

К-14038

ISSN 0453-8048

П-327386

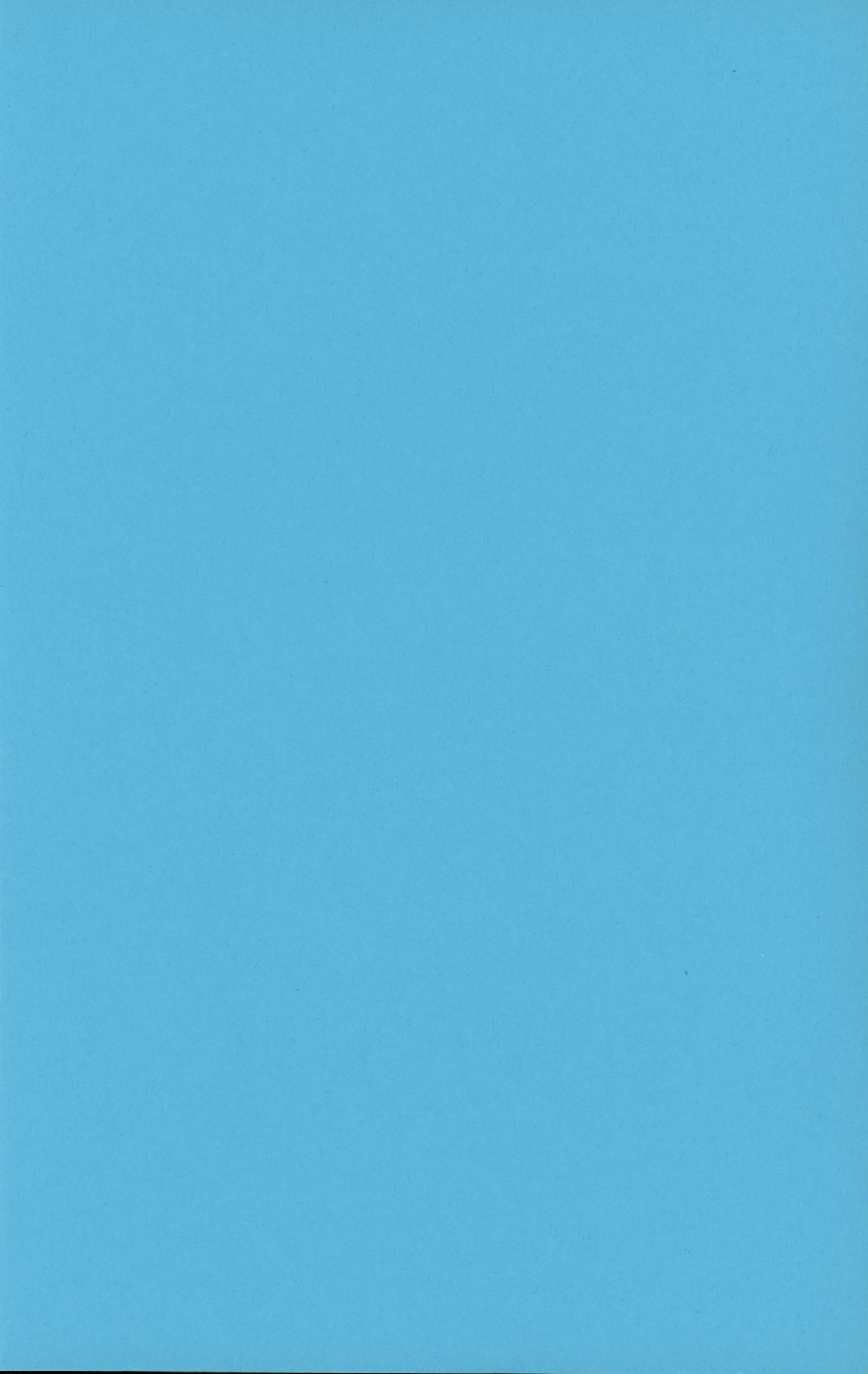
ВІСНИК

Харківського університету



№ 458

Харків
1999



Заснований у 1965 р.

ВІСНИК

Харківського університету



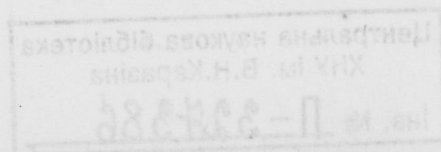
№ 458

Серія

«Математика,
прикладна математика
і механіка»

Випуск 48

Харків
1999



УДК 517.9

До Віснику включено статті з математичного аналізу, диференціальних рівнянь, математичної теорії керування та механіки, які містять нові теоретичні результати у зазначених галузях і мають прикладне значення.

Для викладачів, наукових працівників, аспірантів, працюючих у відповідних або суміжних сферах.

Редакційна колегія:

Головний редактор – Коробов В.І. – д-р ф.-м. наук.

Члени редакційної колегії:

Борисенко О.А. – д-р ф.-м. наук., чл.-кор. НАН України.

Гандель Ю.В. – д-р ф.-м. наук.

Гришин А.П. – д-р ф.-м. наук.

Золотарьов В.О. – д-р ф.-м. наук.

Руткас А.Г. – д-р ф.-м. наук.

Скляр Г.М. – д-р ф.-м. наук.

Тарапов І.Є. – д-р ф.-м. наук.

Фаворов С.Ю. – д-р ф.-м. наук.

Чудинович І.Ю. – д-р ф.-м. наук.

Чуєшов І.Д. – д-р ф.-м. наук.

Щербина В.О. – д-р ф.-м. наук.

Янцевич А.А. – д-р ф.-м. наук.

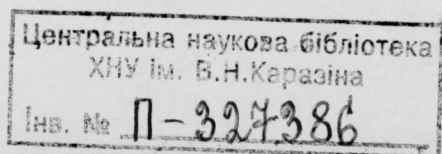
Відповідальний секретар – канд. ф.-м. наук Резуненко О.В.

Адреса редакційної колегії: 310077, Харків, пл. Свободи, 4,
ХДУ, механіко-математичний факультет, к.7-29.

Тел. 45-75-18, Email: vestnik@univer.kharkov.ua

Друкується за рішенням Вченої Ради Харківського державного університету (протокол № 6 від 25 червня 1999 р.)

©Харківський державний університет, 1999



О множестве позиционных управлений, решающих задачу синтеза в гильбертовых пространствах

Г. М. Скляр, В. А. Скорик

*Харьковский государственный университет
Szczecin University, Poland*

Рассмотрено решение задачи синтеза позиционного управления для управляемого процесса, который описывается линейным дифференциальным уравнением с ограниченными операторами в гильбертовом пространстве. А именно, дано описание множества ограниченных позиционных управлений таких, чтобы все решения соответствующего уравнения с произвольным начальным условием стремились к нулю за конечное время. На основе метода функционала управляемости получено конструктивное решение этой задачи. Показано, что любая невозрастающая неотрицательная на полуоси $[0, \infty)$ функция, имеющая достаточное число точек убывания, порождает искомое управление, решающее рассмотренную задачу.

1. Введение

Рассмотрим управляемый процесс, описываемый уравнением

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu, \quad x \in X, \quad u \in \Omega \subset U, \quad 0 \in \text{int}\Omega, \quad (1)$$

где X, U – пространства Гильберта, оператор A с областью определения $D(A)$ порождает сильно непрерывную группу $\{e^{At}\}$, $-\infty < t < +\infty$, $B \in [U, X]$.

Задача синтеза позиционных управлений, исследованию которой посвящена эта работа, для уравнения (1) состоит в построении управления u в виде функции от фазовой переменной $u = u(x)$ так, чтобы для любого $x_0 \in X$ решение $x(t)$ уравнения $\frac{dx}{dt} = Ax + Bu(x)$ с начальным условием $x(0) = x_0$ удовлетворяло при некотором конечном $T = T(x_0)$ условию $\lim_{t \rightarrow T(x_0)} x(t) = 0$. Задача синтеза управления за конечное время родственна задаче стабилизируемости, однако, в отличие от задачи стабилизируемости, она не может быть решена с помощью линейной обратной связи $u = Px$ (например, в случае, когда оператор A порождает сильно непрерывную группу $\{e^{At}\}$, $-\infty < t < \infty$, для любого $P \in [X, U]$ решение $x(t) = e^{(A+BP)t}x_0$ ($x_0 \neq 0$) уравнения $\frac{dx}{dt} = (A+BP)x$

удовлетворяет оценке $\|x(t)\| \geq ce^{-\lambda t}$, $\lambda > 0$, и, следовательно, управление $u = Px$ не решает задачу синтеза). Исключение составляет случай, когда $\omega_0(A) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln \|e^{At}\|}{t} = -\infty$.

Важным требованием, предъявляемым в дальнейшем к синтезирующему управлению $u(x)$, является его ограниченность в любой ограниченной окрестности точки 0 (задачу построения такого управления будем называть задачей синтеза ограниченного управления). Очевидно, что для разрешимости задачи синтеза ограниченного управления за конечное время необходимо, чтобы уравнение было точно 0-управляемым (за свободное время). Поэтому, не ограничивая общности, считаем, что изучаемое уравнение точно 0-управляемо.

Исследование задачи синтеза будем проводить с помощью введения вспомогательного функционала $\Theta(x)$ – функционала управляемости, играющего роль, аналогичную функционалу Ляпунова в задачах устойчивости. Впервые метод введения функционала (функции) управляемости был предложен В.И. Коробовым для конечномерных управляемых систем [1] и был развит совместно с Г.М. Скларом на бесконечномерный случай [2,3].

Основным результатом данной работы является описание множества ограниченных управлений, решающих задачу синтеза для уравнения (1) в случае, когда A является ограниченным оператором.

2. Построение синтезирующих управлений

Пусть $f(s)$ – произвольная невозрастающая неотрицательная на полуоси $[0, \infty)$ функция, такая, что $-\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\ln f(s)}{s} = f_0 > 0$ (в частности, константа f_0 может быть равна $+\infty$, например, когда f – финитна). Определим при $\lambda > \lambda_0 = \max \left\{ 0, \frac{2\omega_0(-A)}{f_0} \right\}$ оператор $N_f(\lambda)$ соотношением

$$N_f(\lambda)x = \int_0^\infty f(\lambda t) e^{-At} B B^* e^{-A^* t} x dt. \quad (2)$$

Тогда оператор $N_f(\lambda)$ является положительно определенным и, следовательно, обратимым.

Лемма 1. Оператор $N_f(\lambda)$ переводит множество $D(A^*)$ на множество $D(A)$ и на $D(A^*)$ удовлетворяет уравнению

$$A N_f(\lambda)x + N_f(\lambda)A^*x = -\hat{N}_f(\lambda)x + f(0)B B^*x, \quad (3)$$

где оператор $\hat{N}_f(\lambda)$ задается соотношением

$$\hat{N}_f(\lambda)x = \int_0^\infty e^{-At} B B^* e^{-A^* t} x d(-f(\lambda t)). \quad (4)$$

Доказательство леммы 1. Рассмотрим предел $\lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta} (e^{A\Delta} - E) N_f(\lambda)x$, $x \in D(A^*)$. Так как

$$\begin{aligned} e^{A\Delta} N_f(\lambda)x &= \int_0^\infty f(\lambda t) e^{-A(t-\Delta)} B B^* e^{-A^* t} x dt = \\ &= N_f(\lambda) e^{-A^* \Delta} x + \int_{-\Delta}^0 f(\lambda(t+\Delta)) e^{-A t} B B^* e^{-A^* t} dt e^{-A^* \Delta} x + \\ &+ \int_0^\infty [f(\lambda(t+\Delta)) - f(\lambda t)] e^{-A t} B B^* e^{-A^* t} dt e^{-A^* \Delta} x, \end{aligned}$$

то

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta} (e^{A\Delta} - E) N_f(\lambda)x &= N_f(\lambda) \frac{e^{-A^* \Delta} - E}{\Delta} x + \\ &+ \frac{1}{\Delta} \int_{-\Delta}^0 f(\lambda(t+\Delta)) e^{-A t} B B^* e^{-A^* t} dt e^{-A^* \Delta} x + \\ &+ \frac{1}{\Delta} \int_0^\infty [f(\lambda(t+\Delta)) - f(\lambda t)] e^{-A t} B B^* e^{-A^* t} dt e^{-A^* \Delta} x. \end{aligned} \quad (5)$$

Поскольку

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta} \int_{-\Delta}^0 f(\lambda(t+\Delta)) e^{-A t} B B^* e^{-A^* t} dt e^{-A^* \Delta} x &\rightarrow f(0) B B^* x \quad \text{при } \Delta \rightarrow 0, \\ \frac{1}{\Delta} \int_0^\infty [f(\lambda(t+\Delta)) - f(\lambda t)] e^{-A t} B B^* e^{-A^* t} dt e^{-A^* \Delta} x &\rightarrow -\hat{N}_f(\lambda)x \quad \text{при } \Delta \rightarrow 0 \end{aligned}$$

и оператор $N_f(\lambda)$ обратим, то предел $\lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta} (e^{A\Delta} - E) N_f(\lambda)x$ существует тогда и только тогда, когда существует предел $\lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta} (e^{-A^* \Delta} - E)x$. А это, согласно [4], означает, что $N_f(\lambda)x \in D(A)$ тогда и только тогда, если $x \in D(-A^*) = D(A^*)$. Кроме того, поскольку по определению [4]

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta} (e^{A\Delta} - E) N_f(\lambda)x = A N_f(\lambda)x, \quad \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta} (e^{-A^* \Delta} - E)x = -A^* x,$$

то из (5) следует

$$A N_f(\lambda)x = -N_f(\lambda) A^* x - \hat{N}_f(\lambda)x + f(0) B B^* x, \quad x \in D(A^*),$$

что и завершает доказательство леммы 1.

Будем определять функционал $\Theta(x)$ при $x \neq 0$ из уравнения

$$2a_0\Theta = \left(N_f^{-1}\left(\frac{1}{\Theta}\right)x, x\right), \quad a_0 > 0, \quad (6)$$

где $0 < \Theta \leq \Theta_f$ (Θ_f – некоторая константа). Покажем, что уравнение (6) имеет единственное положительное решение $\Theta(x)$ в некоторой замкнутой области $\mathbf{Q}_1 = \{x : \|x\| \leq R\}$. Для этого при каждом фиксированном $x \neq 0$ рассмотрим функцию

$$\Phi(\Theta) = 2a_0\Theta - \left(N_f^{-1}\left(\frac{1}{\Theta}\right)x, x\right), \quad a_0 > 0. \quad (7)$$

Так как $\Phi'(\Theta) = 2a_0 + \frac{1}{\Theta} \left(\tilde{N}_f\left(\frac{1}{\Theta}\right)N_f^{-1}\left(\frac{1}{\Theta}\right)x, N_f^{-1}\left(\frac{1}{\Theta}\right)x\right)$, где

$$\tilde{N}_f(\lambda)x = \int_0^\infty te^{-At}BB^*e^{-A^*t}xd(-f(\lambda t)), \quad (8)$$

и поскольку $\tilde{N}_f\left(\frac{1}{\Theta}\right)$ является положительно определенным оператором, то $\Phi'(\Theta) \geq 2a_0 > 0$. Покажем, что $\Phi(\Theta) \rightarrow -\infty$ при $\Theta \rightarrow 0$. Действительно, поскольку $\left\|N_f\left(\frac{1}{\Theta}\right)\right\| \rightarrow 0$ при $\Theta \rightarrow 0$, то выполнено $\left(N_f^{-1}\left(\frac{1}{\Theta}\right)x, x\right) \geq \left\|N_f\left(\frac{1}{\Theta}\right)\right\|^{-1}(x, x) \rightarrow +\infty$ при $\Theta \rightarrow 0$, $x \neq 0$. Отсюда имеем, что $\Phi(\Theta) \rightarrow -\infty$ при $\Theta \rightarrow 0$. Выберем число $R > 0$ таким, чтобы $\left(N_f^{-1}\left(\frac{1}{\Theta_f}\right)x, x\right) < 2a_0\Theta_f$ при $x \in \mathbf{Q}_1$. Тогда $\Phi(\Theta_f) > 0$ при $x \in \mathbf{Q}_1 \setminus \{0\}$. Поэтому для всех $x \in \mathbf{Q}_1 \setminus \{0\}$ уравнение (6) имеет единственное положительное решение.

Так как обе части уравнения (6) непрерывно дифференцируемы по Θ и x , причем $\Phi'(\Theta) \neq 0$ при $x \neq 0$, то по теореме о неявном операторе [5] функционал $\Theta(x)$ непрерывно дифференцируем в $\mathbf{Q}_1 \setminus \{0\}$ и его производная Фреше Θ_x имеет вид

$$\Theta_x = \frac{2N_f^{-1}\left(\frac{1}{\Theta(x)}\right)x}{2a_0 + \frac{1}{\Theta(x)}\left(\tilde{N}_f\left(\frac{1}{\Theta(x)}\right)N_f^{-1}\left(\frac{1}{\Theta(x)}\right)x, N_f^{-1}\left(\frac{1}{\Theta(x)}\right)x\right)}, \quad (9)$$

причем

$$\|\Theta_x\| \leq \frac{1}{a_0} \left\|N_f^{-1}\left(\frac{1}{\Theta(x)}\right)\right\| \|x\|. \quad (10)$$

Доопределим функционал $\Theta(x)$ в нуле значением ноль, т.е. положим $\Theta(0) = 0$. Покажем, что функционал $\Theta(x)$ удовлетворяет условиям 1) – 4) теоремы 1 работы [2]. Для этого нам осталось проверить следующие свойства.

1. Функционал $\Theta(x)$ непрерывен в нуле. Для доказательства заметим, что поскольку при $x \neq 0$ функция $\left(N_f^{-1}\left(\frac{1}{\Theta}\right)x, x\right)$ монотонно убывает по Θ , то при $\Theta \geq \varepsilon$ выполняется неравенство $\left(N_f^{-1}\left(\frac{1}{\Theta}\right)x, x\right) \leq \left(N_f^{-1}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)x, x\right)$.

Выберем для произвольного числа $\varepsilon > 0$ число $\delta > 0$, которое удовлетворяет неравенству $\delta < \sqrt{2a_0\varepsilon / \|N_f^{-1}(\varepsilon)\|}$. Пусть $\|x\| \leq \delta$. Тогда, если бы было $\Theta \geq \varepsilon$, то имели бы противоречие, которое возникает из неравенств

$$2a_0\varepsilon \leq 2a_0\Theta(x) \leq (N_f^{-1}(\varepsilon)x, x) \leq \|N_f^{-1}(\varepsilon)\| \|x\|^2 < 2a_0\varepsilon.$$

Таким образом, $\Theta(x) < \varepsilon$ и непрерывность функционала $\Theta(x)$ в нуле установлена.

2. Покажем, что из $\Theta(x) \rightarrow 0$ следует, что $x \rightarrow 0$. Ввиду справедливости неравенства $2a_0\Theta = (N_f^{-1}(\frac{1}{\Theta})x, x) \geq \frac{\|x\|^2}{\|N_f(\frac{1}{\Theta})\|}$, имеем $\|x\|^2 \leq 2a_0\Theta \|N_f(\frac{1}{\Theta})\|$. Так как $\|N_f(\frac{1}{\Theta})\| \rightarrow 0$ при $\Theta \rightarrow 0$, то из последнего неравенства следует, что $\|x\| \rightarrow 0$ при $\Theta \rightarrow 0$.

3. Существует $c_f > 0$ такое, что множество $\mathbf{Q}_c = \{x : \Theta(x) \leq c_f\}$ таково, что $\mathbf{Q}_c \subset \text{int}\mathbf{Q}_1$ и ограничено. Это свойство непосредственно вытекает из предыдущего.

Из леммы 1 следует, что оператор $N_f^{-1}(\frac{1}{\Theta})$, $\Theta \leq \Theta_f$, переводит $\mathbf{D}(A)$ на $\mathbf{D}(A^*)$ и удовлетворяет на множестве $\mathbf{D}(A)$ уравнению

$$N_f^{-1}\left(\frac{1}{\Theta}\right)Ax + A^*N_f^{-1}\left(\frac{1}{\Theta}\right)x = -N_f^{-1}\left(\frac{1}{\Theta}\right)\hat{N}_f\left(\frac{1}{\Theta}\right)N_f^{-1}\left(\frac{1}{\Theta}\right)x + \\ + f(0)N_f^{-1}\left(\frac{1}{\Theta}\right)BB^*N_f^{-1}\left(\frac{1}{\Theta}\right)x. \quad (11)$$

Следовательно, по теореме 2 из работы [4] функционал $\Psi(x) = \Phi_t(x, 0)$, где $\Phi(x, t) = \Theta(x(t))$ (x – произвольное фиксированное начальное состояние из множества $\mathbf{Q}_c \setminus \{0\}$, $x(t)$ – траектория уравнения (1), соответствующая этому начальному состоянию), при любом непрерывном в $\mathbf{Q}_c \setminus \{0\}$ управлении $u(x)$, удовлетворяющем условию Липшица в каждом кольце $\mathbf{K}(\rho_1, \rho_2) = \{x : 0 < \rho_1 \leq \|x\| \leq \rho_2\}$, определен и непрерывен.

Зададим при $x \neq 0$ управление $u_f(x)$ следующим образом:

$$u_f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}f(0)B^*N_f^{-1}\left(\frac{1}{\Theta(x)}\right)x, & x \in \mathbf{Q}_c \setminus \{0\}, \\ -\frac{1}{2}f(0)B^*N_f^{-1}\left(\frac{1}{c_f}\right)x, & x \in \mathbf{X} \setminus \mathbf{Q}_c. \end{cases} \quad (12)$$

$$(13)$$

Управление $u_f(x)$, задаваемое формулами (12)–(13), является непрерывной функцией в $\mathbf{X} \setminus \{0\}$ и дифференцируемой всюду за исключением, быть может, линии уровня $\{x : \Theta(x) = c_f\}$. Управление (12) можно продолжить на множество $\mathbf{Q}_1 \setminus \{0\}$, т.е. можно рассмотреть функцию $v(x) = -\frac{1}{2}f(0)B^*N_f^{-1}\left(\frac{1}{\Theta(x)}\right)x$, $x \in \mathbf{Q}_1 \setminus \{0\}$. Покажем, что функция $v(x)$ удовлетворяет условию Липшица в каждом кольце $\mathbf{K}(\rho_1, \rho_2) = \{x : \rho_1 \leq \|x\| \leq \rho_2\}$,

$0 < \rho_1 < \rho_2 < R$. Для этого рассмотрим производную Фреше v_x функции $v(x)$. Имеем

$$v_x = -\frac{1}{2}f(0)B^*N_f^{-1}\left(\frac{1}{\Theta(x)}\right) + \frac{1}{2\Theta(x)}f(0)B^*N_f^{-1}\left(\frac{1}{\Theta(x)}\right)\tilde{N}_f\left(\frac{1}{\Theta(x)}\right) \cdot N_f^{-1}\left(\frac{1}{\Theta(x)}\right)(\Theta_x, x), \quad (14)$$

где оператор $\tilde{N}_f(\lambda)$ определяется формулой (8), а производная Фреше Θ_x функционала $\Theta(x)$ задается формулой (9). С другой стороны, из монотонного убывания функции $\|N_f^{-1}\left(\frac{1}{\Theta}\right)\|$ и неравенств

$$2a_0\Theta(x) \geq \frac{1}{\|N_f\left(\frac{1}{\Theta(x)}\right)\|}\|x\|^2 \geq \frac{1}{M_f}\rho_1^2, \quad 2a_0\Theta(x) \leq \|N_f^{-1}\left(\frac{1}{\Theta(x)}\right)\|\|x\|^2,$$

получаем, что в кольце $K(\rho_1, \rho_2)$ функционал $\Theta(x)$ удовлетворяет оценке

$$0 < M_1 = \frac{\rho_1^2}{2a_0M_f} < |\Theta(x)| < M_2 = \frac{\bar{M}_f\rho_2^2}{2a_0}. \quad (15)$$

Учитывая неравенства (10) и (15), из (14) получаем, что производная Фреше v_x ограничена в $K(\rho_1, \rho_2)$ и, следовательно, функция $v(x)$ удовлетворяет в кольце $K(\rho_1, \rho_2)$ условию Липшица. Отсюда заключаем, что управление $u_f(x)$ из (12) удовлетворяет условию Липшица в $Q_c \cap K(\rho_1, \rho_2)$. Поскольку вне множества Q_c управление $u_f(x)$, задаваемое формулой (13), линейно, то $u_f(x)$ удовлетворяет условию Липшица в любой области $K(\rho) = \{x : 0 < \rho \leq \|x\|\}$. Тем самым мы показали, что для управления (12)–(13) имеют место условия 5) и 6) теоремы 1 из [2].

Рассмотрим функционал $\Psi_f(x) = \langle \Theta_x, Ax + Bu_f(x) \rangle$, $x \in D(A) \cap (Q_c \setminus \{0\})$. Дифференцируя равенство (6) в силу уравнения (1) с управлением (12), имеем:

$$\begin{aligned} \Psi_f(x) = & \left[\left(\left[N_f^{-1}\left(\frac{1}{\Theta(x)}\right)A + A^*N_f^{-1}\left(\frac{1}{\Theta(x)}\right) \right] x, x \right) - \right. \\ & \left. - \left(f(0)BB^*N_f^{-1}\left(\frac{1}{\Theta(x)}\right)x, N_f^{-1}\left(\frac{1}{\Theta(x)}\right)x \right) \right] / \left[\frac{1}{\Theta(x)} \left(N_f^{-1}\left(\frac{1}{\Theta(x)}\right)x, x \right) + \right. \\ & \left. + \frac{1}{\Theta(x)} \left(\tilde{N}_f\left(\frac{1}{\Theta(x)}\right)N_f^{-1}\left(\frac{1}{\Theta(x)}\right)x, N_f^{-1}\left(\frac{1}{\Theta(x)}\right)x \right) \right], \end{aligned}$$

где оператор $\tilde{N}_f(\lambda)$ определяется формулой (8). Отсюда и равенства (11) получаем, что

$$\begin{aligned} \Psi_f(x) = & \left[\left(\hat{N}_f\left(\frac{1}{\Theta(x)}\right)N_f^{-1}\left(\frac{1}{\Theta(x)}\right)x, N_f^{-1}\left(\frac{1}{\Theta(x)}\right)x \right) \right] / \left[\frac{1}{\Theta(x)} \left(N_f^{-1}\left(\frac{1}{\Theta(x)}\right)x, x \right) + \right. \\ & \left. + \frac{1}{\Theta(x)} \left(\tilde{N}_f\left(\frac{1}{\Theta(x)}\right)N_f^{-1}\left(\frac{1}{\Theta(x)}\right)x, N_f^{-1}\left(\frac{1}{\Theta(x)}\right)x \right) \right], \quad (16) \end{aligned}$$

где оператор $\hat{N}_f(\lambda)$ из (4).

3. Основной результат

Здесь мы покажем, что построенное нами позиционное управление является ограниченным в окрестности нуля и решает задачу синтеза для уравнения (1) в предположении, что оператор $A \in [X, X]$. Доказательство проведем на основании теоремы 1 из работы [2]. Поскольку нами уже показано, что функционал $\Theta(x)$ и управление $u_f(x)$ удовлетворяют условиям 1) – 6) теоремы 1 из [2] (даже без предположения ограниченности оператора A), то получим оценку для функционала $\Psi_f(x)$ в некоторой области $Q_c \setminus \{0\}$ ($Q_c = \{x : \Theta(x) \leq c_f\}$) и докажем ограниченность управления $u_f(x)$ в этой области.

В силу точной управляемости уравнения (1), на основании работы [6] существует некоторое целое число $m \geq 0$ такое, что

$$Sp(BU, ABU, \dots, A^m BU) = X. \quad (17)$$

Введем в рассмотрение гильбертово пространство $U^{m+1} = \underbrace{U \times \dots \times U}_{m+1}$, $m = 0, 1, \dots$, элементами которого являются векторы $(u_0, u_1, \dots, u_m)$, $u_k \in U$, $k = 0, 1, \dots, m$, с нормой $\|(u_0, u_1, \dots, u_m)\| = \left(\sum_{k=0}^m \|u_k\|^2\right)^{\frac{1}{2}}$ и скалярным в нем произведением, задаваемым соотношением

$$((u_0, u_1, \dots, u_m), (v_0, v_1, \dots, v_m)) = \sum_{k=0}^m (u_k, v_k).$$

Пусть S_m – ограниченный оператор, действующий из пространства U^{m+1} в пространство X по правилу $S_m(u_0, u_1, \dots, u_m) = \sum_{k=0}^m A^k B u_k$. Тогда, согласно соотношению (17), образ оператора S_m совпадает со всем пространством X . Поскольку пространство U^{m+1} является гильбертовым, то оператор S_m осуществляет изоморфизм подпространства $(Ker S_m)^\perp$ и пространства X . Но тогда оператор S_m обладает правым обратным, т.е. существует оператор $P \in [X, U^{m+1}]$ такой, что $S_m P = E$. Отсюда имеем, что существуют операторы $P_k \in [X, U]$, $k = 0, 1, \dots, m$, такие, что $\sum_{k=0}^m A^k B P_k = E$. Следовательно,

$$\sum_{k=0}^m P_k^* B^* A^{*k} = E. \quad (18)$$

Из (18) получаем, что для любого натурального $l \geq 1$ справедливо следующее операторное равенство $B^* (-A^*)^{m+l} = \sum_{k=0}^m B^* (-A^*)^{m+l} P_k^* B^* A^{*k}$. Тогда

$$B^* e^{-A^* t} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} B^* (-A^*)^k =$$

$$= \sum_{k=0}^m \left(\frac{t^k}{k!} I_U + (-1)^k \sum_{l=1}^{\infty} \frac{t^{m+l}}{(m+l)!} B^* (-A^*)^{m+l} P_k^* \right) B^* (-A^*)^k. \quad (19)$$

Далее нам понадобится следующая лемма, являющаяся обобщением леммы 1 работы [7].

Лемма 2. Пусть $A \in [X, X]$ и $B \in [U, X]$ – произвольные операторы, X и U гильбертовы пространства и пусть $\mu(s)$, $s \in [0, \infty)$ – монотонная функция, имеющая, по крайней мере, m точек роста и такая, что при $0 < \Theta \leq \Theta_\mu$ выполнено условие $\int_0^\infty s^{2m+2} e^{2s\Theta \|A^*\|} d\mu(s) < \infty$ (константа m определяется соотношением (17)).

Тогда существует константа $c_\mu > 0$ такая, что при $0 < \Theta \leq c_\mu$ и некоторых положительных констант l_μ и L_μ ($0 < l_\mu < L_\mu$) справедливы неравенства

$$\begin{aligned} l_\mu \sum_{k=0}^m \Theta^{2k} \|B^* A^{*k} x\|^2 &\leq \left(\int_0^\infty e^{-At} B B^* e^{-A^*t} d\mu \left(\frac{t}{\Theta} \right) x, x \right) \leq \\ &\leq L_\mu \sum_{k=0}^m \Theta^{2k} \|B^* A^{*k} x\|^2. \end{aligned} \quad (20)$$

Доказательство леммы 2. Из равенства (19) имеем, что

$$B^* e^{-A^*t} x = \sum_{k=0}^m \left(\frac{t^k}{k!} I_U + r_k(t) \right) B^* (-A^*)^k x,$$

где операторы $r_k \in [U, U]$ и имеют вид

$$r_k(t) = (-1)^k \sum_{l=1}^{\infty} \frac{t^{m+l}}{(m+l)!} B^* (-A^*)^{m+l} P_k^*, \quad k = 0, 1, \dots, m, \quad (21)$$

причем

$$\|r_k(t)\| \leq R_k t^{m+1} e^{t\|A^*\|}, \quad R_k > 0, \quad t \in [0, +\infty), \quad k = 0, 1, \dots, m. \quad (22)$$

Действительно, из равенства (21) имеем

$$\begin{aligned} \|r_k(t)\| &\leq t^{m+1} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{t^{l-1}}{(l-1)!} \|B^*\| \|A^*\|^{m+l} \|P_k^*\| = \\ &= \|B^*\| \|A^*\|^{m+1} \|P_k^*\| t^{m+1} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{t^l}{l!} \|A^*\|^l \leq R_k t^{m+1} e^{t\|A^*\|}, \quad k = 0, 1, \dots, m. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\left(\int_0^\infty e^{-At} B B^* e^{-A^*t} d\mu \left(\frac{t}{\Theta} \right) x, x \right) = \int_0^\infty (B^* e^{-A^*\tau\Theta} x, B^* e^{-A^*\tau\Theta} x) d\mu(\tau) =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^\infty \left(\sum_{k=0}^m \left(\frac{\tau^k}{k!} I_U + \frac{r_k(\tau\Theta)}{\Theta^k} \right) z_k, \sum_{k=0}^m \left(\frac{\tau^k}{k!} I_U + \frac{r_k(\tau\Theta)}{\Theta^k} \right) z_k \right) d\mu(\tau) = \\
&= (D_m F_{\mu,m} D_m z, z) + \Theta (G_m(\Theta) z, z), \quad (23)
\end{aligned}$$

где $z \in U^{m+1}$ – вектор с компонентами $z_k = \Theta^k B^* (-A^*)^k x \in U$, $k=0, \dots, m$;

$$D_m = \left(\delta_{kj} \frac{1}{k!} I_U \right)_{k,j=0}^m, \quad F_{\mu,m} = \left(\int_0^\infty \tau^{k+j} d\mu(\tau) I_U \right)_{k,j=0}^m, \quad G_m = (g_{k,j}(\Theta))_{k,j=0}^m,$$

$$g_{k,j}(\Theta) = \int_0^\infty \left(\frac{\tau^k}{k!} \frac{r_j^*(\tau\Theta)}{\Theta^{j+1}} + \frac{\tau^j}{j!} \frac{r_k(\tau\Theta)}{\Theta^{k+1}} + \frac{r_k(\tau\Theta) r_j^*(\tau\Theta)}{\Theta^{k+j+1}} \right) d\mu(\tau), \quad k, j=0, \dots, m,$$

δ_{kj} – символ Кронекера. Тогда на основании (22) имеем

$$\begin{aligned}
\|g_{kj}(\Theta)\| &\leq \int_0^\infty \left(\frac{\tau^{k+m+1}}{k!} R_j \Theta^{m-j} e^{\tau\Theta\|A^*\|} + \frac{\tau^{j+m+1}}{j!} R_k \Theta^{m-k} e^{\tau\Theta\|A^*\|} + \right. \\
&\quad \left. + R_k R_j \tau^{2m+2} \Theta^{2m-k-j+1} e^{2\tau\Theta\|A^*\|} \right) d\mu(\tau),
\end{aligned}$$

и поэтому операторы $g_{kj}(\Theta)$ ограничены при $0 < \Theta \leq \Theta_\mu$. Поскольку матрица

$$[F_{\mu,m}] = \begin{pmatrix} \int_0^\infty d\mu(\tau) & \int_0^\infty \tau d\mu(\tau) & \dots & \int_0^\infty \tau^m d\mu(\tau) \\ \int_0^\infty \tau d\mu(\tau) & \int_0^\infty \tau^2 d\mu(\tau) & \dots & \int_0^\infty \tau^{m+1} d\mu(\tau) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \int_0^\infty \tau^m d\mu(\tau) & \int_0^\infty \tau^{m+1} d\mu(\tau) & \dots & \int_0^\infty \tau^{2m} d\mu(\tau) \end{pmatrix}$$

является матрицей моментов, которая, в силу предположений леммы 2, положительно определена [8,9], то и оператор $F_{\mu,m}$ является положительно определенным. Отсюда и из равенства (23) вытекает утверждение леммы 2.

Обозначим через $F_m(A)$ – класс невозрастающих неотрицательных на полуоси $[0, +\infty)$ функций f , имеющих, по крайней мере, m точек убывания и таких, что выполнены следующие условия: $-\lim_{s \rightarrow +\infty} \frac{\ln f(s)}{s} = f_0 > 0$,

$\int_0^\infty s^{2m+3} e^{2s\Theta\|A^*\|} d(-f(s)) < \infty$ при $0 < \Theta \leq \Theta_f$, где число m из соотношения (17). Отметим, что если оператор A ненулевой, то второе из этих условий влечет первое.

Решение задачи синтеза позиционных ограниченных управлений дает

Теорема. Рассмотрим уравнение (1), где X, U – гильбертовы пространства, $A \in [X, X]$, $B \in [U, X]$. Предположим, что уравнение (1)

точно 0-управляемо. Пусть $f \in \mathfrak{F}_m(A)$ и $\Theta(x)$ – функционал, определяющийся уравнением (6) в области $\mathbf{Q}_1 \setminus \{0\}$; $\Theta(0) = 0$.

Тогда существует константа $c_f > 0$ такая, что $\mathbf{Q}_c = \{x : \Theta(x) \leq c_f\} \subset \text{int} \mathbf{Q}_1$, и для любого $x_0 \in \mathbf{Q}_c \setminus \{0\}$ единственное решение $x(t)$ уравнения (1) с управлением (12) и начальным условием $x(0) = x_0$ определено на некотором полуинтервале $[0, T(x_0))$ и удовлетворяет условию $\lim_{t \rightarrow T(x_0)} x(t) = 0$, где $T(x_0) \leq \gamma \Theta(x_0)$, $\gamma > 0$. При этом, для любого числа $d > 0$ коэффициент a_0 можно выбрать так, что управление $u_f(x)$ будет удовлетворять ограничению $\|u_f(x)\| \leq d$ при $x \in \mathbf{Q}_c \setminus \{0\}$.

Доказательство теоремы. Пусть $c_f = \min\{c_{\mu_1}, c_{\mu_2}, c_{\mu_3}\}$, где константы c_{μ_i} ($i = 1, 2, 3$) из леммы 2 для функций $\mu_1(s) = \int_0^s f(\tau) d\tau$, $\mu_2(s) = -f(s)$, $\mu_3(s) = -\int_0^s \tau df(\tau)$. $\mathbf{Q}_c \subset \text{int} \mathbf{Q}_1$. Установим оценку для функционала $\Psi_f(x)$, а также покажем ограниченность управления $u_f(x)$ в области $\mathbf{Q}_c \setminus \{0\}$. Функционал $\Psi_f(x)$, как было показано, имеет вид (16). Введем замену переменных вида $\varphi(x) = N_f^{-1} \left(\frac{1}{\Theta(x)} \right) x$. Следовательно, из (16) имеем

$$\Psi_f(x) = - \frac{\left(\hat{N}_{\mu_2} \left(\frac{1}{\Theta(x)} \right) \varphi(x), \varphi(x) \right)}{\left(N_{\mu_1} \left(\frac{1}{\Theta(x)} \right) \varphi(x), \varphi(x) \right) + \left(\tilde{N}_{\mu_3} \left(\frac{1}{\Theta(x)} \right) \varphi(x), \varphi(x) \right)}, \quad (24)$$

где $N_{\mu_1}(\lambda) = \int_0^\infty e^{-At} B B^* e^{-A^* t} d\mu_1(\lambda t)$, $\hat{N}_{\mu_2}(\lambda) = \int_0^\infty e^{-At} B B^* e^{-A^* t} d\mu_2(\lambda t)$, $\tilde{N}_{\mu_3}(\lambda) = \int_0^\infty e^{-At} B B^* e^{-A^* t} d\mu_3(\lambda t)$. Тогда, на основании леммы 2, из (24) получаем, что при некоторых положительных константах l_{μ_2} , L_{μ_1} и L_{μ_3} выполнено неравенство $\Psi_f(x) \leq -\frac{l_{\mu_2}}{L_{\mu_1} + L_{\mu_3}}$, т.е. установлена оценка (5) из [3] при $\beta = l_{\mu_2}/(L_{\mu_1} + L_{\mu_3})$ и $\alpha = 1$, причем время движения из точки x_0 в ноль не превосходит $\frac{1}{\beta} \Theta(x_0)$, $x(t) \in \mathbf{Q}_c$ при $t \in [0, T(x_0))$ и $\lim_{t \rightarrow T(x_0)} x(t) = 0$.

Установим ограниченность управления $u_f(x)$ при $x \in \mathbf{Q}_c \setminus \{0\}$. Так как

$$\|u_f(x)\|^2 = \frac{f^2(0)}{4} \|B^* \varphi(x)\|^2 = \frac{f^2(0)}{2} a_0 \Theta(x) \frac{\|B^* \varphi(x)\|^2}{\left(N_f \left(\frac{1}{\Theta(x)} \right) \varphi(x), \varphi(x) \right)},$$

то, на основании неравенства (20), имеем $\|u_f(x)\|^2 \leq \frac{f^2(0)}{2l_{\mu_1}} a_0$. Тогда, выбирая коэффициент a_0 из условия $0 < a_0 \leq a_f = \frac{2l_{\mu_1} d^2}{f^2(0)}$, получаем, что $\|u_f(x)\| \leq d$ при $x \in \mathbf{Q}_c \setminus \{0\}$, чем и завершается доказательство теоремы.

Теорема дает решение задачи синтеза для уравнения (1) в некоторой окрестности точки 0. Однако, с помощью этой теоремы нетрудно получить решение задачи синтеза и во всем пространстве $\mathbf{X}$.

Следствие. Доопределим в теореме управление $u_f(x)$ формулой (13).

Тогда для любого начального вектора $x_0 \in X$ единственное решение $x(t)$ уравнения (1) с управлением $u_f(x)$ определено на некотором полуинтервале $[0, T(x_0))$ и удовлетворяет условию $\lim_{t \rightarrow T(x_0)} x(t) = 0$, причем, если $x_0 \in X \setminus Q_c$, то $T(x_0) \leq \gamma c_f + \frac{1}{\gamma_1 2a_0 c_f} \left[\left(N_f^{-1} \left(\frac{1}{c_f} \right) x_0, x_0 \right) - 2a_0 c_f \right] \|N_f^{-1} \left(\frac{1}{c_f} \right)\|$, $\gamma_1 > 0$.

Доказательство. Поскольку ранее показано, что управление $u_f(x)$, задаваемое формулами (12)–(13), удовлетворяет условию Липшица на любом множестве вида $K(\rho) = \{0 < \rho \leq \|x\|\}$, то для любого начального условия $x(0) = x_0 \neq 0$ решение уравнения (1) с управлением $u_f(x)$ существует и единственно на некотором отрезке $[0, \tau(x_0)]$. Пусть $x_0 \in X \setminus Q_c$. Покажем, что существует время $T_1 \leq \frac{1}{\gamma_1 2a_0 c_f} \left[\left(N_f^{-1} \left(\frac{1}{c_f} \right) x_0, x_0 \right) - 2a_0 c_f \right] \|N_f^{-1} \left(\frac{1}{c_f} \right)\|$ такое, что для решения $x(t)$ уравнения (1) с управлением $u_f(x)$ и начальным условием $x(0) = x_0$ выполнено $x(T_1) \in Q_c$. Пусть это не так, т.е. $x(\tau) \in X \setminus Q_c$ для всех $\tau \leq \frac{1}{\gamma_1 2a_0 c_f} \left[\left(N_f^{-1} \left(\frac{1}{c_f} \right) x_0, x_0 \right) - 2a_0 c_f \right] \|N_f^{-1} \left(\frac{1}{c_f} \right)\|$ таких, что решение $x(t)$ продолжается по формуле $x(t) = e^{\left(A - \frac{1}{2} f(0) B B^* N_f^{-1} \left(\frac{1}{c_f} \right) \right) t} x_0$ на весь отрезок $[0, \tau_0]$, где $\tau_0 = \frac{1}{\gamma_1 2a_0 c_f} \left[\left(N_f^{-1} \left(\frac{1}{c_f} \right) x_0, x_0 \right) - 2a_0 c_f \right] \|N_f^{-1} \left(\frac{1}{c_f} \right)\|$.

Введем функцию $V_{\frac{1}{c_f}}(x) = \left(N_f^{-1} \left(\frac{1}{c_f} \right) x, x \right)$. Так как на основании соотношения (11) имеем $\dot{V}_{\frac{1}{c_f}}(x) = - \left(N_f^{-1} \left(\frac{1}{c_f} \right) \hat{N}_f \left(\frac{1}{c_f} \right) N_f^{-1} \left(\frac{1}{c_f} \right) x, x \right)$, то, используя неравенство $\|x\|^2 \geq \frac{2a_0 c_f}{\|N_f^{-1} \left(\frac{1}{c_f} \right)\|}$, имеем

$$\dot{V}_{\frac{1}{c_f}}(x(t)) \leq -\gamma_1 \frac{2a_0 c_f}{\|N_f^{-1} \left(\frac{1}{c_f} \right)\|}, \quad t \in [0, \tau_0]. \quad (25)$$

Интегрируя неравенство (25) на отрезке $[0, \tau]$ ($0 \leq \tau \leq \tau_0$), получаем неравенство $\left(N_f^{-1} \left(\frac{1}{c_f} \right) x(\tau), x(\tau) \right) - \left(N_f^{-1} \left(\frac{1}{c_f} \right) x_0, x_0 \right) \leq -\gamma_1 \frac{2a_0 c_f}{\|N_f^{-1} \left(\frac{1}{c_f} \right)\|} \tau$. Подставляя $\tau = \tau_0$, имеем:

$$\left(N_f^{-1} \left(\frac{1}{c_f} \right) x(\tau_0), x(\tau_0) \right) \leq 2a_0 c_f. \quad (26)$$

Покажем, что неравенство (26) противоречит предположению о том, что $x(\tau_0) \in X \setminus Q_c$. Во-первых, покажем, что $x(\tau_0) \in Q_1$, т.е. $\|x(\tau_0)\| \leq R$. От противного. Из неравенства (26) следует, что если $\|x(\tau_0)\| > R$, то

$$\left(N_f^{-1} \left(\frac{1}{c_f} \right) y, y \right) \leq 2a_0 c_f, \quad (27)$$

где $y = \frac{x(\tau_0)}{\|x(\tau_0)\|} R$. Поскольку $\|y\| = R$, то в точке y определен функционал управляемости $\Theta(y)$ из уравнения $2a_0 \Theta(y) = \left(N_f^{-1} \left(\frac{1}{\Theta(y)} \right) y, y \right)$. Так как при $\Theta \rightarrow 0$ выполнено $\left(N_f^{-1} \left(\frac{1}{\Theta} \right) y, y \right) \rightarrow +\infty$, то справедливо неравенство $2a_0 \Theta <$

$(N_f^{-1}(\frac{1}{\Theta})y, y)$ и из (27) следует, что $0 < \Theta(y) \leq c_f$, т.е. $y \in Q_c$. А это противоречит включению $Q_c \subset \text{int}Q_1$. Во-вторых, покажем, что $x(\tau_0) \in Q_c$. Поскольку $x(\tau_0) \in Q_1$, то в точке $x(\tau_0)$ определен функционал управляемости Θ из уравнения $2a_0\Theta(x(\tau_0)) = (N_f^{-1}(\frac{1}{\Theta(x(\tau_0))})x(\tau_0), x(\tau_0))$. Так как при $\Theta \rightarrow 0$ выполнено $(N_f^{-1}(\frac{1}{\Theta})x(\tau_0), x(\tau_0)) \rightarrow +\infty$, то $(N_f^{-1}(\frac{1}{\Theta})x(\tau_0), x(\tau_0)) > 2a_0\Theta$ при $\Theta \rightarrow 0$, и из неравенства (27) следует, что $\Theta(x(\tau_0)) \leq c_f$, т.е. $x(\tau_0) \in Q_c$. Полученное противоречие показывает, что существует $T_1 \leq \tau_0$ такое, что $x(T_1) \in Q_c$.

Доказательство следствия завершается применением теоремы.

Замечание. Аналогичный результат справедлив и в случае, когда функционал $\Theta(x)$ при $x \neq 0$ определяется из уравнения

$$2a_0\Theta^\nu = (N_f^{-1}(\frac{1}{\Theta})x, x), \quad a_0 > 0, \nu \geq 1.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Коробов В. И. Общий подход к решению задачи синтеза ограниченных управлений в задаче управляемости // Матем. сб. – 1979. – Т. 109(151), 4(8). – С. 582–606.
2. Коробов В. И., Скляр Г. М. Решение задачи синтеза с помощью функционала управляемости для систем в бесконечномерных пространствах // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1983. – 5. – С. 11–14.
3. Коробов В. И., Скляр Г. М. Синтез управления в уравнениях, содержащих неограниченный оператор // Теория функций, функц. анализ и их приложения. – Вып. 45. – 1986. – С. 45–63.
4. Балакришнан А. Введение в теорию оптимизации в гильбертовом пространстве. – М.: Мир, 1974. – 259 с.
5. Треногин В. А. Функциональный анализ. – М.: Наука, 1980. – 496 с.
6. Коробов В. И., Рабах Р. Точная управляемость в банаховом пространстве // Дифференц. ур-ния. – 1979. – Т. 15, 12. – С. 2142–2150.
7. Коробов В. И., Скляр Г. М. О множестве позиционных ограниченных управлений, решающих задачу синтеза // Докл. АН СССР. – 1990. – Т. 312, 6. – С. 1304–1308.
8. Крейн М. Г., Нудельман А. А. Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи. – М.: Наука, 1973. – 551 с.
9. Ахиезер Н. И. Классическая проблема моментов. – М.: Госиздат. физ.-мат. литературы, 1961. – 310 с.

Об одном методе расчета сходящихся ударных волн

С. А. Пославский, Е. А. Миллер

Харьковский государственный университет

Рассмотрено новое применение известного приближенного метода Честера-Чизнелла-Уизема для расчета эволюции ударных волн. Показано, что в рамках этого метода возможно сведение нестационарной задачи о движении фронта волны к задаче об установившемся сверхзвуковом потоке газа при специально подобранном показателе политропы. Использование переменных годографа позволило получить решение в аналитической форме. Для сходящейся ударной волны, имеющей первоначально форму эллиптического цилиндра, проведены численные расчеты.

1. В теоретических исследованиях пространственных нестационарных газодинамических течений с ударными волнами (УВ) используется множество различных приближенных аналитических и численных методов, так или иначе отражающих специфику конкретных задач. Одним из таких методов для решения задач о сходящихся ударных волнах в идеальном газе является приближенный метод Честера-Чизнелла-Уизема [1]. Он позволяет во многих случаях достаточно хорошо отслеживать эволюцию фронта УВ и значения на нем газодинамических функций (плотности, давления и скорости движения среды). В основу метода положены два допущения:

- 1) каналовое приближение, т.е. отождествление поля нормалей к различным положениям фронта УВ с полем касательных к линиям тока,
- 2) "правило характеристик", т.е. использование дифференциального соотношения для параметров газа вдоль акустической характеристики, догоняющей фронт УВ, в качестве условия для параметров непосредственно за фронтом.

Рассмотрим случай очень сильной УВ, распространяющейся по однородной неподвижной среде. Закон движения фронта неявно зададим в виде $\alpha(\vec{r}) = a_0 t$, где $\vec{r}$ — радиус-вектор точки на фронте, a_0 — невозмущенная скорость звука, t — время. Тогда функция α удовлетворяет следующему уравнению в частных производных [1]:

$$\operatorname{div} \left(\frac{\nabla \alpha}{|\nabla \alpha|^{n+1}} \right) = 0, \quad (1)$$

где $n = 1 + 2/\gamma + \sqrt{2\gamma/(\gamma - 1)}$, γ — показатель адиабаты для данного газа.

Заметим, что такому же уравнению (1) удовлетворяет потенциал скорости $\vec{q}$ стационарного безвихревого течения политропного газа, если специальным образом выбрать показатель политропы κ и положить значение постоянной в интеграле Бернулли равным нулю. Действительно, из соотношений

$$\operatorname{div}(\rho \vec{q}) = 0,$$

$$\vec{q} = \nabla \alpha,$$

$$\frac{q^2}{2} + A\rho^{\kappa-1} = 0,$$

где $A < 0$ — постоянная, получаем уравнение (1), полагая $\kappa = (n-1)/(n+1)$.

Таким образом, поверхности уровня функции, совпадающие с положениями фронта УВ, одновременно можно представить как эквипотенциальные поверхности некоторого установившегося политропного течения газа с показателем политропы κ , меньшим единицы. Это течение является сверхзвуковым, причем число Маха M оказывается постоянным во всем потоке: $M = \sqrt{n+1}$.

Полученная аналогия позволяет воспользоваться известными в теории установившихся течений газа методами для приближенного решения задачи о движении фронта УВ. Таким образом, задача об эволюции УВ заданной начальной формы и с заданным начальным распределением интенсивности (скорости движения фронта) эквивалентна задаче определения установившегося сверхзвукового течения в некоторой области по известному распределению скорости газа на данной поверхности.

2. Рассмотрим цилиндрические УВ, которым соответствуют плоские стационарные течения. В плоскости годографа (u, v) система для двумерных безвихревых изэнтропических течений идеального газа имеет вид:

$$\begin{cases} x_v - y_u = 0, \\ (u^2 - a^2)y_v - 2uvx_v + (v^2 - a^2)x_u = 0. \end{cases} \quad (2)$$

где x, y — прямоугольные декартовы координаты, u, v — компоненты скорости $\vec{q}$ течения, a — скорость звука.

Введем потенциал Лежандра Φ следующим образом:

$$x = \Phi_u, \quad y = \Phi_v. \quad (3)$$

Потенциал Лежандра $\Phi(u, v)$ связан с потенциалом скорости α соотношением

$$\alpha = xu + yv - \Phi, \quad (4)$$

называемым преобразованием Лежандра [2].

Система (2) сводится к уравнению Монжа-Ампера [2]:

$$(u^2 - a^2)\Phi_{vv} - 2uv\Phi_{uv} + (v^2 - a^2)\Phi_{uu} = 0. \quad (5)$$

Переходя к полярным координатам (q, θ) на плоскости годографа, с учетом равенства $M^2 = q^2/a^2 = 2/(1-\kappa)$ получаем окончательный вид уравнения (5):

$$\Phi_{\theta\theta} + \frac{\kappa-1}{\kappa+1} q^2 \Phi_{qq} + q \Phi_q = 0. \quad (6)$$

Это уравнение имеет гиперболический тип, т.к. $0 < \kappa < 1$.

Рассматривая сходящуюся цилиндрическую УВ, приходим к краевой задаче для уравнения (6) с граничными условиями, определяемыми начальным положением и интенсивностью УВ.

В плоскости переменных (x, y) краевые условия следует задать на замкнутой кривой, совпадающей с начальным положением фронта УВ.

Заметим, что для гиперболического уравнения постановка краевых условий на замкнутой кривой некорректна: в случае сверхзвукового течения на плоскости (x, y) возникают предельные линии, при переходе через которые решение становится комплексным [3,4]. Применительно к рассматриваемой задаче об эволюции фронта УВ, с наличием предельных линий связано появление особенностей (изломов) на фронте УВ. Ограничимся рассмотрением движения фронта УВ до момента возникновения таких особенностей, т.к. для изучения дальнейшего поведения УВ необходимо усложнить модель [1].

Пусть в начальный момент времени $t = t_0$ заданы форма фронта УВ — гладкая замкнутая кривая S , на которой выполняется соотношение $L(x, y) = 0$, и скорость U фронта в каждой точке этой кривой, связанная со скоростью q соответствующего установившегося течения соотношением [1] $U = a_0/q$.

Рассматривается случай, когда кривая S ограничивает выпуклую фигуру, т.е. зависимость $q(\theta)$ однозначна.

Скорость УВ направлена по нормали к фронту, поэтому

$$u = \frac{L_x q}{\sqrt{L_x^2 + L_y^2}}, \quad v = \frac{L_y q}{\sqrt{L_x^2 + L_y^2}}.$$

На кривой S

$$u = q(\theta) \cos \theta, \quad v = q(\theta) \sin \theta.$$

Из соотношений (3) получаем

$$\begin{aligned} x &= \Phi_q \cos \theta - \Phi_\theta \frac{\sin \theta}{q}, \\ y &= \Phi_q \sin \theta + \Phi_\theta \frac{\cos \theta}{q}. \end{aligned} \quad (7)$$

Таким образом, на кривой S выполняются соотношения:

$$\begin{cases} L \left(\Phi_q \cos \theta - \Phi_\theta \frac{\sin \theta}{q}, \Phi_q \sin \theta + \Phi_\theta \frac{\cos \theta}{q} \right) = 0, \\ \cos \theta = \frac{L_x}{\sqrt{L_x^2 + L_y^2}}. \end{cases}$$

Отсюда находим зависимость Φ_θ , Φ_q от θ на S , считая функцию $q(\theta)$ заданной. Далее, определяем значения потенциала Лежандра Φ в точках кривой S , используя равенство $(d\Phi/d\theta)|_S = \Phi_\theta + \Phi_q dq/d\theta$. Отсюда зависимость $\Phi|_S = f(\theta)$ получается обычным интегрированием. Таким образом, для уравнения (6) получены граничные условия вида

$$\Phi|_{S_1} = f(\theta),$$

$$\Phi_q|_{S_1} = F(\theta),$$

где $f(\theta)$, $F(\theta)$ — известные функции, S_1 — образ кривой S на плоскости годографа.

Пример. Найдем потенциал Лежандра для течения от источника. Потенциал скорости этого течения $\alpha = Cr^{1/n+1}$, эквипотенциальные линии — окружности $x^2 + y^2 - r^2 = 0$. Компоненты скорости имеют вид

$$u = \frac{\partial \alpha}{\partial x} = \left(\frac{1}{n} + 1\right)Cr^{\frac{1}{n}-1}x, \quad v = \frac{\partial \alpha}{\partial y} = \left(\frac{1}{n} + 1\right)Cr^{\frac{1}{n}-1}y.$$

Из соотношения (4) определяем потенциал Лежандра

$$\Phi = \left(\frac{n}{C}\right)^n \left(\frac{q}{n+1}\right)^{n+1},$$

где $q = \sqrt{u^2 + v^2} = (1/n + 1)Cr^{1/n}$.

Согласно рассматриваемой аналогии, течению от источника соответствует УВ, начальная форма которой — окружность, а начальная скорость U_0 всюду одинакова. Отметим, что в полученном решении скорость U фронта УВ пропорциональна $r^{-1/n}$, что хорошо согласуется с автомодельным решением Гудерлея-Ландау-Станюковича задачи о сходящейся цилиндрической УВ [1].

3. Аналитическое решение и результаты расчетов.

Пусть начальная интенсивность фронта УВ одинакова во всех точках фронта. Тогда уравнение линии S_1 имеет вид $q = q_0$. Заменой $w = \ln(q/q_0)$ уравнение для потенциала Лежандра (6) приводится к телеграфному уравнению $\Phi_{\theta\theta} = -((\kappa - 1)\Phi_{ww} + 2\Phi_w)/(\kappa + 1)$. Сделав еще одну замену $\Phi = h(\theta, w)\exp(w/(1 - \kappa))$, приходим к уравнению

$$h_{ww} = \frac{1 + \kappa}{1 - \kappa} h_{\theta\theta} + \frac{1}{(1 + \kappa)^2} h$$

с граничными условиями

$$\left. \begin{aligned} h|_{w=0} &= \Phi|_{w=0} = f(\theta), \\ h_w|_{w=0} &= \Phi_w|_{w=0} - \frac{1}{1 - \kappa} f(\theta) = F_1(\theta). \end{aligned} \right\}$$

Здесь условие $w = 0$ эквивалентно исходному условию $q = q_0$.

Полученное уравнение имеет аналитическое решение [5]:

$$h(\theta, w) = \frac{1}{2} \left[f(Z_1) + f(Z_2) + \int_{Z_1}^{Z_2} K(\theta, w, z) dz \right],$$

$$K(\theta, w, z) = \sqrt{\frac{1+\kappa}{1-\kappa}} F_1(z) J_0 \left(\frac{1}{\sqrt{1-\kappa^2}} R_w \right) + \frac{w}{1-\kappa} \frac{f(z)}{R_w} J'_0 \left(\frac{1}{\sqrt{1-\kappa^2}} R_w \right),$$

где

$$R_w = \sqrt{(z - \theta)^2 - \frac{1+\kappa}{1-\kappa} w^2},$$

$$Z_1 = \theta - \sqrt{\frac{1+\kappa}{1-\kappa}} w, \quad Z_2 = \theta + \sqrt{\frac{1+\kappa}{1-\kappa}} w,$$

J_0 — функция Бесселя нулевого порядка.

Возвращаясь к переменной q , получаем

$$\Phi|_{q=q_0} = f(\theta), \quad \Phi_q|_{q=q_0} = \frac{1}{q_0} \Phi_w|_{w=0} = F(\theta).$$

Таким образом,

$$F_1(\theta) = q_0 F(\theta) - \frac{1}{1-\kappa} f(\theta).$$

Окончательный вид решения уравнения (6):

$$\Phi(\theta, q) = \frac{1}{2} \left(\frac{q}{q_0} \right)^{\frac{1}{1-\kappa}} \left[f(z_1) + f(z_2) + \int_{z_1}^{z_2} K(\theta, q, z) dz \right],$$

$$K(\theta, q, z) = \sqrt{\frac{1+\kappa}{1-\kappa}} \left(q_0 F(z) - \frac{1}{1-\kappa} f(z) \right) J_0 \left(\frac{1}{\sqrt{1-\kappa^2}} R_q \right) + \frac{1}{1-\kappa} \ln \left(\frac{q}{q_0} \right) \frac{f(z)}{R_q} J'_0 \left(\frac{1}{\sqrt{1-\kappa^2}} R_q \right), \quad (8)$$

где

$$R_q = \sqrt{(z - \theta)^2 - \frac{1+\kappa}{1-\kappa} \ln^2 \left(\frac{q}{q_0} \right)},$$

$$z_1 = \theta - \sqrt{\frac{1+\kappa}{1-\kappa}} \ln \left(\frac{q}{q_0} \right), \quad z_2 = \theta + \sqrt{\frac{1+\kappa}{1-\kappa}} \ln \left(\frac{q}{q_0} \right).$$

Иллюстративный расчет был проведен для фронта УВ, первоначально имеющего форму эллиптического цилиндра. Интегрирование уравнения (6) осуществлялось численными методами, без использования аналитических формул (8).

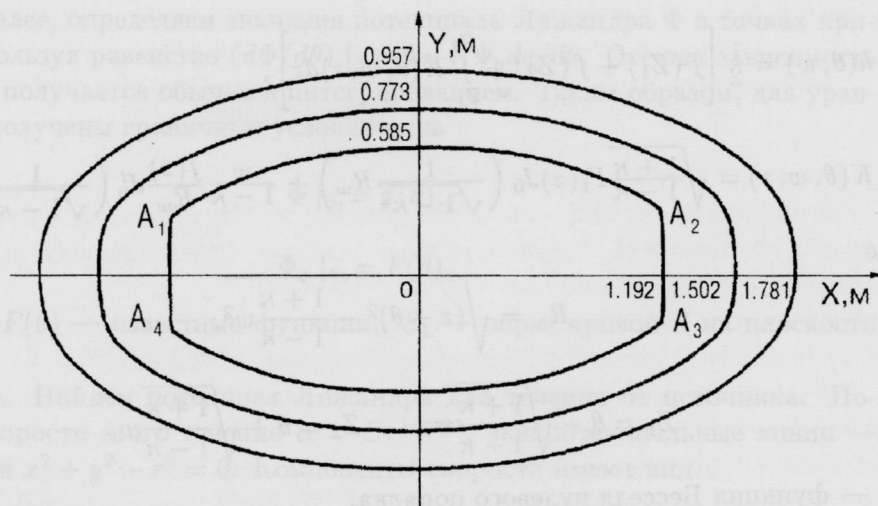


Рис. 1: Эволюция фронта эллиптической УВ

Граничные условия в этом случае таковы:

$$\Phi|_{q=q_0} = q_0 \frac{bc}{b^2 - c^2} (B(\theta) - C(\theta)) + \Phi_0,$$

$$\Phi_q|_{q=q_0} = \frac{b^2 \cos^2 \theta}{B(\theta)} + \frac{c^2 \sin^2 \theta}{C(\theta)}.$$

Здесь b, c — полуоси эллипса,

$$B(\theta) = b \sqrt{1 - \left(1 - \frac{b^2}{c^2}\right) \cos^2 \theta}, \quad C(\theta) = c \sqrt{1 - \left(1 - \frac{c^2}{b^2}\right) \sin^2 \theta}.$$

Результаты расчетов позволили получить изображение фронта УВ в различные моменты времени (рис. 1).

Точки A_i ($i = \overline{1,4}$) — изломы УВ. Расчеты проводились при $\kappa = 1/2$, $b = 3$, $c = 2$.

Аналогично может быть решена и обратная задача: найти начальную форму и начальное распределение интенсивности УВ, которая в некоторый момент времени достигает заданной формы и интенсивности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Упзем Дж. Линейные и нелинейные волны. – М.: Мпр, 1977. – 622 с.
2. Овсянников Л.В. Лекции по основам газовой динамики. – М.: Наука, 1981. – 233 с.
3. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика. Т. VI Гидродинамика. – М.: Наука, 1986. – 736 с.
4. Мизес Р. Математическая теория течений сжимаемой жидкости. – М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1961. – 588 с.
5. Кошляков Н. С., Глинер Э. Б., Смирнов М. М. Уравнения в частных производных математической физики. – М.: Высш. шк., 1970. – 710 с.

Об алгоритмических вопросах для обратных и прямых задач теории струны Стилтеса и ортогональных многочленах

Ю. В. Лысенко, И. Е. Овчаренко

Харьковский государственный университет

В статье представлены пошаговые алгоритмы, основанные на рекурсии Чебышева для восстановления струны Стилтеса по последовательности моментов ее спектральных функций и пошаговые алгоритмы для проверки, является ли последовательность моментов положительно определенной в смысле Стилтеса.

Введение

Примерно через 50 лет после появления знаменитых исследований Т. Стилтеса [11] М. Г. Крейном [4] (см. также [8]) была дана их механическая интерпретация в терминах теории струны с сосредоточенными массами (струна с бусинками). Рассмотрение этой механической модели оказалось полезным как в прикладном плане, так и в теоретическом, послужив толчком к исследованию струны с произвольным распределением масс — модели абстрактного положительного оператора. Из вероятностных соображений к струнам общего вида пришел В. Феллер. Общая теория струны изложена в дополнении И. С. Каца и М. Г. Крейна к монографии [1]. Очень подробно с привлечением теории гильбертовых пространств целых функций она изложена в монографии [5].

Нами приводятся некоторые алгоритмы для решения прямых и обратных задач теории струны Стилтеса, а также таблицы узлов и весов квадратурных формул Гаусса для некоторых весовых функций.

В целях замкнутости изложения, а также для уточнения обозначений мы в пунктах (1,2) приводим необходимые сведения из теории ортогональных многочленов и определяем объекты, связанные со струной.

1. $\langle, \rangle_s$ -ортогональные системы многочленов

Последовательность вещественных чисел $\{s_i\}_{i=0}^\infty$ называется (H) -позитивной если выполняются строгие неравенства¹

$$H(n) := \det \|s_{i+j}\|_{i,j=0}^n > 0, \quad \forall n$$

Если кроме предыдущих неравенств выполняются аналогичные неравенства для сдвинутой последовательности

$$H^{(1)}(n) := \det \|s_{i+j+1}\|_{i,j=0}^n > 0 \quad \forall n,$$

то последовательность называется (S) -позитивной. (H) -позитивная последовательность $\{s_i\}_{i=0}^\infty$ порождает дефинитное скалярное произведение $\langle, \rangle_s$ на пространстве $\{P_{R^1}\}$ многочленов одного переменного

$$\langle P, Q \rangle_s := (P\bar{Q})(x), \quad x^k \mapsto s_k \quad (1)$$

обладающее свойством

$$\langle P, Q \rangle_s := \langle P\bar{Q}, 1 \rangle_s \quad (2)$$

Далее строятся две последовательности $\langle, \rangle_s$ -ортогональных многочленов, каждая из которых удовлетворяет трехчленным рекуррентным соотношениям:

Моническая система предьявляется равенствами

$$P_k(x) := \frac{1}{H(k-1)} \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \dots & s_k \\ s_1 & s_2 & \dots & s_{k+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{k-1} & s_k & \dots & s_{2k-1} \\ 1 & x & \dots & x^k \end{vmatrix}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (3)$$

и удовлетворяет трехчленным рекуррентным соотношениям

$$\begin{aligned} P_{k+1}(x) &= (x - \alpha_k)P_k(x) - \beta_k P_{k-1}(x) \\ P_{-1}(x) &\equiv 0, P_0(x) \equiv 1 \end{aligned} \quad (4)$$

где

$$\begin{aligned} \beta_0 &:= s_0 = \langle 1, 1 \rangle_s \\ \alpha_k &= \frac{\langle xP_k(x), P_k(x) \rangle_s}{\langle P_k(x), P_k(x) \rangle_s} \\ \beta_k &= \frac{\langle P_k(x), P_k(x) \rangle_s}{\langle P_{k-1}(x), P_{k-1}(x) \rangle_s} \end{aligned} \quad (5)$$

¹Обращение в нуль одного из определителей приводит к представляющей мере, сосредоточенной в конечном числе точек. Этот случай нами рассматриваться не будет.

Ортонормальная система предъявляется равенствами

$$P_k(x) := \frac{1}{\sqrt{H(k)H(k-1)}} \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \dots & s_k \\ s_1 & s_2 & \dots & s_{k+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{k-1} & s_k & \dots & s_{2k-1} \\ 1 & x & \dots & x^k \end{vmatrix}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (6)$$

и для нее также справедливы трехчленные рекуррентные соотношения

$$xP_k(x) = \tilde{\beta}_{k-1}P_{k-1}(x) + \tilde{\alpha}_kP_k(x) + \tilde{\beta}_kP_{k+1}(x), \quad k = 0, 1, \dots \quad (7)$$

$$P_{-1}(x) \equiv 0, \quad P_0(x) \equiv \frac{1}{\sqrt{s_0}} = \frac{1}{\sqrt{\beta_0}}$$

где

$$\tilde{\alpha}_k = \langle xP_k(x), P_k(x) \rangle_s \quad (8)$$

$$\tilde{\beta}_k = \frac{\sqrt{H(k-1)H(k+1)}}{H(k)}$$

Заметим, что определители Ганкеля-Адамара следующим образом выражаются через коэффициенты трехчленных рекуррентных соотношений монической системы

$$H(k) = \beta_0^{k+1} \beta_1^k \dots \beta_k^1 \quad (9)$$

Кратко опишем процесс (m)-Т-рекурсии Чебышева (подробнее см. напр. [6] и ссылки там), позволяющий вычислить коэффициенты $\{\alpha_k, \beta_k\}$ монической системы ортогональных относительно меры $\sigma(d\lambda)$ многочленов по известным моментам $\{s_k\}$.

Задаем начальные данные

$$\begin{aligned} \sigma_{-1,l} &:= 0, \quad l = 1, 2, \dots, 2n-2, \\ \sigma_{0,l} &:= s_l, \quad l = 0, 1, 2, \dots, 2n-1, \\ \alpha_0 &:= s_1/s_0, \\ \beta_0 &:= s_0. \end{aligned} \quad (10)$$

Последовательно для $k = 1, 2, \dots, n-1$ вычисляем

$$\begin{aligned} \sigma_{k,l} &:= \sigma_{k-1,l+1} - \alpha_{k-1}\sigma_{k-1,l} - \beta_{k-1}\sigma_{k-2,l}, \quad l = k, k+1, \dots, 2n-k-1, \\ \alpha_k &:= \frac{\sigma_{k,k+1}}{\sigma_{k,k}} - \frac{\sigma_{k-1,k}}{\sigma_{k-1,k-1}}, \\ \beta_k &:= \frac{\sigma_{k,k}}{\sigma_{k-1,k-1}}. \end{aligned} \quad (11)$$

В некоторых случаях (m)-Т-рекурсия оказывается чувствительной к точности представления входных данных, обнаружить последнее можно по появлению отрицательного $h_s(n)$ (см. ниже), в этом случае необходимо вести вычисления с многократной точностью.

2. Струна Стильтеса, Фурье-образы пространства L_M^2 и спектральные функции струны

Струна Стильтеса задается двумя последовательностями чисел – последовательностью масс $\{m_k\}_{k=1}^\infty$ и последовательностью координат бусинок $\{\varrho_k\}_{k=1}^\infty$ ($\varrho_0 := 0$ – начальная точка струны). Вместо координат удобно ввести длины последовательных участков, на которые струна делится бусинками: $\{l_k := \varrho_k - \varrho_{k-1}, \quad k = 1, 2, \dots\}$.

Со струной связывается пространство L_M^2 последовательностей $\{f(\varrho_k)\}$ таких, что $\langle f, f \rangle_{L_M^2} := \sum_k m_k |f(\varrho_k)|^2 < \infty$. Вместе с пространством последовательностей L_M^2 рассмотрим пространство функций $\mathcal{F}_f(\lambda)$ — Фурье-образов элементов из L_M^2 . Описание этого пространства приводится ниже: Пространство Фурье-образов $\mathcal{F}_f(\lambda)$ рассматривается как подпространство пространств $L_{\sigma(d\lambda)}^2$, $\sigma(d\lambda) \geq 0$ мера на R^1 такая, что

$$\langle f, f \rangle_{L_M^2} = \int_{-\infty}^{\infty} |\mathcal{F}_f(\lambda)|^2 \sigma(d\lambda) \quad (12)$$

Меры $\sigma(d\lambda)$ — для которых выполняется (12) — будем называть *спектральными функциями* струны $\{l_k; m_k\}$. Характерной особенностью спектральных функций струны $\{l_k; m_k\}$ является то, что все они задают одну и ту же последовательность моментов

$$s_k = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^k \sigma(d\lambda) \quad (13)$$

Более того, среди $\sigma(d\lambda)$ есть такие, что

$$s_k = \int_0^\infty \lambda^k \sigma(d\lambda) \quad (14)$$

Если существует единственная представляющая мера $\sigma(d\lambda)$, то последовательность $\{s_k\}$ называется *(S)-определенной*. В первую очередь представляют интерес рассматривавшиеся Стильтесом спектральные функции σ такие, что $\text{supp } \sigma \subseteq [0, \infty)$.

Второй объект, связываемый со струной $\{l_k, m_k\}$, — матрица J_s с элементами

$$\bar{\alpha}_0 = (m_1 l_1)^{-1}, \quad \bar{\alpha}_n = m_{n+1}^{-1} (l_n^{-1} + l_{n+1}^{-1}), \quad n = 1, 2, \dots \quad (15)$$

$$\tilde{\beta}_n = l_{n+1}^{-1} \sqrt{m_{n+1} m_{n+2}}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Матрица J_s — рассматривается как матрица Якоби² $\langle, \rangle_s$ - ортонормальной системы многочленов $\{P_k(\lambda)\}$. Функции $\mathcal{F}_f(\lambda)$ определяются следующим равенством

$$\mathcal{F}_f(\lambda) = \sum_k \sqrt{m_k} f(\varrho_k) P_k(\lambda) \quad (16)$$

При этом очевидно

$$\langle f, f \rangle_{L_M^2} = \langle \mathcal{F}_f(\lambda), \mathcal{F}_f(\lambda) \rangle_{L_s^2} \quad (17)$$

и имеет место формула обращения

$$f = \{f(\varrho_k)\} = \left\{ \int_0^\infty \mathcal{F}_f(\lambda) \frac{P_k(\lambda)}{\sqrt{m_k}} \sigma(d\lambda) \right\} \quad (18)$$

3. Алгоритмы пошагового восстановления струны Стилтеса по моментам ее спектральной функции

Одной из проблем, аналитически решенных Стилтесом, было восстановление струны, т.е. последовательностей $\{l_k\}$ и $\{m_k\}$ по последовательности моментов спектральной функции $\{s_k\}$.

Именно (см. с. 268 в [7])

$$\begin{aligned} l_n &= \frac{H^2(n-1)}{H^{(1)}(n-1)H^{(1)}(n-2)}, \quad n = 2, 3, \dots \\ m_{n+1} &= \frac{[H^{(1)}(n-1)]^2}{H(n)H(n-1)}, \quad n = 1, 2, \dots \\ l_1 &= \frac{1}{H^{(1)}(0)}, \quad m_1 = H(0) \end{aligned} \quad (19)$$

Здесь $H(-1) = H^{(1)}(-1) = 1$. Вычисление параметров m_n и l_n непосредственно по формулам (19) затруднительно. Поэтому можно поступить следующим образом. Полагая $x = 0$ в (3) и (6), получим

$$P_n(0) = (-1)^n \frac{H^{(1)}(n-1)}{H(n-1)}; \quad \mathcal{P}_n(0) = (-1)^n \frac{H^{(1)}(n-1)}{H^{1/2}(n)H^{1/2}(n-1)} \quad (20)$$

Отсюда находим

$$H(n) = H(0) \prod_{l=1}^n \left[\frac{P_l(0)}{\mathcal{P}_l(0)} \right]^2, \quad H(0) = s_0; \quad (21)$$

$$H^{(1)}(n-1) = (-1)^n H(n-1) P_n(0)$$

²О связи J_s с цепными дробями Стилтеса смотри например в Дополнении к [2].

Входящие сюда величины $P_l(0)$ и $\mathcal{P}_l(0)$ могут быть вычислены с помощью трехчленных рекуррентных соотношений (4) и (7), а данные для последних можно получить применением (m)-Т-рекурсии к последовательности $\{s_k\}$.

Замечание 1. Коэффициенты трехчленных рекуррентных соотношений для ортонормальной системы определяются по коэффициентам монической системы:

$$\tilde{\alpha}_k = \alpha_k, \quad \tilde{\beta}_k^2 = \beta_{k+1} \quad (22)$$

Замечание 2. Равенства (21) могут рассматриваться как один из способов вычисления $H(n)$ и $H^{(1)}(n)$.

Обратимся теперь к равенствам (19). Возводя второе из равенств (20) в квадрат, получим

$$m_{n+1} = \mathcal{P}_n^2(0), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (23)$$

Далее

$$\begin{aligned} l_n &= \frac{H^2(n-1)}{H^{(1)}(n-1)H^{(1)}(n-2)} = \frac{H(n-1)}{H^{(1)}(n-1)} \frac{H(n-1)}{H^{(1)}(n-2)} = \\ &= (-1)^n P_n^{-1}(0) \frac{H(n-1)H(n-2)}{H(n-2)H^{(1)}(n-2)} = (-1)^n P_{n-1}^{-1}(0) \frac{H(n-1)}{H(n-2)} = \\ &= -P_n^{-1}(0)P_{n-1}^{-1}(0) \frac{P_{n-1}^2(0)}{\mathcal{P}_{n-1}^2(0)} = h_s(n) \mathcal{P}_{n-1}^{-2}(0) \end{aligned}$$

Параметры $h_s(n)$ определяются следующим образом:

$$h_s(n) = -P_{n-1}(0)P_n^{-1}(0), \quad n = 1, 2, \dots \quad (24)$$

Полагая в (4) $x = 0$, находим что

$$h_s^{-1}(n+1) = \alpha_n - \beta_n h_s(n), \quad n = 1, 2, \dots \quad (25)$$

Вместе с начальным условием

$$h_s(1) = -P_1^{-1}(0) = \alpha_0^{-1}$$

соотношения (25) определяют рекуррентный процесс для вычисления $h_s(n)$. Из сказанного выше следует, что справедлива

Теорема 1. (первый алгоритм)

Равенства

$$m_{n+1} = \mathcal{P}_n^2(0), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (26)$$

$$l_n = h_s(n) \mathcal{P}_{n-1}^{-2}(0) = \frac{h_s(n)}{m_n}, \quad n = 1, 2, \dots$$

вместе с (25) определяют процесс восстановления струны Стильтеса по моментам ее спектральной функции.

Замечание. Справедливо равенство

$$m_n l_n = h_s(n), \quad n = 1, 2, \dots \quad (27)$$

из которого следует положительность величин $h_s(n) \quad \forall n$, последнее обстоятельство можно использовать для контроля точности проводимых вычислений.

Симметричный алгоритм восстановления струны Стильтеса

Наряду с равенствами (26) и приведенным процессом восстановления струны, существует и другой способ восстановления струны Стильтеса. В дальнейшем будем считать что

$$s_0 = 1, \quad (28)$$

т.е. спектральная функция струны нормирована на единицу. По заданной последовательности $\{s_k\}$ построим ее симметризацию $\{a_k\}$ полагая

$$a_{2k} = s_k; \quad a_{2k+1} = 0 \quad (29)$$

Последовательность $\{a_k\}$ — (H)-позитивна. В самом деле она допускает представление мерой, полученной путем симметризации представляющей меры для последовательности $\{s_k\}$. Последовательность $\{S_n(x)\}$ монических $<, >_a$ -ортогональных многочленов удовлетворяет соотношениям

$$S_{n+1}(x) = x S_n(x) - \hat{\beta}_n S_{n-1}(x); \quad S_0(x) \equiv 1 \quad (30)$$

Коэффициенты $\hat{\beta}_n$ симметризованной системы связаны с коэффициентами $\beta(n)$ монической системы $<, >_s$ -ортогональных многочленов равенствами

$$\beta(n) = \hat{\beta}_{2n-1} \hat{\beta}_{2n}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (31)$$

С коэффициентами β_{sh} для $<, >_{sh}$ -ортогональной системы, порожденной “сдвинутой” (shift) последовательностью $s_1, s_2, \dots, s_n, \dots$ они связаны соотношением

$$\beta_{sh}(n) = \hat{\beta}_{2n} \hat{\beta}_{2n+1} \quad (32)$$

Из (9) с помощью (31) и (32) находим ($\hat{\beta}_0 := 1$)

$$H_s(n) = \hat{\beta}_1^n \hat{\beta}_2^n \hat{\beta}_3^{n-1} \hat{\beta}_4^{n-1} \dots \hat{\beta}_{2n-3}^2 \hat{\beta}_{2n-2}^2 \hat{\beta}_{2n-1} \hat{\beta}_{2n} \quad (33)$$

$$H^{(1)}(n) = H_{sh}(n) = \hat{\beta}_0^{n+1} \hat{\beta}_1^{n+1} \hat{\beta}_2^n \hat{\beta}_3^n \dots \hat{\beta}_{2n-2}^2 \hat{\beta}_{2n-1}^2 \hat{\beta}_{2n} \hat{\beta}_{2n+1}$$

Вводя (33) в (19) получаем “симметричные” выражения для l_n, m_n . Т.е. верна

Теорема 2. (второй алгоритм)

Равенства

$$m_1 = 1, \quad l_1 = 1/s_1; \\ m_{n+1} = \prod_{k=1}^n \frac{\hat{\beta}_{2k-1}}{\hat{\beta}_{2k}}; \quad l_n = \left(\prod_{k=1}^{n-1} \frac{\hat{\beta}_{2k}}{\hat{\beta}_{2k-1}} \right) \hat{\beta}_{2n-1}^{-1} \quad (34)$$

определяют параметры струны Стильеса.

Коэффициенты $\{\beta_k\}$ получаются применением (m)-Т-рекурсии к последовательности $\{a_k\}$.

4. О поведении коэффициентов $\{l_k, m_k\}$ струн, отвечающих специальным классам спектральных функций

В [10] установлен следующий результат: пусть $\sigma(d\lambda) \geq 0$ такова что $\text{supp } \sigma \in [-1, 1]$, $\frac{d\sigma}{d\lambda} = \omega(\lambda)$ существует и $\omega(\lambda) > 0$ п.в. Тогда $\alpha_k \rightarrow 0, \beta_k \rightarrow \frac{1}{2}$. Из приведенного результата и (34) непосредственно следует

Теорема 3. Пусть $\{l_k, m_k\}$ струна спектральная функция которой $\sigma(d\lambda) \geq 0$ такова что $\text{supp } \sigma \in [0, 1]$ и $\frac{d\sigma}{d\lambda} > 0$ п.в. на $[0, 1]$, тогда

$$\frac{l_{n+1}}{l_n} \rightarrow 1, \quad \frac{m_{n+1}}{m_n} \rightarrow 1$$

В самом деле достаточно образовать последовательность $s_0, 0, s_1, 0, \dots$ и заметить, что ее представляющая мера удовлетворяет условиям приведенной теоремы. Незначительная модификация конструкций из [10] в сочетании с (34) приводят к теореме

Теорема 4. Пусть $\psi_{gs}(x)$ -волновая функция основного состояния спектральной задачи Шредингера

$$-\frac{d^2\psi}{dx^2} + V(x)\psi = E\psi \quad (35)$$

$$V(x) = \sum_{k=0}^{2n} a_k x^k, \quad a_{2n} > 0 \quad (36)$$

Если $\{l_k, m_k\}$ -струна Стильеса, отвечающая весу $\omega_s(x) := \frac{\psi_{gs}(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$, то

$$\frac{l_{n+1}}{l_n} \rightarrow 1, \quad \frac{m_{n+1}}{m_n} \rightarrow 1 \quad (37)$$

5. К вопросу об (S)-определенности проблемы моментов Стильеса

Равенство $m_n l_n = h_s(n)$ вместе с известным критерием сингулярности струны $\sum l_n + \sum m_n = \infty$ приводит к:

Теорема 5. Пусть $\{s_k\}$ — (S)-позитивная последовательность, и $\{P_n(x)\}$ — соответствующая ей моническая система $\langle, \rangle_s$ -ортogonalных многочленов, тогда для (S)-определенности последовательности достаточно выполнения условия

$$\sum_k \sqrt{-\frac{P_{k-1}(0)}{P_k(0)}} = \infty \quad (38)$$

в терминах коэффициентов $\{\hat{\beta}_k\}$

$$\sum_k \hat{\beta}_{2k}^{-1/2} = \infty \quad (39)$$

в терминах определителей

$$\sum_k \sqrt{\frac{H(k)}{H(k-1)} \frac{H^{(1)}(k-1)}{H^{(1)}(k)}} = \infty \quad (40)$$

Последняя формула возможно интересна своей геометрической интерпретацией ввиду того, что $H(k)$ -квадрат объема k -параллелепипеда, натянутого на векторы $P_k(x)$, аналогичный смысл имеют отношения $H^{(1)}(k)$.

6. Формулы де Бранжевского типа

В своей замечательной теории гильбертовых пространств целых функций Луи де Бранж [3] отправлялся от целой функции $E(z)$ такой, что при $\Im z > 0$: $|E(z)| > |E(\bar{z})|$. Функции $E(z)$ отвечает гильбертово пространство $B(E)$ целых функций, удовлетворяющих условиям

$$\|F\|_{B(E)}^2 := \int_{-\infty}^{\infty} |F(\lambda)|^2 |E(\lambda)|^{-2} d\lambda < \infty \quad (41)$$

$$|F(z)|^2 \leq \|F\|_{B(E)}^2 \frac{|E(z)|^2 - |E(\bar{z})|^2}{2\pi i(\bar{z} - z)}$$

скалярное произведение в этом пространстве вводится следующим образом

$$\langle F, G \rangle_{B(E)} := \int_{-\infty}^{\infty} F(\lambda) \overline{G(\lambda)} |E(\lambda)|^{-2} d\lambda \quad (42)$$

Пространства $B(E) := H$ имеют следующие свойства:

1. $(F(z) \in H) \wedge (\Im(w) \neq 0) \wedge (F(w) \neq 0) \Rightarrow ((z-w)(z-\bar{w})^{-1} F(z) := F_w(z) \in H) \wedge (\|F\|_{B(E)} = \|F_w\|_{B(E)})$
2. $\forall w$ с $\Im(w) \neq 0$ функционал $F \mapsto F(w)$ ограничен
3. $(F(z) \in H) \Rightarrow (F^*(z) := \overline{F(\bar{z})} \in H) \wedge (\|F^*\|_{B(E)} = \|F\|_{B(E)})$

Замечательно, что гильбертово пространство целых функций, обладающее свойствами 1–3, совпадает с некоторым $B(E)$. Никаких ограничений на размерность H (кроме $\dim H \neq 0$) не налагается.

Обозначим $E^*(z) = \overline{E(\bar{z})}$ и введем вещественные на вещественной оси функции

$$\begin{aligned} A(z) &:= \frac{1}{2}[E^*(z) + E(z)] \\ B(z) &:= \frac{1}{2i}[E^*(z) - E(z)] \\ E(z) &= A(z) - iB(z) \end{aligned} \quad (43)$$

Пространство $H = B(E)$ порождается не одной функцией $E(z)$ указанного типа, все такие функции описываются равенством

$$\begin{pmatrix} \tilde{A}(z) \\ \tilde{B}(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_0 & -d_1 \\ d_0 & c_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A(z) \\ B(z) \end{pmatrix} \quad (44)$$

в котором c_0, c_1, d_0, d_1 — вещественные числа, удовлетворяющие условию $c_0c_1 + d_0d_1 = 1$.

Согласно (41) и (44) равенство

$$\|F\|_{B(E)}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |F(\lambda)|^2 \left[[c_0A(\lambda) - d_1B(\lambda)]^2 + [d_0A(\lambda) + c_1B(\lambda)]^2 \right]^{-2} d\lambda \quad (45)$$

задает семейство изометрических вложений пространства H в пространство $L^2_{\sigma(d\lambda)}$. Пространство $B(E)$ удобно рассматривать как гильбертово пространство с воспроизводящим ядром $K(w; z)$, т.е. $\forall w_0 \ K(w_0; z) \in H$ и $F(w) = \langle F(t), K(w; t) \rangle_{B(E)}$.

Эквивалентное (41) определение пространства $B(E)$ в терминах $K(w; z)$ таково: $B(E)$ есть совокупность целых функций $F(z)$ таких, что

$$\|F(\lambda)\|_{B(E)}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |F(t)|^2 |E(t)|^{-2} dt < \infty \quad (46)$$

$$|F(z)|^2 \leq \|F\|_{B(E)}^2 K(z; z) \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

Функции E и K связаны соотношениями

$$K(w; z) = \frac{\overline{E(w)}E(z) - E(\bar{w})E^*(z)}{2\pi i(\bar{w} - z)} \quad (47)$$

Равенство

$$E(z) = \sqrt{\pi}(1 - iz)K(i; z)\|K(i; z)\|_{B(E)}^{-1} \quad (48)$$

определяет одну из функций (44), порождающих пространство $B(E)$. Ядро $K(w; z)$ однозначно порождается пространством H и, если $g_k(z)$ любой ортонормированный базис в нем, то

$$K(w; z) = \sum \overline{g_k(w)}g_k(z) \quad (49)$$

Если пространство $B(E)$ обладает свойством четной инвариантности, т.е. $(\forall f : f \in B(E)) \Rightarrow (f^-(z) := f(-z) \in B(E) \text{ и } \|f\|_{B(E)} = \|f^-\|_{B(E)})$, то оно обладает рядом важных специфических свойств. В терминах функций $E(z)$, отвечающих пространству $B(E)$, четная инвариантность означает, что E может быть выбрана так, чтобы $E^*(z) = E(-z)$. Соответственно $A^-(z) = A(z)$, $B^-(z) = -B(z)$. Все функции $E(z)$, обладающие этим свойством, образуют однопараметрическое семейство, задаваемое равенством с вещественным $\gamma \neq 0$

$$\begin{pmatrix} \tilde{A}(z) \\ \tilde{B}(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & \gamma^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A(z) \\ B(z) \end{pmatrix} \quad (50)$$

Равенство (45) переходит в

$$\|F\|_{B(E)}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |F(\lambda)|^2 \frac{d\lambda}{\gamma^2 A^2(\lambda) + \gamma^{-2} B^2(\lambda)} \quad (51)$$

веса в (51) четные и порождаемые ими меры симметричны: $\sigma(\varepsilon) = \sigma(-\varepsilon)$. Равенство (51) справедливо и в общем случае. Оно полезно при построении приближений решения уравнения Шредингера по известным моментам.

О фазовой функции

При исходной $E(z)$ так называется непрерывная функция $\varphi(x)$, определяемая условием: $E(x)\varphi(x)$ — вещественная на вещественной оси функция. Для производной $\varphi(x)$ существует простое выражение

$$\varphi'(x) = \pi K(x; x) |E(x)|^{-2} \quad (52)$$

По фазовой функции пространство $B(E)$ определяется в существенном единственным образом. Посредством фазовой функции и воспроизводящего ядра указывается некоторая ортонормальная система в $B(E)$. Именно, пусть α — вещественное число и точки t_n такие, что $\varphi(t_n) \equiv \alpha \pmod{\pi}$. Тогда $E^{-1}(t_n)K(t_n; z)$ — ортонормальная система в $B(E)$. Ортогональное дополнение к этой системе состоит из функции $D_\alpha := (\exp(i\alpha)E(z) - \exp(-i\alpha)E^*(z))$, которая может принадлежать $B(E)$ не более чем при одном вещественном α . Если же $D_\alpha \in B(E)$, то $\forall F(z) \in B(E)$ выполняется равенство

$$\|F\|_{B(E)} = \pi \sum_n |F(t_n)/E(t_n)|^2 \varphi'(t_n) \quad (53)$$

Отметим еще равенство

$$K(w; z) = \frac{\overline{B(w)}A(z) - \overline{A(w)}B(z)}{\pi(\bar{w} - z)} \quad (54)$$

7. Построение приближений спектральной функции струны по известным моментам

Пусть $\{s_k\}_{k=0}^{2n}$ подпоследовательность заданной последовательности. Пространство многочленов степени $\leq n$ со скалярным произведением $\langle, \rangle_s$ — конечномерное $B(E)$ пространство. В качестве ортогонального базиса в нем естественно принять систему нормированных многочленов $\{\mathcal{P}_k\}$ $k \in \overline{0, n}$. Тогда

$$K_n(w; z) = \sum_{k=0}^n \overline{\mathcal{P}_k(w)} \mathcal{P}_k(z) \quad (55)$$

будет воспроизводящим ядром. Согласно (48)

$$E_n(z) = \frac{\sqrt{\pi}(1-iz)}{\sqrt{\sum_{j=0}^n |\mathcal{P}_j(i)|^2}} \sum_{k=0}^n \overline{\mathcal{P}_k(i)} \mathcal{P}_k(z) \quad (56)$$

и подпоследовательность $\{s_k\}_{k=0}^n$ представляется в виде

$$s_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^k (1 + \lambda^2)^{-1} \frac{\sum_{j=0}^n |\mathcal{P}_j(i)|^2}{\left| \sum_{m=0}^n \overline{\mathcal{P}_m(i)} \mathcal{P}_m(\lambda) \right|^2} d\lambda, \quad k \in \overline{0, n} \quad (57)$$

Тем самым указан вес $\sigma_n(d\lambda) := |E_n(\lambda)|^{-2} d\lambda$, задающий интегральное представление $\{s_k\}_{k=0}^n$. Заметим, что он обладает в точности $2n$ моментами. Этот вес содержится в общей формуле Р. Неванлинна для решений проблемы моментов.

Если последовательность $\{s_k\}$ такова, что все ее нечетные моменты равны 0, то пространство будет четно инвариантным, т.е. функция $E_s(z) := E(z)$ из (48) обладает свойством $E_s^*(z) = E_s(-z)$ и равенство

$$s_k = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^k \frac{d\lambda}{\gamma^2 A_s^2(\lambda) + \gamma^{-2} B_s^2(\lambda)} \quad (58)$$

задает семейство представлений с четным весом.

Замечание 1. С помощью формулы Кристофеля–Дарбу выражение для $|E_n(\lambda)|^{-2}$ может быть преобразовано к виду

$$|E_n(\lambda)|^{-2} = \frac{1}{\pi \tilde{\beta}_n^2} \frac{|\mathcal{P}_n(i) \mathcal{P}_{n+1}(-i) - \mathcal{P}_{n+1}(i) \mathcal{P}_n(-i)|^2}{|\mathcal{P}_n(i) \mathcal{P}_{n+1}(\lambda) - \mathcal{P}_{n+1}(i) \mathcal{P}_n(\lambda)|^2} \quad (59)$$

Замечание 2. Применяя к получающемуся из (56) выражению для $|E_n(\lambda)|^{-2}$ неравенство Коши получаем оценку снизу

$$|E_n(\lambda)|^{-2} \geq \frac{1}{\pi} (1 + \lambda^2)^{-1} \varrho^2(\mathcal{M}_\lambda; 1) \quad (60)$$

M_λ — означает подпространство всех функций из $B(E)$, обращающихся в нуль в точке λ ; ϱ — расстояние от подпространства до единичного элемента пространства $B(E)$. Неравенство (60) справедливо для произвольного гильбертова пространства $B(E)$ такого, что $1 \in B(E)$.

8. О прямой задаче Стильтьеса для струны с сосредоточенными массами

Из (34) следует, что

$$m_{n+1}l_n = \hat{\beta}_{2n}^{-1}; \quad m_n l_n = \hat{\beta}_{2n-1}^{-1} \quad (\hat{\beta}_0 = 1) \quad (61)$$

Таким образом, коэффициенты $\{\hat{\beta}_k\}$ в (30) прямо выражаются через данные струны, причем $\{\hat{\alpha}_k = 0\}$. Далее по формулам де Бранжевского типа можно построить рациональные приближения веса $\omega_a(x)$, задающего последовательность $\{a_k\}$. Преобразование (симметризация представляющей меры) $\omega_a(x) \mapsto \omega_s := \frac{\omega_a(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}, x > 0$ приводит к последовательности приближений для спектральной функции струны, отличных от экстремальных канонических решений.

9. Примеры восстановления струн и некоторые наблюдения

Ниже приводятся результаты численного эксперимента по восстановлению струн, отвечающих различным нормированным на единицу спектральным функциям. Эти примеры хорошо иллюстрируют приведенные выше утверждения о поведении отношений некоторых величин, определяющих струну.

Пример 1. Многочлены Фрюйда (G. Freÿd) ортогональны с весом:

$$\omega(x) = \exp\left(-\frac{x^4}{4}\right), \quad x \in (-\infty, \infty) \quad (62)$$

Заметим, что $\omega(x) = \psi_{gs}(x)$ — волновая функция основного состояния “sextic”-осциллятора Шредингера с потенциалом $V(x) = x^6 - 3x^2$. Это позволяет получить рекуррентное соотношение для моментов $\{s_k\}$ и использовать его для вычисления всех моментов, отправляясь от s_0, s_2, s_4 (нечетные моменты равны нулю):

$$s_{k+6} = k(k-1)s_{k-2} + 3s_{k+2}$$

Хотя в случае многочленов Фрюйда может быть получено более простое рекуррентное соотношение путем применения интегрирования по частям непосредственно к равенствам

$$s_{k+4} = (k+1)s_k,$$

задающим моменты, однако, уравнения Шредингера имеет более широкую область применения. Симметризовав и нормировав весовую функцию, получим спектральную функцию струны

$$\sigma(dx) = \frac{\Gamma(3/4)}{\pi} \frac{\exp(-x^2/4)}{\sqrt{x}} dx, \quad x \in (0, \infty). \quad (63)$$

k	l_k	q_k	m_k	l_{k+1}/l_k	m_{k+1}/m_k	m_k/l_k
1	1.4793	1.4793	1.0	0	0	0
2	1.1764	2.6558	0.84144	0.89364	0.87388	0.71525
3	1.0513	3.7071	0.73532	0.92583	0.91387	0.69941
4	0.97336	4.6805	0.67199	0.94282	0.93573	0.69038
5	0.91770	5.5982	0.62880	0.95349	0.94882	0.68519
6	0.87502	6.4732	0.59662	0.96079	0.95750	0.68183
7	0.84071	7.3139	0.57126	0.96598	0.96379	0.67950
8	0.81211	8.1260	0.55058	0.96995	0.96847	0.67796
9	0.78771	8.9137	0.53322	0.97292	0.97226	0.67692
10	0.76638	9.6801	0.51843	0.97572	0.97489	0.67647
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
63	0.47674	39.650	0.32496	0.99682	0.99527	0.68163
64	0.47522	40.125	0.32342	0.99698	0.99521	0.68057
65	0.47378	40.599	0.32187	0.99704	0.99529	0.67936
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
95	0.43610	54.182	0.28890	0.99814	0.99662	0.66246
96	0.43529	54.618	0.28792	0.99833	0.99646	0.66145
97	0.43456	55.052	0.28690	0.99836	0.99648	0.66021
98	0.43385	55.486	0.28589	0.99857	0.99635	0.65896
99	0.43323	55.919	0.28485	0.99862	0.99633	0.65751
100	0.43263	56.352	0.28380	1	1	0.65598

Пример 2. Многочлены Чебышева первого рода ортогональны с весом $\omega(x) = 1/\sqrt{1-x^2}$, $x \in [-1, 1]$, после симметризации и нормировки получаем спектральную функцию струны

$$\sigma(dx) = \frac{1}{\pi\sqrt{x-x^2}}dx, \quad x \in [0, 1] \quad (65)$$

k	l_k	ϱ_k	m_k	l_{k+1}/l_k	m_{k+1}/m_k	m_k/l_k
1	2.0	2.0	1.0	0	0	0
2	2.0	4.0	2.0	0.99998	1.0	0.99998
3	2.0	6.0001	2.0	0.99998	1.0	0.99998
4	2.0	8.0001	2.0	0.99998	1.0	0.99998
5	2.0	10.0	2.0	0.99998	1.0	0.99998
6	2.0	12.0	2.0	0.99998	1.0	0.99998
7	2.0	14.0	2.0	0.99998	1.0	0.99998
8	2.0	16.0	2.0	0.99998	1.0	0.99998
9	2.0	18.0	2.0	0.99998	1.0	0.99998
10	2.0	20.0	2.0	0.99998	1.0	0.99998
11	2.0	22.0	2.0	0.99998	1.0	0.99998
12	2.0	24.0	2.0	0.99998	1.0	0.99998
13	2.0	26.0	2.0	0.99998	1.0	0.99998
14	2.0	28.0	2.0	0.99998	1.0	0.99998
15	2.0	30.001	2.0	0.99998	1.0	0.99998
16	2.0	32.001	2.0	0.99998	1.0	0.99998
17	2.0	34.001	2.0	0.99998	1.0	0.99998
18	2.0	36.001	2.0	0.99998	1.0	0.99998
19	2.0	38.001	2.0	0.99998	1.0	0.99998
20	2.0	40.001	2.0	1	1	0.99998

(66)

Пример 3. Многочлены Чебышева первого рода ортогональны с весом $\omega(x) = \sqrt{1-x^2}$, $x \in [-1, 1]$, после симметризации и нормировки получаем спектральную функцию струны

$$\sigma(dx) = \frac{8}{\pi} \sqrt{x-x^2} dx, \quad x \in [0, 1] \quad (67)$$

k	l_k	ϱ_k	m_k	l_{k+1}/l_k	m_{k+1}/m_k	m_k/l_k
1	2.0	2.0	1.0	0	0	0
2	0.66667	2.6667	4.0	0.50000	2.2500	6.0
3	0.33333	3.0	9.0	0.60000	1.7778	27.0
4	0.20000	3.2000	16.0	0.66665	1.5625	80.0
5	0.13333	3.3333	25.0	0.71428	1.4400	187.50
6	0.095238	3.4286	36.0	0.75000	1.3611	378.0
7	0.071429	3.5000	49.0	0.77778	1.3061	686.0
8	0.055556	3.5556	64.0	0.79999	1.2656	1152.0
9	0.044444	3.6000	81.0	0.81819	1.2346	1822.5
10	0.036364	3.6364	100.0	0.83333	1.2100	2750.0
11	0.030303	3.6667	121.0	0.84615	1.1901	3993.0
12	0.025641	3.6923	144.0	0.85714	1.1736	5616.0
13	0.021978	3.7143	169.0	0.86668	1.1598	7689.5
14	0.019048	3.7333	196.0	0.87502	1.1480	10290.0
15	0.016667	3.7500	225.0	0.88236	1.1378	13500.0
16	0.014706	3.7647	256.0	0.88890	1.1289	17408.0
17	0.013072	3.7778	289.0	0.89474	1.1211	22108.0
18	0.011696	3.7895	324.0	0.89997	1.1142	27702.0
19	0.010526	3.8000	361.0	0.90476	1.1080	34295.0
20	0.0095238	3.8095	400.0	1	1	42000.0

(68)

10. Квадратурные формулы для некоторых весовых функций

Таблицы содержат узлы и веса квадратурных формул Гаусса с точностью 20 десятичных знаков. Так как весовые функции симметричны, то приводятся только неотрицательные узлы и отвечающие им веса.

$Вес \exp(-x^4/4), x \in (-\infty, \infty)$. Обратим внимание на резкое убывание весовых коэффициентов.

number	node	weight
1	0	0.99495802154079469710
2	0.92666085569568004843	0.68429635029184198918
3	1.6694196546910356541	0.10007131495818444875

number	node	weight
1	0.30487252270522592806	0.60108731527909914516
2	0.87725389795023356022	0.46322797664114479935
3	1.3793943488880921758	0.19040269187773638368
4	1.8289552292989639583	0.026510204744419022257
5	2.2672508062109908077	0.00061848747802443603338

number	node	weight
1	0	0.45824669247983981748
2	0.45317904507303451999	0.43882040306956505831
3	0.88041457542273748518	0.35222409883203491929
4	1.2711168101207103723	0.19409354519266108001
5	1.6285474538781895495	0.059232176759989228094
6	1.9625643188718185397	0.0080017411100713049700
7	2.2871304949871472314	0.00034892159421772176850
8	2.6277740984788246940	0.0000024432219645652857039

<i>number</i>	<i>node</i>	<i>weight</i>
1	0.18549741189801493997	0.36967387684951811289
2	0.54957170054229116703	0.34845471240625658670
3	0.89583204965122134325	0.28540909938356551399
4	1.2195724238408451957	0.17966090561964352292
5	1.5213693054277702644	0.076477150371407675702
6	1.8048125517007254132	0.019440853937389939790
7	2.0750212579854309832	0.0025784361379445532796
8	2.3384581800973981875	0.00014888797501837054446
9	2.6045627837968979530	0.0000027456242913996458489
10	2.8937760788500716944	0.0000000077153881110034846782

<i>number</i>	<i>node</i>	<i>weight</i>
1	0	0.31551061659822463859
2	0.31418580745654798315	0.31082113629934378361
3	0.62091029595091591047	0.28998019648553606852
4	0.91478147622825219548	0.24038274436571779305
5	1.1932851015020452351	0.16302215049622614727
6	1.4563556135189733004	0.083066693836730364160
7	1.7055124975785539234	0.029301063329586715950
8	1.9431643265730086892	0.0065931988352976168357
9	2.1722701921681342263	0.00086385450438752797516
10	2.3963790184376231585	0.000058590617882680568777
11	2.6201738768662443816	0.0000017229879853631112269
12	2.8512537419550800273	0.000000015941392191506629349
13	3.1076133899667440859	$2.1225214626939255405 \times 10^{-11}$

Вес $(1 - x^2)^{-1/3}$, $x \in [-1, 1]$. Необходимость вычисления интегралов с таким весом возникает при численном решении некоторых задач дифракции. В доступной справочной литературе коэффициенты квадратурных формул Гаусса для них не приведены, на эти обстоятельства обратил наше внимание Ю. В. Гандель.

number	node	weight
1	0	0.60650187469123294592
2	0.56982551658847805665	0.56744005654842600990
3	0.93557409147788723868	0.42286378572085278461

number	node	weight
1	0.15378778934198886086	0.30756838470333585707
2	0.44679550642411942981	0.29750354105014650626
3	0.69748011012614150391	0.27616803219020616445
4	0.88209884423704684513	0.23974450123893417925
5	0.98320479596473945591	0.17257032043227256044

number	node	weight
1	0	0.20707560592137277952
2	0.20559798327357076098	0.20558764749020779631
3	0.40240608834168434712	0.20105607316238233587
4	0.58201025400204652674	0.19325249091433755574
5	0.73673201722985003147	0.18169000590118404419
6	0.85995699524228326960	0.16534612162824394339
7	0.94641884646198210597	0.14172367574335811260
8	0.99243966804078599013	0.10136096181449508962

<i>number</i>	<i>node</i>	<i>weight</i>
1	0.077798723871866288113	0.15559721293045807943
2	0.23151198069286574265	0.15432992515614997633
3	0.37961829838820510049	0.15176289638880171347
4	0.51853072494766631641	0.14782457315460951711
5	0.64488498015605338794	0.14238800736921846103
6	0.75562094407088682764	0.13523625416038929339
7	0.84805679864535218308	0.12598551807563660620
8	0.91995409205229247282	0.11388899001275512717
9	0.96957261183137071599	0.097188773731224716281
10	0.99572113150659938619	0.069352628635651777061

<i>number</i>	<i>node</i>	<i>weight</i>
1	0	0.12481782212136231724
2	0.12449390413013155200	0.12449308623365923759
3	0.24705035093669949661	0.12351371094783578483
4	0.36576203532785607650	0.12186354817205617230
5	0.47878148750541599528	0.11951336357503487164
6	0.58434982504214881024	0.11641667688005446403
7	0.68082412681243005734	0.11250221430550196634
8	0.76670300354866406095	0.10766005519686898127
9	0.84064996947545339040	0.10171464240292931485
10	0.90151426009488725574	0.094366586576180592891
11	0.94834881381222416535	0.085045694258414980570
12	0.98042543345337990828	0.072427341229307135241
13	0.99725163500166834132	0.051628948776370607307

ЛИТЕРАТУРА

1. Аткинсон Ф. Дискретные и непрерывные граничные задачи. – Мир, 1968.
2. Ахиезер Н. И. Классическая проблема моментов. – М.: 1961.
3. Branges Lois de Hilbert spaces of entire functions. – Prentice-Hall: Englewood Cliffs, N.J., 1968.
4. Гантмахер Ф. Р. Крейн М. Г. Осцилляционные матрицы и ядра и малые колебания механических систем. – ГИТТЛ, 1950.
5. Dym Н., McKean Н. Р. Gaussian processes, function theory, and the inverse spectral problem. – Academic Press, 1976.
6. Корж С. А., Овчаренко И. Е., Угриновский Р. А. Рекурсия П. Л. Чебышева: некоторые аналитические и вычислительные аспекты // Укр.Мат.журнал – 1995. – Т.45, 5. – С. 626–646.
7. Крейн М. Г., Нудельман А. А. Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи. – Наука, 1973.
8. Крейн М. Г. О некоторых новых задачах теории колебаний штурмовых систем // ПММ – 1952. – Т.16, в.5.
9. Овчаренко И. Е. Обобщенный нормальный закон, уравнение Шредингера с полуограниченным потенциалом и некоторые аспекты проблемы измерения // СПб: ИПМаш РАН–препринт 131 – 1996. – 30 с.
10. Рахманов Е. А. Об асимптотике отношения ортогональных многочленов // Мат.сб. – 1977. – Т.103(145) – С. 237–252; – 1982. – Т.118(160) – С. 104–117.
11. Стилтес Т. И. Исследования о непрерывных дробях. – ГОНТИ, 1936.

Нахождение в явном виде управления и траекторий,
решающих задачу управляемости для некоторых
нелинейных систем

Е. В. Склиар

Szczecin University, Poland

В работе рассматривается задача управляемости для специального класса треугольных систем. Основной результат состоит в нахождении явного вида управления и траекторий, по которым происходит движение из заданной точки в заданную. Рассмотрены случаи как управления без ограничений так и ограниченного управления.

1. Введение

Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= f_1(x_1) + c_2 x_2, \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2) + c_3 x_3, \\ \dots &\dots \\ \dot{x}_{n-1} &= f_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1}) + c_n x_n, \\ \dot{x}_n &= f_n(x_1, \dots, x_n) + c_{n+1} u, \end{cases} \quad (1)$$

где $\prod_{i=2}^{n+1} c_i \neq 0$.

В работе изучается вопрос об управляемости системы (1) из заданной точки $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ в заданную точку $x^1 = (x_1^1, x_2^1, \dots, x_n^1)$ за заданное время $T > 0$. Функции $f_i(x_1, \dots, x_i)$ предполагаются непрерывно-дифференцируемыми $-(n-i+1)$ раз при $i = 1, \dots, n$. Система (1) является частным случаем системы

$$\begin{cases} \dot{x}_i &= f_i(x_1, \dots, x_{i+1}), \quad i = 1, \dots, n-1, \\ \dot{x}_n &= f_n(x_1, \dots, x_n, u), \end{cases} \quad (2)$$

впервые рассмотренной в работе [1], в которой приведены условия управляемости этой системы и дано отображение ее на линейную систему с помощью замены фазовых координат и введения нового управления. В данной работе

для системы (1) дается явный вид управления $u(t)$, переводящего точку x^0 в точку x^1 . Далее рассматривается задача управляемости системы (1) из произвольной точки x^0 в точку $x^1 = 0$ при наличии ограничения на управление вида $|u| \leq 1$. В этом случае дополнительно предполагается, что $f_i(0, \dots, 0) = 0$. Показано, что существует окрестность начала координат, из каждой точки которой можно попасть в 0. Рассмотрен также случай треугольных систем, отображающихся на линейную без замены управления.

2. Управляемость без ограничения на управление

Для нахождения управления $u(t)$, как и в работе [1], проведем замену переменных:

$$\begin{aligned} z_1 &= x_1 \equiv F_1(x_1), \\ z_k &= \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\partial F_{k-1}(x_1, \dots, x_{k-1})}{\partial x_i} (f_i(x_1, \dots, x_i) + c_{i+1}x_{i+1}) \equiv \\ &\equiv F_k(x_1, \dots, x_k), \quad k = 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (3)$$

Нетрудно видеть, что

$$\frac{\partial F_k}{\partial x_k} \equiv \prod_{i=1}^k c_i, \quad \text{где } c_1 = 1. \quad (4)$$

Действительно, $\frac{\partial F_1}{\partial x_1} = c_1$. Пусть $\frac{\partial F_i}{\partial x_i} \equiv \prod_{j=1}^i c_j$, $i = 1, \dots, k-1$. В равенствах (3) для $F_k(x_1, \dots, x_k)$ слагаемое, зависящее от x_k имеет вид

$$\frac{\partial F_{k-1}}{\partial x_{k-1}} (f_{k-1}(x_1, \dots, x_{k-1}) + c_k x_k),$$

откуда

$$\frac{\partial F_k}{\partial x_k} = \frac{\partial F_{k-1}}{\partial x_{k-1}} c_k = \prod_{i=1}^k c_i.$$

Определим также новое управление:

$$\begin{aligned} z_{n+1} &= \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial F_n(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_i} (f_i(x_1, \dots, x_i) + c_{i+1}x_{i+1}) + \\ &+ \frac{\partial F_n(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_n} (f_n(x_1, \dots, x_n) + c_{n+1}u) \equiv F_{n+1}(x_1, \dots, x_n, u). \end{aligned} \quad (5)$$

Как и выше, имеем:

$$\frac{\partial F_{n+1}}{\partial u} = \prod_{i=1}^{n+1} c_i. \quad (6)$$

После такой замены переменных получаем систему вида:

$$\dot{z}_k = z_{k+1}, \quad k = 1, \dots, n.$$

Для удобства запишем эту систему в векторной форме

$$\dot{z} = Az + bz_{n+1}, \quad \text{где} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Выберем новое управление $z_{n+1}(t)$ таким образом, чтобы оно переводило точку

$$z^0 = \begin{pmatrix} F_1(x_1^0) \\ F_2(x_1^0, x_2^0) \\ \dots \\ F_n(x_1^0, \dots, x_n^0) \end{pmatrix} \quad (7)$$

в точку

$$z^1 = \begin{pmatrix} F_1(x_1^1) \\ F_2(x_1^1, x_2^1) \\ \dots \\ F_n(x_1^1, \dots, x_n^1) \end{pmatrix} \quad (8)$$

за время T . Для этого положим

$$z_{n+1}(t) = -b^* e^{-A^* t} W^{-1} (z^0 - e^{-AT} z^1), \quad (9)$$

где $W = \int_0^T e^{-At} b b^* e^{-A^* t} dt = \left\{ \frac{(-1)^{2n-i-j} T^{2n-i-j+1}}{(n-i)!(n-j)!(2n-i-j+1)} \right\}_{i,j=1}^n$. Действительно, в этом случае

$$z(t) = e^{At} \left(z_0 + \int_0^t e^{-A\tau} b z_{n+1}(\tau) d\tau \right). \quad (10)$$

Подставляя в это равенство $t = T$ и $z_{n+1}(t)$ из (9), получим тождество. В силу равенств (4), (6) равенства (3), (5) можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} z_1 &= x_1 \equiv F_1(x_1), \\ z_k &= \sum_{i=1}^{k-2} \frac{\partial F_{k-1}(x_1, \dots, x_{k-1})}{\partial x_i} (f_i(x_1, \dots, x_i) + c_{i+1} x_{i+1}) + \\ &\quad + C_{k-1} (f_{k-1}(x_1, \dots, x_{k-1}) + c_k x_k) \equiv F_k(x_1, \dots, x_k), \quad k = 2, \dots, n, \\ z_{n+1} &= \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial F_n(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_i} (f_i(x_1, \dots, x_i) + c_{i+1} x_{i+1}) + \\ &\quad + C_n (f_n(x_1, \dots, x_n) + c_{n+1} u) \equiv F_{n+1}(x_1, \dots, x_n, u), \end{aligned} \quad (11),$$

где $C_i = \prod_{k=1}^i c_k$, $i = 1, \dots, n+1$.

Лемма 1. Равенства (11) однозначно разрешимы относительно переменных $x_1, \dots, x_n, u$. Для $k = 1, \dots, n$ переменная x_k является функцией только аргументов $z_1, \dots, z_k$, причем зависит от z_k линейным образом:

$$x_k = H_k(z_1, \dots, z_k) = h_k(z_1, \dots, z_{k-1}) + \frac{1}{C_k} z_k.$$

Переменная u , являясь функцией всех аргументов $z_1, \dots, z_{n+1}$, зависит от z_{n+1} линейным образом:

$$u = H_{n+1}(z_1, \dots, z_{n+1}) = h_{n+1}(z_1, \dots, z_n) + \frac{1}{C_{n+1}} z_{n+1}.$$

Доказательство. Действительно,

$$\begin{aligned} x_1 &= z_1 = \frac{1}{C_1} z_1 \equiv H_1(z_1), \\ x_2 &= \frac{1}{C_2} (z_2 - f_1(z_1)) \equiv H_2(z_1, z_2) \equiv \frac{1}{C_2} z_2 + h_2(z_1). \end{aligned} \quad (12)$$

Пусть найдены функции

$$x_1 = H_1(z_1), \quad x_2 = H_2(z_1, z_2) = \frac{1}{C_2} z_2 + h_2(z_1), \quad \dots,$$

$$x_{k-1} = \frac{1}{C_{k-1}} z_{k-1} + h_{k-1}(z_1, z_2, \dots, z_{k-1}).$$

Тогда из (11) следует

$$\begin{aligned} x_k &= \frac{1}{C_k} \left(z_k - \sum_{i=1}^{k-2} \frac{\partial F_{k-1}(H_1(z_1), \dots, H_{k-1}(z_1, \dots, z_{k-1}))}{\partial x_i} \cdot \right. \\ &\quad \cdot \left(f_i(H_1(z_1), \dots, H_i(z_1, \dots, z_i)) + c_{i+1} H_{i+1}(z_1, \dots, z_{i+1}) \right) - \\ &\quad \left. - \frac{1}{c_k} f_{k-1}(H_1(z_1), \dots, H_{k-1}(z_1, \dots, z_{k-1})) \right) \equiv \\ &\equiv H_k(z_1, \dots, z_k) \equiv \frac{1}{C_k} z_k + h_k(z_1, \dots, z_{k-1}), \quad k = 3, \dots, n. \end{aligned} \quad (13)$$

Аналогично получаем, что

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{C_{n+1}} \left(z_{n+1} - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial F_n(H_1(z_1), \dots, H_n(z_1, \dots, z_n))}{\partial x_i} \cdot \right. \\ &\quad \cdot \left(f_i(H_1(z_1), \dots, H_i(z_1, \dots, z_i)) + c_{i+1} H_{i+1}(z_1, \dots, z_{i+1}) \right) - \\ &\quad \left. - \frac{1}{c_{n+1}} f_n(H_1(z_1), \dots, H_n(z_1, \dots, z_n)) \right) \equiv \\ &\equiv H_{n+1}(z_1, \dots, z_{n+1}) \equiv \frac{1}{C_{n+1}} z_{n+1} + h_{n+1}(z_1, \dots, z_n). \end{aligned} \quad (14)$$

Лемма доказана.

Теорема 1. Пусть функции $f_i(x_1, \dots, x_i)$, непрерывно-дифференцируемы $(n - i + 1)$ раз, $i = 1, \dots, n$. Тогда управление $u(t)$, переводящее точку x^0 в точку x^1 за время T в силу системы (1) может быть выбрано следующим образом: $u(t) = H_{n+1}(z_1(t), z_2(t), \dots, z_n(t), z_{n+1}(t))$, где функция H_{n+1} определена равенством (14), функция $z_{n+1}(t), t \in [0, T]$ - равенством (9), а функции $z_1(t), \dots, z_n(t), t \in [0, 1]$, являются компонентами вектор-функции $z(t)$ определяемой равенством (10). При этом траектория $x(t)$, соответствующая этому управлению, имеет вид:

$$x(t) = (H_1(z_1(t)), H_2(z_1(t), z_2(t)), \dots, H_n(z_1(t), \dots, z_n(t))),$$

где функции $H_1(z_1), \dots, H_n(z_1, \dots, z_n)$ определяются равенством (13).

Доказательство. Покажем, что функции $x_k(t), u(t)$, определенные равенствами (13), (14), в правую часть которых вместо $z_k(t), k = 1, \dots, n, 0 \leq t \leq T$ подставлены компоненты вектора (9) и управление (10), удовлетворяют системе (1) и вектор-функция $x(t)$ удовлетворяет граничным условиям $x(0) = x^0, x(T) = x^1$. Имеем $\dot{x}_1 = \dot{z}_1 = z_2$. В силу равенства (11), $z_2 \equiv f_1(x_1) + c_2 x_2$, следовательно, $\dot{x}_1 = f_1(x_1) + c_2 x_2$. Предположим, что справедливы равенства $\dot{x}_1 = f_1 + c_2 x_2, \dots, \dot{x}_k = f_k + c_{k+1} x_{k+1}$. Покажем, что

$$\dot{x}_{k+1} = f_{k+1} + c_{k+2} x_{k+2}. \quad (15)$$

Действительно, в силу (9) имеем

$$\begin{aligned} \dot{z}_{k+1} &= \frac{d}{dt} F_{k+1}(x_1(t), \dots, x_{k+1}(t)) = \frac{\partial F_{k+1}}{\partial x_1} \dot{x}_1 + \dots + \frac{\partial F_{k+1}}{\partial x_k} \dot{x}_k + \frac{\partial F_{k+1}}{\partial x_{k+1}} \dot{x}_{k+1} = \\ &= \frac{\partial F_{k+1}}{\partial x_1} (f_1 + c_2 x_2) + \dots + \frac{\partial F_{k+1}}{\partial x_k} (f_k + c_{k+1} x_{k+1}) + C_{k+1} \dot{x}_{k+1}. \end{aligned} \quad (16)$$

С другой стороны, имеем $\dot{z}_{k+1} = z_{k+2}$ и из равенства (11) получаем, что

$$z_{k+2} \equiv \frac{\partial F_{k+1}}{\partial x_1} (f_1 + c_2 x_2) + \dots + \frac{\partial F_{k+1}}{\partial x_k} (f_k + c_{k+1} x_{k+1}) + C_{k+1} (f_{k+1} + c_{k+2} x_{k+2}). \quad (17)$$

Из соотношений (16), (17) следует равенство (15).

Полученная траектория $x(t)$ соединяет точки $x(0) = x^0$ и $x(T) = x^1$. Действительно, в силу леммы 1 при заданной вектор-функции $z(t)$, при каждом $0 \leq t \leq T$ равенства

$$z(t) = \begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \\ \dots \\ z_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1(x_1(t)) \\ F_2(x_1(t), x_2(t)) \\ \dots \\ F_n(x_1(t), \dots, x_n(t)) \end{pmatrix}$$

однозначно разрешимы относительно $x_1(t), \dots, x_n(t)$ и поскольку при $t = 0, z(0) = z^0$ и $z(T) = z^1$, то из равенств (6) и (7) следует, что $x_1(0) = x_1^0, \dots, x_n(0) = x_n^0$ и $x_1(T) = x_1^1, \dots, x_n(T) = x_n^1$. Теорема доказана.

3. Управляемость при ограничении на управление

Рассмотрим теперь задачу о локальной управляемости системы (1) из произвольной точки x^0 из некоторой окрестности начала координат в 0 за свободное время при наличии ограничений на управление вида $|u| \leq 1$. Предположим, что $f_i(0, \dots, 0) = 0$, $i = 1, \dots, n$. Сделаем замену переменных вида (3). Получаем систему

$$\begin{aligned}\dot{z}_i &= z_{i+1}, \quad i = 1, \dots, n-1, \\ \dot{z}_n &= g(z_1, \dots, z_n) + C_{n+1}u,\end{aligned}\quad (18)$$

$$\begin{aligned}g(z_1, \dots, z_n) = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial F_n(H_1(z_1), \dots, H_n(z_1, \dots, z_n))}{\partial x_i} &\left(f_i(H_1(z_1), \dots, H_i(z_1, \dots, z_i)) + \right. \\ &\left. + c_{i+1}H_{i+1}(z_1, \dots, z_{i+1}) + C_n f_n(H_1(z_1), \dots, H_n(z_1, \dots, z_n)) \right).\end{aligned}\quad (19)$$

Так как $f_i(0, \dots, 0) = 0$, то из (3) следует, что $F_i(0, \dots, 0) = 0$, но тогда в силу однозначной разрешимости системы уравнений (3) относительно $x_1, \dots, x_n$ следует, что $H_i(0, \dots, 0) = 0$, $i = 1, \dots, n$, и $g(0, \dots, 0) = 0$.

Пусть γ - произвольное число такое, что $0 < \gamma < 1$. Выберем область $D = \{z : |z_i| \leq d, i = 1, \dots, n\}$, где $d > 0$, такое, что при $z \in D$ будет выполняться неравенство: $|g(z_1, \dots, z_n)| \leq \gamma|C_{n+1}|$. Введем, как и ранее новое управление z_{n+1} , определяемое равенством (5), которое с учетом обозначения (19) имеет вид:

$$z_{n+1} = g(z_1, \dots, z_n) + C_{n+1}u.$$

Тогда система (18) запишется в виде:

$$\begin{aligned}\dot{z}_i &= z_{i+1}, \quad i = 1, \dots, n-1, \\ \dot{z}_n &= z_{n+1}.\end{aligned}\quad (20)$$

Пусть z_{n+1} удовлетворяет ограничению:

$$|z_{n+1}| \leq (1 - \gamma)|C_{n+1}|.$$

Известно, что эта система не только локально, но и глобально управляема с помощью кусочно-постоянных управлений, принимающих значения $|z_{n+1}| = \pm(1 - \gamma)|C_{n+1}|$ и имеющих не более $n - 1$ точки переключения. Например, в работе [2] решена задача глобального быстрогодействия. Рассмотрим область управляемости $Q(T)$ этой системы за такое время T , чтобы $Q(T) \subset D$. Тогда $z(t) \in Q(T) \subset D$. Известно, что $Q(T)$ - выпуклое замкнутое ограниченное множество, содержащее 0 в качестве внутренней точки. Из точек границы множества $Q(T)$ попадание в 0 согласно (20) происходит за время T , а из внутренних точек этого множества за время $T_1 < T$, причем соответствующая траектория $z(t) \in Q(T)$. Прообразом этой окрестности при отображении (11) есть множество $P(T) = H(Q(T))$, где

$$H(Q(T)) = \{x = (x_1, \dots, x_n) : x_i = H_i(z_1, \dots, z_i), (z_1, \dots, z_n) \in Q(T)\},$$

а функции $H_i(z_1, \dots, z_i)$ определены равенством (13), множество $P(T)$ также является окрестностью начала координат. Это множество и есть область управляемости за время T для системы (1) при ограничении на управление вида $|u(t)| \leq 1$.

Действительно, пусть $x^0 \in P(T)$, тогда $z^0 \in Q(T)$. Пусть $z(t)$ - траектория системы (20), переводящая точку 0 в 0 , за время $T_1 \leq T$. Тогда, как и в доказательстве теоремы 1, устанавливается, что функции $x_k(t) = H_k(z_1(t), \dots, z_k(t))$, найденные из (11), и управление $u(t) = H_n(z_1(t), \dots, z_n(t)) = \frac{1}{C_{n+1}}(z_{n+1}(t) - g(z_1(t), \dots, z_n(t)))$ удовлетворяют системе (18), начальному условию $x(0) = x^0$ и граничному условию $x(T_1) = 0$. Кроме того, управление $u(t)$ удовлетворяет ограничению $|u(t)| \leq 1$. Так как из того, что $z(t) \in Q(T)$, следует $|g(z(t))| \leq \gamma|C_{n+1}|$, то

$$|u(t)| \leq \frac{1}{|C_{n+1}|}(|z_{n+1}| + |g(z_1(t), \dots, z_n(t))|) \leq \frac{1}{|C_{n+1}|}(|C_{n+1}|(1-\gamma) + |C_{n+1}|\gamma) = 1.$$

Полученный результат сформулирован в следующей теореме.

Теорема 2. Пусть в системе (1) точка $x^1 = 0$ является точкой покоя, т.е. $f_i(0, \dots, 0) = 0$, $i = 1, \dots, n$, а управление $u(t)$ удовлетворяет ограничению $|u(t)| \leq 1$. Тогда в предположениях теоремы 1 система (1) является локально 0-управляемой за время $T > 0$ такое, что $Q(T) \subset D = \{z : |g(z_1, \dots, z_n)| \leq \gamma|C_{n+1}|, \gamma \in (0, 1)\}$. При этом область управляемости $P(T) = H(Q(T))$, а управление $u(t)$, переводящее точку $x^0 \in P(T)$ в $x^1 = 0$ можно выбрать в виде:

$$u(t) = \frac{1}{C_{n+1}}(g(z_1(t), \dots, z_n(t)) + z_{n+1}(t)),$$

где $z_{n+1}(t)$ - оптимальное по быстродействию управление, переводящее точку z^0 (из (7)) в $z^1=0$ в силу системы (20), а $z(t) = (z_1(t), \dots, z_n(t))$ - оптимальная траектория, соответствующая этому управлению.

Как следует из работы [3], если $f_1(x_1), \dots, f_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1})$ - произвольные функции, непрерывно-дифференцируемые соответственно $(n-1), \dots, 1$ раз, а функция

$$f_n(x_1, \dots, x_n) = -\frac{A_{n-1}^2 A_{n-2} \cdots A_0 x_1}{C_n}, \quad (21)$$

где A_0 - тождественный оператор, а A_i - дифференциальный оператор вида

$$A_i = (f_1 + c_2 x_2) \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + (f_i + c_{i+1} x_{i+1}) \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad i = 1, \dots, n-1,$$

то система (1) отображается на систему

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2, \\ \dot{z}_2 = z_3, \\ \dots \\ \dot{z}_n = C_{n+1} u, \end{cases} \quad (22)$$

где $|u| \leq 1$, т.е. в этом случае справедлива следующая теорема.

Теорема 3. Пусть в условиях теоремы 1 функция $f_n(x_1, \dots, x_n)$ имеет вид (21). Тогда оптимальное управление $u(t)$ переводящее точку z^0 вида (7) в $z^1 = 0$ в силу (22) является также оптимальным по быстродействию управлением, переводящим точку x^0 в $x^1 = 0$ в силу системы (1).

Пример. Рассмотрим систему:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1^2 + x_2, \\ \dot{x}_2 = -2x_1x_2 + x_3, \\ \dot{x}_3 = -6x_1^4 - 6x_1^2x_2 + u. \end{cases} \quad (23)$$

Рассмотрим задачу управляемости из точки $x^0 = (1, -1, -2)$ в точку $x^1 = (0, 0, 0)$ за время $T = 1$, вначале без ограничений на управление. Эта система отображается на систему:

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2, \\ \dot{z}_2 = z_3, \\ \dot{z}_3 = u, \end{cases} \quad (24)$$

с помощью замены:

$$\begin{cases} z_1 = x_1, \\ z_2 = x_1^2 + x_2, \\ z_3 = 2x_1^3 + x_3. \end{cases} \quad (25)$$

Управление $u(t)$, переводящее точку x^0 в точку $x^1 = 0$ в силу системе (23), совпадает с управлением, переводящее точку $z^0 = (1, 0, 0)$ в точку $z^1 = (0, 0, 0)$ в силу системе (24) и имеет вид:

$$u(t) = -b^* e^{-A^* t} W^{-1},$$

в этом случае $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$,

$$W = \int_0^1 e^{-A\tau} b b^* e^{-A^*\tau} d\tau = \begin{pmatrix} \frac{1}{20} & -\frac{1}{8} & \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{8} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда $u(t)$ имеет вид:

$$u(t) = \begin{pmatrix} -\frac{t^2}{2} & t & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 720 & 360 & 60 \\ 360 & 192 & 36 \\ 60 & 36 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -360t^2 + 360t - 60.$$

Следовательно,

$$z_1(t) = 1 - 6t^5 + 15t^4 - 10t^3,$$

$$z_2(t) = -30t^4 + 60t^3 - 30t^2,$$

$$z_3(t) = -120t^3 + 180t^2 - 60t.$$

Тогда из (25) следует, что траектории системы (23), соединяющие точки x^0 и $x^1 = 0$ за время $T = 1$ имеют вид:

$$x_1(t) = z_1(t) = 1 - 6t^5 + 15t^4 - 10t^3,$$

$$x_2(t) = z_2(t) - x_1^2(t) = -30t^4 + 60t^3 - 30t^2 - (1 - 6t^5 + 15t^4 - 10t^3)^2,$$

$$x_3(t) = z_3(t) - 2x_1^3 = -120t^3 + 180t^2 - 60t - 2(1 - 6t^5 + 15t^4 - 10t^3)^3.$$

Рассмотрим теперь управляемость этой же системы (23) из точки $x^0 = (1, -1, -2)$ в точку $x^1 = (0, 0, 0)$ за свободное время и при ограничении $|u| \leq 1$. Будем отыскивать наименьшее время движения, т.е. решим задачу быстрогодействия из точки $x^0 = (1, -1, -2)$ в точку $x^1 = (0, 0, 0)$. Как мы видим эта задача сводится к задаче быстрогодействия для системы (24) из точки $z^0 = (1, 0, 0)$ в точку $z^1 = (0, 0, 0)$. Применяя следствие из теоремы 1 работы [2], имеем:

1. Время оптимального быстрогодействия $\Theta_{\text{опт}}$ является максимальным положительным корнем уравнения:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{64}\Theta^4 - \frac{1}{16}\Theta^3 z_1 - \frac{1}{32}\Theta^2 z_1^2 - \frac{1}{4}\Theta^2 z_2 - \frac{1}{2}\Theta z_3 + \frac{1}{48}\Theta z_1^3 + \frac{1}{2}z_1 z_3 - \frac{1}{4}z_2^2 - \right. \\ & \left. - \frac{1}{192}z_1^4 \right) \left(\frac{1}{64}\Theta^4 + \frac{1}{16}\Theta^3 z_1 - \frac{1}{32}\Theta^2 z_1^2 + \frac{1}{4}\Theta^2 z_2 + \frac{1}{2}\Theta z_3 - \frac{1}{48}\Theta z_1^3 + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2}z_1 z_3 - \frac{1}{4}z_2^2 - \frac{1}{192}z_1^4 \right) = 0. \end{aligned}$$

В нашем случае $z_1 = 1, z_2 = 0, z_3 = 0$, поэтому:

$$\left(\frac{1}{64}\Theta^4 - \frac{1}{16}\Theta^3 - \frac{1}{32}\Theta^2 + \frac{1}{48}\Theta - \frac{1}{192} \right) \left(\frac{1}{64}\Theta^4 + \frac{1}{16}\Theta^3 - \frac{1}{32}\Theta^2 - \frac{1}{48}\Theta - \frac{1}{192} \right) = 0.$$

Отсюда, $\Theta_{\text{опт}} \approx 4,39031269$.

2. Поскольку $\Theta_{\text{опт}}$ является решением уравнения

$$\frac{1}{64}\Theta^4 - \frac{1}{16}\Theta^3 - \frac{1}{32}\Theta^2 + \frac{1}{48}\Theta - \frac{1}{192} = 0,$$

то оптимальное управление $u_{\text{опт}}(t)$ является управлением первого рода, т.е.

$$u_{\text{опт}}(t) = \begin{cases} -1, & t \in [0, t_1], \\ +1, & t \in (t_1, t_2), \\ -1, & t \in [t_2, \Theta_{\text{опт}}]. \end{cases}$$

3. Моменты переключения оптимального управления определяются из следующего уравнения:

$$\alpha_1 t^2 - (\alpha_1^2 + 2\alpha_2)t + (\alpha_3 + \alpha_1 \alpha_2) = 0,$$

где $\alpha_1 = \frac{\Theta - z_1}{2}$, $\alpha_2 = \frac{1}{2}z_2 - \frac{1}{8}z_1^2 + \frac{1}{4}\Theta z_1 + \frac{1}{8}\Theta^2$, $\alpha_3 = -z_3 + \frac{1}{4}z_1 z_2 - \frac{1}{4}\Theta z_2 + \frac{1}{16}\Theta^2 z_1 - \frac{1}{48}z_1^3 + \frac{1}{16}\Theta z_1^2 + \frac{1}{16}\Theta^3$. Здесь $\Theta = \Theta_{\text{опт}}$, $z_1 = 1$, $z_2 = 0$, $z_3 = 0$.

Тогда $t_1 = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \approx 1,99505719$, $t_2 = \alpha_1 + \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \approx 3,69021354$, т.е.

$$u_{\text{опт}}(t) \approx \begin{cases} -1, & t \in [0; 1,99505719], \\ +1, & t \in (1,99505719; 3,69021354), \\ -1, & t \in [3,69021354; 4,39031269]. \end{cases}$$

С данным управлением $u_{\text{опт}}(t)$ легко находится траектория $z(t) = (z_1(t), z_2(t), z_3(t))$ системы (24), соединяющая точки $(1, 0, 0)$ и $(0, 0, 0)$. После этого траектория системы (23), отвечающая этому же управлению и соединяющая точки $(1, -1, -2)$ и $(0, 0, 0)$ в силу системы, находится из равенств (25): $x_1(t) = z_1(t)$, $x_2(t) = z_2(t) - z_1^2(t)$, $x_3(t) = z_3(t) - 2z_1^3(t)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Коробов В.И. Управляемость, устойчивость некоторых нелинейных систем // Дифференциальные уравнения. - 1973. - Т.6 - С. 614-619.
2. Коробов В.И., Скляр Г.М. Оптимальное быстродействие и степенная проблема моментов // Математический сборник. - 1987. - Т.134(176), 2(10). - С. 187-206.
3. Коробова Е.В., Скляр Г.М. Один конструктивный метод отображения нелинейных систем на линейные // Теория функций, функциональный анализ и их приложения. - 1991. - 55. - С. 68-74; English translation: Constructive method for mapping nonlinear systems onto linear systems // J. of Soviet Math. - 1992. - V.59, 1. - P. 631-635.

Метод граничных элементов в непрямой формулировке для решения двумерных упруго-пластических задач

Б. Я. Кантор, В. В. Науменко, Е. А. Стрельникова

Институт проблем машиностроения НАН Украины

Предложен метод решения краевых задач для неупругих тел, основанный на использовании непрямой формулировки метода граничных элементов. Для определения полей упруго-пластических напряжений и деформаций применен метод итераций. На каждой итерации решается линейная краевая задача теории упругости, описываемая системой сингулярных интегральных уравнений. Проведено численное исследование концентрации упруго-пластических напряжений в телах с отверстиями.

1. Постановка задачи и сведение ее к системе сингулярных интегральных уравнений

Рассмотрим краевую задачу для изотропного двумерного неупругого тела V , ограниченного контуром Ω . Предположим, что на части границы Ω_1 заданы перемещения тела, а на части Ω_2 — усилия $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$. Считаем, что при увеличении нагрузки в теле могут развиваться пластические деформации, т.е. связь напряжений и деформаций не будет описываться законом Гука.

Решение задачи состоит в определении полей напряжений, деформаций и смещений $\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}, u_j (i, j = 1, 2)$ в области V , удовлетворяющих заданным граничным условиям. Для нахождения указанных функций применяются следующие уравнения [1].

1. Дифференциальные уравнения равновесия в напряжениях, которые при отсутствии объемных сил имеют вид:

$$\sigma_{ij,j} = 0; \quad i, j = 1, 2.$$

2. Зависимости между компонентами тензора деформаций и компонентами вектора перемещений (соотношения Коши):

$$\varepsilon_{ij} = 0,5(u_{i,j} + u_{j,i}); \quad i, j = 1, 2.$$

3. Физические уравнения, связывающие компоненты тензоров напряжений и деформаций до момента возникновения пластических деформаций (закон Гука):

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \theta + 2\mu \varepsilon_{ij}, \quad i, j = 1, 2,$$

где λ и μ — параметры Ляме [2]; $\theta = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}$ в случае плоской деформации, $\theta = 2\mu(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22})/(\lambda + 2\mu)$ в случае плоского напряженного состояния.

4. Условие текучести, указывающее значения напряжений, при которых возникают пластические деформации (условие Мизеса–Генки):

$$\sigma = \sqrt{\sigma_{11}^2 - \sigma_{11}\sigma_{22} + \sigma_{22}^2 + 3\sigma_{12}^2} = \sigma_T,$$

где σ_T — предел текучести.

5. Соотношения между напряжениями и деформациями, которые описывают поведение материала при пластических деформациях и в соответствии с теорией малых упруго-пластических деформаций имеют вид:

$$\sigma_{ij} = (2\sigma_i/3\varepsilon_i)(\varepsilon_{ij} + \delta_{ij}\varepsilon_{kk}), \quad i, j = 1, 2, \quad (1)$$

где величины σ_i и ε_i представляют собой интенсивности напряжений и деформаций, связанные заданной функциональной зависимостью

$$\sigma_i = \Phi(\varepsilon_i).$$

Для численного решения поставленной задачи применим метод дополнительных нагрузок [1]. С этой целью формально представим истинные напряжения в неупругом теле в виде суммы напряжений, вызванных упругими деформациями, и некоторых дополнительных напряжений σ_{ij}^a .

$$\sigma_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} + \lambda\delta_{ij}\varepsilon_{kk} - \sigma_{ij}^a.$$

Предположим, что дополнительные напряжения σ_{ij}^a известны. Приведем разрешающую систему дифференциальных уравнений в перемещениях и граничные условия:

$$\mu\Delta u_i + (\lambda + \mu)(\operatorname{div} \mathbf{u})_{,j} = \sigma_{ij,j}^a, \quad i, j = 1, 2, \quad (2)$$

$$u_j(x) = U_{jL}(x), \quad x \in \Omega_1, \quad T_{ij}^{n(x)} u_j(x) = X_i(x) + \sigma_{ij}(x) n_j(x), \quad x \in \Omega_2.$$

Здесь $u_j(x)$ — компоненты вектора перемещений; $T^{n(x)}$ — оператор напряжений [2]; $U_{jL}(x)$, $X_i(x)$ — заданные компоненты перемещений и усилий на границе тела; $n(x) = (n_1(x), n_2(x))$ — внешняя нормаль к контуру Ω ; $x = (x_1, x_2)$. В общем случае дополнительные напряжения неизвестны и для их определения будет использоваться метод итераций, который описан ниже.

Остановимся на решении задачи с известными дополнительными напряжениями. В [3] показано, что если решение краевой задачи (2) разыскивать в

виде суммы обобщенного потенциала простого слоя с неизвестной плотностью $p_0(\zeta)$ и обобщенного ньютонова потенциала

$$u(x) = \int_{\Omega} \Gamma(x - \zeta) p_0(\zeta) d\Omega_{\zeta} + \iint_V \Gamma(x - \zeta) b^a(\zeta) dV_{\zeta}, \quad (3)$$

то неизвестный вектор $p_0(\zeta)$ определяется из системы сингулярных интегральных уравнений

$$\int_{\Omega} \Gamma(x - \zeta) p_0(\zeta) d\Omega_{\zeta} = U_L(x) - \iint_V \Gamma(x - \zeta) b^a(\zeta) dV_{\zeta}, \quad x \in \Omega_1; \quad (4)$$

$$p_0(x) + \int_{\Omega} \Gamma_1(x - \zeta) p_0(\zeta) d\Omega_{\zeta} = X(x) + p^a(x) - \iint_V \Gamma_1(x - \zeta) b^a(\zeta) dV_{\zeta}, \quad x \in \Omega_2.$$

Здесь $b^a = (b_1^a, b_2^a)$; $b_i^a = \sigma_{ij,j}^a$; $p^a = (p_1^a, p_2^a)$; $p_i^a = \sigma_{ij}^a n_j$;

$$\Gamma_1(x - \zeta) = T^{n(x)} \Gamma(x - \zeta);$$

$\Gamma(x - \zeta)$ — матрица фундаментальных решений Кельвина-Соммильяны [2].

Разрешимость систем сингулярных интегральных уравнений типа (4) доказана И. Ю. Чудиновичем в работе [4].

При выводе второго уравнения в (4) применена теорема о существовании первых производных обобщенного ньютонова потенциала [2]. Отметим, что в двукратных интегралах в правых частях системы уравнений (4) содержатся производные от дополнительных напряжений. Это приводит к трудностям при численном определении указанных интегралов. Поэтому целесообразно произвести здесь интегрирование по частям аналогично [5], где применяется прямая формулировка метода граничных интегральных уравнений в краевых задачах для неупругих тел.

Рассмотрим функции

$$g_m(x) = \iint_V \Gamma_{mj}(x - \zeta) \sigma_{ji,i}^a(\zeta) dV_{\zeta}; \quad m = 1, 2,$$

и применим формулу Стокса. Корректность применения этой формулы следует из свойств ньютонова потенциала [2]. Имеем

$$g_m(x) = \iint_V \varepsilon_{mij}(x - \zeta) \sigma_{ij}^a(\zeta) dV_{\zeta} + \int_{\Omega} \Gamma_{mj}(x - \zeta) p_j^a(\zeta) d\Omega_{\zeta}, \quad (5)$$

$$\varepsilon_{mij} = 0,5(\Gamma_{mj,i} + \Gamma_{mi,j}) =$$

$$= -\frac{1}{4\pi\mu(\lambda + 2\mu)r} [\mu(r_{,i}\delta_{mj} + r_{,m}\delta_{ij}) - (\lambda + \mu)(r_{,j}\delta_{mi} - 2r_{,m}r_{,i}r_{,j})],$$

где $r = |x - \zeta|$. Дифференцирование в (5) относится к переменной ζ . Функции ε_{mij} , определенные в (5), можно рассматривать как деформации в произвольной точке x , обусловленные единичной нагрузкой, приложенной в точке ζ и

направленной вдоль j -той оси. Аналогично преобразуем интеграл по области во втором из уравнений (4). Рассмотрим функции

$$f_m(x) = \iint_V \Gamma_{1mj}(x - \zeta) \sigma_{ji,i}^a(\zeta) dV_\zeta; \quad m = 1, 2$$

и представим их в следующем виде:

$$f_m(x) = T_{mk}^{n(x)} \iint_V \Gamma_{kj}(x - \zeta) \sigma_{ji,i}^a(\zeta) dV_\zeta; \quad m = 1, 2.$$

Применяя формулу Стокса, для $x \notin \Omega$ получим

$$f_m(x) = T_{mk}^{n(x)} \iint_V \varepsilon_{kij}(x - \zeta) \sigma_{ij}^a(\zeta) dV_\zeta + \int_{\Omega} \Gamma_{1mj}(x - \zeta) p_j^a(\zeta) d\Omega_\zeta. \quad (6)$$

В контурном интеграле в (6) произведена замена порядка дифференцирования и интегрирования. Интеграл по области здесь преобразуем аналогично [5]. Устанавливаем, что

$$T_{mk}^{n(x)} \iint_V \varepsilon_{kij}(x - \zeta) \sigma_{ij}^a(\zeta) dV_\zeta = n_k(x) \left[\iint_V \varepsilon_{mkij}^*(x - \zeta) \sigma_{ij}^a(\zeta) dV_\zeta + c f_{mk}(x) \right],$$

где $c = 1$ во внутренних точках области V ; $c = 0,5$ в регулярных граничных точках $x \in \Omega$; в нерегулярных точках границы эта константа определяется соответствующим углом. Величины ε_{mkij}^* и $f_{mk}(x)$ вычисляются следующим образом:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{mkij}^* = & \frac{1}{4\pi(\lambda + 2\mu)r^2} [\mu(\delta_{mi}\delta_{kj} + \delta_{ki}\delta_{mj} - \delta_{mk}\delta_{ij} + 2\delta_{mk}r_{,i}r_{,j}) + \\ & + \lambda(\delta_{jm}r_{,i}r_{,k} + \delta_{ki}r_{,m}r_{,j} + \delta_{mi}r_{,j}r_{,k} + \delta_{kj}r_{,m}r_{,i}) + \\ & + 2(\lambda + \mu)(\delta_{ij}r_{,k}r_{,m} - 4r_{,m}r_{,k}r_{,i}r_{,j})], \\ f_{mk}(x) = & -\frac{1}{4(\lambda + 2\mu)} [2(\lambda + \mu)\sigma_{mk}^a + (\mu - \lambda)\delta_{mk}\sigma_{li}^a]. \end{aligned}$$

Подставим выражения (5) и (6) в правые части системы сингулярных интегральных уравнений (4). Удобно ввести новую неизвестную вектор-функцию $q(x) = p_0(x) - p^a(x)$, относительно которой получим

$$\int_{\Omega} \Gamma_{mk}(x - \zeta) q_k(\zeta) d\Omega_\zeta = U_{Lm}(x) - \iint_V \varepsilon_{mij}(x - \zeta) \sigma_{ij}^a dV_\zeta; \quad x \in \Omega_1, \quad (7)$$

$$q_m(x) + \int_{\Omega} \Gamma_{1mk}(x - \zeta) q_k(\zeta) d\Omega = X_m(x) + p_m^a(x) -$$

$$-n_k(x) \left[\iint_V \varepsilon_{mkij}^*(x - \zeta) \sigma_{ij}^a(\zeta) \sigma_{ij}^a(\zeta) dV_\zeta + c f_{mk}(x) \right]; \quad x \in \Omega_2; \quad m = 1, 2.$$

Второе уравнение в (7) выражает равенство напряжений заданным нагрузкам на границе тела. При решении задач для тел с неупругим поведением необходимо также вычислять напряжения в точках, расположенных внутри тела. Поэтому важным этапом решения задачи является вычисление интегралов по области в (7) для внутренних и граничных точек тела. Эти интегралы существуют лишь в смысле главного значения по Коши. Произведя замену переменных $x_1 - \zeta_1 = \rho \cos \varphi$; $x_2 - \zeta_2 = \rho \sin \varphi$, можно показать, что компоненты тензора ε_{mkij}^* представимы в виде:

$$\varepsilon_{mkij}^* = [Q_{mkij}(\lambda, \mu) \sin 2\varphi + W_{mkij}(\lambda, \mu) \cos 2\varphi + \\ + R_{mkij}(\lambda, \mu) \sin 4\varphi + U_{mkij}(\lambda, \mu) \cos 4\varphi] \rho^2.$$

Отсюда следует, что условия леммы Ляпунова [6] соблюдены, и рассматриваемые двукратные интегралы существуют не только во внутренних точках тела, но и в регулярных точках границы.

Для плотностей, представляемых полиномами, интегралы в правых частях системы (7) могут быть взяты аналитически по произвольной четырехугольной области. При численной реализации в данной работе аналитически вычислялись лишь однократные интегралы по ρ ; повторное интегрирование производилось по пятиточечным формулам Гаусса.

2. Метод итераций и шаговый процесс по нагрузке

Представим вектор поверхностных нагрузок $X(x)$ в (7) в виде $X(x) = fF(x)$, где f — параметр нагрузки.

Опишем итерационный процесс, выполняемый на каждом шаге по нагрузке в методе дополнительных напряжений. Вначале при $f = 1$ решается чисто упругая задача и определяется зона (или точка), в которой интенсивность напряжений максимальна. Эта максимальная величина в соответствии с условием Мизеса-Генки сравнивается с пределом текучести. Шаговый процесс начинается с определения значения параметра нагрузки f , при котором появляются пластические деформации, т.е. того значения f , при котором максимальная интенсивность напряжений равна пределу текучести. Затем выполняется шаг по нагрузке, т.е. нагрузка увеличивается на определенную величину (параметр f получает заданное приращение).

Итерация представляет собой решение системы сингулярных уравнений, в правой части которой содержатся интегралы от дополнительных напряжений и приложенная к телу на данном шаге нагрузка. Таким образом, решается условно упругая задача, описываемая неоднородными уравнениями Ляме (на первой итерации решаются уравнения Ляме с нулевой правой частью). Вычисляются деформации и напряжения, отвечающие условно упругой задаче; определяются величины ε_i и $\sigma_i = \Phi(\varepsilon_i)$. По формулам (1) находятся упруго-пластические напряжения. Дополнительные напряжения σ_{ij}^a для следующей

итерации находятся как разность условных упругих напряжений и напряжений, вычисленных по формулам (1). Определяются интенсивности напряжений и деформаций, зоны пластических деформаций (области, в которых интенсивность напряжений превышает или равна пределу текучести). Критерием сходимости итерационного процесса является средне-квадратичное отклонение интенсивности пластических деформаций на n -той и $n + 1$ -й итерациях. При достижении заданной точности делается переход к новому шагу по нагрузке.

3. Численное решение задач для бесконечной плоскости с отверстием в упруго-пластической постановке

Описанный выше метод применен к решению задач о концентрации напряжений в бесконечной плоскости с отверстием в упруго-пластической постановке при растяжении и сдвиге. Принималась билинейная связь $\sigma_i = \Phi(\varepsilon_i)$ [1].

На каждом шаге по нагрузке численно методом граничных элементов решалась система сингулярных интегральных уравнений (7). Метод численного решения основан на результатах, полученных в [7-9].

В силу симметрии задачи рассматривалась четверть плоскости. На контуре отверстия бралось 10 граничных элементов, удвоение их числа изменяло результаты не более, чем на 1%. Для вычисления интегралов от дополнительных напряжений (в области пластичности) вводилась сгущавшаяся к контуру отверстия сетка четырехугольных элементов.

Выполнялось 10 шагов по нагрузке, при этом количество итераций на каждом шаге не превышало 12; допустимое относительное отличие интенсивности пластических деформаций на соседних итерациях принималось равным 0,01. В рассматриваемых ниже задачах принято: модуль упругости $E = 2 \times 10^{11}$ Н/м²; коэффициент Пуассона $\nu = 0,3$; предел текучести $\sigma_T = 2 \times 10^8$ Н/м².

Решена задача, являющаяся аналогом задачи Кирша (задача о растяжении бесконечной плоскости с отверстием в направлении оси x_1) в упруго-пластической постановке. На рис. 1 показаны линии уровня интенсивности напряжений, равной пределу текучести для разных нагрузок при модуле упрочнения $E_1 = 2 \times 10^{10}$ Н/м². Кривые 1-4 соответствуют нагрузкам $p/\sigma_T = 0,5; 0,625; 0,75; 0,875$. На рисунке показана четверть плоскости; растягивающая нагрузка приложена на бесконечности в направлении оси x_1 .

Решена задача об определении концентрации напряжений в бесконечной плоскости с отверстием при чистом сдвиге. Рассматривался случай отсутствия упрочнения.

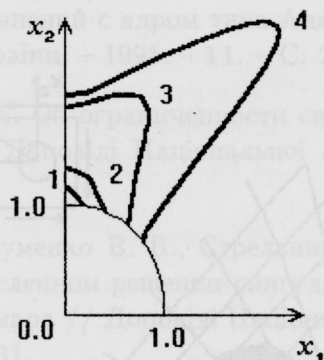


Рис. 1: Зоны пластических деформаций при растяжении пластины

На рис. 2 представлены линии уровня и области распределения интенсивности касательных напряжений при сдвиге приложенными на границе напряжениями p_{12} и p_{21} , равными $0,75 \times 10^8 \text{ Н/м}^2$. Здесь также показана сетка четырехугольных элементов, используемая при вычислении двукратных интегралов. Цифрами 1 помечены зоны максимальной интенсивности напряжений, равной пределу текучести $\sigma_{\max} = 2 \times 10^8 \text{ Н/м}^2$; цифры 2 соответствуют зонам, где $2 \times 10^8 \text{ Н/м}^2 > \sigma_{\max} \geq 1,33 \times 10^8 \text{ Н/м}^2$. При удалении от областей 1, 2 напряжения уменьшаются, причем касательные напряжения стремятся к приложенным на бесконечности. Заметим, что в упругом случае коэффициент концентрации напряжений в данной задаче равен 4 (в отличие от классической задачи Кирша, в которой он равен 3). Распределение напряжений определяется формулами:

$$\sigma_r = S(1 + 3a^4/r^4 - 4a^2/r^2) \sin 2\theta; \quad \sigma_\theta = -S(1 + 3a^4/r^4) \sin 2\theta;$$

$$\tau_{r\theta} = -S(1 - 3a^4/r^4 + 2a^2/r^2) \cos 2\theta;$$

где S — приложенная на бесконечности нагрузка, a — радиус отверстия, r, θ — полярные координаты точки наблюдения. На контуре отверстия ($r = a$) имеем

$$\sigma_r = 0 \quad \sigma_\theta = -4 \sin 2\theta \quad \tau_{r\theta} = 0.$$

С точки зрения практики, концентрация напряжений у отверстия при сдвиге более опасна, чем при растяжении, т.к. в первом случае коэффициент концентрации больше, и возникают не две, а четыре области пластических деформаций.

Авторы благодарны профессору Ю. В. Гандею за плодотворное обсуждение работы.

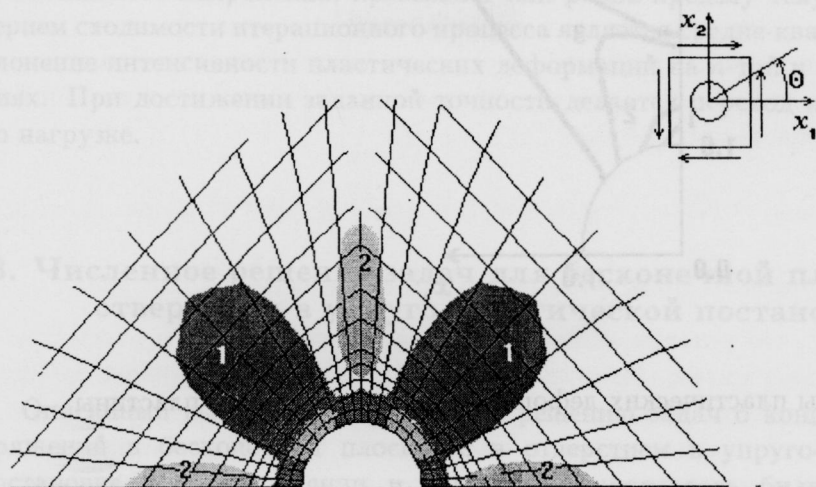


Рис. 2: Зоны пластических деформаций при изгибе пластины

ЛИТЕРАТУРА

1. Писаренко Г. С., Можаровский Н. С. Уравнения и краевые задачи теории пластичности и ползучести. – К.: Наукова думка, 1981. – 494 с.
2. Трехмерные задачи математической теории упругости / В. Д. Купрадзе, Т. Г. Гегелия, М. О. Башелейшвили, Т. В. Бурчуладзе / Под ред. В.Д. Купрадзе. – М.: Наука, 1976. – 664 с.
3. Стрельникова Е.А. Непрямая формулировка метода граничных элементов для неупругих тел с разрезами // Вестник Харьковского Государственного Политехнического Университета. – 1998. – 12. – С. 71-75.
4. Чудинович И. Ю. Свойства граничных операторов теории упругости в соболевских пространствах и разрешимость граничных уравнений для смешанных задач в областях с разрезами // Рук. депонирована в Укр.ВИНИТИ, №1763-Ук88. Библиогр. указ. ВИНТИ, – 1988, – №11(205)-1402.– 34 с.
5. Бреббия К., Теллес Ж., Вроубел Л. Методы граничных элементов. – М.: Мир, 1987. – 524 с.
6. Михлин С. Г. Лекции по линейным интегральным уравнениям. – М.: Физматгиз, 1959. – 224 с.

7. Кантор Б. Я., Науменко В. В., Стрельникова Е. А. Об аппроксимации поверхности плоскими элементами при численном решении сингулярных интегральных уравнений с ядром типа Адамара // Доповіді Національної Академії наук України. – 1995. – 11. – С. 21-23.
8. Стрельникова Е. А. Об ограниченности сингулярных операторов с ядром типа Адамара // Доповіді Національної Академії наук України. – 1995. – 12. – С. 19-21.
9. Кантор Б. Я., Науменко В. В., Стрельникова Е. А. О выборе контрольных точек при численном решении сингулярных интегральных уравнений с ядром типа Адамара // Доповіді Національної Академії наук України. – 1996. – 1. – С. 27-31.

О полиномиальных последовательностях в
гильбертовом пространстве

С. М. Загороднюк

Харьковский государственный университет

В работе изучаются свойства полиномиальных последовательностей в сепарабельном гильбертовом пространстве. Указан критерий принадлежности последовательности классу полиномиальных. Рассмотрен ряд последовательностей, соответствующих классическим ортогональным многочленам. Изучены эргодические свойства, разложение меры представления в ряд и другие свойства таких последовательностей.

Стационарный случайный процесс как кривая в гильбертовом пространстве был впервые рассмотрен и изучен А. Н. Колмогоровым. Используя сходную аксиоматику, выделением нестационарных кривых в гильбертовом пространстве занимались В. А. Золотарев, К. П. Кирчев, А. А. Янцевич (см. [2], [1]). В работе мы изучаем случай нестационарной последовательности, который до последнего времени не рассматривался.

1. Определение Р-последовательностей. Критерий
полиномиальности последовательности. Разложение в ряд
меры представления.

Рассмотрим следующее определение [3]:

Определение. Последовательность $\{x_n\}_0^\infty$ элементов сепарабельного гильбертового пространства H будем называть полиномиальной или Р-последовательностью, если x_n допускает представление:

$$x_n = p_n(A)x_0 = \int_a^b p_n(\lambda) dE_\lambda x_0, \quad n = 0, 1, \dots \quad (1.1)$$

где $\{p_n(\lambda)\}_0^\infty$ — система ортогональных на сегменте вещественной оси относительно веса $\sigma(\lambda)$ полиномов степени n соответственно, и положительным старшим коэффициентом, т.е. :

$$\int_a^b p_n(\lambda) p_m(\lambda) d\sigma(\lambda) = A_n \delta_{n,m}, \quad n, m = \overline{0, \infty}, \quad A_n > 0, n = \overline{0, \infty}$$

$\sigma(\lambda)$ — кусочно-непрерывная, неубывающая функция на R . В том случае, когда $\sigma(\lambda)$ — абсолютно-непрерывна, обозначим $h(\lambda) = \sigma'(\lambda)$; $[a, b] \subset R$.

В (1.1) A — некоторый самосопряженный оператор в H (не обязательно являющийся ограниченным), со спектром на $[a, b]$; $\{E_\lambda\}_a^b$ — его ортогональное разложение единицы.

и для $\{E_\lambda\}_a^b$ выполнено соотношение:

$$\int_a^b |p_n(\lambda)|^2 dE_\lambda x_0, x_0 \leq M^2 \int_a^b |p_n(t)|^2 \sigma(t), \text{ где } M = \text{const}, M \geq 0 \quad (1.2)$$

или, эквивалентно:

$$\|x_n\|_H \leq M \|p_n(\lambda)\|_{L_2([a,b], \sigma(\lambda))}.$$

Замечание. Можно указать системы ортогональных на вещественной оси полиномов, для которых условие согласованности норм (2) выполнено для любого разложения единицы $\{E_\lambda\}$ (для полиномов Чебышева), есть системы полиномов, для которых оно выполняется не для всех $\{E_\lambda\}$ (системы Лежандра и Эрмита). Однако, хотя бы одно такое разложение $\{E_\lambda\}$ всегда существует (выберем $\langle E_\lambda x_0, x_0 \rangle = \sigma(\lambda)$, что возможно согласно теореме Наймарка ([4, Теорема 2, с. 271])).

Для проверки принадлежности данной последовательности $\{x_n\}_{n=0}^\infty \in H$ классу полиномиальных (с некоторой фиксированной системой полиномов $\{p_n(\lambda)\}_{n=0}^\infty$ согласно определению, следовало бы перебирать всевозможные разложения единицы $\{E_\lambda\}_{\lambda \in [a,b]}$. Следующая теорема предоставляет более удобный способ такой проверки, данная теорема является аналогом теоремы Бохнера-Хинчина для стационарной последовательности:

Теорема 1.1. (критерий полиномиальности последовательности) Пусть задана последовательность (1). Для того, чтобы последовательность была полиномиальной, необходимо и достаточно, чтобы для корреляционной функции $K_{n,m} = \langle x_n, x_m \rangle$ выполнялось условие:

$$\lambda_n K_{n+1,m} + \alpha_n K_{n,m} + \lambda_{n-1} K_{n-1,m} = \lambda_m K_{n,m+1} + \alpha_m K_{n,m} + \lambda_{m-1} K_{n,m-1},$$

$$K_{-1,m} = K_{n,-1} = 0 \quad n, m = 0, 1, \dots;$$

$$K_{n,n} \leq M^2 \|p_n\|_{L_2([a,b], \sigma)},$$

здесь $\{p_n(\lambda)\}_{n=0}^\infty$ — система полиномов, определяемая из рекуррентного соотношения:

$$\lambda_n p_{n+1} + \alpha_n p_n + \lambda_{n-1} p_{n-1} = \lambda p_n, \quad n = 0, 1, \dots \quad (p_0 = 1)$$

$[a, b]$ — отрезок ортогональности данной системы по мере $\sigma(\lambda)$, $M = \text{const}$; где $\{\lambda_n\}_{n=0}^\infty, \{\alpha_n\}_{n=0}^\infty$ — некоторые последовательности: $\lambda_n > 0$ ($\lambda_{-1} = 0$), $\alpha_n \in R$, $n = 0, 1, \dots$

Доказательство. Необходимость очевидно вытекает из рекуррентного соотношения для систем ортогональных на вещественной оси полиномов [5].

Покажем достаточность. Рассмотрим следующее соотношение:

$$\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 1 & \boxed{\alpha_0} & \lambda_0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \lambda_0 & \alpha_1 & \lambda_1 & 0 & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_1 & \alpha_2 & \lambda_2 & 0 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cdot \\ u_{-2} \\ u_{-1} \\ \boxed{u_0} \\ u_1 \\ u_2 \\ \cdot \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \cdot \\ u_{-2} \\ u_{-1} \\ \boxed{u_0} \\ u_1 \\ u_2 \\ \cdot \end{pmatrix} \quad (1.3)$$

(в рамку взяты элементы матрицы и вектора, стоящие на нулевом месте). Фундаментальная система решений (3) имеет вид:

$$X_0 = \begin{pmatrix} \cdot \\ 1 \\ \boxed{0} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix}, \quad X_1 = \begin{pmatrix} \cdot \\ 0 \\ \boxed{1 = p_0(\lambda)} \\ p_1(\lambda) \\ p_2(\lambda) \\ \cdot \end{pmatrix},$$

где $\{p_n(\lambda)\}_{n=0}^{\infty}$ — система полиномов, удовлетворяющая рекуррентному соотношению:

$$\lambda_n p_{n+1}(\lambda) + \alpha_n p_n(\lambda) + \lambda_{n-1} p_{n-1}(\lambda) = \lambda p_n(\lambda), \quad n = 1, 2, \dots$$

$$\alpha_0 p_0(\lambda) + \lambda_0 p_1(\lambda) = \lambda p_0(\lambda); \quad p_0 = 1$$

Поскольку $\lambda_n > 0, \alpha_n \in R, n = 0, 1, \dots$ по условию, то по теореме Фаварда ([6, Theorem 1.5, p. 60]) существует мера ортогональности полиномов $\{p_n\}$ и они ортогональны на вещественной оси.

Согласно теореме Ю. М. Березанского ([7, Теорема 5.1, с. 722]), для $K(n, m)$ имеет место представление (учитывая то, что $\overline{K(n, m)} = K(m, n)$):

$$K_{n,m} = \int_{-\infty}^{\infty} (X_{0,n}, X_{1,n}) d \begin{pmatrix} \frac{\sigma_1(\lambda)}{\sigma_2(\lambda)} & \sigma_2(\lambda) \\ \sigma_2(\lambda) & \sigma_3(\lambda) \end{pmatrix} \overline{\begin{pmatrix} X_{0,m} \\ X_{1,m} \end{pmatrix}},$$

$$d \begin{pmatrix} \frac{\sigma_1(\lambda)}{\sigma_2(\lambda)} & \sigma_2(\lambda) \\ \sigma_2(\lambda) & \sigma_3(\lambda) \end{pmatrix} \geq 0 \quad (1.4)$$

Для получения представления (4) здесь можно также было воспользоваться результатами М. С. Лившица, М. Г. Крейна [8].

Поскольку $K_{-1,-1} = 0$ имеем:

$$0 = K_{-1,-1} = \int_{-\infty}^{\infty} d\sigma_1(\lambda)$$

откуда $d\sigma_1(\lambda) \equiv 0, \lambda \in R$.

В силу условия (4) имеем: $|d\sigma_2|^2 \leq d\sigma_1 d\sigma_3 = 0$ и следовательно $d\sigma_2(\lambda) \equiv 0, \lambda \in R$. Окончательно, (4) переписывается следующим образом:

$$K_{n,m} = \int_{-\infty}^{\infty} p_n(\lambda) \overline{p_m(\lambda)} d\sigma_3(\lambda),$$

где $d\sigma_3(\lambda) \geq 0, \lambda \in R$.

С помощью теоремы Наймарка ([4, Теорема 2, с. 271]) устанавливаем:

$$\sigma_3(\lambda) = \langle \tilde{E}_\lambda \tilde{x}_0, \tilde{x}_0 \rangle$$

и

$$K_{n,m} = \int_{-\infty}^{\infty} p_n(\lambda) \overline{p_m(\lambda)} d\tilde{E}_\lambda \tilde{x}_0, \tilde{x}_0 \rangle$$

где $\{\tilde{E}_\lambda\}$ — ортогональное разложение единицы в некотором пространстве $\tilde{H}, \tilde{x}_0 \in \tilde{H}$.

Поскольку отображение U :

$$\tilde{x}_n = \int_{-\infty}^{\infty} p_n(\lambda) d\tilde{E}_\lambda \tilde{x}_0 \rightarrow x_n$$

унитарно отображает $Lin\{\tilde{x}_0, \tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n, \dots\} \subset \tilde{H}$ на $Lin\{x_0, x_1, \dots, x_n, \dots\} \subset H$ то

$$x_n = U\tilde{x}_n = \int_{-\infty}^{\infty} p_n(\lambda) dU\tilde{E}_\lambda U^{-1} U\tilde{x}_0 = \int_{-\infty}^{\infty} p_n(\lambda) dE_\lambda x_0,$$

где $E_\lambda = U\tilde{E}_\lambda U^{-1}$ — ортогональное разложение единицы в $H, x_0 = U\tilde{x}_0$.

Теорема доказана.

Пусть $\{x_n\}_0^\infty$ — полиномиальная последовательность. Рассмотрим формальное соответствие:

$$E_\lambda x_0 \sim \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1}{\|p_n\|_{L_2([a,b],h)}^2} \int_a^\lambda h(t) p_n(t) dt \right] x_n, \lambda \in [a,b],$$

где $E_\lambda, h, \{p_n\}_0^\infty$ — из определения Р-последовательности (считаем что мера ортогональности $h(\lambda)$ — абсолютно-непрерывна).

Тогда ряд в правой части сходится квадратично, т.е.:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left\| \left[\frac{1}{\|p_n\|_{L_2([a,b],h)}^2} \int_a^\lambda h(t) p_n(t) dt \right] x_n \right\|^2 < \infty \quad (1.5)$$

Действительно, рассмотрим следующую функцию:

$$\varphi_c(\lambda) = \begin{cases} 1, & a \leq \lambda \leq c \\ 0, & c < \lambda \leq b \end{cases} \quad \text{где } c \in [a, b];$$

$[a, b]$ из определения P — последовательности.

Очевидно, что $\varphi_c(\lambda) \in L_2([a, b], h) = \{f(\lambda) : \int_a^b h(\lambda) |f(\lambda)|^2 d\lambda < \infty\}$ ($h(\lambda)$ интегрируема на $[a, b]$, т.к. $\int_a^b h(\lambda) d\lambda = A_0 > 0$).

Пусть система $\left\{ \frac{p_n(\lambda)}{\|p_n(\lambda)\|_{L_2([a, b], h)}} \right\}_0^\infty$ образует ортонормированную систему в пространстве $L_2([a, b], h)$. Следовательно, имеет место разложение:

$$\varphi_c(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{p_n(\lambda)}{\|p_n(\lambda)\|_{L_2([a, b], h)}}, \quad \text{где } a_n = \int_a^b h(t) \varphi_c(t) \frac{p_n(t)}{\|p_n\|_{L_2([a, b], h)}} dt$$

и ряд сходится в метрике L_2 (среднеквадратичной).

Отсюда, учитывая явный вид $\varphi_c(\lambda)$ имеем:

$$\varphi_c(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\int_a^c h(t) p_n(t) dt \right] \frac{p_n(\lambda)}{\|p_n\|_{L_2}^2}.$$

Тогда,

$$\int_a^b \varphi_c(\lambda) dE_\lambda x_0 = \int_a^c dE_\lambda x_0 + \int_c^b 0 dE_\lambda x_0 = (E_c - E_a) x_0 = E_c x_0.$$

С другой стороны

$$\begin{aligned} \int_a^b \varphi_c(\lambda) dE_\lambda x_0 &= \int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} \left[\int_a^c h(t) p_n(t) dt \right] \frac{p_n(\lambda)}{\|p_n\|_{L_2}^2} dE_\lambda x_0 = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\int_a^c h(t) p_n(t) dt \right] \times \\ &\quad \times \frac{1}{\|p_n\|_{L_2}^2} x_n, \end{aligned}$$

что справедливо, если мы можем менять местами суммирование и интегрирование. Во всяком случае

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|\tilde{a}_n\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 \frac{\|x_n\|^2}{\|p_n\|_{L_2}^2} \leq M \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 < \infty$$

где $\tilde{a}_n = \frac{1}{\|p_n\|_{L_2}^2} \int_a^c h(t) p_n(t) dt x_n$, и значит равенство (1.5) выполнено.

Если $\{p_n\}_0^\infty$ не образует полную систему, то ряд также квадратично сходится, т.к. в мажорирующем ряду появятся лишь дополнительные слагаемые.

При дополнительных предположениях можно обеспечить более удобную сходимость ряда:

Теорема 1.2. *Предположим, что задана полиномиальная последовательность, такая, что $\{E_\lambda\}$ — абсолютно-непрерывна. Пусть выполнено одно из двух условий:*

$$\|E'_\lambda x_0\| \leq C, \lambda \in [a, b], \int_a^b \frac{d\lambda}{|h(\lambda)|} < \infty, C \in R \text{ или } \left\| \frac{E'_\lambda}{h(\lambda)} x_0 \right\| \leq C, C \in R$$

Пусть также система $\{p_k(\lambda)\}_{k=0}^\infty$ образует полную систему в $L_2([a, b], h)$

Тогда

$$E'_\lambda x_0 = h(\lambda) \sum_{k=0}^\infty \frac{p_k(\lambda)}{\|p_k(\lambda)\|_{L_2}^2} x_k,$$

где ряд сходится на функционалах из H в метрике $L_2([a, b], h)$.

Замечание. Если ряд в предыдущей теореме сходится в равномерной метрике на $[a, b]$, то его можно почленно интегрировать и мы получим рассмотренный выше формальный ряд.

2. Последовательности, отвечающие классическим ортогональным системам полиномов Чебышева, Лежандра, Лагерра, Эрмита. Теоремы о свойствах последовательностей. Эргодические соотношения.

Определение. Полиномиальную последовательность $\{x_n\}_0^\infty$ будем называть полиномиальной последовательностью Чебышева 1-го (2-го) рода, если она допускает представление (1.1), где

$p_n(\lambda) = \cos(n \arccos \lambda)$, $n = 0, 1, \dots$ — полиномы Чебышева 1-го рода.

$$(\text{соответственно } p_n(\lambda) = \frac{\sin(n \arccos \lambda)}{\sqrt{1-\lambda^2}}, n = 0, 1, \dots -$$

полиномы Чебышева 2-го рода.)

При этом $h(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{1-\lambda^2}}$ ($h(\lambda) = \sqrt{1-\lambda^2}$) и $[a, b] = [-1, 1]$.

Ограничения на разложение единицы $\{E_\lambda\}_a^b$ в (1.2), для последовательностей Чебышева не являются существенными, что показывает следующее утверждение.

Утверждение 2.1. Для полиномиальных последовательностей Чебышева условие (1.2) из определения выполняется для произвольного ортогонального разложения единицы.

Доказательство. Поскольку

$$\int_{-1}^1 \cos^2(n \arccos \lambda) < dE_\lambda x_0, x_0 > \leq \int_{-1}^1 < dE_\lambda x_0, x_0 > = \|x_0\|_H^2,$$

и

$$\|p_0\|^2 = \pi, \|p_n\|^2 = \pi/2, n = 1, 2, \dots,$$

то можно взять

$$M = 2 \|x_0\|^2 / \pi$$

в случае полиномов 1-го рода.

Далее, так как

$$\int_{-1}^1 \frac{\sin^2((n+1) \arccos \lambda)}{1-\lambda^2} < dE_{\lambda} x_0, x_0 > \leq \max_{[-1,1]} \left| \frac{\sin^2((n+1) \arccos \lambda)}{1-\lambda^2} \right| \times \\ \times \|x_0\|^2$$

то для полиномов 2-го рода достаточно взять

$$M = \frac{2}{\pi} \max_{[-1,1]} \left| \frac{\sin^2((n+1) \arccos \lambda)}{1-\lambda^2} \right| \|x_0\|^2$$

что и завершает доказательство леммы.

Теорема 2.1. (о свойствах полиномиальной последовательности Чебышева 1-го рода.)

Пусть $\{x_n\}_0^\infty$ — полиномиальная последовательность Чебышева 1-го рода с некоторым разложением единицы $\{E_\lambda\}_{[-1,1]}$, тогда справедливы утверждения:

$$1. \text{ а) } \frac{x_0 + x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1}}{n} \rightarrow (E_1 - E_{1-0})x_0, n \rightarrow \infty;$$

$$б) \frac{x_0 - x_1 + x_2 - \dots + (-1)^{n-1} x_{n-1}}{n} \rightarrow -(E_{-1+0} - E_{-1})x_0, n \rightarrow \infty;$$

$$в) \frac{x_0 - x_2 + x_4 - \dots + (-1)^n x_{2n}}{2} \rightarrow \frac{1}{2}(E_{+0} - E_{-0})x_0, n \rightarrow \infty;$$

$$г) \frac{x_1 + 4x_2 + \dots + n^2 x_n}{n^3} \rightarrow \frac{1}{3}(E_1 - E_{1-0})x_0, n \rightarrow \infty;$$

$$д) \frac{x_1 - 4x_2 + \dots + (-1)^{n-1} n^2 x_n}{n^3} \rightarrow \frac{1}{3}(E_{-1+0} - E_{-1})x_0, n \rightarrow \infty;$$

$$е) \frac{x_1 - 3x_3 + 5x_5 - \dots + (-1)^n (2n+1)x_{2n+1}}{n^2} \rightarrow 0, n \rightarrow \infty;$$

2. Для корреляционной функции $K_{n,m} = \langle x_n, x_m \rangle$ последовательно-сти $\{x_n\}$ выполнено:

$$K_{n+1,m} + K_{n-1,m} = K_{n,m+1} + K_{n,m-1},$$

$$K_{-1,m} = K_{n,-1} = 0, n, m = 0, 1, \dots;$$

$$K_{n,m} = \frac{1}{2}(K_{n+m,0} + K_{n-m,0}), n, m = 0, 1, \dots;$$

$$\|x_n\|^2 - K_{n-1,n+1} = \text{const}, n = 1, 2, \dots$$

3. Спектральное представление $\{x_n\}$ имеет формальное соответствие:

$$E_\lambda x_0 \sim \left(1 - \frac{1}{\pi}\right)x_0 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi n} \sin(n \arccos \lambda) x_n.$$

4. Последовательность $\{x_n\}$ является сужением непрерывной кривой $x(t)$: $x_n = x(n)$; $x(t) = \int_{-1}^1 \cos(t \arccos \lambda) dE_\lambda x_0$, $t \in R$, для которой выполнено:

а) $\frac{d}{dt^2} x(t) = Ax(t)$, где A — некоторый постоянный самосопряженный оператор в H .

б) $\left(\frac{\partial}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial s^2}\right) \varphi(t, s) = 0$, $\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial s}\right) \varphi(t, s) |_{t=s} = 0$,
 где $\varphi(t, s) = \langle x(t), x(s) \rangle$, $t, s \in R$.

в) $\frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt \rightarrow (E_1 - E_{1-0})x(0)$, $T \rightarrow +\infty$.

Доказательство. Пусть задана произвольная полиномиальная последовательность (не обязательно Чебышева) $\{x_n\}_0^\infty$ с некоторым набором полиномов $\{p_n(\lambda)\}_0^\infty$ и спектральной мерой $\{E_\lambda\}_a^b$. Для ортонормированной системы $\{\hat{p}_n(\lambda)\}_0^\infty$ ($\hat{p}_n = \frac{p_n}{\|p_n\|_{L_2}}$) справедлива формула Кристоффеля-Дарбу:

$$\sum_{k=0}^n \hat{p}_k(\lambda) \hat{p}_k(t) = \lambda_n \frac{\hat{p}_{n+1}(\lambda) \hat{p}_n(t) - \hat{p}_n(\lambda) \hat{p}_{n+1}(t)}{\lambda - t},$$

где $\{\lambda_n\}_0^\infty$ — фиксированная последовательность вещественных чисел.

Интегрируя это равенство по переменной λ , имеем:

$$\sum_{k=0}^n \hat{p}_k(t) x_k = \lambda_n \int_a^b \frac{\hat{p}_{n+1}(\lambda) \hat{p}_n(t) - \hat{p}_n(\lambda) \hat{p}_{n+1}(t)}{\lambda - t} dE_\lambda x_0.$$

Обозначим

$$F_n(\lambda, t) = \frac{\hat{p}_{n+1}(\lambda) \hat{p}_n(t) - \hat{p}_n(\lambda) \hat{p}_{n+1}(t)}{\lambda - t}$$

Зафиксируем теперь некоторое $t = t_0 \in [a, b]$:

$$\sum_{k=0}^n \hat{p}_k(t_0) \frac{1}{\|p_k\|_{L_2}} x_k = \lambda_n \int_a^b F_n(\lambda, t_0) dE_\lambda x_0$$

Обозначим теперь

$$M_{n, t_0} = F_n(t_0, t_0),$$

тогда

$$\frac{1}{\lambda_n M_{n, t_0}} \sum_{k=0}^n \hat{p}_k(t_0) \frac{1}{\|p_k\|_{L_2}} x_k = \int_a^b \frac{F_n(\lambda, t_0)}{M_{n, t_0}} dE_\lambda x_0.$$

Исследуем теперь поведение интеграла в правой части при $n \rightarrow \infty$.

Пусть для определенности $t_0 = b$.

$$\int_a^b \frac{F_n(\lambda, t_0)}{M_{n, t_0}} dE_\lambda x_0 = \int_a^{b-\epsilon} \frac{F_n(\lambda, t_0)}{M_{n, t_0}} dE_\lambda x_0 + \int_{b-\epsilon}^b \frac{F_n(\lambda, t_0)}{M_{n, t_0}} dE_\lambda x_0, \quad (2.1)$$

где $0 < \epsilon < b - a$ — некоторое фиксированное число.

$$\left\| \int_a^{b-\epsilon} \frac{F_n(\lambda, t_0)}{M_{n, t_0}} dE_\lambda x_0 \right\|^2 = \frac{1}{M_{n, b}^2} \int_a^{b-\epsilon} \left| \frac{\hat{p}_{n+1}(\lambda) \hat{p}_n(b) - \hat{p}_n(\lambda) \hat{p}_{n+1}(b)}{\lambda - b} \right|^2 \times$$

$$\begin{aligned}
\times \langle dE_{\lambda} x_0, x_0 \rangle &\leq \frac{1}{M_{n,b}^2 \epsilon^2} \int_a^{b-\epsilon} |\hat{p}_{n+1}(\lambda) \hat{p}_n(b) - \hat{p}_n(\lambda) \hat{p}_{n+1}(b)|^2 \langle dE_{\lambda} x_0, x_0 \rangle \leq \\
&\leq \frac{1}{M_{n,b}^2 \epsilon^2} \int_a^b |\hat{p}_{n+1}(\lambda) \hat{p}_n(b) - \hat{p}_n(\lambda) \hat{p}_{n+1}(b)|^2 \langle dE_{\lambda} x_0, x_0 \rangle = \\
&= \frac{1}{M_{n,b}^2 \epsilon^2} \|\hat{p}_n(b) \frac{1}{\|p_{n+1}\|} x_{n+1} - \hat{p}_{n+1}(b) \frac{1}{\|p_n\|} x_n\|^2
\end{aligned}$$

Отсюда,

$$\begin{aligned}
\left\| \int_a^{b-\epsilon} \frac{F_n(\lambda, t_0)}{M_{n,t_0}} dE_{\lambda} x_0 \right\| &\leq \frac{1}{|M_{n,b}| \epsilon} \|\hat{p}_n(b) \frac{1}{\|p_{n+1}\|} x_{n+1} - \\
&- \hat{p}_{n+1}(b) \frac{1}{\|p_n\|} x_n\| \leq \frac{1}{|M_{n,b}| \epsilon} \left(\frac{|\hat{p}_n(b)|}{\|p_{n+1}\|_{L_2}} \|x_{n+1}\| + \frac{|\hat{p}_{n+1}(b)|}{\|p_n\|_{L_2}} \|x_n\| \right) \leq \\
&\leq \frac{M}{|M_{n,b}| \epsilon} (|\hat{p}_n(b)| + |\hat{p}_{n+1}(b)|),
\end{aligned}$$

где M — из (1.2) в определении полиномиальной последовательности.

Итак,

$$\left\| \int_a^{b-\epsilon} \frac{F_n(\lambda, t_0)}{M_{n,t_0}} dE_{\lambda} x_0 \right\| \leq \frac{M (|\hat{p}_n(b)| + |\hat{p}_{n+1}(b)|)}{\epsilon |M_{n,b}|}.$$

Обозначим

$$\gamma_n = \frac{(|\hat{p}_n(b)| + |\hat{p}_{n+1}(b)|)}{|M_{n,b}|}, \quad n = 0, 1, \dots$$

С другой стороны

$$\begin{aligned}
M_{n,b} &= \lim_{\lambda \rightarrow b} F_n(\lambda, b) = \lim_{\lambda \rightarrow b} \frac{\hat{p}_{n+1}(\lambda) \hat{p}_n(b) - \hat{p}_n(\lambda) \hat{p}_{n+1}(b)}{\lambda - b} = \\
&= \hat{p}'_{n+1}(b) \hat{p}_n(b) - \hat{p}'_n(b) \hat{p}_{n+1}(b)
\end{aligned}$$

и

$$\gamma_n \leq \frac{(|\hat{p}_n(b)| + |\hat{p}_{n+1}(b)|)}{\|\hat{p}'_{n+1}(b) \hat{p}_n(b) - \hat{p}'_n(b) \hat{p}_{n+1}(b)\|}$$

Будем считать, что $\gamma_n \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0$ (это выполняется для полиномов Чебышева 1-го рода). Тогда 1-е слагаемое в (2.1) стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$.

Рассмотрим теперь 2-е слагаемое из (2.1).

$$\left\| \int_{b-\epsilon}^b \frac{F_n(\lambda, b)}{M_{n,b}} dE_{\lambda} x_0 \right\|^2 = \int_{b-\epsilon}^b \left| \frac{F_n(\lambda, b)}{M_{n,b}} \right|^2 \langle dE_{\lambda} x_0, x_0 \rangle$$

Вычислим $(F_n)'_{\lambda}$:

$$(F_n(\lambda))'_{\lambda} = ((\hat{p}'_{n+1}(\lambda) \hat{p}_n(b) - \hat{p}'_n(\lambda) \hat{p}_{n+1}(b))(\lambda - t_0) - (\hat{p}_{n+1}(\lambda) \hat{p}_n(b) -$$

$$-\hat{p}_n(\lambda)\hat{p}_{n+1}(b))/(\lambda-b)^2$$

Если теперь $\tilde{\lambda}$ — экстремальная точка ($\tilde{\lambda} \neq b$) $F_n(\lambda, b)$ на отрезке $[b - \varepsilon_0, b]$, $\varepsilon_0 > 0$, то для нее выполнено:

$$(\hat{p}'_{n+1}(\lambda)\hat{p}_n(b) - \hat{p}'_n(\lambda)\hat{p}_{n+1}(b))(\lambda - t_0) - (\hat{p}_{n+1}(\lambda)\hat{p}_n(b) - \hat{p}_n(\lambda)\hat{p}_{n+1}(b)) = 0,$$

или

$$F_n(\tilde{\lambda}, b) = \hat{p}'_{n+1}(\tilde{\lambda})\hat{p}_n(b) - \hat{p}'_n(\tilde{\lambda})\hat{p}_{n+1}(b)$$

Отсюда,

$$\max_{\lambda} |F_n(\lambda, b)| \leq \max_{\lambda} |\hat{p}'_{n+1}(\lambda)\hat{p}_n(b) - \hat{p}'_n(\lambda)\hat{p}_{n+1}(b)|, \lambda \in [b - \varepsilon_0, b], \varepsilon_0 > 0$$

(в самой точке b модули совпадают). Тогда

$$\max_{\lambda \in [b - \varepsilon_0, b]} \left| \frac{F_n(\lambda, b)}{M_{n,b}} \right| \leq \max_{\lambda \in [b - \varepsilon_0, b]} \frac{|\hat{p}'_{n+1}(\lambda)\hat{p}_n(b) - \hat{p}'_n(\lambda)\hat{p}_{n+1}(b)|}{|\hat{p}'_{n+1}(b)\hat{p}_n(b) - \hat{p}'_n(b)\hat{p}_{n+1}(b)|}$$

Будем предполагать, что величина стоящая в правой части последнего неравенства ограничена в некоторой окрестности точки b равномерно по n , т.е.:

$$\max_{\lambda \in [b - \varepsilon_0, b]} \frac{|\hat{p}'_{n+1}(\lambda)\hat{p}_n(b) - \hat{p}'_n(\lambda)\hat{p}_{n+1}(b)|}{|\hat{p}'_{n+1}(b)\hat{p}_n(b) - \hat{p}'_n(b)\hat{p}_{n+1}(b)|} \leq C,$$

$$n = 0, 1, \dots; 0 < \varepsilon_0 < b - a, C \geq 0.$$

Это неравенство имеет место и для полиномов Чебышева. Действительно,

$$M_n(1) = \hat{p}'_{n+1}(1)\hat{p}_n(1) - \hat{p}'_n(1)\hat{p}_{n+1}(1) = \frac{2}{\pi}(2n+1),$$

$$\begin{aligned} \left| \frac{\hat{p}'_{n+1}(\lambda)\hat{p}_n(1) - \hat{p}'_n(\lambda)\hat{p}_{n+1}(1)}{M_n(1)} \right| &= \left| \frac{\hat{p}'_{n+1}(\lambda) - \hat{p}'_n(\lambda)}{2n+1} \right| = \\ &= |(-(n+1)\sin((n+1)\arccos \lambda) + n\sin(n\arccos \lambda))/((2n+1)\sqrt{1-\lambda^2})| \leq \\ &\leq \frac{n}{2n+1} \left| \frac{\sin((n+1)\arccos \lambda) - \sin(n\arccos \lambda)}{\sqrt{1-\lambda^2}} \right| + \left| \frac{\sin((n+1)\arccos \lambda)}{(2n+1)\sqrt{1-\lambda^2}} \right| \leq \\ &\leq 2 \left| \frac{\cos(\frac{2n+1}{2}\arccos \lambda) \sin(\frac{1}{2}\arccos \lambda)}{\sqrt{1-\lambda^2}} \right| + \left| \frac{U_n(\lambda)}{2n+1} \right| \leq 2 + \left| \frac{U_n(\lambda)}{2n+1} \right| \end{aligned}$$

$$n = 0, 1, \dots; (U_n(\lambda) - \text{полиномы второго рода})$$

и последняя величина ограничена равномерно по $\lambda \in [0, 1]$, т.к. $|U_n(\lambda)| \leq n+1, \lambda \in [-1, 1]$ [5, с. 106].

Данную оценку будем проверять для различных систем полиномов. Для полиномов Чебышева проще имеем:

$$\left| \frac{F_n(\lambda, b)}{M_n(b)} \right| = \left| \frac{\frac{\hat{p}_{n+1}(\lambda)\hat{p}_n(1) - \hat{p}_n(\lambda)\hat{p}_{n+1}(1)}{\lambda-1}}{\hat{p}'_{n+1}(1)\hat{p}_n(1) - \hat{p}'_n(1)\hat{p}_{n+1}(1)} \right| = \left| \frac{\frac{\cos((n+1)\arccos \lambda) - \cos(n\arccos \lambda)}{\lambda-1}}{2n+1} \right| =$$

$$= \left| \frac{2 \sin\left(\frac{2n+1}{2} \arccos \lambda\right) \sin\left(\frac{\arccos \lambda}{2}\right)}{(\lambda-1)(2n+1)} \right| \leq \left| \frac{\arccos^2 \lambda}{\lambda-1} \right|, \lambda \in [-1, 1].$$

и следовательно подынтегральная функция $\frac{F_n(\lambda, b)}{M_n(b)}$ ограничена в окрестности точки 1.

Отсюда

$$\left\| \int_{b-\epsilon}^b \frac{F_n(\lambda, b)}{M_n(b)} dE_\lambda x_0 - (E_b - E_{b-0})x_0 \right\|^2 \rightarrow_{\epsilon \rightarrow 0} 0.$$

и окончательно

$$\frac{1}{\lambda_n M_{n,b}} \sum_{k=0}^n \hat{p}_k(b) \frac{1}{\|p_k\|_{L_2}} x_k \rightarrow_{n \rightarrow \infty} (E_b - E_{b-0})x_0 \quad (2.2)$$

Используя (2.2) для полиномов Чебышева ($\lambda_n = \frac{1}{2}, n \geq 1; \lambda_0 = \frac{1}{\sqrt{2}};$ $\hat{p}_k(1) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}, M_{n,1} = \hat{p}'_{n+1}(1)\hat{p}_n(1) - \hat{p}'_n(1)\hat{p}_{n+1}(1) = \frac{2}{\pi}((n+1)^2 - n^2) = \frac{2}{\pi}(2n+1) \sim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{\pi}n$) и следовательно:

$$\frac{\pi}{2n} \left(\sqrt{\frac{1}{\pi}} x_0 + \sqrt{\frac{2}{\pi}} x_1 + \dots + \sqrt{\frac{2}{\pi}} x_{n+1} \right) \rightarrow_{n \rightarrow \infty} (E_1 - E_{1-0})x_0$$

и выводим первую формулу в утверждении 1 теоремы.

Вторая и третья формулы доказываются аналогично, если в качестве точки b взять соответственно точки $b = -1, b = 0$.

Для доказательства следующих формул, продифференцируем формулу Кристоффеля-Дарбу по переменной t :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \hat{p}_k(\lambda) \hat{p}'_k(t) &= \lambda_n ((\hat{p}_{n+1}(\lambda) \hat{p}'_n(t) - \hat{p}_n(\lambda) \hat{p}'_{n+1}(t))(\lambda - t) + (\hat{p}_{n+1}(\lambda) \hat{p}_n(t) - \\ &\quad - \hat{p}_n(\lambda) \hat{p}_{n+1}(t))) / (\lambda - t)^2 \end{aligned}$$

Отсюда, интегрируя по λ , имеем:

$$\frac{1}{\lambda_n} \sum_{k=0}^n \hat{p}'_k(t) \frac{1}{\|p_k\|_{L_2}} x_k = \int_a^b \Phi_n(\lambda, t) dE_\lambda x_0,$$

$$\text{где } \Phi_n(\lambda, t) = ((\hat{p}_{n+1}(\lambda) \hat{p}'_n(t) - \hat{p}_n(\lambda) \hat{p}'_{n+1}(t))(\lambda - t) + (\hat{p}_{n+1}(\lambda) \hat{p}_n(t) - \\ - \hat{p}_n(\lambda) \hat{p}_{n+1}(t))) / (\lambda - t)^2.$$

Если положить $t = t_0$, тогда:

$$\frac{1}{\lambda_n \tilde{M}_n(t_0)} \sum_{k=0}^n \hat{p}'_k(t_0) \frac{1}{\|p_k\|_{L_2}} x_k = \int_a^b \frac{\Phi_n(\lambda, t_0)}{\tilde{M}_n(t_0)} dE_\lambda x_0, \text{ где } \tilde{M}_n(t_0) = \Phi_n(t_0, t_0)$$

Вычислим $\tilde{M}_n(t_0)$:

$$\begin{aligned}\tilde{M}_n(t_0) &= \lim_{t \rightarrow t_0} \Phi_n(\lambda, t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} [(\hat{p}'_{n+1}(\lambda)\hat{p}'_n(t_0) - \hat{p}'_n(\lambda)\hat{p}'_{n+1}(t_0))(\lambda - t_0) + \\ &+ (\hat{p}_{n+1}(\lambda)\hat{p}'_n(t_0) - \hat{p}_n(\lambda)\hat{p}'_{n+1}(t_0)) + (\hat{p}'_{n+1}(\lambda)\hat{p}_n(t_0) - \hat{p}'_n(\lambda)\hat{p}_{n+1}(t_0))] / \\ &/ (2(\lambda - t_0)) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{1}{2} ((\hat{p}''_{n+1}(\lambda)\hat{p}'_n(t_0) - \hat{p}''_n(\lambda)\hat{p}'_{n+1}(t_0))(\lambda - t_0) + \\ &+ 2(\hat{p}'_{n+1}(\lambda)\hat{p}'_n(t_0) - \hat{p}'_n(\lambda)\hat{p}'_{n+1}(t_0)) + (\hat{p}''_{n+1}(\lambda)\hat{p}_n(t_0) - \hat{p}''_n(\lambda)\hat{p}_{n+1}(t_0))) = \\ &= \frac{1}{2} [\hat{p}''_{n+1}(t_0)\hat{p}_n(t_0) - \hat{p}''_n(t_0)\hat{p}'_{n+1}(t_0)]\end{aligned}$$

т.е.

$$\tilde{M}_n(t_0) = \frac{1}{2} [\hat{p}''_{n+1}(t_0)\hat{p}_n(t_0) - \hat{p}''_n(t_0)\hat{p}'_{n+1}(t_0)].$$

Можно, аналогично приведенным выше рассуждениям показать, что:

$$\frac{1}{\lambda_n \tilde{M}_n(t_0)} \sum_{k=0}^n \hat{p}'_k(t_0) \frac{1}{\|p_k\|_{L_2}} x_k \rightarrow_{n \rightarrow \infty} (E_{t_0+0} - E_{t_0-0}) x_0$$

В частности, если $t_0 = 1$, то:

$$\tilde{M}_n(1) = \frac{1}{3\pi} \{4n^3 + 6n^2 + 2n\} \sim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{3\pi} n^3$$

и подставляя это выражение в предыдущую формулу:

$$\frac{2}{\pi} \frac{3\pi}{2n^3} (x_1 + 4x_2 + \dots n^2 x_n) \rightarrow_{n \rightarrow \infty} (E_1 - E_{1-0}) x_0$$

откуда и следует формула 1г) теоремы.

Аналогичным образом получаются последние два предельных соотношения ($t_0 = -1$, $t_0 = 0$).

Утверждение 2 проверяется непосредственно.

Утверждение 3 следует из общей теоремы 1.1.

Покажем выполнение соотношения из утверждения 4в) (а) и б) просто следуют из явного вида последовательности $\{x_n\}$):

$$\begin{aligned}\frac{1}{T} \int_0^T \int_{-1}^1 \cos(t \arccos \lambda) dE_\lambda x_0 dt &= \frac{1}{T} \int_{-1}^1 \frac{\sin(t \arccos \lambda)}{\arccos \lambda} \Big|_0^T dE_\lambda x_0 = \\ &= \frac{1}{T} \int_{-1}^1 \frac{\sin(T \arccos \lambda)}{\arccos \lambda} dE_\lambda x_0.\end{aligned}$$

Далее, на отрезке $[-1, 1 - \epsilon_0]$, $\epsilon > 0$ подинтегральная функция не превосходит по модулю величины $\left| \frac{1}{\arccos(1 - \epsilon_0)} \right|$, и поэтому:

$$\frac{1}{T} \int_{-1}^{1 - \epsilon_0} \frac{\sin(T \arccos \lambda)}{\arccos \lambda} dE_\lambda x_0 \rightarrow 0, \text{ при } T \rightarrow \infty.$$

для любого фиксированного $\epsilon_0 > 0$.

На отрезке $[1 - \epsilon_0, 1]$ выполнено:

$$\left| \frac{\sin(T \arccos \lambda)}{T \arccos \lambda} \right| \leq [\sin x \leq x] \leq 1.$$

и поэтому

$$\left| \frac{1}{T} \int_{1-\epsilon_0}^1 \frac{\sin(T \arccos \lambda)}{\arccos \lambda} dE_\lambda x_0 - (E_1 - E_{1-0})x_0 \right| \leq \epsilon_0 \|x_0\|.$$

Выбирая ϵ_0 и T подходящим образом, добиваемся малости допредельного выражения.

Теорема доказана.

Теорема 2.2. (о свойствах полиномиальной последовательности Чебышева 2-го рода.)

Пусть $\{x_n\}_0^\infty$ — полиномиальная последовательность Чебышева 2-го рода с некоторым разложением единицы $\{E_\lambda\}_{[-1,1]}$, тогда справедливы утверждения:

1. а) $\frac{x_0 + x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1}}{n^2} \rightarrow \frac{1}{2}(E_1 - E_{1-0})x_0, n \rightarrow \infty;$

б) $\frac{x_0 + 2x_1 + \dots + nx_{n-1}}{n^3} \rightarrow \frac{1}{3}(E_1 - E_{1-0})x_0, n \rightarrow \infty;$

в) $\frac{x_0 - 2x_1 + \dots + (-1)^{n-1}nx_{n-1}}{n^3} \rightarrow -\frac{1}{3}(E_{-1+0} - E_{-1})x_0, n \rightarrow \infty;$

г) $\frac{x_0 - x_2 + x_4 - \dots + (-1)^n x_{2n}}{n} \rightarrow (E_{+0} - E_{-0})x_0, n \rightarrow \infty;$

д) $\frac{\sum_{k=0}^{n-1} [k^3 + 3k^2 + 2k]x_k}{n^5} \rightarrow \frac{1}{5}(E_1 - E_{1-0})x_0, n \rightarrow \infty;$

е) $\frac{\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{k+1} [k^3 + 3k^2 + 2k]x_k}{n^5} \rightarrow \frac{1}{5}(E_{-1+0} - E_{-1})x_0, n \rightarrow \infty;$

ж) $\frac{\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{k+1} [2k+2]x_{2k+1}}{n^2} \rightarrow 0, n \rightarrow \infty;$

2. Корреляционная функция $K_{n,m}$ последовательности $\{x_n\}_0^\infty$ удовлетворяет следующим соотношениям:

а) $K_{n+1,m} + K_{n-1,m} = K_{n,m+1} + K_{n,m-1}, n, m = 0, 1, \dots; K_{-1,m} = K_{n,-1} = 0$

б) Значения $K_{n,m}$ выражаются через граничные значения $K_{n,0}$:

$$K_{2m+1,2n+1} = 2 \sum_{k=0}^m \sum_{l=0}^n (K_{2(k+l)+2,0} - K_{2(k+l),0} + K_{2|k-l|,0} - K_{2|k-l|-2,0}),$$

$$K_{2m+1,2n} = K_{2m+1,0} + 2 \sum_{k=0}^m \sum_{l=1}^n (K_{2(k+l)+1,0} - K_{2(k+l)-1,0} + K_{2|k-l|+1,0} - K_{2|k-l|-1,0}),$$

$$K_{2m,2n} = K_{0,0} + K_{2n,0} + K_{2m,0} + 2 \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^n (K_{2(k+l),0} - K_{2(k+l)-2,0} + K_{2|k-l|,0} - K_{2|k-l|-2,0}),$$

$$-K_{2|k-l|-2,0}.$$

$$n, m = 0, 1, \dots$$

$$6) K_{n+1,n} = K_{1,0} + K_{3,0} + \dots + K_{2n+1,0}.$$

$$\|x_n\|^2 - K_{n-1,n+1} = \text{const}, \quad n = 1, 2, \dots$$

3. Спектральное представление $\{x_n\}$ имеет следующее соответствие:

$$E_\lambda x_0 \sim \left(1 - \frac{1}{\pi} \arccos \lambda + \lambda \sqrt{1 - \lambda^2}\right) x_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi n} \left(\frac{\sin((n+2) \arccos \lambda)}{n+2} - \frac{\sin(n \arccos \lambda)}{n} \right) x_n.$$

Определение. Полиномиальную последовательность $\{x_n\}_0^\infty$ будем называть полиномиальной последовательностью Лежандра, если она допускает представление (1.1), где $p_n(\lambda)$ — стандартные полиномы Лежандра:

$$p_n(\lambda) = \frac{1}{n!2^n} [(\lambda^2 - 1)^n]^{(n)}, \quad n = 0, 1, \dots$$

$$[a, b] = [-1, 1], \quad h(\lambda) = 1.$$

Утверждение 2.2. Для последовательностей Лежандра условие (1.2) из определения полиномиальной последовательности выполняется не для всякого ортогонального разложения единицы.

Доказательство. Положим $E_\lambda = \begin{cases} 0, & \lambda < 1 \\ 1, & \lambda \geq 1 \end{cases}$. Тогда $\|x_n\| = \|p_n(1)\|$
 $x_0\| = \|x_0\|$. Но $\|p_n\|_{L_2} = \sqrt{\frac{2}{2n+1}} \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0$.

Теорема 2.3. (о свойствах полиномиальной последовательности Лежандра.)

Пусть $\{x_n\}_0^\infty$ — полиномиальная последовательность Лежандра с разложением единицы $\{E_\lambda\}_{[-1,1]}$, тогда справедливы утверждения:

$$1. \text{ а) } \frac{x_0 + 3x_1 + \dots + (2n-1)x_{n-1}}{n^2} \rightarrow (E_1 - E_{1-0})x_0, \quad n \rightarrow \infty;$$

$$\text{б) } \frac{x_0 - 3x_1 + \dots + (-1)^n(2n-1)x_{n-1}}{n^2} \rightarrow (E_{-1+0} - E_{-1})x_0, \quad n \rightarrow \infty;$$

$$6) \frac{x_0 - \frac{3}{2}x_1 + \dots + (-1)^n \frac{(2n+1)!!}{(2n)!!} x_{2n}}{n} \rightarrow \frac{\pi}{4} (E_{+0} - E_{-0})x_0, \quad n \rightarrow \infty;$$

2. Корреляционная функция $K_{n,m}$ последовательности $\{x_n\}$ удовлетворяет соотношению:

$$\begin{aligned} & \frac{n+1}{\sqrt{(2n+1)(2n+3)}} K_{n+1,m} + \frac{n}{\sqrt{(2n-1)(2n+1)}} K_{n-1,m} = \\ & = \frac{m+1}{\sqrt{(2m+1)(2m+3)}} K_{n,m+1} + \frac{m}{\sqrt{(2m-1)(2m+1)}} K_{n,m-1}, \quad n, m = 1, 2, \dots; \end{aligned}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} K_{1,m} = \frac{m+1}{\sqrt{(2m+1)(2m+3)}} K_{0,m+1} + \frac{m}{\sqrt{(2m-1)(2m+1)}} K_{0,m-1},$$

$$m = 1, 2, \dots; K_{1,0} = K_{0,1}.$$

3. Спектральное представление $\{x_n\}$ имеет соответствие по формуле:

$$E_\lambda x_0 \sim (\lambda + 1)x_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(p_{n+1}(\lambda) - p_{n-1}(\lambda))}{\sqrt{2(2n+1)}} x_n.$$

Определение. Полиномиальную последовательность $\{x_n\}_0^\infty$ будем называть полиномиальной последовательностью Чебышева-Эрмита, если она допускает представление (1.1), где $p_n(\lambda)$ — стандартные полиномы Чебышева-Эрмита:

$$p_n(\lambda) = (-1)^n e^{\lambda^2} (e^{-\lambda^2})^{(n)}, \quad n = 0, 1, \dots$$

$$[a, b] = (-\infty, \infty), \quad h(\lambda) = e^{-\lambda^2}.$$

Утверждение 2.3. Для последовательностей Чебышева-Эрмита условие (1.2) из определения полиномиальной последовательности выполняется не для всякого ортогонального разложения единицы.

Доказательство. Пусть $E_\lambda = \begin{cases} 0, & \lambda < 0 \\ 1, & \lambda \geq 0 \end{cases}$. Тогда $\|x_n\| = |p_{2n}(0)| \times \|x_0\| = 2^n (2n-1)!! \|x_0\|$. Но $\|p_n\|_{L_2} = \sqrt{n! 2^n} \sqrt{4\pi}$ растет медленнее $\|x_n\|$.

Теорема 2.4. (о свойствах полиномиальной последовательности Чебышева-Эрмита.)

Пусть $\{x_n\}_0^\infty$ — полиномиальная последовательность Чебышева-Эрмита с разложением единицы $\{E_\lambda\}_{(-\infty, \infty)}$, тогда справедливы утверждения:

1. $\frac{x_0 - \frac{1}{4}x_2 + \dots + \frac{(-1)^n}{4^n n!} x_{2n}}{\sqrt{n}} \rightarrow \frac{2}{\sqrt{\pi}} (E_{+0} - E_{-0}) x_0, n \rightarrow \infty;$
2. Корреляционная функция $K_{n,m}$ последовательности $\{x_n\}$ удовлетворяет соотношению:

$$\sqrt{n+1} K_{n+1,m} + \sqrt{n} K_{n-1,m} = \sqrt{m+1} K_{n,m+1} + \sqrt{m} K_{n,m-1}, \quad n, m = 1, 2, \dots;$$

$$K_{1,m} = \sqrt{m+1} K_{0,m+1} + \sqrt{m} K_{0,m-1}, \quad m = 1, 2, \dots; K_{1,0} = K_{0,1}.$$

3. Спектральное представление $\{x_n\}$ имеет соответствие, задаваемое формулой:

$$E_\lambda x_0 \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! 2^n \sqrt{\pi}} (e^{-\lambda^2})^{(n-1)} x_n.$$

Определение. Полиномиальную последовательность $\{x_n\}_0^\infty$ будем называть полиномиальной последовательностью Чебышева-Лагерра, если

она допускает представление (1.1), где $p_n(\lambda)$ — стандартные полиномы Чебышева-Лагерра:

$$p_n(\lambda) = \frac{1}{n!} \lambda^{-\alpha} e^{\lambda} (\lambda^{\alpha+n} e^{-\lambda})^{(n)}, \quad n = 0, 1, \dots$$

$$[a, b] = [0, \infty], \quad h(\lambda) = \lambda^{\alpha} e^{-\lambda}, \quad \alpha > -1.$$

Теорема 2.5. (о свойствах полиномиальной последовательности Чебышева-Лагерра.)

Пусть $\{x_n\}_0^{\infty}$ — полиномиальная последовательность Чебышева-Лагерра с разложением единицы $\{E_{\lambda}\}_{[0, \infty)}$, тогда справедливы утверждения:

1. В том случае, если $\alpha \geq \frac{1}{2}$; $\exists A > 0 : \int_0^A \lambda^{-\alpha-\frac{1}{2}} < dE_{\lambda} x_0, x_0 > < \infty$, то

$$\frac{x_0 + x_1 + \dots + x_{n-1}}{n^{\alpha+1}} \rightarrow_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\Gamma(\alpha+2)} (E_{+0} - E_{-0}) x_0;$$

2. Корреляционная функция $K_{n,m}$ последовательности $\{x_n\}$ удовлетворяет соотношению:

$$\begin{aligned} & \sqrt{(n+1)(\alpha+n+1)} K_{n+1,m} + 2n K_{n,m} + \sqrt{n(\alpha+n)} K_{n-1,m} = \\ & = \sqrt{(m+1)(\alpha+m+1)} K_{n,m+1} + 2m K_{n,m} + \sqrt{m(\alpha+m)} K_{n,m-1}, \quad n, m = 1, 2, \dots \\ & \sqrt{\alpha+1} K_{1,m} = \sqrt{(m+1)(\alpha+m+1)} K_{0,m+1} + 2m K_{0,m} + \sqrt{m(\alpha+m)} K_{0,m-1}, \\ & m = 1, 2, \dots; \quad K_{1,0} = K_{0,1}. \end{aligned}$$

в частности, если $\alpha = 0$:

$$(n+1) K_{n+1,m} + 2n K_{n,m} + n K_{n-1,m} = (m+1) K_{n,m+1} + 2m K_{n,m} + m K_{n,m-1},$$

$$n, m = 1, 2, \dots;$$

$$\sqrt{\alpha+1} K_{1,m} = (m+1) K_{0,m+1} + 2m K_{0,m} + m K_{0,m-1}, \quad m = 1, 2, \dots;$$

$$K_{1,0} = K_{0,1}.$$

3. Спектральное представление $\{x_n\}$ имеет следующее соответствие:

$$E_{\lambda} x_0 \sim (1 - e^{-\lambda}) x_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \Gamma(n + \alpha + 1)} (\lambda^n e^{-\lambda})^{(n-1)} x_n.$$

Вывод. Мы рассмотрели нестационарные последовательности в гильбертовом пространстве, которые разлагаются по элементарным составляющим полиномиального вида. При этом четко видна аналогия со свойствами стационарной последовательности. Именно, критерию

Бохнера-Хинчина стационарности в терминах уравнения на корреляционную функцию соответствует критерий полиномиальности (Теорема 1.1). Аналогом теоремы Биркгофа-Хинчина об эргодических средних являются доказанные эргодические соотношения для полиномиальных последовательностей Чебышева, Лежандра, Эрмита, Лагерра (Теоремы 2.1 – 2.4). Как и в случае стационарной последовательности, спектральная мера представления определяется рядом по значениям последовательности $\{x_n\}$. Возможно дальнейшее изучение свойств сходимости (поточечной, равномерной) данного ряда. С другой стороны интересным представляется вопрос наличия у полиномиальной последовательности представления во временной области типа разложения Вольда.

ЛИТЕРАТУРА

1. Золотарев В. А., Янцевич А. А. Нестационарные кривые в гильбертовых пространствах и нелинейные операторные уравнения // Теория операторов, субгарм. функции. – Киев. – 1991. – С. 54–60.
2. Kirchev K., Zolotarev V. Nonstationary curves in Hilbert spaces and their correlation functions I // Integr.Equat.Oper.Th. Birkhauser Verlag, Basel – 1994. – V. 19. – P. 270–289.
3. Загороднюк С. М. О свойствах последовательностей, имеющих спектральное разложение по системам полиномов // Доповіді НАН України. – 1998. – 8. – С. 30–33.
4. Бродский М. С. Треугольные и жордановы представления линейных операторов. – М.: Наука, 1969. – 288 с.
5. Суетин П. К. Классические ортогональные многочлены. – М.: Наука, 1979. – 328 с.
6. Freud G. Orthogonal polynomials. – Budapest: Academia Kiado, 1971.
7. Березанский Ю. М. Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. – К.: Наукова думка, 1965. – 768 с.
8. Ахиезер Н. И. Классическая проблема моментов и некоторые вопросы анализа, связанные с нею. – М.: Изд-во физ.-мат. литературы, 1961. – 310 с.