УДК 513.33

Л. И. РОНКИН

О РЕГУЛЯРНОСТИ РОСТА ПЛЮРИСУБГАРМОНИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ В ПРОСТРАНСТВЕ И НА ПОДПРОСТРАНСТВАХ

Пусть $u(z)$, $z \in \boldsymbol{C}^n$ — плюрисубгармоническая функция не более чем нормального типа при порядке $\rho > 0$. Последнее означает, что $u(z) \leqslant c_1 |z|^\rho + c_2$, где c_1, c_2 — какие-либо положительные постоянные. Условимся класс всех таких функций обозначать через $\mathrm{PSH}(\boldsymbol{C}^n, \rho]$. Функция $u(z) \in \mathrm{PSH}(\boldsymbol{C}^n, \rho]$ называется функцией вполне регулярного роста* (в. р. р.), если в пространстве обобщенных функций $D'(\boldsymbol{C}^n)$ семейство функций $u^{[t]} = t^{-\rho} u(tz)$ имеет при $t \to +\infty$ предел**. Заметим, что этот предел, если он существует, совпадает с регуляризованным радиальным индикатором функции $u(z)$, т. е. с функцией

$$L_f^*(z) = \lim_{\zeta \to z} L_f(\zeta),$$

где

$$L_f(z) = \lim_{t \to \infty} u^{[t]}(z).$$

Пусть l — комплексная прямая в $\boldsymbol{C}^n$. Это означает, что при некотором $\lambda \in \boldsymbol{C}^n \setminus \{0\}$ множество l может быть задано в виде $l = \{z : z = \lambda w,\ w \in \boldsymbol{C}\}$. Совокупность всех «прямых» l, как известно, образует комплексное многообразие, а именно, проективное пространство $\boldsymbol{P}^{n-1}$. Сужение функции $u(z)$ на l обозначим через u_l. Очевидно, что функция u_l является субгармонической функцией переменного w, параметризующего l. В [6] была доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть* $u(z) \in \mathrm{PSH}(\boldsymbol{C}^n, \rho]$ *и пусть для почти всех* $l \in \boldsymbol{P}^{n-1}$ *функция* u_l *является функцией в. р. р. (в* $\boldsymbol{C} = l$*). Тогда функция* $u(z)$ *имеет в. р. р. в* $\boldsymbol{C}^n$.

Мы покажем здесь, что подобного характера утверждение имеет место и при замене комплексных прямых комплексными плоскостями (подпространствами) произвольной размерности. Для точной формулировки полученного результата введем необходимые обозначения.

Через L будут обозначаться точки грассманового многообразия $G(n, k)$, т. е. k-мерные подпространства в $\boldsymbol{C}^n$. Каждое такое подпространство может быть задано в виде $L = \{z \in \boldsymbol{C}^n: z_j =$

---

* Теории функций в. р. р. (целых, субгармонических, плюрисубгармонических), ведущей свое начало от работ Б. Я. Левина и А. Пфлюгера, посвящена обширная литература. Отметим здесь лишь монографии [1—3], в которых дано систематическое изложение многих вопросов теории, а также обзоры [4, 5].

** Это одно из эквивалентных определений функции в. р. р.

*** Формально в [6] рассматривались лишь целые функции в $\boldsymbol{C}^n$. Однако, по существу, там речь шла о функциях плюрисубгармонических. Отметим также, что в [6] использовалось классическое определение функций в. р. р., а переход к сходимости в $D'(\boldsymbol{C})$ и $D''(\boldsymbol{C}^n)$ и связанному с этим новому, используемому здесь определению, был ключевым моментом доказательства содержащихся в [6] результатов.

$=\sum_{i=1}^{k} a_{i,j} w_i,\ w=(w_1, \dots, w_k) \in C^k,\ j=1, \dots, n\}$ и естественным образом отождествлено с C^k. Атлас многообразия $G(n, k)$ состоит из карт $G^I(n, k)=(\alpha_I^{-1}(V_I), \alpha_I^{-1})$, где: $I=(i_1, \dots, i_k)$ — упорядоченная $(i_1<i_2<\dots<i_k)$ выборка из чисел $1, \dots, n$; V_I — пространство $C^{k(n-k)}$ всех комплексных $k\times n$ матриц A, столбцы которых с номерами $i_1, \dots, i_k$ образуют единичную $k\times k$-матрицу; α_I — отображение из V_I в $G(n, k)$, ставящее в соответствие матрице A подпространство L, натянутое на векторы-строки матрицы A. Через $G_{\tilde{L}}(n, k)$, где $\tilde{L}\in G(n, k-1)$, обозначим множество тех $L\in G(n, k)$, которые содержат $\tilde{L}$. Это подмногообразие грассманиана $G(n, k)$ следующим образом отождествляется с P^{n-1}.

Обозначим через $(\tilde{L}, L)^\perp$, где $L\in G_{\tilde{L}}(n, k)$, множество всех векторов из L, ортогональных к $\tilde{L}$, а через $\tilde{L}^\perp$ обозначим множество всех векторов из C^n, ортогональных к $\tilde{L}$. Ясно, что $(\tilde{L}, L)^\perp$ — комплексная прямая, $\tilde{L}^\perp$ — подпространство в C^n комплексной размерности $n-k+1$, $(\tilde{L}, L)^\perp\subset\tilde{L}^\perp$, совокупность всех $(\tilde{L}, L)^\perp$ совпадает с $\tilde{L}^\perp$ и при этом различным $L\supset\tilde{L}$ отвечают различные $(\tilde{L}, L)^\perp$. Следовательно, множество $\{(\tilde{L}, L)^\perp\}_L\in G_{\tilde{L}}(n, k)$ есть проективное пространство P^{n-k}, полученное проективизацией пространства $C^{n-k+1}=\tilde{L}^\perp$.

Обозначим для краткости построенное выше биективное отображение $G_{\tilde{L}}(n, k)\to P^{n-k}$ через π. Таким образом $(\tilde{L}, L)^\perp=\pi L$. Определим теперь интеграл по $G_{\tilde{L}}$. Именно, положим

$$\int_{G_{\tilde{L}}} \Phi(L)\, d\omega_{\tilde{L}}(L)=\int_{P^{n-k}} \Phi(\pi^{-1} l)\, dW_{2n-2k}(l), \tag{1}$$

где dW_{2n-2k} — введенный стандартным образом* элемент объема на P^{n-k}.

Естественным образом также определяются понятия множества меры ноль на $G_{\tilde{L}}$ и соответственно понятие «почти всюду». Именно, множество $E\subset G_{\tilde{L}}$ называется множеством меры ноль (на $G_{\tilde{L}}$), если в P^{n-k} равна нулю мера множества πE. Заметим еще, что сужение u_L плюрисубгармонической в C^n функции $u(z)$ на подпространство L является плюрисубгармонической функцией переменных $w_1, \dots, w_k$ параметризующих L. Будем также говорить, что u_L — функция в.р.р., или, что то же самое, функция u является функцией в.р.р. на L, если u_L — функция в.р.р. от указанных параметров $w_1, \dots, w_k$.

Теорема 2. *Пусть $u\in PSH(C^n, \rho]$ и пусть при некотором $\tilde{L}\in G(n, k-1)$ для почти всех $L\in G_{\tilde{L}}$ функции u_L являются функциями в.р.р. Тогда и сама функция $u(z)$ является функцией в.р.р.*

---

* Об интегрировании по проективному пространству см., например, [3, 7, 8].

Доказательство. Прежде всего сведем интегрирование по C^n к интегрированию по $G_{\tilde L}$ и P^{n-k}.

Пусть Φ — какая-нибудь суммируемая функция в C^n. Тогда

$$\int_{C^n} \Phi(z)\, d\omega(z) = \int_{\tilde L} d\sigma \int_{\tilde L^{\perp}} \Phi d\tau, \tag{2}$$

где $d\omega(z)$, $d\sigma$ и $d\tau$ — элементы объемов в пространствах $C^n_{(z)}$, $\tilde L$ и $\tilde L^{\perp}$, индуцированные метрикой пространства C^n. Выберем в $\tilde L^{\perp}$ какую-либо ортонормальную систему координат $\zeta_1, \ldots, \zeta_{n-k+1}$, а комплексные прямые l — из $(\tilde L, L)^{\perp}$, т. е. точки соответствующего пространства P^{n-k} будем представлять в виде $l = \{\zeta \in \tilde L^{\perp}: \zeta_1 = \lambda_1 \varkappa, \ldots, \zeta_{n-k} = \lambda_{n-k}\varkappa,\ \zeta_{n-k+1} = \varkappa,\ \varkappa \in C\}$, $\lambda \in C^{n-k}$. Тогда, учитывая известный вид (см., например, [7]) элемента объема dW_{2n-2k}, имеем

$$d\tau = \left(\frac{i}{2}\right)^{n-k+1} d\zeta_1 \wedge d\bar\zeta_1 \wedge \ldots \wedge d\zeta_{n-k+1} \wedge d\bar\zeta_{n-k+1} =$$

$$= |\varkappa|^{2n-2k} \left(\frac{i}{2}\right)^{n-k+1} (d\lambda_1 \wedge d\bar\lambda_1 \wedge \ldots \wedge d\bar\lambda_{n-k} \wedge d\varkappa \wedge d\bar\varkappa) =$$

$$= (1 + |\lambda|^2)^{n-k+1} |\varkappa|^{2n-2k} \left(\frac{i}{2}\right)^{n-k+1} d\varkappa \wedge d\bar\varkappa \wedge$$

$$\wedge \frac{d\bar\lambda_1 \wedge d\bar\lambda_1 \wedge \ldots \wedge d\bar\lambda_{n-k}}{(1 + |\lambda|^2)^{n-k+1}} = |\zeta|^{2(n-k)} dS_l \wedge dW_{2n-2k}, \tag{3}$$

где $dS_l = \frac{i}{2} |\varkappa|^{-2} d\varkappa \wedge d\bar\varkappa$ — индуцированный евклидовой метрикой пространства C^n элемент площади на l.

Заметим далее, что, как следует из сказанного перед формулировкой теоремы 2, каждое пространство $L \in G_{\tilde L}$ имеет вид $L = l \times \tilde L$, $l \in \tilde L^{\perp}$, и если $\zeta_1, \ldots, \zeta_{n-k+1}$ это указанные выше координаты ортогональной проекции точки $z \in C^n$ на $\tilde L^{\perp}$, то $|\zeta|$ есть расстояние $\operatorname{dist}(z, \tilde L)$ от точки z до подпространства $\tilde L$. Отсюда и из (1) — (3) следует, что

$$\int_{C^n} \Phi(z)\, d\omega(z) = \int_{\tilde L} d\sigma \int_{\tilde L^{\perp}} \Phi d\tau =$$

$$= \int_{\tilde L} d\sigma \int_{P^{n-k}} dW_{2n-2k}(l) \int_{e} \Phi(z) [\operatorname{dist}(z, \tilde L)]^{2n-2k} dS_l =$$

$$= \int_{P^{n-k}} dW_{2n-2k}(l) \int_{\tilde L \times l} \Phi [\operatorname{dist}(z, \tilde L)]^{2n-2k} d\sigma dS_l =$$

$$= \int_{G_{\tilde L}} d\omega_{\tilde L}(L) \int_{L} [\operatorname{dist}(z, \tilde L)]^{2n-2k} \Phi(z)\, d\omega_L(z), \tag{4}$$

где $d\omega_L(z)$ — элемент объема на L.

Согласно определению функции в.р.р и условию доказываемой теоремы почти для всех $L \in G_{\tilde{L}}$ справедливо равенство

$$\lim_{t\to\infty} \int_L u^{[t]} \varphi d\omega_L = \int_L L_u^* \varphi d\omega_L, \quad \forall \varphi \in D(L), \tag{5}$$

где $D(L)$ — пространство основных функций на L. Далее, поскольку функция u имеет не более чем нормальный тип при порядке ρ, семейство функций $u^{[t]}$ равномерно ограничено сверху на каждом компакте в $\mathbf{C}^n$. Отсюда, очевидно, следует ограниченность по L и t интегралов

$$\int_L u^{[t]} \psi|_L d\omega_L, \quad \forall \psi \in D(\mathbf{C}^n)$$

Беря в качестве φ функцию $\psi \cdot [\operatorname{dist}(z, \tilde{L})]^{2n-2k}$ и используя теорему о мажорированной сходимости, получаем,

$$\exists \lim_{t\to\infty} \int_{\mathbf{C}^n} \psi u^{[t]} d\omega = \int_{G_{\tilde{L}}} d\omega_L \int_{\tilde{L}} \psi \cdot [\operatorname{dist}(z, \tilde{L})]^{2n-2k} L_u^* d\omega_L = \int_{\mathbf{C}^n} \psi \cdot L_u^* d\omega.$$

Тем самым доказано существование в $D'(\mathbf{C}^n)$ предела $\lim\limits_{t\to\infty} u^{[t]}$. Это означает, что $u(z)$ — функция в.р.р. Теорема доказана.

К теореме 2 близка

Теорема 3. *Пусть функция $u(z)$ из $\mathrm{PSH}(\mathbf{C}^n, \rho]$ на почти всех $L \in G(n, k)$ имеет в.р.р.. Тогда $u(z)$ является функцией в.р.р. в $\mathbf{C}^n$.*

Для доказательства этой теоремы, как следует из изложенного выше, достаточно показать существование хотя бы одного такого $\tilde{L} \in G(n, k-1)$, которое почти для всех $L \in G_{\tilde{L}}$ функция u_L является функцией в.р.р.. В действительности же почти все $\tilde{L} \in G(n, k-1)$ обладают указанным свойством. Это с очевидностью вытекает из следующего равенства:

$$\int_{G(n,k)} \Phi(L) d\omega_{(n,k)}(L) = \int_{G(n,k-1)} d\omega_{(n,k-1)}(\tilde{L}) \int_{G_{\tilde{L}}} \Phi(L) \gamma(L, \tilde{L}) d\omega_{\tilde{L}}(L), \tag{6}$$

где $d\omega_{(n,k)}(L)$ — элемент объема на $G(n, k)$, а $\gamma(L, \tilde{L})$ — некоторая непрерывная функция на множестве $\{(L, \tilde{L}) : \tilde{L} \in G(n, k-1), L \in G(n, k), \tilde{L} \subset L\}$. Конкретный вид функции $\gamma(L, \tilde{L})$ несущественен. В наличии равенства (6) можно удостовериться путем перехода к локальным координатам какой-либо из карт.

Список литературы: 1. *Левин Б. Я.* Распределение корней целых функций. М., 1956. 632 с. 2. *Азарин В. С.* Теория роста субгармонических функций. Х., 1982. 74 с. 3. *Лелон П., Груман Л.* Целые функции многих комплексных переменных. М., 1989. 350 с. 4. *Ронкин Л. И.* Целые функции // Совр. проблемы математики. Фундамент направления. 1986. **39**. С. 5—36. 5. *Гольдберг А. А., Левин Б. Я., Островский И. В.* Целые и мероморфные функции // Совр. проблемы математики. Фундамент направления. 1990. **85**. С. 5—186. 6. *Агранович П. З., Ронкин Л. И.* О функциях вполне регулярного роста. Ann. polon. mat. 1981. **39**. № 2. С. 239—254. 7. *Ронкин Л. И.* Введение в теорию целых функций многих переменных. М., 1971. 422 с. 8. *Чирка Е. М.* Комплексные аналитические множества. М., 1985. 272 с.

Поступила в редколлегию 15.07.90