

Міністерство освіти і науки України

Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна

Факультет математики і інформатики

Кафедра фундаментальної математики

Зав. кафедри фундаментальної математики

С. Л. Гефтер

Кваліфікаційна робота магістра на тему:

***“Модельна гнучкість криволінійних
поверхонь”***

Виконала: студентка групи М-161

2 курсу магістратури

спеціальність 111 Математика

освітньо-професійна Математика

А. С. Лісняк

Керівник: д.ф.м.н. В. О. Горькавий

Харків – 2024 р.

ВСТУП

У 1978 році американський математик Марк Гольдберг розглянув спеціальний многогранник, що називається *сіамські біпіраміди* (*Siamese dipyrramids*) [1]. Розгортка цього багатогранника складається з двох копій триангульованого багатокутника, зображеного на Рис.1.

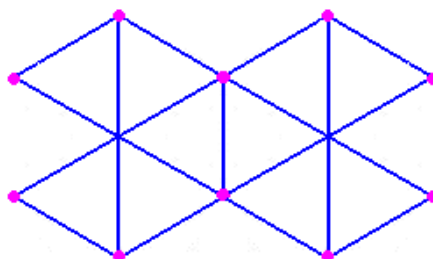


Рис.1. Розгортка половини сіамських біпірамід Гольдберга, складена з рівносторонніх трикутників.

Відкриття і дослідження цього багатогранника було пов'язано з пошуком гнучких замкнутих багатогранників без самоперетинів як контрприкладів до гіпотези Ейлера стосовно негнучкості замкнутих поверхонь. Приблизно, в той же час перший приклад такого гнучкого багатогранника – флексора вдалося побудувати Роберту Коннеллі [2], що надало могутній поштовх розвитку геометричної теорії жорсткості поліедральних конструкцій [3].

А от багатогранник Гольдберга – сіамські біпіраміди – виявився математично негнучким, він не дозволяє нетривіальних неперервних деформацій зі зберіганням зовнішньої форми і розмірів граней та їх поєднань. В той же час було встановлено, що сіамська біпіраміда існує в трьох різних зовнішньо-геометричних формах, дивись Рис.2, при цьому перехід між цими формами відбувається із дуже незначними змінами у розмірах граней.

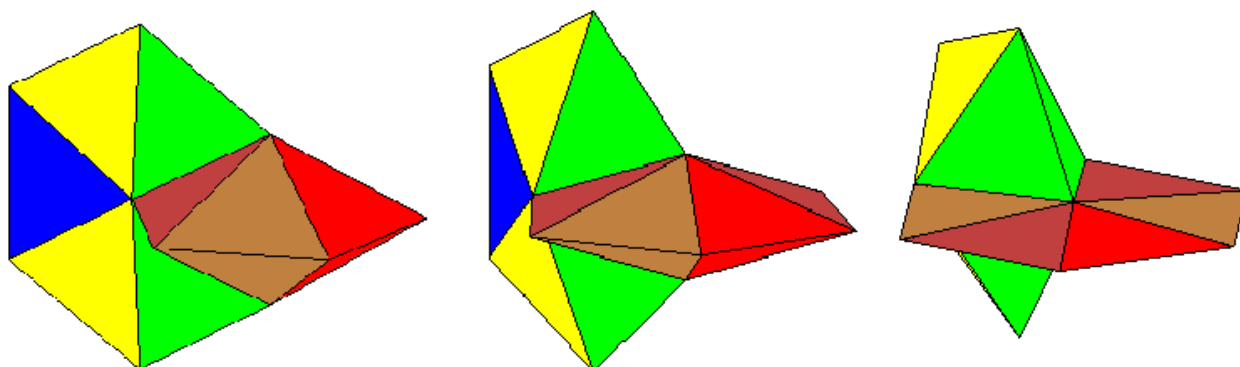


Рис.2. Різні зовнішні форми сіамських біпірамід Гольдберга.

Як наслідок, реальна модель сіамських біпірамід, зроблена з цупкого картону, є дуже «гнучкою», вона дозволяє суттєві деформації зовнішньої форми без видимих змін у формах і розмірах окремих граней та їх поєднань. Дослідження такої «модельної гнучкості» сіамських біпірамід і більш широкого сімейства узагальнених сіамських біпірамід (з більшою кількістю граней і змінними розмірами) було проведено у недавніх роботах [4],[5].

Метою кваліфікаційної роботи є побудова криволінійного аналога узагальнених сіамських біпірамід – спеціальної замкнутої поверхні, яку ми пропонуємо назвати *сіамськими біконусами*.

Об'єктом роботи є саме сіамські біконуси, а *предметом* роботи є властивості модельної стійкості або гнучкості сіамських біконусів.

Основна *задача* роботи – опис геометричних величин, які характеризують зовнішню форму сіамських біконусів, в термінах внутрішньо-геометричних характеристик розгортки сіамських біконусів.

Основні результати роботи полягають в наступному.

- 1) Побудовано сімейство сіамських біконусів S_φ , $0 \leq \varphi \leq \pi$.
- 2) Показано, що існують φ_1 і φ_2 такі, що при $\varphi \leq \varphi_1$ і при $\varphi > \varphi_2$ сіамський біконус існує в єдиній зовнішньо-геометричній формі, тоді як при $\varphi_1 < \varphi \leq \varphi_2$ сіамський біконус існує в трьох різних зовнішньо-геометричних формах.
- 3) Виявлено в реальному експерименті і надано математичне обґрунтування «модельної» гнучкості деяких спеціальних сіамських біконусів.
- 4) Показано, що «модельна» гнучкість сіамських біконусів супроводжується суттєвою зміною внутрішнього об'єму, на відміну від математично гнучких багатогранників –флексорів, для яких об'єм залишається незмінним під час згинань.

Дослідження гнучкості та жорсткості багатогранників і криволінійних поверхонь, а особливо – математичних ефектів, пов'язаних з «модельною» гнучкістю, можуть знайти застосування в різноманітних напрямках архітектури, техніки, інженерії, де використовуються відповідні геометричні форми із заздалегідь накладеними вимогами до їх деформаційних властивостей.

РОЗДІЛ 1. ВИЗНАЧЕННЯ СІАМСЬКИХ БІКОНУСІВ

Візьмемо в площині круг радіуса L , з якого виріжемо сектор з деяким наперед зафіксованим кутом $0 < \varphi < \pi$.

З цієї фігури утворимо круговий конус K із розрізом, дивись Рис.3.

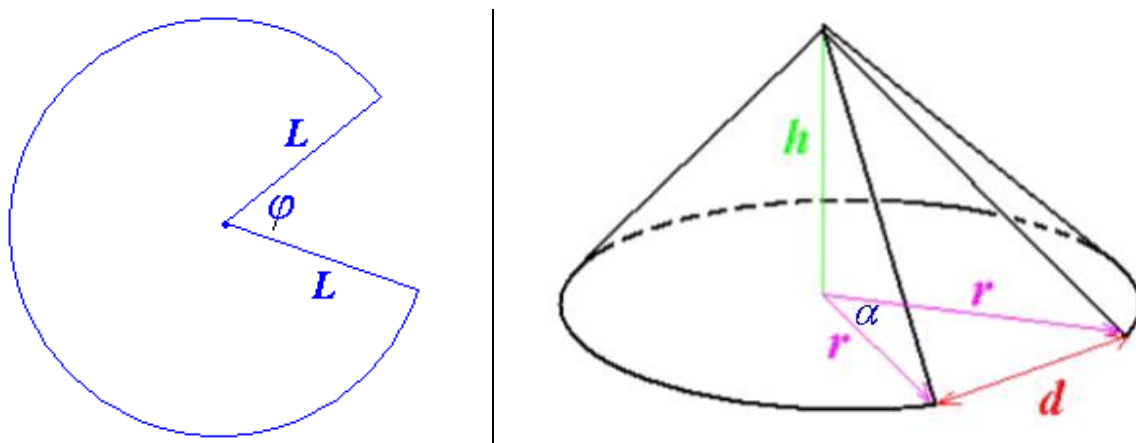


Рис.3. Конус із розрізом (справа) та його розгортка (зліва)

Зовнішня форма конуса K характеризується такими величинами:

r – радіус кола – основи конуса,

h – висота конуса,

d – відстань між кутовими точками розрізу на основі конуса, ми пропонуємо називати її *хорда основи конуса*).

Оскільки конус K утворено із заданої наперед розгортки, апофема конуса дорівнює L . А довжина основи конуса K дорівнює довжині дуги граничного кола на розгортці. Якщо позначити α кут в рівнобедреному трикутнику з бічними сторонами r і основою d , дивись Рис.3, тобто,

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{d}{2r},$$

то рівність згаданих вище дуг записується у вигляді:

$$(2\pi - \varphi)L = (2\pi - \alpha)r,$$

звідки знаходимо:

$$\alpha = 2\pi - (2\pi - \varphi) \frac{L}{r}$$

Тоді для величини d отримуємо наступний вираз:

$$d = 2r \sin \frac{\alpha}{2} = 2r \sin \frac{(2\pi - \varphi)L}{2r}$$

А для висоти h прямого кругового конуса K маємо формулу:

$$h = \sqrt{L^2 - r^2}$$

При різних значеннях r ми отримуємо різні (неконгруентні) конуси з розрізом, тобто, отримуємо однопараметричне неперервне сімейство конусів з розрізом K_r , дивись Рис.4.

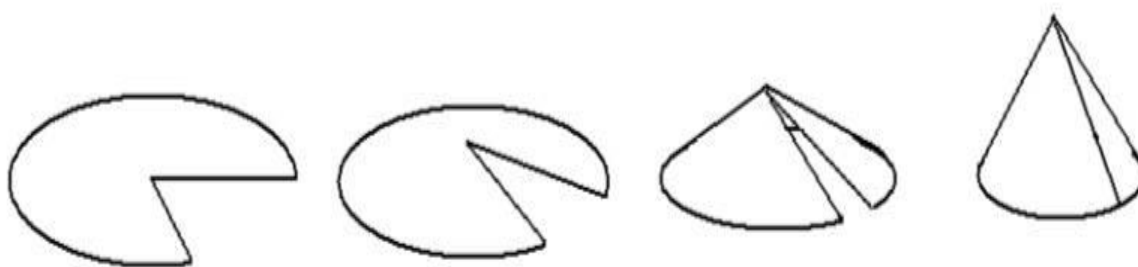


Рис.4. Сімейство ізометричних конусів з розрізом

Параметр r змінюється в проміжку між $\frac{2\pi - \varphi}{2\pi} L$ та L .

Коли $r=L$, то конус з розрізом просто співпадає з початковою плоскою фігурою на розгортці.

Коли $r = \frac{2\pi - \varphi}{2\pi} L$, то конус з розрізом перетворюється у конус без розрізу,

тобто, розріз «склеюється». При інших проміжних значеннях r будемо отримувати неперервне сімейство конусів з розрізами, Рис. 4.

Завдяки виписаним вище формулам для хока $d=d(r; L, \varphi)$ і висоти $h=h(r; L, \varphi)$ вказане сімейство представляє ізометричну деформацію – згинання, яке перетворює плоский круг з розрізом (на розгортці) у конус із «склеєним» розрізом.

На наступному кроці, для кожного конуса з розрізом K_r візьмемо його копію і склеїмо їх разом вздовж граничної дуги кола основи. Отримаємо круговий біконус з розрізом, який позначимо BK_r , дивись Рис.5.

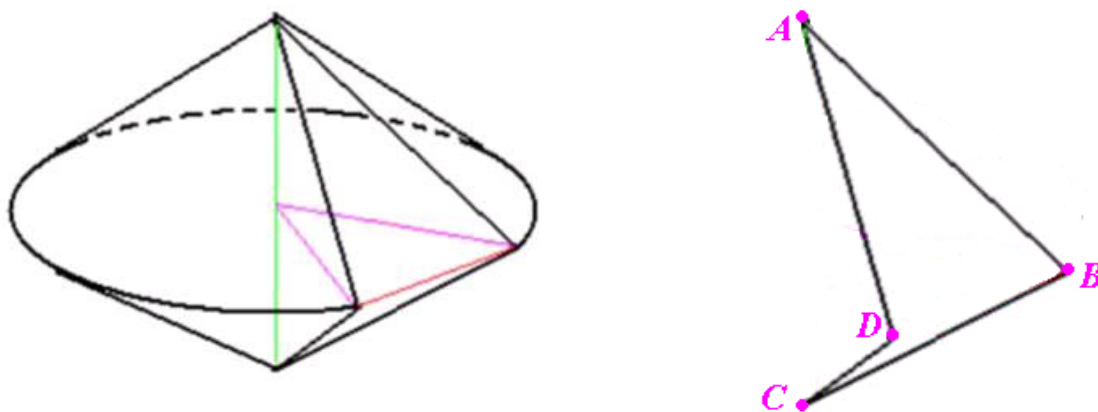


Рис.5. Біконус з розрізом (зліва) та його край (справа)

Як результат, будемо мати однопараметричне неперервне сімейство ізометричних біконусів з розрізами BK_r , параметр змінюється в проміжку $\frac{2\pi - \varphi}{2\pi} L \leq r \leq L$. Це сімейство представляє собою неперервну ізометричну деформацію – згинання, яке переводить двічі вкритий круг із розрізом у біконус із «склеєним» розрізом.

Нарешті, візьмемо якийсь конкретний біконус з розрізом BK_r . Ця поверхня має край у вигляді симетричної просторової ламаної $ABCD$. Усі ребра ламаної мають довжину L , відстань між A і C дорівнює $2h$, а відстань між B і D дорівнює d .

В тому ж сімействі візьмемо інший біконус з розрізом $BK_{\tilde{r}}$ і спробуємо підібрати значення параметра $\tilde{r}$ так, щоб обидва біконуси можна було «склеїти» разом, сумістивши їх крайові ламані «хрест на хрест» так, щоб висотні вершини одного склеювались з хордовими вершинами іншого, і навпаки. Якщо це станеться можливим, ми отримаємо замкнену поверхню без краю S_φ , яку і будемо називати *сіамськими біконусами*, дивись Рис. 6.

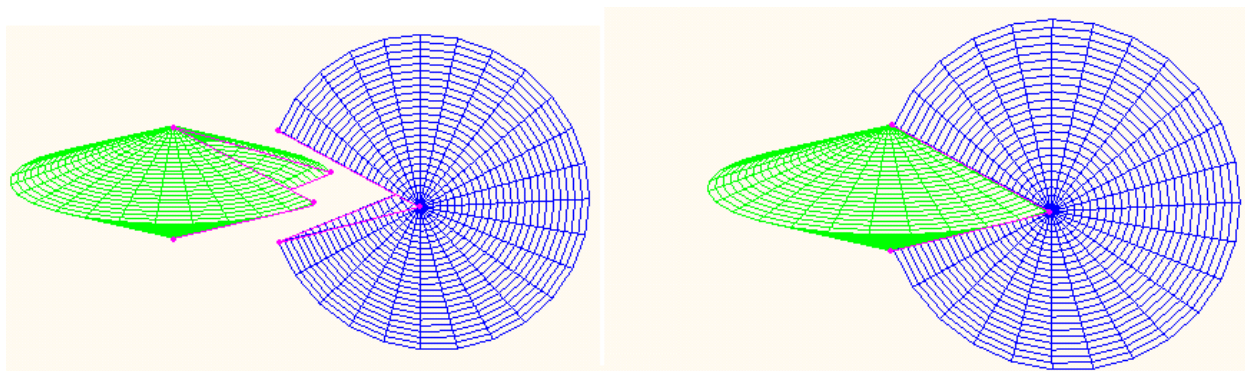


Рис.6. Пара біконусів з розрізами BK_r і $BK_{\tilde{r}}$ (зліва) і відповідна поверхня – сіамські біконуси (справа)

Очевидно, розгортка цієї поверхні складається з чотирьох екземплярів круга радіуса L з вирізаним сектором кута φ , зображеного раніше на Рис.3.

Сама поверхня S_φ є регулярною всюди за виключенням симетричної просторової кривої, утвореної із чотирьох відрізків рівної довжини і підклеєних до їх вершин дуг двох різних кіл.

Підкреслимо ще раз, що замкнена поверхня – сіамські біпіраміди складається з двох частин, з двох біпірамід з розрізами. При цьому висота і хок однієї частини дорівнюють хоку і висоті другої частини, відповідно.

Також зазначимо, що поверхня є симетричною відносно двох взаємно перпендикулярних площин, що містять відповідні кругові ребра поверхні. Одночасно, вказані площини є площинами симетрії окремо для кожної з двох частин, з яких складаються сіамські біпіраміди.

РОЗДІЛ 2. ІСНУВАННЯ СІАМСЬКИХ БІКОНУСІВ

Але ж чи існує сама ця поверхня – сіамські біконуси? Чи завжди можемо ми, при довільному фіксованому φ , підібрати пару біконусів з розрізами BK_r і $BK_{\tilde{r}}$ так, щоб їх можна було «склеїти хрест на хрест» вздовж краю і отримати потрібну нам замкнуту поверхню?

Зрозуміло, що необхідною і достатньою умовою можливості згаданого склеювання є виконання наступних умови:

$$\begin{cases} 2h = \tilde{d} \\ d = 2\tilde{h} \end{cases}$$

Згадуючи виписані вище формули для висоти і хока піраміди з розрізом, переписуємо вказані умови наступним чином:

$$\begin{cases} \sqrt{L^2 - r^2} = \tilde{r} \sin \frac{(2\pi - \varphi)L}{2\tilde{r}} \\ r \sin \frac{(2\pi - \varphi)L}{2r} = \sqrt{L^2 - \tilde{r}^2} \end{cases}$$

Отже, існування шуканої нами поверхні – сіамських біконусів – зводиться до існування розв'язку $(r, \tilde{r})$ записаної системи в області

$$\hat{\Omega} = \left\{ (r, \tilde{r}) \mid \frac{2\pi - \varphi}{2\pi} L \leq r \leq L, \frac{2\pi - \varphi}{2\pi} L \leq \tilde{r} \leq L \right\}.$$

Якщо замість r , $\tilde{r}$ ввести «безрозмірні» величини:

$$\rho = \frac{r}{L}, \quad \tilde{\rho} = \frac{\tilde{r}}{L},$$

то будемо мати систему:

$$\begin{cases} \sqrt{1 - \rho^2} = \tilde{\rho} \sin \frac{2\pi - \varphi}{2\tilde{\rho}} \\ \rho \sin \frac{2\pi - \varphi}{2\rho} = \sqrt{1 - \tilde{\rho}^2} \end{cases} \quad (1)$$

в області

$$\Omega = \left\{ (\rho, \tilde{\rho}) \mid 1 - \frac{\varphi}{2\pi} \leq \rho \leq 1, 1 - \frac{\varphi}{2\pi} \leq \tilde{\rho} \leq 1 \right\}. \quad (2)$$

Проаналізуємо наявність і кількість розв'язків системи (1) в області Ω .

Твердження 1. *Яке б не було $0 < \varphi < \pi$, система має розв'язок, що задовольняє «умові рівноправності» $\rho = \tilde{\rho}$.*

Доведення: Твердження 1. За умови $\rho = \tilde{\rho}$ система зводиться до одного рівняння

$$\sqrt{1-\rho^2} = \rho \sin \frac{2\pi - \varphi}{2\rho},$$

тобто,

$$\rho^2 \left(1 + \sin^2 \frac{2\pi - \varphi}{2\rho}\right) - 1 = 0.$$

Розглянемо функцію

$$F := \rho^2 \left(1 + \sin^2 \frac{2\pi - \varphi}{2\rho}\right) - 1$$

На краях інтервалу визначення $1 - \frac{\varphi}{2\pi} \leq \rho \leq 1$ маємо

$$F\left(1 - \frac{\varphi}{2\pi}\right) = \left(1 - \frac{\varphi}{2\pi}\right)^2 - 1 = \frac{\varphi}{2\pi} \left(\frac{\varphi}{2\pi} - 2\right) < 0$$

$$F(1) = \sin^2 \frac{\varphi}{2} > 0$$

Значить, всередині інтервалу визначення існує значення ρ_0 таке, що $F(\rho_0) = 0$, а це і буде шуканим розв'язком нашого рівняння. **Твердження доведено.**

Наслідок . *Яке б не було $0 < \varphi < \pi$, існує поверхня – сіамські біконуси, обидві половинки якої є взаємно конгруентними (однаковими).*

Дійсно, оскільки $\rho = \tilde{\rho}$, то $r = L\rho = L\tilde{\rho} = \tilde{r}$, а значить $d = \tilde{d}$ і $h = \tilde{h}$, оскільки хок і висота біпіраміди з розрізом визначається радіусом основи біпіраміди, як ми це записували в першому розділі роботи.

Твердження 1 може бути доповнене гіпотезою про єдиність кореня ρ_0 при кожному фіксованому $0 < \varphi < \pi$.

Обґрунтуванням цієї гіпотези є зображення неявно заданої кривої $F(\rho, \varphi) = 0$ у відповідній області площини параметрів (ρ, φ) , дивись Рис. 7.

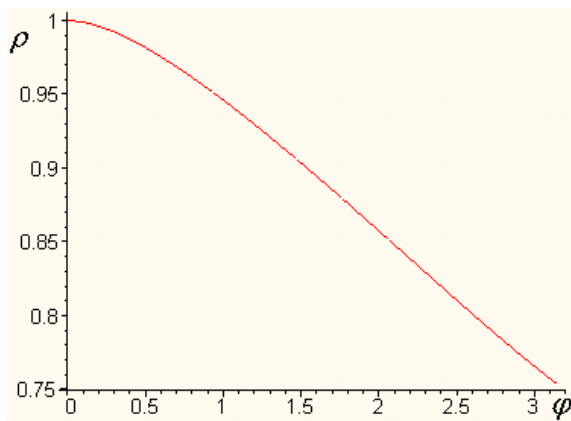


Рис.7. Неявно задана крива $F(\rho, \varphi) = 0$

Як видно з малюнку, при кожному значенні φ_0 вертикальна пряма $\varphi = \varphi_0$ перетинає криву $F(\rho, \varphi) = 0$ рівно в одній точці, тобто, при кожному φ_0 існує єдине ρ_0 таке, що $F(\varphi_0, \rho_0) = 0$.

Але ілюстративно очевидна єдиність розв'язку, про яку йде мова, все ж таки потребує строгого математичного доведення.

РОЗДІЛ 3. ЄДИНІСТЬ СІАМСЬКИХ БІКОНУСІВ

Проаналізуємо тепер кількість різних розв'язків системи

$$\begin{cases} \sqrt{1-\rho^2} = \tilde{\rho} \sin \frac{2\pi-\varphi}{2\tilde{\rho}} \\ \rho \sin \frac{2\pi-\varphi}{2\rho} = \sqrt{1-\tilde{\rho}^2} \end{cases}$$

в області

$$\Omega = \left\{ (\rho, \tilde{\rho}) \mid 1 - \frac{\varphi}{2\pi} \leq \rho \leq 1, 1 - \frac{\varphi}{2\pi} \leq \tilde{\rho} \leq 1 \right\}$$

при кожному фіксованому значенні $0 < \varphi < \pi$.

Нагадаємо, що кожному такому розв'язку буде відповідати своя поверхня – сіамські біконуси – із наперед заданою розгорткою, визначеною значенням кутового параметра φ .

Перше рівняння системи $\Phi(\rho, \tilde{\rho}, \varphi) = 0$ визначає в області Ω деяку неявно задану криву Γ .

Друге рівняння системи має вигляд $\Phi(\tilde{\rho}, \rho, \varphi) = 0$ і визначає в області Ω іншу неявно задану криву Γ^* , симетричну кривій Γ відносно бісектриси $\rho = \tilde{\rho}$.

Розв'язки системи відповідають точкам перетину кривих Γ і Γ^* .

В якості прикладу, зобразимо криві Γ і Γ^* при деяких фіксованих значеннях φ .

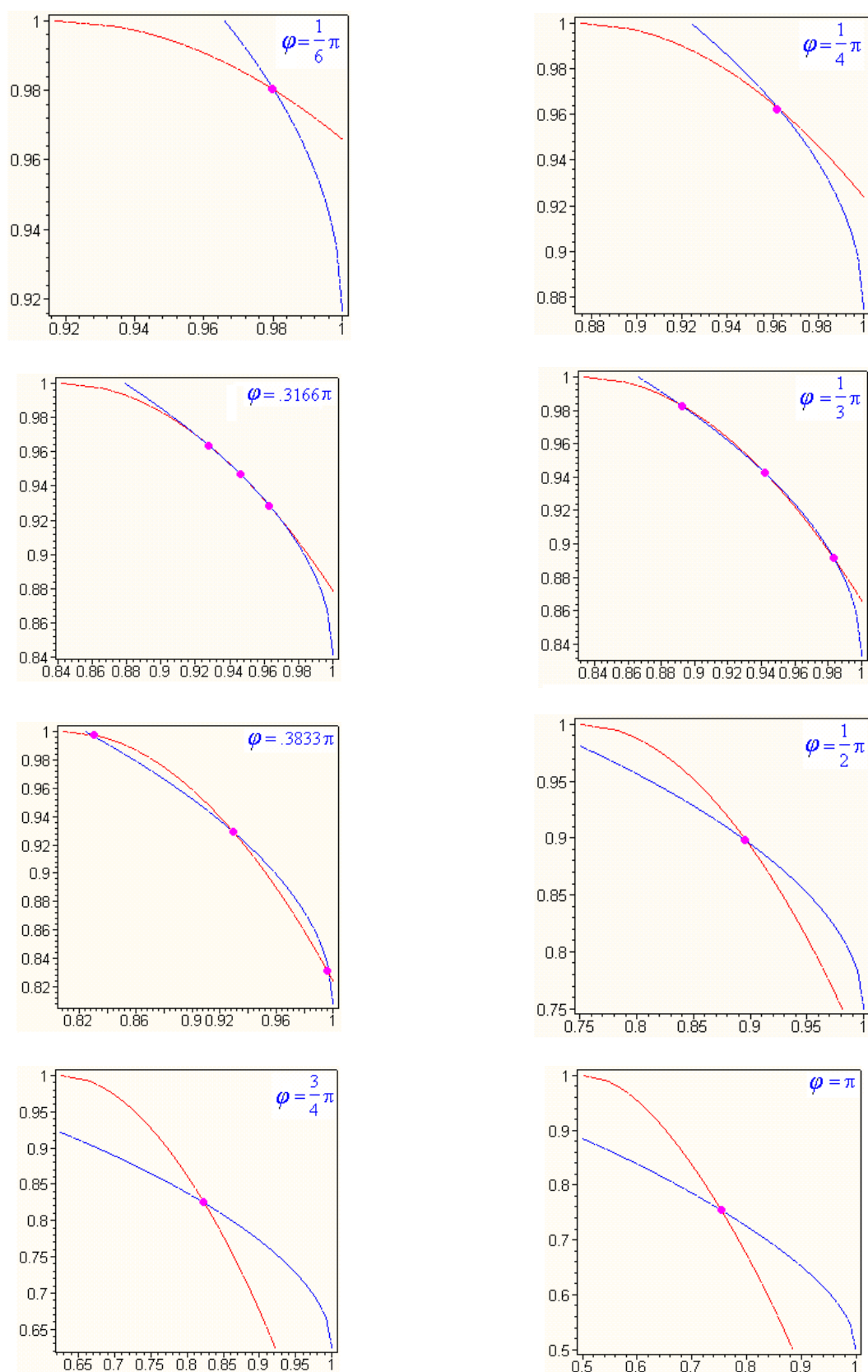


Рис.8. Криві Γ і Γ^* та точки їх перетину при деяких фіксованих значеннях φ
(зауважте, що на різних малюнках масштаб різний)

З огляду на наведені ілюстрації, можемо зробити висновок, що при різних значеннях параметру φ криві Γ і Γ^* мають різну кількість точок перетину, тобто, система матиме різну кількість розв'язків:

– при деяких досить малих значеннях $0 < \varphi \leq \varphi_1$ криві Γ і Γ^* перетинаються лише в одній точці, що розташована на бісектрисі, тобто, система матиме лише один розв'язок, що задовольняє $\rho = \tilde{\rho}$;

– при деякому $\varphi = \varphi_1$ криві Γ і Γ^* мають лише одну спільну точку, в якій вони *дотикаються* одна одної, і ця точка розташована на бісектрисі, тобто, система матиме лише один розв'язок, що задовольняє $\rho = \tilde{\rho}$;

– при деяких проміжних значеннях $\varphi_1 < \varphi \leq \varphi_2$ криві Γ і Γ^* перетинаються в трьох різних точках, одна з яких розташована на бісектрисі, а дві інші взаємно симетричні відносно бісектриси, тобто система матиме три різних розв'язки $(\rho_1, \tilde{\rho}_1)$, $(\rho_2, \tilde{\rho}_2)$, $(\rho_3, \tilde{\rho}_3)$, що задовольняють $\rho_1 = \tilde{\rho}_1$, $(\rho_3, \tilde{\rho}_3) = (\tilde{\rho}_2, \rho_2)$;

– при деяких досить великих значеннях $\varphi_2 < \varphi \leq \pi$ криві Γ і Γ^* перетинаються лише в одній точці, що розташована на бісектрисі, тобто, система матиме лише один розв'язок, що задовольняє $\rho = \tilde{\rho}$.

Величина φ_1 визначається з умови дотику неявно заданих кривих Γ і Γ^* в їх спільній точці, що розташована на бісектрисі:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sqrt{1-\rho^2} - \tilde{\rho} \sin \frac{2\pi-\varphi}{2\tilde{\rho}} = 0 \\ \rho \sin \frac{2\pi-\varphi}{2\rho} - \sqrt{1-\tilde{\rho}^2} = 0 \\ \tilde{\rho} = \rho \\ \frac{\frac{\partial}{\partial \rho} \left(\sqrt{1-\rho^2} - \tilde{\rho} \sin \frac{2\pi-\varphi}{2\tilde{\rho}} \right)}{\frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \sin \frac{2\pi-\varphi}{2\rho} - \sqrt{1-\tilde{\rho}^2} \right)} = \frac{\frac{\partial}{\partial \tilde{\rho}} \left(\sqrt{1-\rho^2} - \tilde{\rho} \sin \frac{2\pi-\varphi}{2\tilde{\rho}} \right)}{\frac{\partial}{\partial \tilde{\rho}} \left(\rho \sin \frac{2\pi-\varphi}{2\rho} - \sqrt{1-\tilde{\rho}^2} \right)} \end{array} \right.$$

Ця система зводиться до наступної:

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{\rho} = \rho \quad , \quad \sqrt{1-\rho^2} - \rho \sin \frac{2\pi-\varphi}{2\rho} = 0 \\ \frac{\rho^2}{1-\rho^2} - \left(\sin \frac{2\pi-\varphi}{2\rho} - \frac{2\pi-\varphi}{2\rho^2} \cos \frac{2\pi-\varphi}{2\rho} \right)^2 = 0 \end{array} \right.$$

тобто,

$$\begin{cases} \tilde{\rho} = \rho, \quad \sqrt{1-\rho^2} - \rho \sin \frac{2\pi-\varphi}{2\rho} = 0 \\ \left(1 - \frac{2\pi-\varphi}{4} \sin \frac{2\pi-\varphi}{\rho}\right) \left(2\rho^2 - 1 + \frac{2\pi-\varphi}{4} \sin \frac{2\pi-\varphi}{\rho}\right) = 0 \end{cases}$$

В явному вигляді знайти розв'язок цієї системи складно, ми знайшли приблизне значення розв'язку в потрібному нам інтервалі значень ρ , $\tilde{\rho}$ і φ :

$$\varphi = 0.9786953\dots, \quad \rho = \tilde{\rho} = 0.9477766\dots$$

Таким чином, «перехідне» значення параметру $\varphi = \varphi_1$, після якого у системи (1) замість одного розв'язку виникають три різних розв'язки, дорівнює

$$\varphi_1 = 0.9786953\dots,$$

це значення є трохи меншим за $\frac{\pi}{3} = 60^\circ$.

Аналогічно, величина другого «перехідного» значення параметру $\varphi = \varphi_2$, після якого у системи (1) замість трьох різних розв'язків залишається лише один розв'язок, визначається з умови, що криві Γ і Γ^* перетинаються в граничних

точках $(\rho, \tilde{\rho}) = (1 - \frac{\varphi}{2\pi}, 1)$ і $(\rho, \tilde{\rho}) = (1, 1 - \frac{\varphi}{2\pi})$. Підставляючи ці значення

$(\rho, \tilde{\rho})$ в систему (1), отримуємо рівняння для знаходження φ_2 :

$$\sin \frac{2\pi-\varphi}{2} = \sqrt{1 - \left(1 - \frac{\varphi}{2\pi}\right)^2}$$

Знов отримали складне рівняння, виписати розв'язок якого в явному вигляді ми не можемо. Приблизне ж значення розв'язку цього рівняння дорівнює

$$\varphi_2 = 1.32052054\dots,$$

це значення трохи менше за $\frac{\pi}{2}$, приблизно 75° .

З геометричної точки зору маємо наступне:

- якщо $0 < \varphi \leq \varphi_1$ або $\varphi_2 < \varphi \leq \pi$, то для заданої розгортки, із обраним значенням кутового параметру φ , можна побудувати *лише одну* поверхню – сіамські біконуси, і ця поверхня буде утворена з двох однакових половинок;
- якщо $\varphi_1 < \varphi \leq \varphi_2$, то для заданої розгортки, із обраним значенням кутового параметру φ , можна побудувати *рівно три* зовнішньо різні сіамські біконуси, при цьому одна з цих поверхонь буде утворена з двох однакових половинок, а дві інші будуть взаємно симетричними, але кожна з них вже утворена з неконгруентних половинок (зокрема, при $\varphi = \varphi_2$ одна з половинок буде представляти собою «складений» біконус з розрізом, що має нульову висоту).

Окремо підкреслимо, що при жодному значенні φ сіамські біконуси не можуть представляти собою приклад неперервно згинаної поверхні.

Твердження 2. *Яке б не було $0 < \varphi < \pi$, сіамські біконуси не є неперервно згинаною поверхнею.*

Доведення: Згинаність сіамських біконусів при деякому $\varphi = \varphi_0$ означала б, що система (1) мала б не ізольовані розв'язки, а неперервне сімейство розв'язків. Тобто, при $\varphi = \varphi_0$ рівняння системи (1) були б еквівалентними, а криві Γ і Γ^* співпадали б і представляли собою криву, симетричну відносно бісектриси $\rho = \tilde{\rho}$. Тоді, з однієї сторони, ми б отримали, що $\varphi = \varphi_1$, бо співпадання Γ і Γ^* означає, зокрема, що ці криві взаємно дотикаються. А з іншої сторони ми б отримали, що $\varphi = \varphi_2$, бо співпадання Γ і Γ^* означає, що ці криві мають спільні кінцеві точки. Але $\varphi = \varphi_1$ і $\varphi = \varphi_2$ не можуть виконуватись одночасно, бо $\varphi_1 \neq \varphi_2$. Тому криві Γ і Γ^* не можуть співпадати при жодному значенні φ , а система (1) не може мати неперервного сімейства розв'язків, вона має лише ізольовані розв'язки. Геометрично, це і означає, що при жодному значенні φ сіамські біконуси не є неперервно згинаною поверхнею.

РОЗДІЛ 4. МОДЕЛЬНА ГНУЧКІСТЬ СІАМСЬКИХ БІКОНУСІВ ГОЛЬДБЕРГА

Розглянемо окремо випадок, коли $\varphi = \frac{\pi}{3}$ і будемо називати відповідну поверхню *сіамськими біконусами Гольдберга*, оскільки її розгортка утворена видаленням з круга сектора з кутом $\frac{\pi}{3}$ подібно до того, як розгортка оригінальних сіамських біпірамід Гольдберга утворювалась видаленням з правильного шестикутника одного складового правильного трикутника з кутами $\frac{\pi}{3}$.

В цьому конкретному випадку, криві Γ і Γ^* виглядають наступним чином:

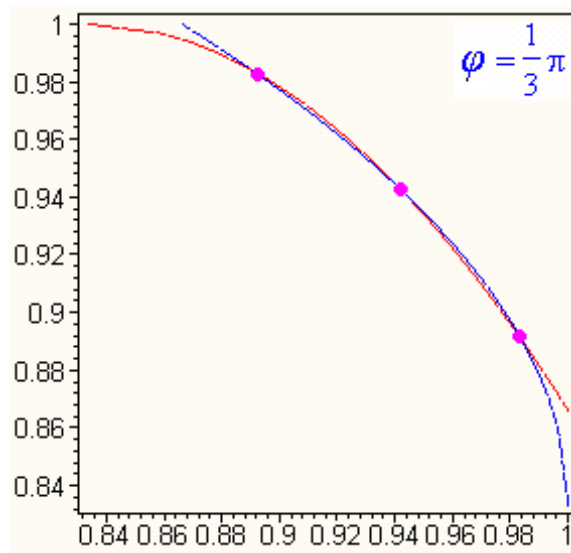


Рис.9. Криві Γ і Γ^* при $\varphi = \frac{\pi}{3}$

Як вже відзначалось, в цьому випадку криві Γ і Γ^* матимуть три різні точки перетину. Тобто, система (1) матиме три різні розв'язки. Приблизні значення розв'язків є наступними:

$$(\rho_1, \tilde{\rho}_1) = (0.8899865\dots, 0.9842472\dots),$$

$$(\rho_2, \tilde{\rho}_2) = (0.9422863\dots, 0.9422863\dots),$$

$$(\rho_3, \tilde{\rho}_3) = (0.9842472\dots, 0.8899865\dots).$$

З геометричної точки зору, це означає, що сіамські біконуси Гольдберга, зроблені з однієї розгортки, існують в трьох різних зовнішньо-геометричних формах.

Перша, що відповідає розв'язку $(\rho_1, \tilde{\rho}_1) = (0.8899865..., 0.9842472...)$, призводить до поверхні, утвореної з двох різних (не конгруентних) біконусів з розрізом. Зокрема, повна висота першого біконуса дорівнює

$$h_1 = 2L\sqrt{1 - \rho_1^2} = L \cdot 0.9119736...,$$

тоді як повна висота другого біконуса дорівнює

$$\tilde{h}_1 = 2L\sqrt{1 - \tilde{\rho}_1^2} = L \cdot 0.3535946...,$$

тобто, висоти двох біконусів, з яких складається поверхня, відрізняються майже в три рази.

Друга, що відповідає розв'язку $(\rho_2, \tilde{\rho}_2) = (0.9422863..., 0.9422863...)$, призводить до поверхні, утвореної з двох однакових (конгруентних) біконусів з розрізом. Повна висота кожного зі складових біконусів дорівнює

$$h_2 = 2L\sqrt{1 - \rho_2^2} = L \cdot 0.6696161...,$$

$$\tilde{h}_2 = 2L\sqrt{1 - \tilde{\rho}_2^2} = L \cdot 0.6696161... .$$

Нарешті, третя, що відповідає розв'язку $(\rho_3, \tilde{\rho}_3) = (0.9842472..., 0.8899865...)$, призводить до поверхні, утвореної з двох різних (не конгруентних) біконусів з розрізом. Зокрема, повна висота першого біконуса дорівнює

$$h_3 = 2L\sqrt{1 - \rho_3^2} = L \cdot 0.3535946...,$$

тоді як повна висота другого біконуса дорівнює

$$\tilde{h}_3 = 2L\sqrt{1 - \tilde{\rho}_3^2} = L \cdot 0.9119736...,$$

тобто, висоти двох біконусів, з яких складається поверхня, відрізняються майже в три рази. Зазначимо, що ситуація симетрична першому випадку, з перестановкою місцями складових біконусів поверхні.

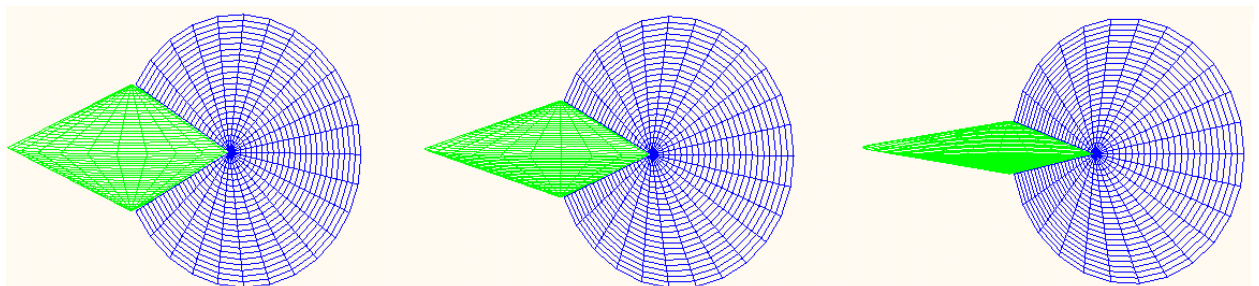


Рис.10. Три різні просторові форми сіамських біконусів Гольдберга

Таким чином, можемо зробити висновок, що сіамські біпіраміди Гольдберга дійсно існують в трьох зовнішньо різних формах, при цьому відмінність у зовнішньо-геометричних характеристиках, наприклад – у висоті поверхонь, є доволі суттєвою, дивись Рис.10.

Важливо зауважити, що криві Γ і Γ^* на проміжку між точками їх перетину майже не відрізняються одна від іншої, «різниця» між ними дуже маленька. Це означає, що ми можемо розглянути *неперервне* однопараметричне сімейство біконусів з розрізом BK_r і відповідне *неперервне* однопараметричне сімейство біконусів з розрізом $BK_{\tilde{r}}$ так, що при $(r, \tilde{r}) = (L\rho_j, L\tilde{\rho}_j)$, $j=1,2,3$, їх можна склеїти, утворивши замкнуту поверхню – сіамські біконуси Гольдберга, а при інших значеннях $(r, \tilde{r})$ різниця між висотами і хоками одних біконусів, і відповідно хоків та висот інших біконусів є доволі малою настільки, що біконуси з розрізами можна склеїти «хрест нахрест», застосувавши невеличкі додаткові складові компоненти - вставки, які компенсують різницю у значеннях висот і хоків.

Наприклад, розглянемо дугу кривої Γ між точками $(\rho_1, \tilde{\rho}_1)$ і $(\rho_3, \tilde{\rho}_3)$. Коли точка $(\rho, \tilde{\rho})$ рухається по цій дузі від $(\rho_1, \tilde{\rho}_1)$ до $(\rho_3, \tilde{\rho}_3)$, ми отримаємо *неперервне* однопараметричне сімейство багатогранників, кожний з яких утворений з двох біконусів з розрізом BK_r і $BK_{\tilde{r}}$. Те, що $(\rho, \tilde{\rho})$ рухається по кривій Γ означає, що висота $2h$ біконуса BK_r співпадає з хоком $\tilde{d}$ біконуса $BK_{\tilde{r}}$. Тому ми можемо розташувати біконуси «хрест нахрест» так, щоб сумістити одну пару вершин краю біконуса BK_r з відповідною парою вершин краю біконуса $BK_{\tilde{r}}$. А от інші пари вершин біконусів BK_r і $BK_{\tilde{r}}$ будуть, взагалі кажучи, відрізнятись, їх можна буде сумістити лише коли $(\rho, \tilde{\rho})$ потрапить в одну з точок $(\rho_j, \tilde{\rho}_j)$. Щоб оцінити, наскільки ці пари вершин відрізняється (є далекими від суміщення) розглянемо відповідну функцію

$$F = \tilde{h} - \frac{d}{2} = L \left(\sqrt{1 - \tilde{\rho}^2} - \rho \sin \frac{2\pi - \varphi}{2\rho} \right) = L \left(\sqrt{1 - \tilde{\rho}^2} - \rho \sin \frac{5\pi}{6\rho} \right).$$

В точках $(\rho_j, \tilde{\rho}_j)$ ця функція приймає нульове значення, що дозволяє повністю склеїти біконуси BK_r і $BK_{\tilde{r}}$, утворивши замкнуту поверхню – сіамські біконуси Гольдберга. Оцінимо, наскільки сильно функція F

відрізняється від 0 в інших точках дуги кривої Γ . Для цього нам потрібно знайти (оцінити) екстремальні значення вписаної функції $F(\rho, \tilde{\rho})$ за умови, що $(\rho, \tilde{\rho})$ рухається по кривій Γ , тобто, задовольняє умові

$$\sqrt{1-\rho^2} - \tilde{\rho} \sin \frac{5\pi}{6\tilde{\rho}} = 0$$

Це задача на умовний екстремум для функції двох змінних.

Запишемо відповідну функцію Лагранжа

$$\mathbf{L} = L\left(\sqrt{1-\tilde{\rho}^2} - \rho \sin \frac{5\pi}{6\rho}\right) - \lambda \left(\sqrt{1-\rho^2} - \tilde{\rho} \sin \frac{5\pi}{6\tilde{\rho}}\right)$$

і відповідні рівняння для знаходження екстремумів

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(L\left(\sqrt{1-\tilde{\rho}^2} - \rho \sin \frac{5\pi}{6\rho}\right) - \lambda \left(\sqrt{1-\rho^2} - \tilde{\rho} \sin \frac{5\pi}{6\tilde{\rho}}\right) \right) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial \tilde{\rho}} \left(L\left(\sqrt{1-\tilde{\rho}^2} - \rho \sin \frac{5\pi}{6\rho}\right) - \lambda \left(\sqrt{1-\rho^2} - \tilde{\rho} \sin \frac{5\pi}{6\tilde{\rho}}\right) \right) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(L\left(\sqrt{1-\tilde{\rho}^2} - \rho \sin \frac{5\pi}{6\rho}\right) - \lambda \left(\sqrt{1-\rho^2} - \tilde{\rho} \sin \frac{5\pi}{6\tilde{\rho}}\right) \right) = 0 \end{cases}$$

Отримуємо:

$$\begin{cases} L\left(\sin \frac{5\pi}{6\rho} - \frac{5\pi}{6\rho} \cos \frac{5\pi}{6\rho}\right) + \lambda \frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}} = 0 \\ L\left(\sin \frac{5\pi}{6\tilde{\rho}} - \frac{5\pi}{6\tilde{\rho}} \cos \frac{5\pi}{6\tilde{\rho}}\right) + \lambda \frac{\tilde{\rho}}{\sqrt{1-\tilde{\rho}^2}} = 0 \\ \sqrt{1-\rho^2} - \tilde{\rho} \sin \frac{5\pi}{6\tilde{\rho}} = 0 \end{cases}$$

Позбавляючись множника Лагранжа λ , отримуємо

$$\begin{cases} \left(\sin \frac{5\pi}{6\rho} - \frac{5\pi}{6\rho} \cos \frac{5\pi}{6\rho}\right) \frac{\tilde{\rho}}{\sqrt{1-\tilde{\rho}^2}} - \left(\sin \frac{5\pi}{6\tilde{\rho}} - \frac{5\pi}{6\tilde{\rho}} \cos \frac{5\pi}{6\tilde{\rho}}\right) \frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}} = 0 \\ \sqrt{1-\rho^2} - \tilde{\rho} \sin \frac{5\pi}{6\tilde{\rho}} = 0 \end{cases}$$

В області $\rho_1 \leq \rho \leq \rho_3$, $\tilde{\rho}_3 \leq \tilde{\rho} \leq \tilde{\rho}_1$ система має два розв'язки, приблизні значення яких є наступними:

$$(\rho_{12}, \tilde{\rho}_{12}) = (0.9099619..., 0.9697293...) ,$$

$$(\rho_{23}, \tilde{\rho}_{23}) = (0.9679551..., 0.9143091...) .$$

В точці $(\rho_{12}, \tilde{\rho}_{12})$ функція F приймає мінімальне значення, яке приблизно дорівнює $-L \cdot 0.004....$

В точці $(\rho_{23}, \tilde{\rho}_{23})$ функція F приймає максимальне значення, яке приблизно дорівнює $L \cdot 0.006....$

Тому можемо зробити висновок, що коли ми намагаємось склеїти біконуси з розрізами BK_r і $BK_{\tilde{r}}$, сумістивши одна пару відповідних вершин, то відстань між іншою парою вершин не буде перевищувати 0,6% від довжини ребра. Очевидно, ця різниця є дуже незначною. Щоб її компенсувати і утворити замкнуту поверхню, на додачу до двох біконусів з розрізами можна використати додаткові вставки у формі рівнобедрених трикутників зі сторонами довжини L і з основою довжини $L \cdot 0.006....$, тобто дуже тонкі і майже непомітні на реальних моделях поверхні.

Альтернативно, можна в області параметрів $(\rho, \tilde{\rho})$ разом з кривими Γ і Γ^* , заданими неявно рівняннями

$$\sqrt{1-\rho^2} - \tilde{\rho} \sin \frac{2\pi-\varphi}{2\tilde{\rho}} = 0, \quad \rho \sin \frac{2\pi-\varphi}{2\rho} = \sqrt{1-\tilde{\rho}^2}$$

відповідно, розглянути дві полоси $U\Gamma_\varepsilon$ і $U\Gamma_\varepsilon^*$, навколо кривих Γ і Γ^* , визначені умовами

$$\left| \sqrt{1-\rho^2} - \tilde{\rho} \sin \frac{2\pi-\varphi}{2\tilde{\rho}} \right| < \varepsilon, \quad \left| \rho \sin \frac{2\pi-\varphi}{2\rho} - \sqrt{1-\tilde{\rho}^2} \right| < \varepsilon,$$

відповідно, при деякому фіксованому (малому) значенні параметра $\varepsilon > 0$. Точки $(\rho, \tilde{\rho})$, які лежать в перетині цих двох полос відповідають ситуації, коли ми маємо два біконуси з розрізом BK_r і $BK_{\tilde{r}}$, у яких різниця між повними висотами і хоками не перевищує $2L\varepsilon$, тобто, ми можемо розташувати біконуси з розрізом BK_r і $BK_{\tilde{r}}$ хрест навхрест так, що відстань між відповідними вершинами біконусів не буде перевищувати $L\varepsilon$. Через цю

похибку ми, взагалі кажучи, не можемо склеїти до купи BK_r і $BK_{\tilde{r}}$, утворивши замкнуту поверхню - сіамську біпіраміду. Але цей недолік можна компенсувати, використавши додаткові «вставки» у формі трикутників, у яких одна сторона має довжину L , а довжина іншої сторони не більше $L\varepsilon$. При досить малих значеннях ε такі трикутники будуть дуже тонкими і майже непомітними порівняно з іншими компонентами – біконусами BK_r і $BK_{\tilde{r}}$.

Зокрема, якщо покласти $\varepsilon=0.005$, то ми матимемо дві полоси як на Рис. 11.

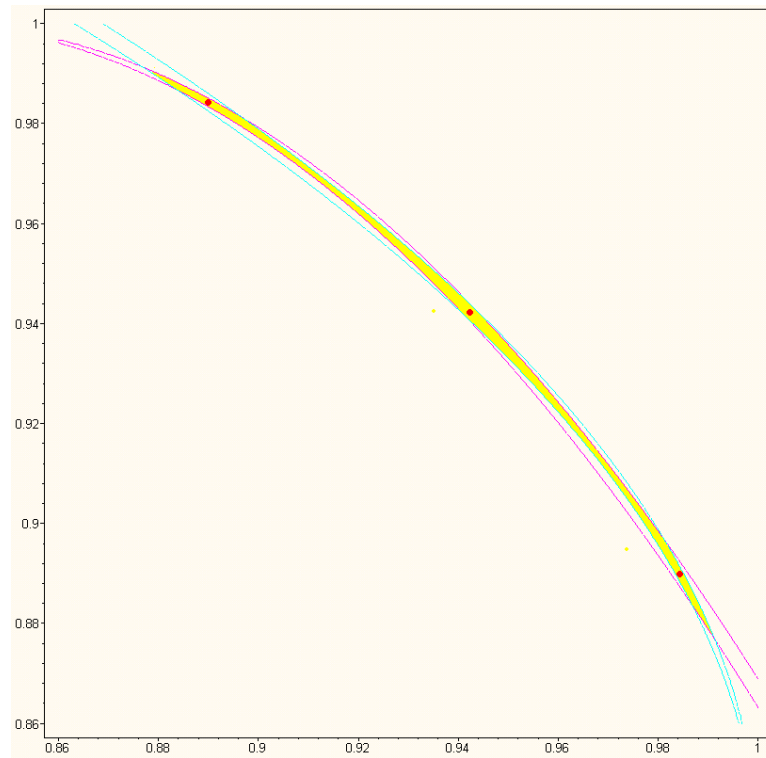


Рис.11. Дві полоси UG_ε (бузкова) і UG_ε^* (світло-блакитна),
Їх перетин (жовтий) та точки $(\rho_j, \tilde{\rho}_j)$ (червоний)

Як видно з малюнку, ці полоси мають непустий лінійно зв'язний перетин, який містить три точки $(\rho_1, \tilde{\rho}_1)$, $(\rho_2, \tilde{\rho}_2)$, $(\rho_3, \tilde{\rho}_3)$, що відповідають трьом різним формам сіамських біконусів Гольдберга. Якщо взяти яку-небудь неперервну криву в перетині полос UG_ε і UG_ε^* , що проходить через точки $(\rho_1, \tilde{\rho}_1)$, $(\rho_2, \tilde{\rho}_2)$, $(\rho_3, \tilde{\rho}_3)$, то їй буде відповідати неперервне однопараметричне сімейство сіамських біконусів зі «вставками», яке забезпечує неперервний перехід між трьома різними формами сіамських біконусів Гольдберга. Підкреслимо ще раз, що трикутні вставки мають дуже малий розмір, порядку 0,5% від довжини ребер L .¹

¹ Якщо взяти ще менше значення ε , скажімо, $\varepsilon=0.002$, то може статися так, що перетин областей UG_ε і UG_ε^* перестане бути лінійно зв'язним і ми більше не зможемо зв'язати потрібні нам точки неперервною кривою. Геометрично означає, що згадані вище вставки не можуть бути зовсім нівельованими при склеюванні біконусів з розрізами для утворення замкнутої поверхні – сіамських біконусів.

Як результат, ми маємо змогу спостерігати ефект «модельної» гнучкості сіамських біпірамід Гольдберга. А саме, якщо побудувати модель сіамської біпіраміди Гольдберга, використавши цупкий картон і скотч / липку стрічку для склеювання, ми отримаємо дуже «живу» криволінійну поверхню, яка під дією незначних зусиль дозволяє неперервні деформації з суттєвою зміною зовнішньої форми моделі, коли, наприклад, висота окремих компонент змінюється майже в три рази, при цьому можливі внутрішньо-геометричні зміни (деформація матеріалу, деформація в місцях склеювання) є настільки незначними, що їх дуже важко, майже неможливо, спостерігати візуально.

Ми безпосередньо перевірили описану «модельну» гнучкість сіамських біконусів Гольдберга, побудувавши конкретну модель цієї поверхні і пересвідчившись в її рухливості.



Рис.12. Паперова модель сіамських біконусів Гольдберга

РОЗДІЛ 5. ОБ'ЄМ СІАМСЬКИХ БІКОНУСІВ І ГІПОТЕЗА КОВАЛЬСКИХ МІХІВ

Зафіксуємо $0 < \varphi < \pi$ і розглянемо сіамські біконуси з відповідною розгорткою, що визначається кутом φ . Ця замкнута поверхня, сіамські біконуси, обмежує деяке тіло, об'єм якого позначимо V . Щоб обчислити об'єм, розділимо тіло на три частини – дві частини, «обмежені» біконусами з розрізом, що утворюють разом замкнуту поверхню – сіамські біконуси, і центральна частина, серцевина, що представляє собою піраміду, дивись Рис. 13.

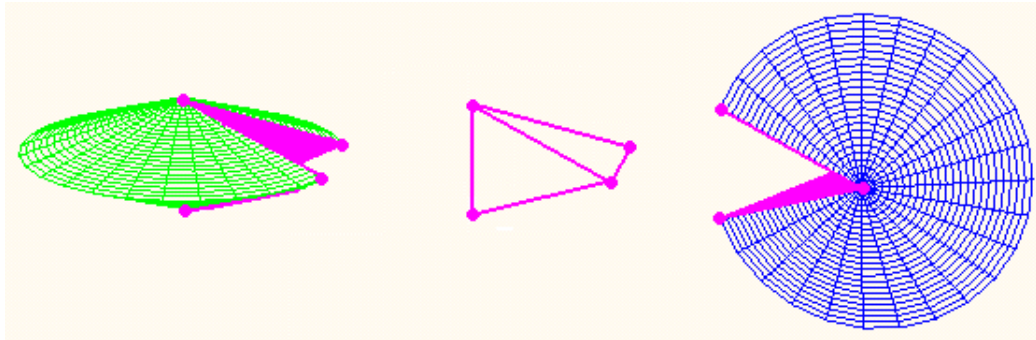


Рис.13. Компоненти тіла, обмеженого сіамськими біконусами

Об'єм першого біконуса з розрізом, радіус основи якого r , висота $2h$ і хок d , дорівнює

$$V_1 = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot h \cdot \left(\pi - \frac{\alpha}{2}\right) r^2$$

Об'єм другого біконуса з розрізом, радіус основи якого $\tilde{r}$, висота $2\tilde{h}$ і хок $\tilde{d}$, дорівнює

$$V_2 = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \tilde{h} \cdot \left(\pi - \frac{\tilde{\alpha}}{2}\right) \tilde{r}^2$$

Об'єм піраміди – серцевини, яка має дві сторони довжини $2h = \tilde{d}$ і $2\tilde{h} = d$, та чотири сторони довжини L , дорівнює

$$V_3 = \frac{1}{3} \cdot h \cdot r^2 \sin \alpha = \frac{1}{3} \cdot \tilde{h} \cdot \tilde{r}^2 \sin \tilde{\alpha}$$

Згадуючи, що

$$r = L\rho, \quad \alpha = 2\pi - (2\pi - \varphi) \frac{L}{r} = 2\pi - \frac{2\pi - \varphi}{\rho}, \quad h = \sqrt{L^2 - r^2} = L\sqrt{1 - \rho^2}$$

$$\tilde{r} = L\tilde{\rho}, \quad \tilde{\alpha} = 2\pi - (2\pi - \varphi) \frac{L}{\tilde{r}} = 2\pi - \frac{2\pi - \varphi}{\tilde{\rho}}, \quad \tilde{h} = \sqrt{L^2 - \tilde{r}^2} = L\sqrt{1 - \tilde{\rho}^2}$$

і обчислюючи сумарний об'єм $V=V_1+V_2+V_3$ трьох компонент, що разом утворюють тіло, обмежене сіамськими біконусами, знаходимо шукану формулу для об'єму цього тіла:

$$V = \frac{2}{3} L^3 \left(\frac{2\pi - \varphi}{2} (\rho \sqrt{1 - \rho^2} + \tilde{\rho} \sqrt{1 - \tilde{\rho}^2}) + \sqrt{1 - \rho^2} \sqrt{1 - \tilde{\rho}^2} \sqrt{\rho^2 + \tilde{\rho}^2 - 1} \right),$$

де ρ , $\tilde{\rho}$ визначаються з системи (1) при заданому φ .

Зокрема, для сіамських біконусів Гольдберга, коли $\varphi = \frac{\pi}{3}$, як показано вище, ми маємо три розв'язки, яким відповідають три різні просторові форми вказаної поверхні:

$$(\rho_1, \tilde{\rho}_1) = (0.8899865..., 0.9842472...) ,$$

$$(\rho_2, \tilde{\rho}_2) = (0.9422863..., 0.9422863...) ,$$

$$(\rho_3, \tilde{\rho}_3) = (0.9842472..., 0.8899865...) .$$

Для першої і третьої просторових форм сіамських біконусів Гольдберга об'єм буде дорівнювати

$$V = L^3 \cdot 1.0588817...,$$

тоді як для другої просторової форми (утвореної з двох однакових біконусів з розрізом) об'єм буде дорівнювати

$$V = L^3 \cdot 1.1670741....$$

Ми бачимо, що об'єм першої і третьої просторових форм більше ніж на 9 % є меншим за об'єм другої просторової форми сіамських біконусів Гольдберга.

Тому, коли ми розглянемо «майже ізометричну» неперервну деформацію, що пов'язує між собою усі три просторові форми сіамських біконусів Гольдберга, як у попередньому розділі, то під час вказаної деформації внутрішній об'єм буде зазнавати суттєвих змін.

Нагадаємо, що для згинаних багатогранників – флексорів справджується гіпотеза ковальських міхів: для будь-якого замкнутого згинаного багатогранника топологічного типу сфери його внутрішній об'єм під час неперервного згинання, коли форма, розміри і поєднання граней зберігаються, залишається незмінним [6].

В нашому випадку, хоча ми розглядаємо «майже згинання» і хотіли б сподіватись, що внутрішній об'єм під час деформації теж буде залишатись «майже незмінним», але наші сподівання не справджуються – об'єм все ж таки суттєво змінюється. Можливо, це пов'язано з тим, що ми розглядаємо не багатогранники, як в гіпотезі ковальських міхів, а вже криволінійну поверхню – сіамські біконуси Гольдберга.

ВИСНОВКИ

Таким чином, в ході роботи було розглянуто новий клас поверхонь – сіамські біконуси, що є криволінійним аналогом відомих раніше сіамських біпірамід Гольдберга і узагальнених сіамських біпірамід.

Кожний сіамський біконус породжується розгорткою, що визначається внутрішньо-геометричним параметром $0 < \varphi < \pi$, тобто, мова йде про однопараметричне сімейство сіамських біконусів.

Проведений аналіз показав, що жодна поверхня - сіамські біконуси не є гнучкою поверхнею, тобто, вона не дозволяє нетривіальних неперервних ізометричних деформацій.

Також було встановлено, при деяких конкретних φ_1 і φ_2 , що при $0 < \varphi \leq \varphi_1$ або $\varphi_2 < \varphi \leq \pi$ для заданої розгортки із обраним значенням параметру φ можна побудувати *лише одну* поверхню – сіамські біконуси, тоді як при $\varphi_1 < \varphi \leq \varphi_2$ для заданої розгортки із обраним значенням параметру φ можна побудувати *рівно три* зовнішньо різні сіамські біконуси. Тобто, в залежності від розгортки, кожна поверхня – сіамські біконуси може існувати або в одній, або в трьох різних просторових формах.

Сіамські біконуси з $\varphi = \frac{\pi}{3}$, названі в нашій роботі сіамськими біконусами

Гольдберга, є прикладом поверхні, що існує в трьох суттєво різних просторових формах, окремі розміри яких можуть відрізнятись майже на 30%. Було встановлено, що ці три поверхні можна включити в неперервне однопараметричне сімейство сіамських біпірамід «зі вставками» так, що розміри згаданих вставок складають не більше 0,5% від лінійних розмірів сіамських біконусів. Інакше кажучи, для сіамських біконусів Гольдберга була побудована «майже ізометрична» неперервна деформація, що пов'язує між собою усі три просторові форми, в яких може існувати ця поверхня. Наявність подібної деформації ми вважаємо геометричним обґрунтуванням «модельної гнучкості» сіамських біконусів Гольдберга – реальна модель цієї поверхні, зроблена з нерозтяжного матеріалу (наприклад – картон) є доволі нестійкою і при незначних навантаженнях може неперервно змінювати свою зовнішню форми без будь-яких спостережних деформацій матеріалу.

Нарешті, обчисливши внутрішній об'єм сіамських біконусів Гольдберга, ми прийшли до висновку, що для криволінійних поверхонь гіпотеза ковальських міхів Коннелі не справджується, а її формулювання потребує уточнення.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ПЕРШОДЖЕРЕЛ

1. Goldberg M., *Unstable polyhedral structures* // Mathematics Magazine, 1978, Vol. 51:3, P. 165-170.
2. Connelly R., *A counterexample to the rigidity conjecture for polyhedra* // Publications Mathematiques de l'IHES, 1977, Vol.47, P.333–338.
3. Connelly R., *Rigidity* // In *Handbook of convex geometry*, Amsterdam: North-Holland, 1993, P.223-271.
4. Gorkavyy V., Fesenko I., *On the model flexibility of Siamese dipyrramids* // Journal of Geometry, 2019, Vol.110, P.1-19.
5. Holmes-Cefron M., Theran L., Gortler S., *Almost-rigidity of frameworks* // Communications on Pure and Applied Mathematics, 2021, Vol 74:10, P.2185-2247.
6. Connelly R., Sabitov I., Walz A., *The bellows conjecture* // Contributions to Algebra and Geometry, 1997, Vol 38:1, P.1-10.