar{\varphi}_\tau) d\tau, & t \in [0, \alpha], \\ 0, & t \in [-r, 0]. \end{cases}$$

Зауваження 1. Завдяки умові, що Ω є відкрита множина (ми також припускаємо, що $(0, \varphi) \in \Omega$), при досить малих додатних α і β , пара $(\tau, y_\tau + \bar{\varphi}_\tau) \in \Omega$ при всіх $\tau \in [0, \alpha]$ і $y \in \mathcal{A}(\alpha, \beta)$.

Нагадаємо, що *нерухомою точкою* оператора (відображення)

$F : X \rightarrow X$ називається $x \in X$ така, що $F(x) = x$.

Нехай $(X; \rho)$ є метричним простором.

Оператор (відображення) $F : X \rightarrow X$ називається *стискаючим* (див. [9, Ч.ІІ, стор. 43]), якщо

$$\exists \delta \in (0, 1) : \forall y^1, y^2 \in X \Rightarrow \rho(F(y^1), F(y^2)) \leq \delta \rho(y^1, y^2).$$

Якщо X є нормованим простором, то стискання можна записати, як

$$\exists \delta \in (0, 1) : \forall y^1, y^2 \in X \Rightarrow \|F(y^1) - F(y^2)\| \leq \delta \|y^1 - y^2\|.$$

Нам знадобиться наступна

Теорема 2 (принцип стискаючих відображень) (див. [9, Ч.ІІ, стор. 43])

Будь-яке стискаюче відображення, визначене в повному метричному просторі, має єдину нерухому точку.

Наша мета – показати, що оператор T діє з $\mathcal{A}(\alpha, \beta)$ в себе і є стискаючим. Легко перевірити, що

$$\begin{aligned} |T(y^1)(t) - T(y^2)(t)| &\leq \int_0^t L \cdot |y_\tau^1 - y_\tau^2|_C d\tau \leq L \int_0^t \max_{s \in [-r, \alpha]} |y^1(s) - y^2(s)| d\tau \leq \\ &\leq \alpha L |y^1(s) - y^2(s)|_{C([-r, \alpha]; R^m)}. \end{aligned}$$

Таким чином,

$$|T(y^1) - T(y^2)|_{C([-r, \alpha]; R^m)} \leq \alpha L \cdot |y^1(s) - y^2(s)|_{C([-r, \alpha]; R^m)}. \quad (8)$$

Тепер оцінемо

$$\begin{aligned} |T(y)(t)| &\leq \int_0^t (|f(\tau, y_\tau + \bar{\varphi}_\tau) - f(\tau, \varphi)| + |f(\tau, \varphi)|) d\tau \leq \\ &\leq \int_0^t \left(L |y_\tau + \bar{\varphi}_\tau - \varphi|_C + \sup_{s \in [0, \alpha]} |f(s, \varphi)| \right) d\tau \leq \\ &\leq \alpha \left\{ L(\beta + 2|\varphi|_C) + \sup_{s \in [0, \alpha]} |f(s, \varphi)| \right\}. \end{aligned}$$

Зауваження 2. За умовою теореми, функція f неперервна, отже (за теоремою Вейерштрасса) $\sup_{s \in [0, \alpha]} |f(s, \varphi)| < +\infty$.

Виберемо досить маленькі (див. зауваження 1) $\beta \geq 0$ і $\alpha \geq 0$, аби виконувались оцінки

$$\alpha L < 1 \quad \text{та} \quad \alpha \left\{ L(\beta + 2|\varphi|_C) + \sup_{s \in [0, \alpha]} |f(s, \varphi)| \right\} \leq \beta.$$

Дві останні нерівності означають, що оператор T діє з $\mathcal{A}(\alpha, \beta)$ в себе і є стискаючим. Застосовуючи теорему 2 (принцип стискаючих відображень), ми отримуємо існування єдиної нерухомої точки оператора T , яку позначимо $\hat{y}(t)$. Функція $x(t) = \hat{y}(t) + \bar{\varphi}(t)$, $t \in [-r, \alpha]$ є шуканим розв'язком задачі Коші (4). Питання для самоперевірки: яка з двох оцінок (нерівностей) вище є більш жорсткою? Теорема 1 доведена повністю. ■

Вправа 5 *Перевірити, чи можна застосувати теорему 1 до наступних задач Коші. У випадку коли можна, з'ясувати на якому відрізку часу $[\sigma - r, \sigma + \alpha]$ існує розв'язок за теоремою.*

$$a) \begin{cases} \dot{x}(t) = x(t-1) \\ x_0 = \theta^2 \end{cases} ; \quad b) \begin{cases} \dot{x}(t) = 5x(t) + 7x(t-1) \\ x_{37} = \sin(\theta) \end{cases} ;$$

$$c) \begin{cases} \dot{x}(t) = \int_{-r}^0 x(t+\theta)d\theta \\ x_7 = 1 + \theta. \end{cases}$$

Формулювання теореми 1 є прямим узагальненням стандартної теореми існування та єдиності розв'язків для звичайних диференціальних рівнянь. Зауважимо, що при $r = 0$ простір $C = C([-r, 0]; \mathbb{R}^m)$ вироджується в \mathbb{R}^m і (4) стає добре знайомою задачею Коші для звичайних диференціальних рівнянь.

4 Метод кроків

В курсі звичайних диференціальних рівнянь вивчається ціла низка методів їх вирішення. На жаль, багато з цих методів непридатні до більш складних рівнянь із загаюванням. Однак, для певного класу рівнянь із загаюванням існує абсолютно елементарний метод (який в свою чергу неможливо застосувати до звичайних диференціальних рівнянь!), що дозволяє стверджувати, що в деяких випадках вирішити рівняння із загаюванням легше, ніж без нього. Цей метод називається *методом кроків*. Продемонструємо цей метод на прикладі рівняння (1).

Приклад 4. Знайдемо розв'язок рівняння $\dot{x}(t) = x(t-1)$ з початковою функцією $x(\theta) = \varphi(\theta) \equiv 5, \theta \in [-1, 0]$ (у формі (4) маємо $x_0 \equiv 5$).

1 крок. Розглянемо $t \in [0, 1]$. Оскільки за цих значень t аргумент $t-1$ у правій частині рівняння знаходиться на початковому проміжку $[-1, 0]$, безпосередньо з рівняння отримуємо $\dot{x}(t) = 5$. Інтегруючи (1) по t від 0 до $t_0 \in (0, 1]$, отримуємо $x(t_0) - x(0) = \int_0^{t_0} x(\tau-1)d\tau = \int_0^{t_0} 5d\tau = 5t_0$. Враховуючи, що $x(0) = 5$, приходимо до формули розв'язку на першому кроці (перевірити підстановкою!):

$$x(t) = 5 + 5t, \quad t \in [0, 1]. \quad (9)$$

2 крок. Розглянемо $t \in [1, 2]$. Аналогічно першому кроку, для цих значень t , аргумент $t - 1 \in [0, 1]$, а ми вже знайшли розв'язок (на першому кроці) для цих значень аргументу, таким чином права частина (1) є відомою функцією. Інтегруючи по t від 1 до $t_0 \in (1, 2]$, отримуємо $x(t_0) - x(1) = \int_1^{t_0} x(\tau - 1)d\tau = \int_0^{t_0-1} (5 + 5(\tau))d\tau = \frac{5}{2}\tau^2 \Big|_{\tau=0}^{\tau=t_0-1} = \frac{5}{2}(t_0^2 - 1)$. Враховуючи (див. (9)), що $x(1) = 10$, приходимо до формули розв'язку на другому кроці (перевірити підстановкою!):

$$x(t) = \frac{5}{2}t^2 + \frac{15}{2}, \quad t \in [1, 2]. \quad (10)$$

Як легко бачити, маючи формулу (10), можна знайти розв'язок для $t \in [2, 3]$ (третій крок) і т.д.

Загалом, метод кроків для рівняння (1) можна сформулювати як знаходження розв'язку для значень аргументу $t \in [kr, (k+1)r]$, знаючи розв'язок для $t \in [(k-1)r, kr]$ і застосовуючи формулу $x(t) = x(kr) + \int_{kr}^t x(\tau - 1)d\tau$.

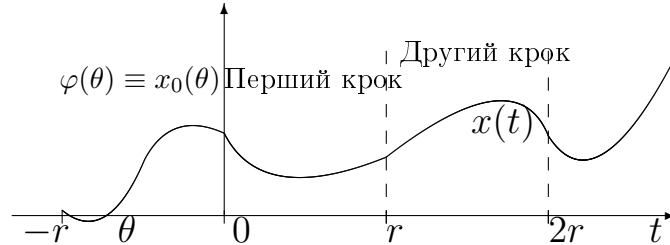


Рис. 2. Метод кроків.

Вправа 6 Побудувати методом кроків розв'язок рівняння (1) з початковим даним $x(\theta) \equiv 1, \theta \in [-1, 0]$. Порівняти отриманий розв'язок з розв'язком, що задається (9),(10). Чи можна, використовуючи (9),(10), без додаткових обчислень написати формули розв'язку для $t \in [0, 1]$ і $t \in [1, 2]$?

Вправа 7 Переконатися (або спростувати), що розв'язок рівняння (1) з початковими даними $\varphi(t) \equiv 1$ при $t \in [0, 1]$ представляється формулою $x(t) = \sum_{i=1}^n \frac{(t-i)^i}{i!}$ для $t \in [n, n+1], n = 0, 1, 2, \dots$

Вправа 8 Побудувати методом кроків розв'язки (для $t \in [0, 2]$) наступних прикладів та намалювати їх графіки.

$$\begin{aligned}
 a) \begin{cases} \dot{x}(t) = 7x(t-1) \\ x(\theta) \equiv 1, \theta \in [-1, 0]; \end{cases} & \quad b) \begin{cases} \dot{x}(t) = 5 + x(t-1) \\ x(\theta) \equiv 2, \theta \in [-1, 0]; \end{cases} \\
 c) \begin{cases} \dot{x}(t) = \frac{1}{2}x(t-1) \\ x(\theta) = \theta, \theta \in [-1, 0]; \end{cases} & \quad d) \begin{cases} \dot{x}(t) = \frac{1}{2}x(t-1) + 2t \\ x(\theta) \equiv 1 - \theta, \theta \in [-1, 0]; \end{cases} \\
 e) \begin{cases} \dot{x}(t) = x^2(t-1) \\ x(\theta) = 2\theta, \theta \in [-1, 0]; \end{cases} & \quad f) \begin{cases} \dot{x}(t) = \sin(x(t-1)) \\ x(\theta) \equiv \frac{\pi}{2}, \theta \in [-1, 0]. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Цілковито аналогічно, методом кроків можна знаходити розв'язки рівнянь з декількома загаюваннями.

Вправа 9 Побудувати методом кроків розв'язки (для $t \in [0, 1]$) наступних завдань та намалювати їх графіки.

$$a) \begin{cases} \dot{x}(t) = x(t-1) + 3x(t - \frac{1}{2}), \\ x(\theta) = -\theta, \theta \in [-1, 0]; \end{cases} \quad b) \begin{cases} \dot{x}(t) = x(t-1) \cdot x(t - \frac{1}{2}), \\ x(\theta) \equiv -\frac{1}{3}, \theta \in [-1, 0]. \end{cases} \quad (11)$$

У попередніх прикладах загаювання входило до рівнянь як доданки, що оцінюють розв'язок у певні *моменти* часу в минулому, такі загаювання називаються *дискретними* або *зосередженими*. Однак, метод кроків застосовується і до деяких класів рівнянь із *розподіленим* загаюванням. Розглянемо приклад такого рівняння і зробимо перший крок у його розв'язку.

Приклад 5. Нас цікавить наступне рівняння

$$\dot{x}(t) = \int_{-1}^{-\frac{1}{2}} x(t + \theta) d\theta. \quad (12)$$

Як бачимо, в цьому рівнянні похідна розв'язку в момент часу t залежить від поведінки розв'язку на інтервалі часу $(t - 1, t - \frac{1}{2})$. Розглянемо, наприклад, початкові дані $x(\theta) = \frac{\theta}{2}$, $\theta \in [-1, 0]$.

1 крок. Не складно здогадатися, що крокувати зручніше не кроками довжини 1 (величина загаювання у цьому рівнянні), а з кроком $\frac{1}{2}$ (чому?). Розглянемо $t \in [0, \frac{1}{2}]$. Інтегруючи рівняння (12), отримуємо

$$\begin{aligned}
x(t) &= x(0) + \int_0^t \left\{ \int_{-1}^{-\frac{1}{2}} x(\tau + \theta) d\theta \right\} d\tau = \int_0^t \left\{ \int_{-1}^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{2}(\tau + \theta) d\theta \right\} d\tau = \\
&= \frac{1}{2} \int_0^t \left\{ \frac{1}{2}\tau - \frac{3}{8} \right\} d\tau = \frac{1}{16}(2t^2 - 3t), \quad t \in [0, \frac{1}{2}]. \quad (13)
\end{aligned}$$

Розглядаючи рівняння (12), легко бачити, що якщо верхню межу інтегрування замінити на будь-яке $-\epsilon \in (-1, 0)$, тобто розглянути рівняння $\dot{x}(t) = \int_{-1}^{-\epsilon} x(t + \theta) d\theta$, то метод кроків так само можна застосувати і кроки зручно обирати довжини ϵ . Зовсім інша ситуація з рівнянням $\dot{x}(t) = \int_{-1}^0 x(t + \theta) d\theta$ - тут метод кроків застосувати неможливо!

Останнє зауваження може призвести до помилкового враження, що для застосування методу кроків, похідна $\dot{x}(t)$ не повинна залежати від значень розв'язку на деякій множині $(t - \epsilon, t]$. Це не так! Наприклад, застосуємо метод до рівнянь виду

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bx(t - r) + f(t), \quad (14)$$

де A, B, r -постійні, $r > 0$, f -задана (наприклад, неперервна) функція. Такі рівняння називаються лінійними диференційно-різницевиими рівняннями загаюваного типу. Маючи початкові дані $x(t) = \varphi(t)$, $t \in [-r, 0]$, бачимо, що на першому кроці $t \in [0, r]$ для всіх $s \in [0, t]$ ми маємо $x(s-r) = \varphi(s-r)$, так як $s - r \in [-r, 0]$, тобто функція $F(s) \equiv Bx(s - r) + f(s)$ відома. Це дозволяє використовувати формулу варіації сталих для розв'язку лінійного неоднорідного рівняння $\dot{x}(t) = Ax(t) + F(t)$ і отримати

$$x(t) = e^{At}\varphi(0) + \int_0^t e^{A(t-s)}\{Bx(s - r) + f(s)\}ds, \quad t \geq 0. \quad (15)$$

Таким чином, ми можемо обчислювати розв'язок з кроком r .

Зауваження 3. Матричне рівняння (15) (тобто. A, B -відомі матриці, f -вектор-функція) розв'язується тим самим методом.

Наведемо приклад системи рівнянь із загаюванням та початковими даними.

Приклад 6. Нехай задана наступна система та початкові дані

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_1(t - 1) + 2x_2(t - 1), \\ \dot{x}_2(t) = 3x_1(t - 1) + 4x_2(t - 1), \end{cases} ; \quad \begin{cases} x_1(\theta) = -\theta, \theta \in [-1, 0]; \\ x_2(\theta) \equiv -\frac{1}{3}, \theta \in [-1, 0]. \end{cases} \quad (16)$$

Перший крок для цієї системи: $t \in [0, 1]$.

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = 1 + 2(t - 1), \\ \dot{x}_2(t) = 3 + 4(t - 1), \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1(t) = 1 + \int_0^t (2\tau - 1) d\tau = 1 + t^2 - t, \\ x_2(t) = \int_0^t (2\tau - 1) d\tau = 1 + t^2 - t. \end{cases} \quad (17)$$

Вправа 10 Знайти розв'язки наступних систем для $t \in [0, 2]$.

$$a) \begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_1(t - 1) + 15x_2(t - 1), \\ \dot{x}_2(t) = 7x_1(t - 1) + 11x_2(t - 1), \end{cases} ; \quad \begin{cases} x_1(\theta) = \theta + 2, \theta \in [-1, 0]; \\ x_2(\theta) = \theta^2, \theta \in [-1, 0]. \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_1(t - 1) \cdot x_2(t - 1), \\ \dot{x}_2(t) = x_2(t - 1) \cdot x_1(t), \end{cases} ; \quad \begin{cases} x_1(\theta) \equiv 3, \theta \in [-1, 0]; \\ x_2(\theta) = 7\theta - 1, \theta \in [-1, 0]. \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2^3(t - 1) + 5t, \\ \dot{x}_2(t) = 5x_1(t) + x_2(t - \frac{2}{3}) + 1, \end{cases} ; \quad \begin{cases} x_1(\theta) = 1 - \theta, \theta \in [-1, 0]; \\ x_2(\theta) \equiv 4, \theta \in [-1, 0]. \end{cases}$$

5 Оператор зсуву

Розглянемо рівняння (3) і нагадаємо, що ми позначаємо $x(\sigma, \varphi, f)(t)$ -розв'язок (3), що задовольняє $x_\sigma = \varphi$, $\sigma \in \mathbb{R}$, $\varphi \in C$ (див. (4)).

Означення 2. Відображення (оператор) зсуву $T(t, \sigma) : C \rightarrow C$ визначимо формулою

$$T(t, \sigma)\varphi \equiv x_t(\sigma, \varphi, f), \quad t \geq \sigma. \quad (18)$$

Якщо рівняння автономне, тобто $\dot{x}(t) = f(x_t)$, то грає роль не початковий момент часу σ і момент t , а їх різниця $t - \sigma \geq 0$. У цьому випадку, для зручності, будемо обирати $\sigma = 0$ і опускати цей параметр під час запису, тобто. $T(t, 0) = T(t)$, $t \geq 0$.

Приклад 7. Для ілюстрації означення розглянемо рівняння $\dot{x}(t) = 8x(t - 2)$ і обчислимо кілька зсувів, наприклад, функції $\tilde{\varphi}(\theta) = \theta + 5$, $\theta \in [-2, 0]$ вздовж розв'язків цього рівняння. Використовуючи метод кроків, отримуємо, що розв'язок $x(t)$ для $t \in [-2, 2]$ задається формулою (перевірити!):

$$x(t) = \begin{cases} t + 5, & t \in [-2, 0]; \\ 4t^2 + 24t + 5, & t \in (0, 2]. \end{cases} \quad (19)$$

З (19) отримуємо

$$T(2)\tilde{\varphi} = (T(2)\tilde{\varphi})(\theta) = x_2(\theta) = x(2+\theta) = 4(2+\theta)^2 + 24(2+\theta) + 5, \quad \theta \in [-2, 0].$$

Для запису $T(1)\tilde{\varphi}$ ми використовуємо (за означенням) формулу, яка задає $x(1+\theta)$, $\theta \in [-2, 0]$ тобто позначаючи $t = 1 + \theta$, ми шукаємо вираз $x(t)$ для $t \in [-1, 1]$. Як бачимо з (19), розв'язок $x(t)$ задається різними формулами для $t \in [-1, 0]$ і $t \in (0, 1]$. Таким чином, отримуємо

$$T(1)\tilde{\varphi} = (T(1)\tilde{\varphi})(\theta) = \begin{cases} \theta + 6, & \theta \in [-2, -1]; \\ 4(1 + \theta)^2 + 24(1 + \theta) + 5, & \theta \in (-1, 0]. \end{cases}$$

Аналогічно, з (19), ми можемо отримати вирази для зсувів

$$T\left(\frac{3}{2}\right)\tilde{\varphi} = \left(T\left(\frac{3}{2}\right)\tilde{\varphi}\right)(\theta) = \begin{cases} \theta + \frac{13}{2}, & \theta \in [-2, -\frac{1}{2}]; \\ 4(\frac{3}{2} + \theta)^2 + 24(\frac{3}{2} + \theta) + 5, & \theta \in (-\frac{1}{2}, 0]. \end{cases}$$

$$T\left(\frac{7}{9}\right)\tilde{\varphi} = \left(T\left(\frac{7}{9}\right)\tilde{\varphi}\right)(\theta) = \begin{cases} \theta + \frac{52}{9}, & \theta \in [-2, -\frac{11}{9}]; \\ 4(\frac{7}{9} + \theta)^2 + 24(\frac{7}{9} + \theta) + 5, & \theta \in (-\frac{11}{9}, 0]. \end{cases}$$

Вправа 11 *Перевірити такі властивості:*

- A) $T(0) = I$ (тотожний оператор);
- B) $T(t + \tau) = T(t)T(\tau)$, $t, \tau \geq 0$.

У правій частині останньої рівності стоїть композиція двох операторів зсуву в просторі C .

Якщо рівняння (3) є лінійним і автономним, тобто

$$\dot{x}(t) = L(x_t), \tag{20}$$

де $L : C \rightarrow \mathbb{R}^m$ неперервна лінійна функція, то справедлива наступна

Теорема 3. *Оператор $T(t)$, $t \geq 0$ має наступні властивості:*

1. Сімейство $\{T(t) : t \geq 0\}$ є напівгрупа лінійних операторів (тобто виконані властивості A), B) (див. вище));
2. Оператор $T(t)$ є обмежений для кожного $t \geq 0$ тобто для кожного $t \geq 0$ існує $k = k(t) \geq 0$, таке, що для всіх $\varphi \in C$ маємо $|T(t)\varphi|_C \leq k \cdot |\varphi|_C$.

Оператор $T(t)$ є сильно неперервний на $[0, +\infty)$, тобто

$$\lim_{\tau \rightarrow t} |T(t)\varphi - T(\tau)\varphi|_C = 0 \quad \text{для всіх } t \geq 0, \varphi \in C. \tag{21}$$

3. Оператор $T(t)$ є цілком неперервний (компактний) для $t \geq r$, тобто

(a) $T(t)$ є неперервний;

(b) $T(t)$ відображає будь-яку обмежену множину в передкомпакт (у просторі C).

Докладніше про компактні оператори див. [9, Ч.IV, стор. 112]. Наведений нижче (див. також, наприклад, п.7.1 книги [1]) для повноти викладу доказ цих властивостей не є складним і ми рекомендуємо спочатку спробувати провести його самостійно.

Доведення теореми 3. Лінійність T впливає безпосередньо із лінійності правої частини рівняння (функції L) та єдиності розв'язку. Єдиність також безпосередньо дає (перевірити!) напівгрупові властивості А), В).

Доведемо пункт 2. Оскільки L неперервна і лінійна, існує стала ℓ , така що $|L(\varphi)| \leq \ell \cdot |\varphi|$ для всіх $\varphi \in C$ (пригадайте відповідну загальну теорему). За означенням $T(t)$, ми маємо для будь-якого фіксованого $t \geq 0$ при $\theta \in [-r, 0]$

$$T(t)\varphi(\theta) = \begin{cases} \varphi(t + \theta), & t + \theta \leq 0; \\ \varphi(0) + \int_0^{t+\theta} L(T(s)\varphi) ds, & t + \theta > 0. \end{cases} \quad (22)$$

звідси випливає

$$|T(t)\varphi|_C \leq |\varphi|_C + \ell \cdot \int_0^t |T(s)\varphi|_C ds. \quad (23)$$

Позначимо для стислості $z(t) \equiv |T(t)\varphi|_C$. Тоді $z(t) \leq |\varphi|_C + \ell \cdot \int_0^t z(s) ds$, що еквівалентно $z(t) - \ell \cdot \int_0^t z(s) ds \leq |\varphi|_C$. Домножимо останню нерівність на $e^{-\ell t} \geq 0$ і помітимо, що $\frac{d}{dt} \left(e^{-\ell t} \cdot \int_0^t z(s) ds \right) = -\ell e^{-\ell t} \cdot \int_0^t z(s) ds + z(t)e^{-\ell t}$. Таким чином, враховуючи, що $z(0) = |T(0)\varphi|_C = |\varphi|_C$, маємо

$$\frac{d}{dt} \left(e^{-\ell t} \cdot \int_0^t z(s) ds \right) \leq e^{-\ell t} |\varphi|_C.$$

Проінтегруємо останню нерівність по t від 0 до t_0 . Маємо

$$e^{-\ell t_0} \cdot \int_0^{t_0} z(s) ds \leq -\ell^{-1} \cdot (e^{-\ell t_0} - 1) |\varphi|_C = \ell^{-1} \cdot (1 - e^{-\ell t_0}) |\varphi|_C.$$

Множимо на $e^{\ell t_0}$ і отримуємо $\int_0^{t_0} z(s) ds \leq \ell^{-1} \cdot (e^{\ell t_0} - 1) |\varphi|_C$. Підставляючи цю оцінку (при $t_0 = t$) в (23), отримуємо

$$|T(t)\varphi|_C \leq e^{\ell t} \cdot |\varphi|_C. \quad (24)$$

Це і означає, що T обмежений тобто в наших позначеннях (див. формулювання теореми) $k(t) = e^{\ell t}$. Для доведення властивості сильної неперервності (21) покладемо, для визначеності $\tau \geq t$. Користуючись властивістю B), маємо $T(t)\varphi - T(\tau)\varphi = T(t)\varphi - T(\tau - t)T(t)\varphi = (I - T(\tau - t))T(t)\varphi$. Тому достатньо показати (ми покладемо $s = \tau - t \geq 0$), що $\lim_{s \rightarrow 0+} |(I - T(s))\varphi|_C = \lim_{s \rightarrow 0+} |\varphi - T(s)\varphi|_C = 0$. Це безпосередньо впливає (перевірити!) з формули (22).

Доведемо пункт 3. Властивість (a), тобто T -неперервний, впливає з доведеної (у пункті 1) лінійності T та доведеної (у пункті 2) обмеженості T (див. [9, Ч. III, с. 77, теорема 2]). Для доведення властивості (b) достатньо довести, що образ будь-якої кулі у просторі C буде передкомпактною множиною. Насамперед, нагадаємо які множини у просторі C є передкомпактними. Нам знадобляться наступні

Означення 3 [9, Ч. II, с. 54]. *Сімейство Φ функцій φ , визначених на $[a, b]$, називається рівномірно обмеженим, якщо*
 $\exists K > 0 : \forall x \in [a, b], \forall \varphi \in \Phi \Rightarrow |\varphi(x)| < K$.

Означення 4 [9, Ч. II, с. 54]. *Сімейство Φ функцій φ , визначених на $[a, b]$, називається рівномірно неперервним, якщо*
 $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x^1, x^2 \in [a, b] : |x^1 - x^2| < \delta, \forall \varphi \in \Phi \Rightarrow |\varphi(x^1) - \varphi(x^2)| < \varepsilon$.

Теорема 4 (Асколі–Арцела) [9, Ч. II, с. 54], [20, Ч. III, с. 85].

Для того аби сімейство Φ неперервних функцій, визначених на $[a, b]$, було передкомпактним в просторі $C[a, b]$, необхідно і достатньо, аби це сімейство було рівномірно обмеженим та рівномірно неперервним.

Якщо $S \equiv \{\varphi \in C : |\varphi| \leq R\}$ -куля радіуса R в просторі C , то для будь-якого $\psi \in T(t)S, t \geq r$ з оцінки (24) впливає, що $|\psi| \leq e^{\ell t} R$ (це вже дає рівномірну обмеженість сімейства функцій $T(t)S$), та з рівняння (20) впливає, що $|\dot{\psi}| \leq \ell e^{\ell t} R$. Оскільки ці функції ψ рівномірно обмежені з єдиною сталою Ліпшица, множина $T(t)S, t \geq r$ є рівномірно неперервною (чому?). Застосовуючи теорему Арцела, отримуємо, що множина $T(t)S, t \geq r$ предкомпактна в просторі C . Питання контролю: де використовувалась умова $t \geq r$? Чому твердження взагалі кажучи

невірно для $t \in [0, r)$? Теорема 3 доведена. ■

Продовжимо ілюстрацію теореми на прикладах.

Приклад 8. Розглянемо рівняння

$$\dot{x}(t) = 2x(t) + x(t - 1) \quad (25)$$

і обчислимо, наприклад, чому дорівнюють зсуви функції $\varphi^1(\theta) \equiv 1$ вздовж розв'язку на величини $\frac{1}{4}$ і $\frac{3}{4}$, тобто обчислимо $T(\frac{1}{4})\varphi^1$ і $T(\frac{3}{4})\varphi^1$. Згідно з означенням (див. (18)), нам необхідно знайти розв'язок (25) з початковою функцією $\varphi^1(\theta)$ (для обчислення $T(\frac{1}{4})\varphi^1$ достатньо знайти $x(0, \varphi^1)(t)$ для $t \in [0, \frac{1}{4}]$, а для $T(\frac{3}{4})\varphi^1$ достатньо для $t \in [0, \frac{3}{4}]$.) Скористаємося методом кроків та формулою варіації сталих (15).

1 крок. $t \in [0, 1]$. Маємо $x(t) = e^{2t}\varphi^1(0) + \int_0^t e^{2(t-\tau)}x(\tau - 1)d\tau = e^{2t} \cdot 1 + \int_0^t e^{2(t-\tau)}d\tau = \frac{3}{2}e^{2t} - \frac{1}{2}$. За означенням, $T(\frac{1}{4})\varphi^1 = x(\theta + \frac{1}{4})$, $\theta \in [-1, 0]$, де $x(\cdot)$ -розв'язок (25) з початковою функцією $\varphi^1(\theta)$. Для тих значень θ , для яких $\theta + \frac{1}{4} \in [-1, 0]$, ми маємо $x(\theta + \frac{1}{4}) = \varphi^1(\theta + \frac{1}{4}) = 1$, для решти θ , розв'язок задається формулою, що знайдена на першому кроці, тобто $x(\theta + \frac{1}{4}) = \frac{3}{2}e^{2(\theta+\frac{1}{4})} - \frac{1}{2}$. Отже маємо

$$T\left(\frac{1}{4}\right)\varphi^1 = \begin{cases} \frac{3}{2}e^{2(\theta+\frac{1}{4})} - \frac{1}{2}, & \theta \in [-\frac{1}{4}, 0]; \\ 1, & \theta \in [-1, -\frac{1}{4}]. \end{cases} \quad (26)$$

Аналогічно, скориставшись першим кроком, отримуємо

$$T\left(\frac{3}{4}\right)\varphi^1 = \begin{cases} \frac{3}{2}e^{2(\theta+\frac{3}{4})} - \frac{1}{2}, & \theta \in [-\frac{3}{4}, 0]; \\ 1, & \theta \in [-1, -\frac{3}{4}]. \end{cases} \quad (27)$$

Тепер давайте проілюструємо на цьому прикладі напівгрупові властивості А), В). Властивість $T(0) = I$ означає, що $T(0)\varphi^1 = \varphi^1$. Це очевидно, оскільки $T(0)\varphi^1 = x_0 = x(\theta) = \varphi^1(\theta)$ для $\theta \in [-1, 0]$. Переконаємося, наприклад, що $T(\frac{3}{4})\varphi^1 = T(\frac{1}{2})T(\frac{1}{4})\varphi^1$. Значення $T(\frac{3}{4})\varphi^1$ і $T(\frac{1}{4})\varphi^1$ вже нами знайдені (див. (26), (27)). Позначимо $\varphi^2 = T(\frac{1}{4})\varphi^1$ -функція, що задається формулою (26), і знайдемо розв'язок рівняння (25) з початковою функцією $\varphi^2(\theta)$. За цим розв'язком ми зможемо обчислити $T(\frac{1}{2})\varphi^2$ і порівняти з $T(\frac{3}{4})\varphi^1$. Метод кроків дає нам формулу (перевірити!)

$$x(t) = e^{2t}\varphi^2(0) + \int_0^t e^{2(t-\tau)}x(\tau - 1)d\tau = e^{2t} \left(\frac{3}{2}e^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} \right) + e^{2t} \int_0^t e^{-2\tau}d\tau =$$

$$= \frac{3}{2}e^{2t+\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}, t \in [0, 1].$$

Зауваження 4. В силу збігу початкових функцій $\varphi^1(\theta) = \varphi^2(\theta)$ для всіх $\theta \in [-1, -\frac{1}{4}]$, інтегральні доданки в даному випадку і при обчисленні $T(\frac{3}{4})\varphi^1, T(\frac{1}{4})\varphi^1$ збіглися, але формули розв'язків різні оскільки $\varphi^1(0) \neq \varphi^2(0)$.

Остання формула та (26) показують, що

$$T\left(\frac{1}{2}\right)\varphi^2 = \begin{cases} \frac{3}{2}e^{2(\theta+\frac{1}{2})+\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}, & \theta \in [-\frac{1}{2}, 0]; \\ \frac{3}{2}e^{2(\theta+\frac{1}{2}+\frac{1}{4})} - \frac{1}{2}, & \theta \in [-\frac{3}{4}, -\frac{1}{2}]; \\ 1, & \theta \in [-1, -\frac{3}{4}]; \end{cases} = \begin{cases} \frac{3}{2}e^{2(\theta+\frac{3}{4})} - \frac{1}{2}, & \theta \in [-\frac{3}{4}, 0]; \\ 1, & \theta \in [-1, -\frac{3}{4}]. \end{cases} \quad (28)$$

Зауваження 5. Формули, що задають $T(\frac{1}{2})\varphi^2$ для $\theta \in [-\frac{1}{2}, 0]$ і $\theta \in [-\frac{3}{4}, -\frac{1}{2}]$, збіглися, тому ці два випадки об'єднані у випадок $\theta \in [-\frac{3}{4}, 0]$.

Як бачимо, функції, отримані в (28) і (27), збіглися, тобто дійсно $T(\frac{3}{4})\varphi^1 = T(\frac{1}{2})T(\frac{1}{4})\varphi^1$, що ми і хотіли показати.

Вправа 12 Обчислити зсуви вздовж розв'язків рівняння $\dot{x}(t) = 5 + x(t - 1) : T(\frac{1}{3})\varphi^3, T(\frac{2}{3})\varphi^3, T(1)\varphi^3, T(\frac{4}{3})\varphi^3, T(2)\varphi^3$, где $\varphi^3(\theta) \equiv 2, \theta \in [-1, 0]$.

Вправа 13 Обчислити зсуви вздовж розв'язків заданих рівнянь:

a) $\dot{x}(t) = x(t - \frac{1}{2}) + 2x(t - 1), \varphi^4(\theta) = -\theta, \theta \in [-1, 0]; T(\frac{1}{2})\varphi^4, T(1)\varphi^4, T(\frac{3}{2})\varphi^4$.

Перевірити рівності: $T(1)\varphi^4 = T(\frac{1}{2})T(\frac{1}{2})\varphi^4, T(\frac{3}{2})\varphi^4 = T(\frac{1}{2})T(1)\varphi^4, T(\frac{3}{2})\varphi^4 = T(1)T(\frac{1}{2})\varphi^4$.

b) $\dot{x}(t) = x(t) - 7x^2(t - \frac{1}{2}), \varphi^1(\theta) \equiv 1, \theta \in [-\frac{1}{2}, 0]; T(\frac{1}{4})\varphi^1, T(\frac{1}{2})\varphi^1, T(\frac{3}{4})\varphi^1, T(1)\varphi^1$.

Перевірити рівності: $T(\frac{3}{4})\varphi^1 = T(\frac{1}{4})T(\frac{1}{2})\varphi^1, T(\frac{3}{4})\varphi^1 = T(\frac{1}{2})T(\frac{1}{4})\varphi^1, T(1)\varphi^1 = T(\frac{1}{2})T(\frac{1}{2})\varphi^1$.

c) $\dot{x}(t) = 5 \int_{-\frac{3}{2}}^{\frac{3}{2}} x(t+\theta)d\theta, \varphi^5(\theta) = \theta, \theta \in [-2, 0]; T(\frac{1}{3})\varphi^5, T(\frac{2}{3})\varphi^5, T(1)\varphi^5, T(2)\varphi^5$.

Перевірити рівності: $T(1)\varphi^5 = T(\frac{1}{3})T(\frac{2}{3})\varphi^5, T(1)\varphi^5 = T(\frac{2}{3})T(\frac{1}{3})\varphi^5, T(2)\varphi^5 = T(1)T(1)\varphi^5$.

Означення 5. Динамічною системою називається пара (X, S_t) , де X -повний метричний простір (див. [9, 10]), $S_t : X \rightarrow X$ неперервне відображення (параметр $t \in \mathbb{R}_+$), яке задовольняє

A) $S_0 = I$ (тотожний оператор);

B) $S_{t+\tau} = S_t S_\tau, \quad \forall t, \tau \geq 0$;

C) оператор S_t є сильно неперервний на $[0, +\infty)$, тобто

$$\lim_{\tau \rightarrow t} \|S_t x - S_\tau x\|_X = 0 \quad \text{для всіх } t \geq 0, x \in X.$$

Простір X називається *фазовим простором*, а відображення S_t – *еволюційним оператором*.

Зауваження 6. Ми навели означення з параметром $t \in \mathbb{R}_+$, хоча можна визначити динамічну систему, розглядаючи параметр $t \in \mathbb{Z}_+ \equiv \{0, 1, 2, \dots\}$.

Як легко помітити (див. теорему 3), що пара $(C, T(t))$ є динамічною системою, де $T(t)$ -оператор зсуву вздовж розв'язків лінійної автономної системи (20).

6 Неперервна залежність від початкової функції.

Пригадаємо задачу Коші (4): $\dot{x}(t) = f(t, x_t), t \geq \sigma; \quad x_\sigma = \varphi$ та доведену теорему 1 (існування та єдиності неперервних розв'язків).

Позначимо $x(t; \varphi)$ – розв'язок задачі Коші (4).

Лема (неперервна залежність). *Нехай виконані умови Теорему 1. Тоді єдиний неперервний розв'язок задачі Коші (4) неперервно залежить від початкової функції $\varphi \in C$. Справедлива оцінка*

$$\max_{t \in [\sigma-r, \sigma+\alpha]} |x(t; \varphi) - x(t; \psi)| \leq \|\varphi - \psi\|_C \cdot e^{L\alpha}. \quad (29)$$

Тут $[\sigma - r, \sigma + \alpha]$ – спільний відрізок існування розв'язків $x(t; \varphi)$ та $x(t; \psi)$.

Доведення лема. Переходячи до інтегрального рівняння, маємо для $t \in [\sigma, \sigma + \alpha]$

$$\begin{aligned} |x(t; \varphi) - x(t; \psi)| &\leq |\varphi(0) - \psi(0)| + \left| \int_\sigma^t [f(s, x_s(\varphi)) - f(s, x_s(\psi))] ds \right| \\ &\leq [\text{ліпшицевість } f] \leq \|\varphi - \psi\|_C + L \int_\sigma^t \|x_s(\varphi) - x_s(\psi)\|_C ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \|\varphi - \psi\|_C + L \int_{\sigma}^t \max_{\tau \in [\sigma-r, s]} |x(\tau; \varphi) - x(\tau; \psi)| ds \\
&\leq \left[u(s) \equiv \max_{\tau \in [\sigma-r, s]} |x(\tau; \varphi) - x(\tau; \psi)| \right] \Rightarrow \\
&u(t) \leq \|\varphi - \psi\|_C + L \int_{\sigma}^t u(s) ds.
\end{aligned}$$

Лема Гронуола (див. нижче) дає $u(t) \leq \|\varphi - \psi\|_C \cdot e^{L(t-\sigma)}$. ■

Зауваження 7. Технічна оцінка ('лема Гронуола') в доведенні леми.

Розглянемо оцінку

$$u(t) \leq \|\varphi - \psi\|_C + L \int_{\sigma}^t u(s) ds \quad (30)$$

Позначаємо $g(t) \equiv \int_{\sigma}^t u(s) ds$ та маємо: $\dot{g}(t) \leq \|\varphi - \psi\|_C + L \cdot g(t)$;
[добуток з e^{-Lt}] \Rightarrow

$$e^{-Lt} \dot{g}(t) - e^{-Lt} L \cdot g(t) = \frac{d}{dt} (e^{-Lt} \cdot g(t)) \leq \|\varphi - \psi\|_C \cdot e^{-Lt}$$

[інтегруємо \int_{σ}^t] \Rightarrow

$$e^{-Lt} g(t) - e^{-L\sigma} g(\sigma) \leq -L^{-1} (e^{-Lt} - e^{-L\sigma}) \|\varphi - \psi\|_C$$

\Rightarrow [добуток з e^{Lt}] \Rightarrow

[повертаємось до $u(t)$] \Rightarrow

$$\begin{aligned}
u(t) &\leq \|\varphi - \psi\|_C + L \left[-L^{-1} \left(1 - e^{L(t-\sigma)} \right) \|\varphi - \psi\|_C \right] \\
&\leq \|\varphi - \psi\|_C - \left(1 - e^{L(t-\sigma)} \right) \|\varphi - \psi\|_C = \|\varphi - \psi\|_C \cdot e^{L(t-\sigma)}.
\end{aligned}$$

Пригадуючи, що $u(s) \equiv \max_{\tau \in [\sigma-r, s]} |x(\tau; \varphi) - x(\tau; \psi)|$, отримуємо оцінку

$$\max_{\tau \in [\sigma-r, t]} |x(\tau; \varphi) - x(\tau; \psi)| \leq \|\varphi - \psi\|_C \cdot e^{L(t-\sigma)}, \quad t \in [\sigma, \sigma + \alpha]. \quad (31)$$

Як наслідок, отримуємо (29) (для $t = \sigma + \alpha$).

Зауваження 8. Оцінка (31) дає

$$\|x_t(\varphi) - x_t(\psi)\|_C \leq \|\varphi - \psi\|_C \cdot e^{L(t-\sigma)}, \quad t \in [\sigma, \sigma + \alpha]. \quad (32)$$

Для повноти матеріалу, нагадаємо більш загальне формулювання
Лема Гронуола. *Нехай $u, \alpha \in C([a, b] : \mathbb{R})$, $\beta \geq 0$, $\beta \in R[a, b]$ та*

$$u(t) \leq \alpha(t) + \int_a^t \beta(s)u(s) ds, \quad a \leq t \leq b. \quad (33)$$

Тоді

$$u(t) \leq \alpha(t) + \int_a^t \beta(s)\alpha(s) \left\{ \exp \left(\int_s^t \beta(\tau) d\tau \right) \right\} ds, \quad a \leq t \leq b. \quad (34)$$

Якщо додатково, α є неспадною функцією, то

$$u(t) \leq \alpha(t) \exp \left(\int_a^t \beta(s) ds \right), \quad a \leq t \leq b. \quad (35)$$

Доведення лема Гронуола. Позначимо $R(t) \equiv \int_a^t \beta(s)u(s) ds$. Тоді

$$\dot{R}(t) = \beta u \leq \beta \alpha + \beta R,$$

а отже $\frac{d}{ds} \left\{ R(s) \exp \left(- \int_a^s \beta(\tau) d\tau \right) \right\} \leq \beta(s)\alpha(s) \exp \left(- \int_a^s \beta(\tau) d\tau \right)$.

Інтегруємо на $[a, t]$ і отримуємо

$$R(t) \leq \int_a^t \beta(s)\alpha(s) \exp \left(\int_s^t \beta(\tau) d\tau \right) ds.$$

Підставляємо в (33) та отримуємо (34).

Якщо α є неспадною, то (34) дає

$$u(t) \leq \alpha(t) \left\{ 1 + \int_a^t \beta(s) \left\{ \exp \left(\int_s^t \beta(\tau) d\tau \right) \right\} ds \right\}.$$

Інтегрування дає (35). Лема доведена. ■

Зауваження 9. Можна розглядати також залежність розв'язків від початкового моменту часу σ та f (див., наприклад, [1, теорема 2.2, с.41]). В прикладних задачах ці властивості є важливими.

Нагадаємо важливе поняття коректності початкової задачі (за Ж. Адамаром), яке є важливим і природнім для прикладних задач. Початкова задача є коректною, якщо

- (i) розв'язок цієї задачі існує;
- (ii) розв'язок є єдиним;
- (iii) розв'язок неперервно залежить від початкових даних.

7 Приклад крайової задачі

У цьому параграфі ми познайомимося з одним із простих формулювань крайової задачі для рівнянь із загалюванням. Нас цікавить питання існування та єдиності розв'язку наступної крайової задачі

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x_t), \\ x(\theta) = \varphi(\theta), \theta \in [-r, 0), \\ x(\alpha) = x^\alpha, \quad \alpha > 0. \end{cases} \quad (36)$$

Ми розглядаємо автономне рівняння для простоти.

Пояснимо, де можуть виникати такі задачі. При розгляді неперервних початкових даних $\varphi \in C$ для задачі Коші (див. (4)) і неперервних розв'язків (див. означення 1), ми отримували, що $\lim_{t \rightarrow 0+} x(t) = \varphi(0)$. При розгляді *розривних* розв'язків із початковими даними $(\varphi; a) \in Y^m \equiv L^2(-r, 0; \mathbb{R}^m) \times \mathbb{R}^m$ ми маємо в загальному випадку $\lim_{t \rightarrow 0+} x(t) = a \neq \varphi(0)$, тобто розв'язок може мати розрив у момент часу $t = 0$. Таким чином, ми шукаємо розв'язок, який має властивість $\lim_{t \rightarrow 0+} x(t) = a$ і, можливо, має розрив у точці $t = 0$. З погляду прикладних задач, буває не завжди зручно оцінювати функцію у точці її розриву. Набагато зручніше оцінювати її у довільній "близькій" до неї точці $t = \alpha > 0$, в якій функція неперервна. Саме так ми приходимо до крайової задачі (36). В прикладних задачах, розривні розв'язки виникають, наприклад, при дослідженні механічних систем, що можуть описувати удари. Докладніше див. книгу [3].

Справедлива наступна

Теорема 5. *Нехай функція $f : L^2(-r, 0; \mathbb{R}^m) \rightarrow \mathbb{R}^m$ є ліпшицевою, тобто існує $L_f > 0$ таке, що для будь-яких $\varphi^1, \varphi^2 \in L^2(-r, 0; \mathbb{R}^m)$, виконується*

$$|f(\varphi^1) - f(\varphi^2)| \leq L_f \cdot |\varphi^1 - \varphi^2|_{L^2(-r, 0; \mathbb{R}^m)}. \quad (37)$$

Тоді для будь-яких $\varphi \in L^2(-r, 0; \mathbb{R}^m)$, $x^\alpha \in \mathbb{R}^m$ існує $\alpha_0 > 0$ таке, що для будь-яких $\alpha \in (0, \alpha_0]$ крайова задача (36) має єдиний розв'язок.

Зауваження 10. *Ми розглядаємо глобально ліпшицеву функцію f для простоти. Насправді, достатньо вимагати лише локальну ліпшицевість.*

Доведення теореми 5. Для $a \in \mathbb{R}^m$ розглянемо допоміжну функцію $\bar{\varphi}(a, \tau) \equiv \varphi(\tau)$ для $\tau \in [-r, 0)$ і $\bar{\varphi}(a, \tau) \equiv a$ для $\tau \in [0, \alpha]$. Отримуємо (заміна змінної) $x(t) = y(t) + \bar{\varphi}(a, t)$ де $y_0 \equiv 0$.

Як і раніше, позначимо $\mathcal{A}(\alpha, \beta) = \{y \in C([-r, \alpha]; \mathbb{R}^m) : y_0 \equiv 0, \max\{|y(t)|, t \in [0, \alpha]\} \leq \beta\}$. На множині $Z \equiv \mathcal{A}(\alpha, \beta) \times \{x \in \mathbb{R}^m : |x - x^\alpha| \leq d\}$ ми розглянемо оператор $F : Z \rightarrow C([-r, \alpha]; \mathbb{R}^m) \times \mathbb{R}^m$ визначений формулою

$$F(y, x)(t) = \begin{pmatrix} F^1(y, x)(t) \\ F^2(y, x) \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \begin{cases} \int_0^t f(y_\tau + \bar{\varphi}_\tau(x)) d\tau, & t \in [0, \alpha], \\ 0, & \theta \in [-r, 0). \end{cases} \\ x^\alpha - \int_0^\alpha f(y_\tau + \bar{\varphi}_\tau(x)) d\tau \end{pmatrix}.$$

Тут $F^1(y, x)(t)$ -функція з $C([-r, \alpha]; \mathbb{R}^m)$, $F^2(y, x)$ -вектор з \mathbb{R}^m . Наша ціль-показати, що при досить малому $\alpha > 0$ відображення F діє з Z в себе і є стискаючим. Перш ніж приступити до дослідження властивостей F , пояснимо звідки отримана формула, що задає $F^2(y, x)$. Стандартним підходом (для початкової задачі) є шукати розв'язок, маючи початкові дані $(\varphi; a) \in Y^m \equiv L^2(-r, 0; \mathbb{R}^m) \times \mathbb{R}^m$. Зараз функція φ задана, а вектор a є невідомим. Маючи розв'язок (36), ми могли б написати $x(t) = a + \int_0^t f(x_\tau) d\tau = a + \int_0^t f(y_\tau + \bar{\varphi}_\tau(a)) d\tau$. Розв'язок задовольняє $x(\alpha) = x^\alpha$ тобто $x^\alpha = a + \int_0^\alpha f(y_\tau + \bar{\varphi}_\tau(a)) d\tau$ або $a = x^\alpha - \int_0^\alpha f(y_\tau + \bar{\varphi}_\tau(a)) d\tau$. Це і є формула, що задає $F^2(y, a)$.

Оцінюємо окремо $F^1(y, x)$ та $F^2(y, x)$.

$$|F^1(y^1, x^1) - F^1(y^2, x^2)| \leq \alpha L_f \sqrt{r} (|y^1 - y^2|_{C([-r, \alpha]; \mathbb{R}^m)} + |x^1 - x^2|). \quad (38)$$

Тут ми використали оцінки (перевірити!)

$$|\bar{\varphi}_\tau(x)|_{L^2(-r, 0; \mathbb{R}^m)} \leq \max\{|\varphi|_{L^2(-r, 0; \mathbb{R}^m)}; \sqrt{r}|x|\}, \quad (39)$$

$$|y_\tau|_{L^2(-r, 0; \mathbb{R}^m)} \leq \sqrt{r}|y_\tau|_C \quad (40)$$

і, як наслідок,

$$\begin{aligned} & |f(y_\tau^1 + \bar{\varphi}_\tau(x^1)) - f(y_\tau^2 + \bar{\varphi}_\tau(x^2))| \leq \\ & \leq L_f (|y^1 - y^2|_{L^2(-r, 0; \mathbb{R}^m)} + |\bar{\varphi}_\tau(x^1) - \bar{\varphi}_\tau(x^2)|_{L^2(-r, 0; \mathbb{R}^m)}) \leq \end{aligned}$$

$$\leq L_f \sqrt{r} (|y^1 - y^2|_{C([-r, \alpha]; \mathbb{R}^m)} + |x^1 - x^2|).$$

Тепер аналогічно оцінюємо

$$|F^2(y^1, x^1) - F^2(y^2, x^2)| \leq \alpha L_f \sqrt{r} (|y^1 - y^2|_{C([-r, \alpha]; \mathbb{R}^m)} + |x^1 - x^2|). \quad (41)$$

Таким чином, використовуючи (38), (41), отримуємо

$$\begin{aligned} & |F(y^1, x^1) - F(y^2, x^2)|_{C([-r, \alpha]; \mathbb{R}^m) \times \mathbb{R}^m} \\ & \leq 2\alpha L_f \sqrt{r} |(y^1, x^1) - (y^2, x^2)|_{C([-r, \alpha]; \mathbb{R}^m) \times \mathbb{R}^m}. \end{aligned} \quad (42)$$

Для того, щоб переконатися, що F відображає Z в себе, оцінимо

$$\begin{aligned} |F^1(y, x)| & \leq \int_0^\alpha (|f(y_\tau + \bar{\varphi}_\tau(x)) - f(0)| + |f(0)|) d\tau \\ & \leq \alpha (L_f \sqrt{r} |y|_{C([-r, \alpha]; \mathbb{R}^m)} + \max\{|\varphi|_{L^2(-r, 0; \mathbb{R}^m)}; \sqrt{r}|x|\} + |f(0)|) \end{aligned}$$

та

$$|F^2(y, x)| \leq \alpha (L_f \sqrt{r} |y|_{C([-r, \alpha]; \mathbb{R}^m)} + \max\{|\varphi|_{L^2(-r, 0; \mathbb{R}^m)}; \sqrt{r}|x|\} + |f(0)|).$$

Враховуючи, що $y \in \mathcal{A}(\alpha, \beta)$, легко перевірити, що вибираючи мале $\alpha > 0$ (вписати явну оцінку для $\alpha!$), ми отримуємо, що $F : Z \rightarrow Z$ є стискаючим відображенням. Застосовуємо теорему 2 (принцип стискаючих відображень) та нерухому точку (\hat{y}, \hat{x}) відображення F дає шуканий розв'язок у вигляді $x(t) = \hat{y}(t) + \bar{\varphi}(\hat{x}, t)$, $t \in [-r, \alpha]$. Теорема 5 доведена. ■

Слід зауважити, що для існування та єдиності розв'язків крайових задач (як вигляду (36), так і задач більш загального вигляду) важливо, що $\alpha > 0$ є досить малим. Розглянемо наступний

Приклад 9. (Краєва задача з континуумом розв'язків).

Розглянемо задачу

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -x(t-1), \\ x(\theta) \equiv 0, \theta \in [-1, 0), \\ x(2) = 0. \end{cases} \quad (43)$$

Для довільного $x^0 \in \mathbb{R}^m$, розв'язок рівняння $\dot{x}(t) = -x(t-1)$ з початковими даними $(0, x^0)$ (тобто $x(\theta) \equiv 0$, $\theta \in [-1, 0)$ і $x(0) = x^0$) має вигляд

$$x(t) = \begin{cases} x^0, & \theta \in [0, 1], \\ x^0(2-t), & \theta \in [1, 2] \end{cases}$$

тобто задовольняє умові $x(2) = 0$ (графіки розв'язків (43) для скалярного випадку ($m = 1$) зображені на малюнку 3).

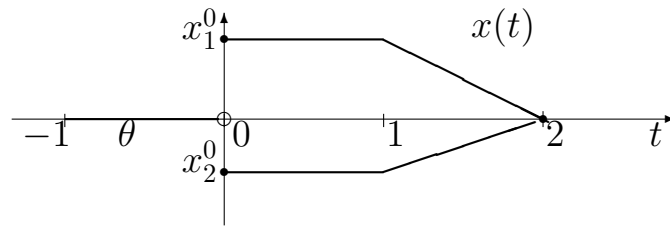


Рис. 3. Розв'язкі крайової задачі (43).

Таким чином, крайова задача (43) має континуум розв'язків.

Для подальшого вивчення більш загальних крайових задач звичайних диференціальних рівнянь із загалюванням рекомендується, наприклад, книга [3] і параграфи 6.5, 9.6 книги [1]. У цьому параграфі було розглянуто крайова задача, яка має узагальнення на випадок рівнянь у часткових похідних із загалюванням (див. [17]).

Прикінцевий коментар. *Матеріал цього посібника є вступною частиною до неймовірно багатого кола питань, що пов'язане з природнім висновком про необхідність врахування стану в минулому будь-якої системи, що змінюється з часом. Це не є питання смаку (враховувати чи ні стан в минулому), а вимушена необхідність рахуватись з реальною скінченністю розповсюдження сигналів в природі. Математичні моделі, які можуть описувати відповідні прикладні задачі (фізичні, біологічні, хімічні) використовують різні типи загалювання (зосереджене і розподілене, стале, залежне від часу і стану, та всі їх можливі комбінації). Всі ці типи загалювань знаходять відображення в курсі, вступом до якого є цей посібник. В цьому посібнику ми свідомо обмежили себе "класичними" (базовими) питаннями. Обговорення теорії загалювання, що залежить від стану, свідомо відкладено для окремого, детального розгляду.*

8 Завдання для самоперевірки

Після ознайомлення з певним матеріалом є природнім перевірити рівень засвоєння / розуміння теорії. Традиційним є підхід вирішення задач та порівняння з наданими відповідями. Вирішення задач є важливою складовою опанування матеріалом, але не порівняння з наданими відповідями. Людина може глибоко опанувати матеріал, зрозуміти поняття, але зробити арифметичну (технічну) помилку і відповідь буде інша. Натомість, *пояснення* є дійсно важливою складовою опанування матеріалу. Тож наведені нижче типові задачі *не* супроводжуються відповідями, але провакують студентів спробувати *пояснити* хід розв'язку. Корисним є побудова графіків розв'язків.

СП.1. Для функції $x(t) = 1 - t^3 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ і загаювання $r = 2$ знайти формули, що задають функції (див. означення x_t) $x_1; x_2; x_{\frac{1}{5}}; x_{-1}; x_0; x_{-\frac{1}{7}}$ і намалювати графіки цих функцій. Зробити те саме для загаювання $r = \frac{1}{7}$.

СП.2. Знайти функцію f , за допомогою якої наступні рівняння записуються у вигляді (3):

- a) $\dot{x}(t) = 3x(t-2)$; b) $\dot{x}(t) = 7 \cdot x(t) - 5 \cdot x(t-3)$; c) $\dot{x}(t) = x^2(t) \cdot x(t-8)$;
d) $\dot{x}(t) = 17 - 25x(t-13) + 1$; e) $\dot{x}(t) = 8t - 11x(t-12) + 7$;
f) $\dot{x}(t) = -3t^5 + 8x^{\frac{5}{7}}(t-8) - 5$; g) $\dot{x}(t) = 5t - 9 \int_0^t x(t+\theta) d\theta$;

СП.3. Побудувати методом кроків розв'язки (для $t \in [0, 2r]$, де r -загаювання) наступних задач Коші та намалювати їх графіки.

- a) $\begin{cases} \dot{x}(t) = -13x(t-5) \\ x(\theta) \equiv 2, \theta \in [-5, 0]; \end{cases}$ b) $\begin{cases} \dot{x}(t) = -17 + 2x(t-1) \\ x(\theta) \equiv -1, \theta \in [-1, 0]; \end{cases}$
c) $\begin{cases} \dot{x}(t) = 2 + \frac{3}{2}x(t-7) \\ x(\theta) = \theta + 5, \theta \in [-7, 0]; \end{cases}$ d) $\begin{cases} \dot{x}(t) = \frac{1}{5}x(t-17) + 4t \\ x(\theta) \equiv 3 - 2\theta, \theta \in [-17, 0]; \end{cases}$
e) $\begin{cases} \dot{x}(t) = \frac{3}{2} + 2 \int_{-2}^{-1} x(t+\theta) d\theta \\ x(\theta) = 3\theta, \theta \in [-2, 0]; \end{cases}$ f) $\begin{cases} \dot{x}(t) = \frac{2t}{3}x(t-2) - 2t^2 \\ x(\theta) \equiv -\theta, \theta \in [-2, 0]. \end{cases}$

СП.4. Побудувати методом кроків розв'язки (для $t \in [0, 2r]$, де r -загаювання) наступних задач Коші та намалювати їх графіки.

- a) $\begin{cases} \dot{x}(t) = 1 - x(t-2) + 2x(t-1) \\ x(\theta) \equiv 2, \theta \in [-2, 0]; \end{cases}$ b) $\begin{cases} \dot{x}(t) = t + 2x(t-1) - x(t - \frac{3}{2}) \\ x(\theta) \equiv \theta, \theta \in [-\frac{3}{2}, 0]; \end{cases}$

$$c) \begin{cases} \dot{x}(t) = 3x(t-2) \cdot x(t-1) \\ x(\theta) \equiv -5, \theta \in [-2, 0]; \end{cases} \quad d) \begin{cases} \dot{x}(t) = 3x(t-2) - \int_{t-3}^{t-2} x(\theta) d\theta \\ x(\theta) \equiv -4, \theta \in [-3, 0]; \end{cases}$$

$$e) \begin{cases} \dot{x}(t) = x^2(t-1) - x(t-2) \\ x(\theta) \equiv -1, \theta \in [-2, 0]; \end{cases} \quad f) \begin{cases} \dot{x}(t) = 2t^2 - \int_{-3}^{-\frac{3}{2}} x(t+\theta) d\theta \\ x(\theta) \equiv -1, \theta \in [-3, 0]; \end{cases}$$

СП.5. Перевірити, чи можна застосувати теорему 1 (існування та єдиності неперервних розв'язків) до наступних задач Коші. У випадку коли можна, з'ясувати на якому відрізку часу $[\sigma - r, \sigma + \alpha]$ за теоремою існує розв'язок.

$$a) \begin{cases} \dot{x}(t) = 15x(t-1) \\ x_0 = \theta \end{cases}; \quad b) \begin{cases} \dot{x}(t) = x(t-2) \\ x_1 = 2(\theta-1)^2 \end{cases}; \quad c) \begin{cases} \dot{x}(t) = 1 - 7x(t-1) \\ x_{-7} = -3\theta^2 \end{cases};$$

$$d) \begin{cases} \dot{x}(t) = 7x^2(t - \frac{2}{3}) \\ x_{-79} = -2\theta \end{cases}; \quad e) \begin{cases} \dot{x}(t) = 2t \cdot x(t-3) \\ x_{10} = 2(\theta+1) + 2 \end{cases}; \quad f) \begin{cases} \dot{x}(t) = 3t + x(t-17) \\ x_2 = 1 - 2\theta^2. \end{cases}$$

СП.6. Для тих задач Коші вправи СП.5, для яких можна застосувати теорему 1 (існування та єдиності неперервних розв'язків), обрати інші початкові функції $\psi \in C$ та проілюструвати оцінку (29) з леми про неперервну залежність розв'язку від початкової функції.

СП.7. Для обраних пар початкових функцій $\varphi, \psi \in C$ (див. попередню вправу) знайти відповідні розв'язки $x(t; \varphi)$ та $x(t; \psi)$, за цими розв'язками знайти $\max_{t \in [\sigma-r, \sigma+\alpha]} |x(t; \varphi) - x(t; \psi)|$ та порівняти з оцінкою (29).

СП.8. Чи можна навести приклад, в якому в оцінці (29) буде рівність (замість нерівності)? Якщо потрібно, дозволяється зменшити сталу α , тобто оцінювати $\max_{t \in [\sigma-r, \sigma+\alpha_1]} |x(t; \varphi) - x(t; \psi)|$ для деякого $\alpha_1 \in (0, \alpha) \subset \mathbb{R}$ в лемі про неперервну залежність розв'язку від початкової функції.

СП.9. Обчислити зсуви вздовж розв'язків заданих рівнянь. Намалювати ескіз графіка для кожного зсуву.

$$a) \dot{x}(t) = x(t - \frac{3}{4}) + 3x(t-1), \varphi^1(\theta) = 1 - \theta, \theta \in [-1, 0];$$

$$T(\frac{1}{4})\varphi^1, T(\frac{3}{4})\varphi^1, T(1)\varphi^1.$$

Перевірити рівності:

$$T(1)\varphi^1 = T(\frac{1}{4})T(\frac{3}{4})\varphi^1, T(1)\varphi^1 = T(\frac{3}{4})T(\frac{1}{4})\varphi^1, T(\frac{3}{2})\varphi^1 = T(\frac{3}{4})T(\frac{3}{4})\varphi^1.$$

b) $\dot{x}(t) = x(t-3) \cdot x(t-5)$, $\varphi^2(\theta) = -2\theta$, $\theta \in [-5, 0]$;
 $T(\frac{3}{2})\varphi^2$, $T(2)\varphi^2$, $T(3)\varphi^2$, $T(4)\varphi^2$, $T(5)\varphi^2$.

Перевірити рівності:

$$T(3)\varphi^2 = T(1)T(2)\varphi^2, \quad T(5)\varphi^2 = T(3)T(2)\varphi^2, \quad T(4)\varphi^2 = T(\frac{5}{2})T(\frac{3}{2})\varphi^2.$$

c) $\dot{x}(t) = t + 3x(t-7)$, $\varphi^3(\theta) = 4\theta$, $\theta \in [-7, 0]$;
 $T(2, 0)\varphi^3$, $T(5, 0)\varphi^3$, $T(7, 0)\varphi^3$, $T(2, 1)\varphi^3$, $T(7, 1)\varphi^3$.

Перевірити рівності:

$$T(5, 0)\varphi^3 = T(5, 2)T(2, 0)\varphi^3, \quad T(7, 0)\varphi^3 = T(7, 2)T(2, 0)\varphi^3,$$

$$T(7, 1)\varphi^3 = T(7, 2)T(2, 1)\varphi^3.$$

СП.10. Знайти розв'язки наступних систем для $t \in [0, 2]$. Намалювати ескізи графіків розв'язків.

$$a) \begin{cases} \dot{x}_1(t) = 2x_1(t-1) - 3x_2(t-1), \\ \dot{x}_2(t) = -x_1(t-1) + 7x_2(t-1), \end{cases}; \quad \begin{cases} x_1(\theta) = \theta - 2, \theta \in [-1, 0]; \\ x_2(\theta) = \theta^3, \theta \in [-1, 0]. \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} \dot{x}_1(t) = -2x_1(t-1) \cdot x_2(t-1), \\ \dot{x}_2(t) = 5x_2(t) \cdot x_1(t-1), \end{cases}; \quad \begin{cases} x_1(\theta) \equiv 2, \theta \in [-1, 0]; \\ x_2(\theta) = 2 - 3\theta, \theta \in [-1, 0]. \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} \dot{x}_1(t) = -5x_1^2(t-2) + x_2(t-1), \\ \dot{x}_2(t) = x_2(t) \cdot x_1(t-1), \end{cases}; \quad \begin{cases} x_1(\theta) \equiv -3, \theta \in [-2, 0]; \\ x_2(\theta) = 1 - 3\theta, \theta \in [-1, 0]. \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t-1) + 2t \cdot x_1(t-2), \\ \dot{x}_2(t) = x_2(t) \cdot \sin(2x_1(t-1)), \end{cases}; \quad \begin{cases} x_1(\theta) \equiv -\pi, \theta \in [-2, 0]; \\ x_2(\theta) = 3 - \theta, \theta \in [-1, 0]. \end{cases}$$

СП.11. Перевірити, чи можна застосувати теорему 1 (існування та єдиності неперервних розв'язків) до задач Коші з попередньої вправи. У випадку коли можна, з'ясувати на якому відрізку часу $[\sigma - r, \sigma + \alpha]$ за теоремою існує розв'язок.

СП.12. Знайти зсуви на $\frac{2}{3}$; 1; $\frac{7}{5}$; 2 початкових даних вправи СП.10.

СП.13. Наведіть власні приклади задач Коші для рівнянь та систем із декількома загаюваннями. Не розв'язуючи ці задачі, знайдіть декілька перших проміжків часу $[\sigma, a_1], [a_1, a_2], \dots, [a_{i-1}, a_i]$, які слугуватимуть кроками при застосуванні методу кроків.

СП.14. Наведіть власні приклади краєвих задач, які мають неєдині розв'язки, подібно до прикладу 9 (краєва задача з континуумом розв'язків).

Література

- [1] J.K. Hale, Theory of functional differential equations, Springer-Verlag, New York, 1977, 366p. DOI: 10.1007/978-1-4612-9892-2
- [2] J.K. Hale, S.M. Verduyn Lunel, Introduction to Functional Differential Equations, Springer-Verlag, New York, 1993. DOI: 10.1007/978-1-4612-4342-7
- [3] N.V. Azbelev, V.P. Maksimov, L. Rakhmatullina, Introduction to the theory of linear functional differential equations, Advanced Series in Mathematical Science and Engineering, 3, World Federation Pub Inc., 1995, 172p.
- [4] R. Bellman, K.L. Cooke, Differential-difference equations, in “Mathematics in Science and Engineering”. Vol. 6. New York-London: Academic Press, XVI, 1963. DOI: 10.1016/s0076-5392(09)x6010-8
- [5] O. Diekmann, S.A. van Gils, S.M. Verduyn Lunel, H.-O. Walther, Delay equations. Functional, complex, and nonlinear analysis. Applied Mathematical Sciences, 110. Springer-Verlag, New York, 1995. DOI: 10.1007/978-1-4612-4206-2
- [6] R.D. Driver, Ordinary and delay differential equations, Springer New York, NY, 1977, 505p. DOI: 10.1007/978-1-4684-9467-9
- [7] V. Kolmanovskii, A. Myshkis, Introduction to the theory and applications of functional differential equations., Mathematics and its Applications. 463. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers. 1999.
- [8] V.B. Kolmanovskii, V.R. Nosov, Stability of functional differential equations. Mathematics in Science and Engineering, Vol. 180. London.: Academic Press, Inc. (Harcourt Brace Jovanovich, Publishers). XIV, 1986, 217p.
- [9] A.N. Kolmogorov, S.V. Fomin, Elements of the Theory of Functions and Functional Analysis, Graylock Press, Rochester, N.Y., 1957.
- [10] L.V. Kantorovich, G.P. Akilov, Functional Analysis, Second Edition, Pergamon, 1982. DOI: 10.1016/C2013-0-03044-7

- [11] Y. Kuang, Delay differential equations with applications in population dynamics. Mathematics in Science and Engineering, 191. Academic Press, Inc., Boston, MA, 1993. xii+398 p.
- [12] I. Chueshov, Introduction to the Theory of Infinite-Dimensional Dissipative Systems, Acta, Kharkov, 1999; Engl. transl.: Acta, Kharkov, 2002. www.emis.de/monographs/Chueshov
- [13] R. Temam, Infinite Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics, Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1988.
- [14] J.K. Hale, Asymptotic behavior of dissipative systems, Amer. Math. Soc. Providence, Rhode Island, 1988.
- [15] J. Wu, Theory and applications of partial functional-differential equations. Applied Mathematical Sciences, 119. Springer-Verlag, New York, 1996.
- [16] A.V. Rezounenko, J. Wu, A non-local PDE model for population dynamics with state-selective delay: local theory and global attractors, Volume 190, Issues 1–2, 1 June 2006, Pages 99-113. DOI: 10.1016/j.cam.2005.01.047
- [17] A.V. Rezounenko, On boundary value problem for a class of retarded nonlinear partial differential equations, Journal of Mathematical Analysis and Applications. -2001.- vol. 254. no. 2. -515-523. DOI: 10.1006/jmaa.2000.7215
- [18] A.V. Rezounenko, A short introduction to the theory of ordinary delay differential equations. Lecture Notes. V.N. Karazin Kharkiv University Press. Kharkiv. 2004. 41 p.
- [19] J.D. Murray, Lectures on nonlinear-differential-equation models in biology. Clarendon Press, Oxford. 1977, 370p. api.semanticscholar.org/CorpusID:122527532
- [20] K. Yosida, Functional Analysis, Springer Berlin, Heidelberg, 1995, 504p. DOI: 10.1007/978-3-642-61859-8

Навчальне видання

Резуненко Олександр Вячеславович

**ВСТУП
ДО ТЕОРІЇ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ
РІВНЯНЬ ІЗ ЗАГАЮВАННЯМ**

Навчально-методичний посібник
для студентів факультету математики і інформатики

В авторській редакції

Формат 60x84/16. Ум. друк. арк. 1,68. Наклад 100 пр.

Видавець і виготовлювач
Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна,
61022, м. Харків, майдан Свободи, 4.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК No 3367 від 13.01.2009
Видавництво ХНУ імені В. Н. Каразіна