

ОБ ЭФФЕКТИВНОМ РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ МАКСИМИЗАЦИИ ЛИНЕЙНОГО ФУНКЦИОНАЛА

И. Я. Кричевский

Рассматривается вопрос об эффективном решении задачи о наибольшем значении линейного функционала

$$I(f) = \int_0^T \tilde{h}(t) \cdot f(t) dt \quad (1)$$

на множестве M всех дифференцируемых функций $f(t)$, подчиненных следующим требованиям:

$$|f(t)| \leq m_0; \quad |f'(t)| \leq m_1; \quad |f'(t) - f'(s)| \leq m_2 |t - s|. \quad (2)$$

Здесь $h(t)$ — известная непрерывная функция времени t , имеющая конечное число точек перемен знака в $[0, T]$.

Задача (1) — (2) в общей постановке является нелокальной: изменение функции $h(t)$ в небольшом интервале влечет за собой изменение экстремали в отдаленных от этого интервала точках [1]. Это обстоятельство затрудняет ее аналитическое эффективное решение. В то же время с помощью одних только методов динамического программирования не удастся реализовать достаточно простую вычислительную схему решения данной задачи.

В настоящей статье рассматривается комбинированный метод, основанный на применении метода функциональных уравнений Р. Беллмана [2], [3] и на использовании свойств максимизирующих функций, изученных в [1].

1. Рассмотрим задачу максимизации функционала

$$I_k(f) = \int_{t_0}^{t_k} h(t) \cdot f(t) dt, \quad f(t) \in M \quad (3)$$

при дополнительных ограничениях на функцию $f(t)$:

$$\left. \begin{aligned} f(t_j) &= a_j, \quad j = 0, 1, \dots, k \\ (-1)^k \cdot f'(t_k) &\leq (-1)^k \cdot b_k \end{aligned} \right\}, \quad (4)$$

где $t_j (j = 1, 2, \dots, n-1)$ — точки перемены знака $h(t)$; $t_0 = 0$, $t_n = T$. Для определенности будем полагать, что $h(t) \geq 0$ в четных интервалах $[t_k, t_{k+1}]$.

Основываясь на теореме 1 о форме максимизирующей функции (см. [1]), мы можем привести задачу (3) — (4) к задаче о наибольшем значении функционала

$$I_k(f_m) = \int_{t_0}^{t_k} h(t) f_m(t) dt, \quad f_m(t) \in M,$$

на множестве L всех кусочно-квадратичных функций $f_m(t)$, удовлетворяющих условию (4) и равных

$$f_m(t) = \begin{cases} \varphi_+(t) = a_i + \int_{t_i}^t \Phi_+(\tau) d\tau, & i = 2, 4, \dots \\ \varphi_-(t) = a_i + \int_{t_i}^t \Phi_-(\tau) d\tau, & i = 1, 3, \dots \end{cases} \quad (5)$$

Здесь $\Phi_+(t)$ и $\Phi_-(t)$ — кусочно-линейные функции, определенные соответственно в каждом четном и нечетном интервале $[t_i, t_{i+1}]$, (см. [1]).

Поставим вопрос о поведении максимизирующей функции в точках $t = t_i$, $i = 0, 1, \dots, k$. Оказывается, что данные функции обладают одним важным свойством, существенно облегчающим эффективное решение задачи, а именно:

Теорема 1. Если множество L не пусто, то:

1) Существует функция $f_m(t) \in L$, у которой производная в точках $t = t_i$, ($i = 0, 1, \dots, k$) принимает максимальное для данного множества значение при i четном и минимальное — при i нечетном;

2) Данная функция реализует наибольшее значение функционала $I_k(f_m)$ на множестве L .

Доказательство. Применим метод индукции.

1°. Пусть $k = 1$. Рассмотрим множество $L[t_0, t_1]$ всех функций $f_m(t)$, удовлетворяющих условиям:

$$f_m(t_0) = a_0, \quad f_m(t_1) = a_1, \quad f'_m(t_1) \geq b_1.$$

Пусть далее $L_1[t_0, t_1]$ и $L_2[t_0, t_1]$ — подмножества всех функций $f_m(t) \in L$, обладающих следующими свойствами: $\{f_m(t) \in L_1 / f'_m(t_0) = b_0\}$, $\{f_m(t) \in L_2 / f'_m(t_1) = b_1\}$. Здесь $b_0 = \sup f'_m(t_0)$, $f'_m \in L[t_0, t_1]$. По условию теоремы оба подмножества L_1 и L_2 непустые. Покажем, что первое утверждение теоремы о существовании функции $f_0(t) \in L[t_0, t_1]$, удовлетворяющей требованиям

$$f'_0(t_0) = b_0, \quad f'_0(t_1) = b_1,$$

справедливо. Рассуждая от противного, допустим, что такой функции на $L[t_0, t_1]$ не существует. Это произойдет в том случае, если будет

$$\int_{t_0}^{t_1} f'_m(t) dt \leq \int_{t_0}^{t_1} \Phi_m(t) dt < a_1 - a_0,$$

либо когда

$$\int_{t_0}^{t_1} f'_m(t) dt \geq \int_{t_0}^{t_1} \Phi_m(t) dt > a_1 - a_0.$$

Здесь

$$\Phi_m(t) = \min \{b_0 + m_2(t - t_0); m_1; b_1 + m_2(t_1 - t)\}$$

и

$$\Phi_m(t) = \max \{b_0 - m_2(t - t_0); -m_1; b_1 - m_2(t_1 - t)\}.$$

В первом случае мы приходим к противоречию с условием существования непустого множества $L_1 \subset L[t_0, t_1]$. Точно так же во втором случае неизбежно противоречие с условием существования непустого множества $L_2 \subset L[t_0, t_1]$. Следовательно, функция $f_0(t) \in L[t_0, t_1]$ существует, а в силу леммы 1 и следствия 1 (см. [1]) данная функция будет удовлетворять второму утверждению теоремы. Следовательно, теорема справедлива для $k = 1$.

2°. Пусть теорема верна для $k = j$. Докажем, что она верна и для $k = j + 1$. Для определенности положим j четным. Пусть Y_j и Y'_j есть множества всех значений производных $f_m(t)$, которым соответствуют непустые множества функций $f_m(t) \in L[t_0, t_j]$ и $L[t_j, t_{j+1}]$. Пусть далее $\sup f'_m(t_j) = b_j$, $f_m(t) \in L[t_0, t_{j+1}]$. Очевидно число b_j будет являться точной верхней границей пересечения множеств $Y_j \cap Y'_j$. Тогда по аналогии с 1° мы можем утверждать, что существует функция $f_0(t) \in L[t_j, t_{j+1}]$, обладающая следующими свойствами:

$$f'_0(t_j) = b_j \geq f'_m(t_j) \text{ и } f'_0(t_{j+1}) = b_{j+1} \leq f'_m(t_{j+1}), \quad (6)$$

$$f_m \in L[t_j, t_{j+1}],$$

$$\sup_{f_m \in L[t_j, t_{j+1}]} \int_{t_j}^{t_{j+1}} h(t) \cdot f_m(t) dt = \int_{t_j}^{t_{j+1}} h(t) \cdot f_0(t) dt. \quad (7)$$

С другой стороны, если теорема верна для $k = j$, то на множестве функций $f_m(t) \in L[t_0, t_1]$, удовлетворяющих условию $f'_m(t_j) \leq b_j$, существует функция $f_j(t)$, удовлетворяющая всем требованиям теоремы в точках t_i , $i = 0, 1, \dots, j$ и реализующая наибольшее значение функционала $I_j(f_m)$, т. е.

$$\sup_{f_m \in L[t_0, t_j]} \int_{t_0}^{t_j} h(t) f_m(t) dt = \int_{t_0}^{t_j} h(t) f_j(t) dt. \quad (8)$$

Образуем функцию

$$f_{j+1}(t) = \begin{cases} f_j(t), & t_0 \leq t \leq t_j, \\ f_0(t), & t_j \leq t \leq t_{j+1}. \end{cases}$$

По определению $f_j(t)$ и $f_0(t)$ будем иметь

$$f_j(t_j) = f_0(t_j) = a_j, \quad f'_j(t_j) = f'_0(t_j) = B'_j. \quad (9)$$

Но согласно (6) и (9) функция $f_{j+1}(t)$ будет принадлежать некоторому множеству $L[t_0, t_{j+1}]$ и отвечать всем требованиям теоремы, т. е.

$$(-1)^i \cdot f'_{j+1}(t_i) \geq (-1)^i \cdot f'_m(t_i), \quad i = 0, 1, \dots, j+1, \quad f_m \in L[t_0, t_{j+1}].$$

Имея в виду (7) и (8), получим

$$\sup_{f_m \in L[t_0, t_{j+1}]} \int_{t_0}^{t_{j+1}} h(t) \cdot f_m(t) dt = \int_{t_0}^{t_{j+1}} h(t) \cdot f_{j+1}(t) dt.$$

Доказательство для j нечетных проводится аналогично. Теорема доказана.

Рассмотрим множество W_k функций $f_m(t) \in L[t_k, t_{k+1}]$, подчиненных требованиям

$$\sup f'_m(t) = B_k, \quad \inf f'_m(t) = C_k, \quad t = k, k+1.$$

Данное множество будет не пусто при следующих условиях:

$$a) |B_k| \leq b_k^*, \quad |C_k| \leq b_k^*;$$

$$b) \int_{t_k}^{t_{k+1}} \min \Phi_m(t) dt \leq a_{k+1} - a_k \leq \int_{t_k}^{t_{k+1}} \max \Phi_m(t) dt,$$

где

$$\min \Phi_m(t) = \max \{C_k - m_2(t - t_k); -m_1; b_{k+1} - m_2(t_{k+1} - t)\}$$

и

$$\max \Phi_m(t) = \min \{B_k + m_2(t - t_k); m_1; b_{k+1} + m_2(t_{k+1} - t)\}.$$

Здесь

$$b_k^* = \sqrt{2m_2(m_0 - |a_k|)}. \quad (10)$$

Если не будет выполнено условие а), то мы придем

к противоречию: $|f(t)| > m_0$ в точке $t = t_k + \frac{f'(t_k)}{m_2}$

или в точке $t = t_k - \frac{f'(t_k)}{m_2}$. Второе условие очевидно.

Выделим из W_k подмножество U_k всех функций $f_m(t)$, у которых производные в точке $t = t_k$ принимают следующие значения:

$$f'_m(t_k) = \begin{cases} B_k & \text{при } k = 0, 2, \dots, \\ C_k & \text{при } k = 1, 3, \dots. \end{cases} \quad (11)$$

В свою очередь, подмножество $U_k[t_k, t_{k+1}]$ будет не пусто, если выполнены неравенства

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} \max \Phi_m(t) dt \leq a_{k+1} - a_k \leq \int_{t_k}^{t_{k+1}} \min \Phi_m(t) dt,$$

где

$$\max \Phi_m(t) = \max \{B_k - m_2(t - t_k); -m_1; b_{k+1} - m_2(t_{k+1} - t)\}.$$

Графики функций $\min \Phi_m(t)$, $\max \Phi_m(t)$, $\min \Phi_m(t)$ и $\max \Phi_m(t)$ показаны на рисунке.

Непосредственно из теоремы 1 вытекает

Следствие 1. Пусть в промежутке $[t_k, t_{k+1}]$ существует непустое множество функций W_k . Если при этом подмножество $U_k \subset W_k$ не пусто, то наибольшее значение функционала

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} h(t) \cdot f_m(t) dt, \quad f_m \in L[t_k, t_{k+1}]$$

доставляет функция $f_m \in U_k$. В противном случае наибольшее значение функционала реализуется на функции $f_m(t) \in W_k$, у которой производная равна $\Phi_m(t)$ при k четном и $\Phi_m(t)$ при k нечетном.

2°. Теперь перейдем непосредственно к эффективному решению задачи (3) — (4). С этой целью обратимся к методу функциональных уравнений Р. Беллмана. Данный метод достаточно эффективен в одномерных задачах. В рассматриваемой двумерной задаче при больших значениях T процесс вычислений с помощью одного лишь только метода функциональных уравнений остается весьма громоздким. Его дальнейшее упрощение неизбежно связано с необходимостью понижения размерности и сокращения числа шагов в многошаговом процессе решения. Это оказывается возможным в случае комбинированного решения, основанного на применении метода функциональных уравнений в сочетании с информацией аналитического характера о свойствах максимизирующей функции.

Согласно основной теореме 1 (см. [1]) наибольшее значение функционала (1) реализуется на множестве кусочно-квадратичных функций $f_m(t)$. Каждая из функций $\varphi_+(t)$ и $\varphi_-(t)$ однозначно определяется заданием краевых условий $\varphi_+(t_i) = a_i$, $\varphi_-(t_i) = a_i$, $\varphi'_+(t_i) = b_i$, $\varphi'_-(t_i) = b_i$ ($i = k, k+1$). Следовательно, задача максимизации функционала (1) — (2) сводится к определению наибольшего значения функции $2n$ переменных a_k и b_k , т. е.

$$\max_f I(f) = \max_{\substack{a_1, \dots, a_n \\ b_1, \dots, b_n}} I(a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n). \quad (12)$$

Определим функцию $I_k(a_k, b_k)$, равную

$$I_k(a_k, b_k) = \max_{f_k \in L_k} \int_{t_0}^{t_k} h(t) f_k(t) dt,$$

где L_k есть множество всех функций $f_m(t)$, удовлетворяющих следующим требованиям:

$$f_k(t_k) = a_k, \quad f'_k(t_k) = b_k.$$

По аналогии с (12) можем записать

$$I_k(a_k, b_k) = \max_{\substack{a_1, \dots, a_{k-1} \\ b_1, \dots, b_{k-1}}} I_k(a_k, b_k; a_1, \dots, a_{k-1}, b_1, \dots, b_{k-1}).$$

Тогда, воспользовавшись свойством аддитивности определенного интеграла, мы придем к функциональному уравнению

$$I_k(a_k, b_k) = \max_{a_{k-1}, b_{k-1}} [I_{k-1}(a_{k-1}, b_{k-1}) + \int_{t_{k-1}}^{t_k} h(t) \cdot f_k(t) dt]. \quad (13)$$

Для построения вычислительной схемы заменим непрерывные множества значений $f_k(t_k) = a_k$, ($a_k \in [-m_0, m_0]$) и $f'_k(t_k) = b_k$, ($b_k \in [-b_k^*, b_k^*]$) дискретными множествами

$$\begin{aligned} & -m_0, -m_0 + \Delta, \dots, -m_0 + k\Delta, \dots, m_0, \\ & -b_k^*, -b_k^* + \Delta_1, \dots, -b_k^* + k\Delta_1, \dots, b_k^*. \end{aligned}$$

Допустим, что для каждой пары значений a_{k-1} и b_{k-1} определен интеграл $I_{k-1}(a_{k-1}, b_{k-1})$. Построим вычислительную схему для определения $I_k(a_k, b_k)$, применив доказанную выше теорему 1. Согласно теореме 1

необходимо рассмотреть множество L_k функций $f_m(t)$, удовлетворяющих условиям

$$f_k(t_k) = a_k, f'_k(t_k) = b_k \text{ и } f_{k-1}(t_{k-1}) = a_{k-1}$$

и вычислить правую часть выражения (1) при наименьшем (наибольшем) значении производной $f'_k(t_{k-1})$ при k четном (k — нечетном), при котором множество L_k не пусто. Далее в соответствии с общим планом решения функциональных уравнений Р. Беллмана необходимо для данных значений a_k и b_k перебрать все значений выражения (13) для всех a_{k-1} ($-m_0, -m_0 + \Delta, \dots, +m_0$), для которых соответствующее множество L_k не пусто, и отобрать наибольшее. Подобные вычисления должны быть повторены для всех комбинаций a_k и b_k . Таким образом, при использовании основной теоремы о форме максимизирующей функции и теоремы 1 о свойствах максимизирующей функции на границах интервалов знакопостоянства ядра $h(t)$ число интервалов решения становится минимально возможным, равным числу интервалов знакопостоянства ядра. При этом данная задача из двумерной становится «полуторамерной», т. е. если n_1 — число переборов значений производных $f'_k(t_k)$, а n_2 — число переборов значений самой функции $f_k(t_k)$, то наибольшее число шагов в каждом интервале равно $n_1 \cdot n_2^2$ вместо $n_1^2 \cdot n_2^2$ в двумерной задаче.

ЛИТЕРАТУРА

1. И. Я. Кричевский. О накоплении возмущений в линейных системах. Сб. «Теория функций, функциональный анализ и их приложения», вып. 3. Изд-во ХГУ, Харьков, 1966.
2. Р. Беллман, С. Дрейфус. Прикладные задачи динамического программирования. Изд-во «Наука», 1965.
3. Р. Беллман. Динамическое программирование. Изд-во иностр. лит., М., 1960.

Поступила 26 марта 1966.