УДК 517.5

В. А. БОЛОТНИКОВ

ОПИСАНИЕ РЕШЕНИЙ ВЫРОЖДЕННОЙ ПРОБЛЕМЫ МОМЕНТОВ НА ОСИ И ПОЛУОСИ

1. Решения матричной проблемы моментов Гамбургера (H) на оси и Стилтьеса (S) на полуоси параметризуются посредством дробно-линейного преобразования (ДЛП), матрица-функция (м.-ф) $A(z)$ которого оказывается J-растягивающей в верхней полуплоскости и J-унитарной на вещественной оси. Параметрами в ДЛП являются пары мероморфных м.-ф. — неванлинновские в задаче H или стилтьесовские в задаче S.

В невырожденном случае задачи H [1] и задачи S [2] матрица ДЛП имеет полный ранг, а в качестве параметров в ДЛП подставляются *произвольные* пары м.-ф.

В настоящей работе описываются решения вырожденных задач H и S. Как и в невырожденном случае, множество решений параметризуется посредством ДЛП, матрица которого является J-растягивающей в верхней полуплоскости и J-унитарной на вещественной оси. Однако подставляемые параметры уже не произвольны, а выбираются специальным образом. Указанное описание устанавливается следующими двумя теоремами.

Теорема 1.1. *Множество решений задачи H параметризуется посредством ДЛП*

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\Sigma(\lambda)}{\lambda-z}=[a_{11}(z)\,p(z)+a_{12}(z)\,q(z)]\,[a_{21}(z)\,p(z)+a_{22}(z)\,q(z)]^{-1},\qquad(1.1)$$

где матрица-функция ДЛП $A(z)=\|a_{ik}(z)\|_{i,\,k=1}^{2}$ является J-растягивающей в верхней полуплоскости и J-унитарной на вещественной оси;

$$p(z)=\begin{bmatrix}\hat{p}(z) & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix},\quad q(z)=\begin{bmatrix}\hat{q}(z) & 0\\ 0 & I\end{bmatrix};$$

$\{p(z),\ q(z)\}$ — произвольная неванлинновская пара.

Теорема 1.2. *Множество решений задачи S параметризуется посредством ДЛП*

$$\int_{0}^{\infty}\frac{d\Sigma(\lambda)}{\lambda-z}=[a_{11}(z)\,p(z)+a_{12}(z)\,q(z)]\,[a_{21}(z)\,p(z)+a_{22}(z)\,q(z)]^{-1},\qquad(1.2)$$

где матрица-функция ДЛП $A(z)$ является J-растягивающей в верхней полуплоскости и J-унитарной на вещественной оси;

$$p(z)=\begin{bmatrix}\hat{P}(z) & & \\ & 0 & \\ & & I\end{bmatrix}U,\quad q(z)=\begin{bmatrix}\hat{q}(z) & & \\ & I & \\ & & 0\end{bmatrix}U;$$

$\{p(z),\ q(z)\}$ — *произвольная стилтьесовская пара;* U — *матрица подстановки, определяемая данными задачи, а соответствующие блоки в блочных представлениях* $p(z)$ и $q(z)$ *имеют одинаковые размерности.*

Пару мероморфных в верхней полуплоскости м.-ф. $\{p(z),\ q(z)\}$ называют *неванлинновской*, если выполняются следующие условия: $\det(p^*(z)p(z)+q^*(z)q(z))\not\equiv 0$ **(1.3)**; $-i(q^*(z)p(z)-p^*(z)q(z))\geqslant \geqslant 0$ **(1.4)**.

Если же м.-ф. $p(z)$, $q(z)$ мероморфны вне полуоси $[0,\ \infty)$ и наряду с условиями (1.3), (1.4) удовлетворяют условию $-i(zq^*(z)p(z)- -\bar{z}p^*(z)q(z))\geqslant 0$, то пару $\{p(z),\ q(z)\}$ называют *стилтьесовской.*

Пары $\{p(z),\ q(z)\}$, $\{p_1(z),\ q_1(z)\}$ называют эквивалентными, если существует мероморфная м.-ф. $f(z)$ такая, что $p_1(z)=p(z)f(z)$, $q_1(z)=q(z)f(z)\ \det f(z)\not\equiv 0$

2. Проблема моментов Гамбургера (H): для заданного набора $m\times m$-матриц $\{s_i\}_{i=0}^{2n}$ описать все $m\times m$-матричные меры $d\Sigma(\lambda)\geqslant 0$, для которых $s_i=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\lambda^i d\Sigma(\lambda)$, $i=0,\ \dots,\ 2n$.

Критерием разрешимости задачи H служит [3] положительная определенность блок-матрицы $K=\|s_{i+j}\|_{i,\ j=0}^{n}\geqslant 0$ **(2.1)**.

В невырожденном случае ($K>0$) матрица-функция ДЛП (1.1) $A(z)$ представляется [1] в виде

$$A(z)=I-iz\begin{bmatrix}M^*(\bar{z})\\ -u^*(\bar{z})\end{bmatrix}K^{-1}[M(0),\ -u(0)]\,J, \qquad (2.2)$$

где $M^*(\bar{z})=\left[0,\ s_0,\ \dots,\ \sum\limits_{i=0}^{n-1}s_iz^{n-i-1}\right]$, $u^*(\bar{z})=[I,\ zI,\ \dots,\ z^nI]$, (2.3)

$$J=\begin{bmatrix}0 & iI_m\\ -iI_m & 0\end{bmatrix}.$$

Представление (2.2) невозможно, если K вырождена. В этом случае используем аналог пошагового процесса Шура, описанного в работе [1]. Полагая $s_i^{(0)}=s_i\ (i=0,\ \dots,\ 2n)$, рекуррентно строим матрицы $s_i^{(k)}\ (k=1,\ \dots,\ 2n;\ i=0,\ \dots,\ 2n-2k)$ по приведенному ниже правилу.

1) Если $\det s_0^{(k)}\not\equiv 0$, то полагаем

$$\|s_{i+j}^{(k+1)}\|_{i,\ j=0}^{n-k-1}=T_kW_kT_k^*, \qquad (2.4)$$

где

$$W_k=\|s_{i+j}^{(k)}\|_{i,\ j=1}^{n-k}-\begin{bmatrix}s_1^{(k)}\\ \vdots\\ s_{n-k}^{(k)}\end{bmatrix}s_0^{(k)-1}[s_1^{(k)},\ \dots,\ s_{n-k}^{(k)}]; \qquad (2.5)$$

$$T_k^{-1}=\begin{bmatrix}s_0^{(k)} & & & \\ s_1^{(k)} & \ddots & & 0\\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ s_{n-k-1}^{(k)} & \dots & s_1^{(k)} & s_0^{(k)}\end{bmatrix}. \qquad (2.6)$$

Непосредственно проверяется, что блок-матрица $T_k W_k T_k^*$ сохраняет структуру блок-матрицы K, чем оправдывается представление (2.4). На этом факте и основывается пошаговый процесс.

Положительная определенность блок-матрицы

$$\|s_{i+j}^{(k)}\|_{i,j=0}^{n-k} \geqslant 0, \quad k = 1, \ldots, n \tag{2.7}$$

следует немедленно из (2.1), (2.5) и леммы о неотрицательной блок-матрице [4].

2) Если $\det s_0^{(k)} = 0$, то из (2.7) следует существование унитарной матрицы U_k такой, что

$$U_k s_i^k U_k^* = \begin{bmatrix} \hat{s}_i^{(k)} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad i = 0, \ldots, 2n - 2k; \quad \hat{s}_0^{(k)} > 0. \tag{2.8}$$

В этом случае полагаем

$$\| s_{i+j}^{(k+1)} \|_{i,j=0}^{n-k-1} = \hat{T}_k \hat{W}_k \hat{T}_k^*,$$

где блок-матрицы $\hat{T}_k$, $\hat{W}_k$ определяются матрицами $\hat{s}_i^{(k)}$, так же, как T_k, W_k — матрицами $s_i^{(k)}$ по формулам (2.5), (2.6).

Полагая $\nu(k) = \sum_{j=0}^{k-1} \operatorname{def} s_0^{(k)}$, свяжем с матрицами $s_i^{(k)}$ матрицы-функции

$$A_k(z) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -I_{m-\nu(k)} & 0 \\ 0 & I_{\nu(k)} & 0 & 0 \\ I_{m-\nu(k)} & 0 & z s_0^{(k)-1} - s_0^{(k)-1} s_1^{(k)} s_0^{(k)-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{\nu(k)} \end{bmatrix}, \tag{2.9}$$

если $\det s_0^{(k)} \neq 0$, или

$$A_k(z) = \begin{bmatrix} U_k^* & & & \\ & I_{\upsilon(k)} & & \\ & & U_k^* & \\ & & & I_{\upsilon(k)} \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} 0 & 0 & -I_{m-\nu(k+1)} & 0 \\ 0 & I_{\nu(k+1)} & 0 & 0 \\ I_{m-\nu(k+1)} & 0 & z \hat{s}_0^{(k)-1} - \hat{s}_0^{(k)-1} \hat{s}_1^{(k)} \hat{s}_0^{(k)-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{\nu(k+1)} \end{bmatrix}, \tag{2.10}$$

если $\det s_0^{(k)} = 0$. При этом матрица U_k определена соотношением (2.8).

Теперь можем уточнить теорему 1.1.

Матрица-функция ДЛП (1.2) имеет вид

$$A(z) = \overset{\curvearrowright}{\prod_{l=0}^{n}} A_k(z), \tag{2.11}$$

где $A_k(z)$ определены формулами (2.9), (2.10); $\{p(z), q(z)\}$ — произвольная неванлинновская пара размера $(m - \nu(n)) \times (m - \nu(n))$.

Независимыми параметрами в (1.2) являются классы эквивалентности неванлинновских пар: различные пары приводят к одной и той же мере $d\Sigma(\lambda)$ тогда и только тогда, когда они эквивалентны.

Заметим, что в невырожденной ситуации (т.е. $\nu(n) = 0$) формула (2.11) дает разложение J-элементарного кратного множителя $A(z)$ из (2.2) в произведение Бляшке—Потапова двучленных элементарных множителей полного ранга.

3. Проблема моментов Стилтьеса (S): для заданного набора $m \times m$-матриц $\{s_i\}_{i=0}^{2n+1}$ описать все $m \times m$-матричные меры $d\Sigma(\lambda) \geqslant 0$, для которых

$$s_i = \int_0^\infty \lambda^i d\sum(\lambda) \quad (i = 0, \ \ldots \ , 2n); \quad s_{2n+1} \geqslant \int_0^\infty \lambda^{2n+1} d\sum(\lambda).$$

Критерий разрешимости задачи S — положительная определенность [5] блок-матриц $K_0 = \|s_{i+j}\|_{i,j=0}^{n} \geqslant 0$, $K_1 = \|s_{i+j+1}\|_{i,j=0}^{n} \geqslant 0$ **(3.1).**

В невырожденной ситуации ($K_0 > 0$, $K_1 > 0$) задача S решена [2]. В этом случае матрица-функция ДЛП (1.2) $A(z)$ записывается в групповой форме:

$$A(z) = I - i\begin{bmatrix} zM^*(\bar{z}) & zM^*(\bar{z}) + R^* \\ -zu^*(\bar{z}) & -zu^*(\bar{z}) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} K_0^{-1} & \\ & K_1^{-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -u(0) \\ R & 0 \end{bmatrix}J,$$

где $M(z)$, $u(z)$ определены формулами (2.3), а $R^* = [s_0, \ \ldots \ , s_n]$. Вырожденный случай задачи S разнообразнее, чем в задаче H, так как множество решений зависит от характера вырождения уже двух блок-матриц K_0 и K_1. Впрочем, и здесь применим пошаговый процесс. По данным задачи рекуррентно строим матрицы $s_i^{(k)}$ ($k = 0, \ \ldots \ , n$; $i = 0, \ \ldots \ , 2n - 2k + 1$, полагая, как и в п.2, $s_i^{(0)} = s_i$ ($i = 0, \ \ldots \ , 2n + 1$). При этом в зависимости от характера вырождения K_0 и K_1 приходится различать три случая.

1) Если $\det s_0^{(k)} \neq 0$, $\det s_1^{(k)} \neq 0$, то полагаем

$$\|s_{i+j}^{(k+1)}\|_{i,j=0}^{n-k-1} = R_k W_k R_k^*; \tag{3.2}$$

$$\|s_{i+j+1}^{(k+1)}\|_{i,j=0}^{n-k-1} = R_k V_k R_k^*, \tag{3.3}$$

где

$$V_k = \|s_{i+j+1}^{(k)}\|_{i,j=1}^{n-k} - \begin{vmatrix} s_2^{(k)} \\ \vdots \\ s_{n-k+1}^{(k)} \end{vmatrix} s_1^{(k)-1}\left[s_2^{(k)}, \ \ldots \ , s_{n-k+1}^{(k)}\right]; \tag{3.4}$$

$$R_k^{-1} = \begin{bmatrix} s_1^{(k)} s_0^{(k)-1} & \cdot & & & \\ s_2^{(k)} s_0^{(k)-1} & \cdot & \cdot & 0 & \\ \vdots & & \cdot & \cdot & \\ & & & \cdot & \cdot \\ s_{n-k}^{(k)} s_0^{(k)-1} & \ldots & s_2^{(k)} s_0^{(k)-1} & s_1^{(k)} s_0^{(k)-1} & \end{bmatrix}, \tag{3.5}$$

а W_k определяется соотношением (2.5).

Непосредственная проверка показывает, что блок-матрицы $R_k W_k R_k^*$ и $R_k V_k R_k^*$ сохраняют структуру соответственно моментных матриц K_0 и K_1. Этот факт делает правомерными представления (3.2), (3.3) и обосновывает возможность пошагового процесса.

Из (2.5), (3.1) — (3.4) по лемме о неотрицательной блок-матрице получаем

$$\| s_{i+j}^{(k)} \|_{i,j=0}^{n-k} \geqslant 0, \quad \| s_{i+j+0}^{(k)} \|_{i,j=1}^{n-k} \geqslant 0, \quad k = 0, \ldots, n. \tag{3.6}$$

2) Если $\operatorname{def} s_0^{(k)} = \operatorname{def} s_1^{(k)} \geqslant 1$, то в виду (3.6) существует унитарная матрица U_k такая, что

$$U_k s_i^{(k)} U_k^* = \begin{bmatrix} \hat{s}_i^{(k)} & 0 \\ 0 & \end{bmatrix} (i = 0, \ldots, 2n-2k+1); \quad \hat{s}_0^{(k)} > 0, \ \hat{s}_1^{(k)} > 0.$$

В этом случае полагаем

$$\| s_{i+j}^{(k+1)} \|_{i,j=0}^{n-k-1} = \hat{R}_k \hat{W}_k \hat{R}_k^*, \quad \| s_{i+j+1}^{(k+1)} \|_{i,j=0}^{n-k-1} = \hat{R}_k \hat{V}_k \hat{R}_k^*,$$

где блок-матрицы $\hat{R}_k$, $\hat{W}_k$, $\hat{V}_k$ определяются матрицами $\hat{s}_i^{(k)}$ так же, как R_k, W_k, V_k — матрицами $s_i^{(k)}$ в формулах (2.5), (3.4), (3.5).

3) Если $\eta = \operatorname{def} s_i^{(k)} > \operatorname{def} s_0^{(k)} = \mu$, то при надлежащем выборе унитарной матрицы U_k имеем

$$U_k s_0^{(k)} U_k^* = \begin{bmatrix} \check{s}_0^{(k)} & 0 \\ 0 & 0_\mu \end{bmatrix}, \quad \check{s}_0^{(k)} > 0;$$

$$U_k s_i^{(k)} U_k^* = \begin{bmatrix} \hat{s}_i^{(k)} & 0 \\ 0 & 0_\eta \end{bmatrix} (i = 1, \ldots, 2n-2k+1) \quad \hat{s}_1^{(k)} > 0.$$

Пусть $\check{s}_0^{(k)} = \begin{bmatrix} a_k & b_k \\ b_k^* & c_k \end{bmatrix}$, $\hat{s}_0^{(k)} = a_k - b_k c_k^{-1} b_k^* \, (rg \hat{s}_0^{(k)} = rg \hat{s}_i^{(k)})$.

Тогда

$$\| s_{i+j}^{(k+1)} \|_{i,j=0}^{n-k-1} = \hat{Q}_k \hat{W}_k \hat{Q}_k^*; \quad \| s_{i+j+1}^{(k+1)} \|_{i,j=0}^{n-k-1} = \hat{Q}_k \hat{V}_k \hat{Q}_k^*,$$

где

$$\hat{Q}_k^{-1} = \begin{bmatrix} \hat{s}_1^{(k)} & & & \\ \hat{s}_2^{(k)} & \ddots & & \\ \vdots & & \ddots & \\ \hat{s}_{n-k}^{(k)} & \cdots & \hat{s}_2^{(k)} & \hat{s}_1^{(k)} \end{bmatrix},$$

а $\hat{W}_k$, $\hat{V}_k$ определяются так же, как и в случае 2.

Полагая $\nu(k) = \sum_{j=0}^{k-1} \operatorname{def} s_1^{(j)}$, свяжем с каждым из перечисленных случаев матрицу-функцию

$$1) \ A_k(z) = \left[\begin{array}{cc|cc} \multicolumn{2}{c|}{I_m} & s_0^{(k)} s_1^{(k)-1} s_0^{(k)} & 0 \\ & & 0 & 0_{\nu(k)} \\ \hline -z s_0^{(k)-1} & 0 & I - z s_1^{(k)-1} s_0^{(k)} & 0 \\ 0 & 0_{\nu(k)} & 0 & I_{\nu(k)} \end{array} \right] \tag{3.7}$$

($\operatorname{def} s_0 = \operatorname{def} s_1^{(k)} = 0$);

$$2)\ A_k(z) = \begin{bmatrix} U_k^* & & & \\ & I_{\nu(k)} & & \\ & & U_k^* & \\ & & & I_{\nu(k)} \end{bmatrix} \times$$

$$\times \left[\begin{array}{cc|cc} I_m & & \hat{s}_0^{(k)} \hat{s}_1^{(k)-1} \hat{s}_0^{(k)} & 0 \\ & & 0 & 0 \\ \hline -z\hat{s}_0^{(k)-1} & 0 & I - z\hat{s}_1^{(k)-1} \hat{s}_0^{(k)} & 0 \\ 0 & 0_{\nu(k+1)} & 0 & I_{\nu(k+1)} \end{array}\right] \tag{3.8}$$

($\operatorname{def} s_0^{(k)} = \operatorname{def} s_1^{(k)} \geqslant 1$);

$$3)\ A_k(z) = \begin{bmatrix} U_k^* & & & \\ & I_{\nu(k)} & & \\ & & U_k^* & \\ & & & I_{\nu(k)} \end{bmatrix} \times$$

$$+ \left[\begin{array}{cc|cc} \check{s}_0^{(k)} & 0 & \check{s}_0^{(k)} \begin{bmatrix} \hat{s}_1^{(k)-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & 0 \\ 0 & I_{\eta(k)} & 0 & 0 \\ \hline -zI & 0 & \hat{s}_0^{(k)} - z \begin{bmatrix} \hat{s}_1^{(k)-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & 0 \\ 0 & 0_{\eta(k)} & 0 & I_{\eta(k)} \end{array}\right] \tag{3.9}$$

($\operatorname{def} s_1^{(k)} > \operatorname{def} s_0^{(k)} = \mu(k)$, $\eta(k) = \nu(k) + \mu(k)$).

Пусть, наконец, $k_1 < k_2 \ldots < k_r$ — все такие числа, для которых $\operatorname{def} s_1^{(k_i)} > 0$ ($i = 1, \ldots, r$).

Теорема. *Множество всех решений задачи* S *параметризуется посредством ДЛП (1.2), где*

$$A(z) = \| a_{ij}(z) \|_{i,j=1}^{2} = \widehat{\prod_{k=0}^{n}} A_k(z);$$

$A_k(z)$ — *м.-ф., определенные формулами (3.7)—(3.9);*

$$p(z) = \begin{bmatrix} \hat{p}(z) & & \\ & \delta_r & 0 \\ 0 & & \ddots\ \delta_1 \end{bmatrix},\ q(z) = \begin{bmatrix} \hat{q}(z) & & \\ & \gamma_r & 0 \\ 0 & & \ddots\ \gamma_1 \end{bmatrix}; \tag{3.10}$$

$\{\hat{p}(z), \hat{q}(z)\}$ — *произвольная стилтьесовская пара м.-ф. размера* $(m - \nu(n)) \times (m - \nu(n))$;

$$\delta_i = \begin{cases} 0_{\mu(i)}, & \text{если } \operatorname{def} s_0^{(k_i)} = \operatorname{def} s_1^{(k_i)} = \mu(i); \\ \begin{bmatrix} I_{\alpha(i)} & \\ & 0_{\beta(i)} \end{bmatrix}, & \text{если } \operatorname{def} s_1^{(k_i)} = \alpha(i) + \beta(i) > \beta(i) = \operatorname{def} s_0^{(k_i)}; \end{cases}$$

Независимыми параметрами в ДЛП (1.2) являются классы эквивалентности стилтьесовских пар м.-ф. размера $(m-\nu(n))\times(m-\nu(n))$.

После обрамления м.-ф. $p(z)$, $q(z)$ из (3.10) матрицей подстановки $U=\begin{bmatrix} I_{m-\nu(n)} & \\ & V\end{bmatrix}$, где

$$V\begin{bmatrix}\delta_r & & \\ & \ddots & \\ & & \delta_1\end{bmatrix}V^*=\begin{bmatrix}0 & \\ & 1\end{bmatrix};\quad V\begin{bmatrix}\gamma_r & \\ & \gamma_1\end{bmatrix}V^*=\begin{bmatrix}I & \\ & 0\end{bmatrix},$$

приходим к теореме 1.2

Процесс, описанный в п. 3, применяется и для случая бесконечного числа моментов $\{s_i\}_{i=0}^{\infty}$. При этом, начиная с некоторого шага, размерность параметров ДЛП (1.2) стабилизируется. В частности, если эта размерность становится нулевой, то параметром ДЛП является унитарная матрица, и задача S имеет единственное решение.

Список литературы: 1. *Ковалишина И. В.* Аналитическая теория одного класса интерполяционных задач // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1981. — **279**, № 6. — С. 25—80. 2. *Дюкарев Ю. Н.* Матричная проблема моментов Стилтьеса. — М., 1981.— 37 с. Деп. в ВИНИТИ 22.03.81, № 2628. 3. *Ахиезер Н. И.* Классическая проблема моментов. — М.: Физматгиз, 1961. — 310 с. 4. *Ефимов А. В., Потапов В. П.* J-растягивающие матрицы-функции и их роль в аналитической теории электрических цепей // Успехи мат. наук.— 1973.— **28**. — № 1.— С. 65—130. 5. *Крейн М. Г., Нудельман А. А.* Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи. — М.: Наука, 1973.—551 с.

Поступила в редколлегию 21.03.86