МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

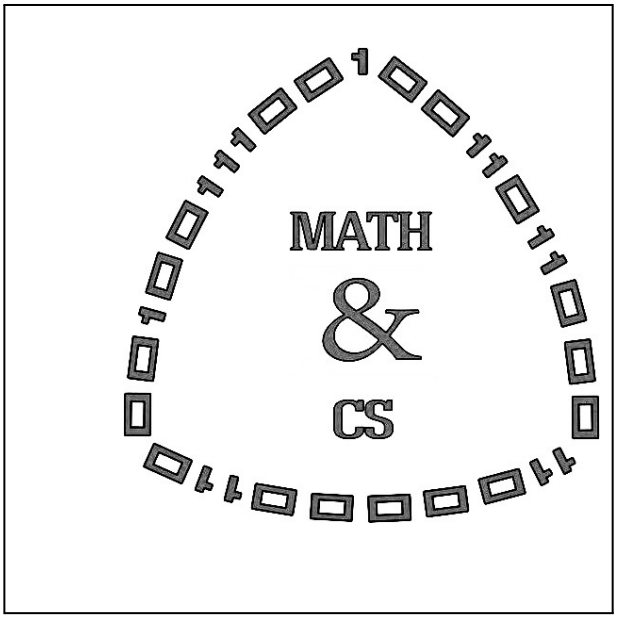
Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна

Студентське наукове товариство
факультету математики і інформатики

Сучасні проблеми математики та її застосування в природничих науках та інформаційних технологіях

Тези доповідей
XVII Міжнародної наукової конференції студентів та молодих вчених

17 - 18 березня 2023, м. Харків, Україна





Харків
2025

УДК 510 (075)

Зареєстровано Державною науковою установою
«Український інститут науково-технічної експертизи та інформації»
(Посвідчення № 596 від 22 грудня 2022 року)

Затверджено до друку рішенням Вченої ради
Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна
(протокол № 7 від 24 лютого 2025 року)

Організаційний комітет конференції:

Голова оргкомітету - Жолткевич Г.М., д. т. н., професор, декан факультету математики і інформатики.

Заступники голови оргкомітету - Шугайло О.О., к. ф.-м. н., старший викладач кафедри фундаментальної математики, заступник декана з наукової роботи, та Анощенко О.О., к. ф.-м. н., доцент кафедри вищої математики та інформатики заступник декана з навчальної роботи.

Члени оргкомітету - Ямпольський О.Л., д. ф.-м. н., доцент кафедри фундаментальної математики; Коробов В.І., д. ф.-м. н., професор, завідувач кафедри прикладної математики; Фаворов С.Ю., д. ф.-м. н., професор кафедри фундаментальної математики; Лисиця В. Т., к. ф.-м. н., доцент, завідувач кафедри вищої математики та інформатики; Зарецька І.Т., к. ф.-м. н., доцент кафедри теоретичної та прикладної інформатики; Гефтер С.Л., к. ф.-м. н., доцент, завідувач кафедри фундаментальної математики; Ігнатович С.Ю., д. ф.-м. н., доцент кафедри прикладної математики; Шульга О.М., студент 3 курсу ФМІ, заступник голови СНТ факультету; Ільєнкова К.О., студентка 2 курсу ФМІ, секретар СНТ факультету; Генералов М.В., студент 1 курсу ФМІ, член СНТ факультету; Полоніна Т.О., студентка 2 курсу ФМІ, член СНТ факультету; Попкова Р.Д., студентка 2 курсу ФМІ, член СНТ факультету; Шульга К.О., студентка 2 курсу ФМІ, член СНТ факультету.

Секретар оргкомітету – Єльчанінова А.Д.. студентка 4 курсу ФМІ, голова студентського наукового товариства факультету математики і інформатики.

Адреса оргкомітету:
Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна, факультет математики і інформатики, майдан Свободи 4, м. Харків, Україна, 61022

Сучасні проблеми математики та її застосування в природничих науках та інформаційних технологіях». Тези доповідей XVII Міжнародної наукової конференції студентів та молодих вчених (17 - 18 березня 2023 р. м. Харків, Україна). – 60 с.

ISBN 978-966-285-863-1

У збірнику представлені тези доповідей учасників конференції, які присвячені сучасним проблемам алгебри, функціонального аналізу, математичної фізики, математичного моделювання, механіки та інформаційних технологій. Для здобувачів середньої та вищої освіти, викладачів і наукових працівників.

Тези подано в авторській редакції

ISBN 978-966-285-863-1

© Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна, 2025

Зміст

Фундаментальна математика

- ***Селютін Д.Д.*** *Про застосування фільтрів в теорії інтегрування* ***6***
- ***Гак А.О.*** *Ітерації блокового оператора……* ***8***
- ***Дехтяр Б.-Я. В.*** *Композиції бльокового та точко-бльокового операторів на графі ……* ***10***
- ***Ведмідь А.О.*** *Узагальнення нерівності Соляра на оператори у гільбертовому просторі……* ***12***
- ***M. V. Heneralov*** *Implicit linear difference equations over residue class rings ……* ***13***
- ***Кравченко С.С.*** *Геометричні властивості інваріантних векторних полів на групах Лі з біінваріантною метрикою ……* ***15***
- ***Яковлєв М.С.*** *Асимптотична нормальність оцінок параметрів змішаного дробового броунівського руху з узагальненням на випадок лінійного тренду ……* ***18***

Прикладна математика

- **Андреєва Д.М.** *Апроксимація відображення «вхід-вихід»……* ***22***
- ***Аветісян Д.А., Ральченко К.В.*** *Оцінювання параметрів у стохастичному диференціальному рівнянні теплопровідності з дробовим броунівським шумом ……* ***24***
- ***Возняк О.С.*** *Явний вигляд поверхні перемикання в задачі допустимого позиційного синтезу……* ***25***

➢ ***Андрієнко Т.В.*** *Функція керованості як час руху ……* ***27***

➢ ***Брусенцева О.Є.*** *Розв'язання задачі теорії керування за допомогою нейронної мережі.……* ***30***

➢ ***Собур М.С.*** *Математична модель системи для роунджампінгу з базовою мотузкою……* ***33***

➢ ***Чергикало Д.О.*** *Автоматичне моделювання патернів будови органів……* ***34***

➢ ***Тарнавський П.В.*** *Огляд можливостей застосування ChatGPT для розв'язування задач чисельних методів……* ***37***

➢ ***Кончаковська О.С.*** *Застосування методу двобічних наближень у чисельному аналізі мікроелектромеханічних систем під дією зовнішнього тиску……* ***40***

➢ ***Коваленко О.Ю.*** *Розподілені алгоритми для мережевих агрегативних ігор ……* ***43***

Інформаційні технології

➢ ***Салата К.В.*** *Моделі машинного навчання для прогнозування ціни криптовалют……* ***46***

➢ ***Нагнибіда А.А.*** *Майбутнє електронного навчання……* ***49***

➢ ***Miedviediev D.*** *Fine-Tuning large NLP models with Federated Learning ……* ***52***

Мала наукова конференція

- ***Сергушенков В.А.*** *Періодичні розв'язки неявних лінійних різницевих рівнянь над кільцем* $Z[\sqrt{d}]$ ***55***
- ***Гуркіна О.М.*** *Про множення плоских та просторових векторів…* ***58***

Про застосування фільтрів в теорії інтегрування

Селютін Д.Д.

Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна

e-mail: seliutin2020pg@student.karazin.ua

(Науковий керівник: Кадець В. М.)

Розглянемо відрізок $[0, 1]$. Позначимо

$$\Pi = \{x_1, x_2, \dots x_n\}, 0 \le x_1 \le x_2 \le \dots \le x_n \le 1$$

розбиття відрізка $[0, 1]$, тобто $\cup_{k=1}^{n}[x_{k-1}, x_k] = [0, 1]$. Для відрізку $[x_{k-1}, x_k]$ будемо використовувати позначення Δ_k. Позначимо $T = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\}$ множину точок таких, що $\xi_k \in \Delta_k$ для кожного $k = 1, 2, \dots, n$. Будемо називати пару (Π, T) *відміченним розбиттям* відрізку $[0, 1]$. Через $TP[0, 1]$ позначимо множину усіх відміченних розбиттів відрізка $[0, 1]$. Для заданої функції $f: [0, 1] \to R$і для фіксованого розбиття $(\Pi, T) \in TP[0, 1]$ розглянемо функцію $S(f, \cdot, \cdot): TP[0, 1] \to R$, визначену наступним чином:

$$S(f, \Pi, T) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\lambda(\Delta_k),$$ де $\lambda(\Delta_k)$ — довжина відрізка Δ_k.

Означення. Нехай $f: [0, 1] \to R$ — функція, F — фільтр на множині $TP[0, 1]$. Будемо говорити, що функція f є *інтегровною відносно фільтра F* (позначення: $f \in Int(F)$), якщо існує таке дійсне число I, $I = \lim\limits_{F} S(f, \Pi, T)$.

Означення. Нехай (Π_1, T_1), (Π_2, T_2) — відміченні розбиття відрізка $[0, 1]$. *Відстанню* між цими розбиттями будемо називати наступну величину:

$$\rho((\Pi_1, T_1), (\Pi_2, T_2)) = \sum_{t \in T_1 \cap T_2} |\Delta_1(t) - \Delta_2(t)| + \sum_{t \in T_1 \setminus T_2} \Delta_1(t) + \sum_{t \in T_2 \setminus T_1} \Delta_2(t).$$

Лема. Функція ρ задовольняє аксіомам відстані.

Означення. Нехай F_1, F_2 — фільтри на $TP[0,1]$. Будемо говорити, що фільтр F_2 ρ-*домінує фільтр* F_1(позначення: $F_1 \prec_\rho F_2$), якщо для довільного $\varepsilon > 0$ і для кожного $A_1 \in F_1$ існує $A_2 \in F_2$ такий, що для будь-якого $(\Pi_2, T_2) \in A_2$ існує $(\Pi_1, T_1) \in A_1$ таке, що $\rho((\Pi_1, T_1), (\Pi_2, T_2)) < \varepsilon$.

Теорема. Нехай F_1, F_2 — фільтри на $TP[0,1]$, $f: [0,1] \to R$ — обмежена функція така, що $f \in Int(F_1)$ і $F_1 \prec_\rho F_2$. Тоді $f \in Int(F_2)$.

Означення. Нехай X — непорожня множина, F — фільтр на X, $f: X \to R$ — відображення. Будемо говорити, що функція f є *обмеженною відносно фільтра* F (для простоти — F-обмеженою), якщо існує число $C > 0$ таке, що для нього існує $B \in F$ такий, що для будь-якого $t \in B$ виконано $|f(t)| < C$.

Теорема. Нехай F — фільтр на $TP[0,1]$, $f: [0,1] \to R$ — функція така, що $f \in Int(F)$. Тоді функція $S(f, \Pi, T)$ є F-обмеженою.

Означення. Нехай B — база фільтра на $TP[0,1]$. Будемо називати B *точно відміченною*, якщо існує така строго спадна послідовність чисел $A \subset [0,1]$, що для кожного $B \in B$ і для кожного $(\Pi, T) \in B$ виконано $T \cap A = \emptyset$.

Означення. Ми називаємо фільтр F на $TP[0,1]$ точно відміченним, якщо для нього існує точно відмічена база.

Теорема. Якщо фільтр F на $TP[0,1]$ є точно відміченим, то існує така необмежена функція $f: [0,1] \to R$, що $f \in Int(F)$.

Ітерації блокового оператора

Гак А. О.

магістрант 1 р.н. кафедри інформатики

Національного університету «Києво-Могилянська академія»

email: artem.hak@ukma.edu.ua

(Співавтор і науковий керівник: Козеренко С. О.

к.ф.-м.н., старший викладач кафедри математики

Національного університету «Києво-Могилянська академія»

email: sergiy.kozerenko@ukma.edu.ua)

У цій роботі досліджуються ітерації блокового оператора на графах. Всі графи, що розглядаються, є скінченними та зв'язними. Нехай X деяка множина, а $F \subset 2^X$ родина її підмножин. *Графом перетинів* $\Omega(X, F)$ називається граф Ω з множиною вершин $V(\Omega) = F$ та дві його вершини A, B вважаються суміжними, якщо $A \cap B \neq \emptyset$ (див. [3, с.1-2]). Вершина називається *точкою з'єднання*, якщо її видалення робить граф незв'язним. Граф називається *двозв'язним*, якщо він не містить точок з'єднання. *Блоком графа* G називається його максимальний (за включенням) двозв'язний підграф (див. [1, с.26]). *Графом блоків* $B(G)$ графа G називається граф перетинів $\Omega(V(G), B)$, де B - це родина множин вершин блоків в G.

Для числа $n \in Z_+$ через $B^n(G)$ будемо позначати n-ту ітерацію оператора B на графі G (при цьому, звичайно $B^0(G) = G$). Для зв'язного графа G із $|V(G)| \geq 2$ має місце нерівність $|V(B(G))| < |V(G)|$. Таким чином, для деякого $n \in N$ виконано $B^n(G) \simeq K_1$.

Означення. Для кожного зв'язного графа G покладемо

$$\beta_0(G) = \{ n \in Z_+ : B^n(G) \simeq K_1 \}.$$

Використовуючи характеризацію графів блоків із [2], ми отримали наступні результати.

Теорема. Для будь-якого зв'язного графа блоків G має місце рівність

$$\beta_0(G) = diam(G).$$

Наслідок. Для будь-якого зв'язного графа G з $|V(G)| \geq 2$ виконується

$$\beta_0(G) = diam(B(G)) + 1.$$

Твердження. Якщо T - дерево, то $B^2(T) \simeq T - \{\text{висячі вершини } T\}$.

Наслідок. Якщо T - дерево, то $B^{2n}(T)$ теж дерево.

Означення. Покладемо $\beta_1(G) = \{ n \in Z_+ : B^n(G) \text{ є ланцюгом}\}$ та $\beta_2(G) = \{ n \in Z_+ : B^n(G) \text{ є деревом}\}$.

Наслідок. $\beta_1(G) = \beta_2(G) + \beta_1\left(B^{\beta_2(G)}(G)\right)$.

Для ланцюга P визначимо $d(P) = \{ d(u,v) : u \in P, v \notin P\}$. Визначаємо число $d(P)$ для дерева T як $d(P)$ для деякого діаметрального ланцюга P. Також зауважимо, що у для будь-яких двох діаметральних ланцюгів $P_{1,2}$ дерева T виконується рівність $d\left(P_1\right) = d\left(P_2\right)$.

Теорема. Для дерева T має місце рівність $\beta_1(T) = 2d(T)$.

Література:

1. Frank Harary (1969), Graph Theory, Addison-Wesley Publishing Company, Inc.
2. Frank Harary, A Characterization of Block-Graphs, Canadian Mathematical Bulletin, 6(1) (1963), 1–6.
3. Terry A. McKee and F. R. McMorris (1999), Topics in intersection graph theory, Society for Industrial and Applied Mathematics.

Композиції бльокового та точко-бльокового операторів на графі

Дехтяр Б.-Я. В.

Бакалавр 3р.н. кафедри інформатики

Національного університету «Києво-Могилянська академія»

email: bohdan-yarema.dekhtiar@ukma.edu.ua

(Співавтор і науковий керівник: Козеренко С. О.

к.ф.-м.н., старший викладач катедри математики

Національного університету «Києво-Могилянська академія»

email: sergiy.kozerenko@ukma.edu.ua)

У цій роботі досліджуються композиції бльокового та точко-бльокового операторів на графах. Всі графи, що розглядаються, скінченні та зв'язні. Нехай X деяка множина, а $F \subset 2^X$ родина її підмножин. *Графом перетинів* $\Omega(X, F)$ називається граф Ω з множиною вершин $V(\Omega) = F$ та дві його вершини A, B вважаються за суміжні, якщо $A \cap B \neq \emptyset$ (див. [3, с.1-2]). Вершина називається *точкою з'єднання*, якщо її видалення робить граф незв'язним. Граф називається *двозв'язним*, якщо він не містить точок з'єднання. *Бльоком графа* G називається його максимальний (за включенням) двозв'язний підграф (див. [1, с.26]). *Графом бльоків* $B(G)$ графа G називається граф перетинів $\Omega(V(G), B)$, де B - це родина множин вершин блоків в G. Точко-бльоковим графом (ТБГ) графа G називається граф $Pb(G)$, вершинами якого є вершини та бльоки графа G, при чім вершини $Pb(G)$ суміжні в разі виконання одної з двох умов: або вони є бльоки G зо спільною точкою з'єднання, або ж це вершина G та бльок, що її містить.

Kulli et al. показали (див. [4, с. 479]), що виконується наступне відношення.

Теорема-1. $B(Pb(G)) \simeq G \Leftrightarrow G$ є граф бльоків.

Увага. Насправді в оригінальному формулюванні права частина стверджує дещо інше, а саме, що кожен бльок G повний. Втім, із характеризації графа бльоків очевидно слідує еквівалентність цих двох формулювань, але саме подане вище більш доречне у світлі дальших результатів.

Ми ж знайшли помилку в наведеному доводі цього результату, і натомість запропонували свій. Крім того, ми одержали подібний результат, помінявши порядок узяття операторів.

Теорема-2. $Pb(B(G))\simeq G \Leftrightarrow G$ є ТБГ.

Доводи використовують базові властивості графа бльоків і ТБГ, а також характеризації їх.

Окрім того, ми одержали наступні наслідки:

Наслідок теореми-1. $B(Pb(B(G)))\simeq B(G)\ \forall G$.

Наслідок теореми-2. $Pb(B(Pb(G)))\simeq Pb(G)\ \forall G$.

Маємо, що наслідок теореми-1 узагальнює теорему-2: він насправді стверджує, що якщо застосувати бльоковий оператор до обох частин ізоморфізму в теоремі-2, то одержане відношення буде правдиве вже для будь-якого графа.

Аналогічно наслідок теореми-2 узагальнює теорему-1.

Література:

1. Frank Harary (1969), Graph Theory, Addison-Wesley Publishing Company, Inc.
2. Frank Harary, A Characterization of Block-Graphs, Canadian Mathematical Bulletin, 6(1) (1963), 1–6.
3. Terry A. McKee and F. R. McMorris (1999), Topics in intersection graph theory, Society for Industrial and Applied Mathematics.
4. V. R. Kulli and M. S. Biradar (2014), The Point Block Graph of A Graph, Journal of Computer and Mathematical Sciences, 476-481.

Узагальнення нерівності Соляра на оператори у гільбертовому просторі

Ведмідь А.О.

Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара

e-mail: vedmidalina10@gmail.com

(Науковий керівник: канд. фіз.-мат. наук Біліченко Р.О.)

Для функцій $x \in L_{p,p}^{2k}$, де $1 < p < \infty$ і $\frac{1}{p} + \frac{1}{p''} = 1$ відома точна нерівність Соляра:

$$\left\|x^{(k)}\right\|_2 \leq \|x\|_p^{\frac{1}{2}} \left\|x^{(2k)}\right\|_{p'}^{\frac{1}{2}}.$$

Нехай X – лінійний нормований простір, X^* - спряжений простір, $x, y \in X$ [2]. Через $\tau(x, y)$ позначимо похідну за Гато [1]. Якщо для будь-якого $y \in X$ існує

$$\tau(x, y) = \lim_{t \to 0} \left(\frac{\|x + ty\| - \|x\|}{t} \right),$$

то $\tau(x, \cdot) \in X^*$, тобто $\tau(f, \cdot)$є неперервним лінійним функціоналом в X [1].

Теорема 1. Якщо A: $X \to Y$– обмежений оператор, що діє в лінійному нормованому просторі X, то для будь-якого $x \in X$ має місце точна нерівність

$$\|Ax\|_Y \leq \|x\|_X \|A^* \tau(Ax, \cdot)\|_{X^*}.$$

Теорема 2. Нехай X – лінійний нормований простір, H – гільбертовий простір. Для оператора A: $X \to H$ і для довільних $x \in X$ справедлива точна нерівність:

$$\|Ax\|_H^2 \leq \|x\|_X \|A^* Ax\|_{X^*}.$$

Зауваження. Остання нерівність у випадку оператора диференціювання і просторів $X = Y = L_{p,p}^{2k}$, дає нерівність Соляра.

Література:

1. Allan M. Pinkus On L1-Approximation. Cambridge Tracts in Mathematics. 1989. P. 3-12.
2. Березанський Ю.М., Ус Г.Ф., Шефтель З.Ф. Функціональний аналіз. Л.: Видавець І.Е. Чижиков, 2014.

Implicit linear difference equations over residue class rings

M. V. Heneralov

Харківський національний університет ім. Каразіна

V. N. Karazin Kharkiv National University, Ukraine

E-mail: me2001.com@gmail.com

Науковий керівник: Півень О. Л.

Let $Z_m = Z/mZ$ be a residue class ring modulo $m = p_1^{k_1} \dots p_r^{k_r}$, where $p_1, ..., p_r$ are pairwise disctinct primes and $k_1, ..., k_r$ are natural numbers. Let $A,\ B,\ F_n \in Z_m$ ($n \in Z_+ = \{0,\ 1,\ 2, ...\}$). Consider the linear difference equation

$$BX_{n+1} = AX_n + F_n, \qquad n \in Z_+, \tag{1}$$

over Z_m. If B is non-invertible, this equation is said to be implicit.

The elements $a,\ b,\ f_n \in \{0, ..., m-1\}$ are representatives of the residue classes $A,\ B,\ F_n \in Z_m$, *respectively*. Denote the following greatest common divisor: $d = \gcd gcd\ (a,\ b,\ m)$ and introduce $N = \prod_{j:\, p_j \nmid b} p_j^{k_j}$ (if $p_j | b$ for all $j = 1, ..., r$, then $N = 1$).

Theorem 1. *The following assertions hold.*

1. The equation (1) has finitely many solutions if and only if $d = 1$. *Moreover, the amount of these solutions is equal to* N.

2. *The equation (1) has no solutions if and only if* $d \nmid f_n$ *for some* $n \in Z_+$.

3. *The equation (1) has infinitely many solutions if and only if* $d \neq 1$ *and* $d \mid f_n$ *for all* $n \in Z_+$.

Corollary 1. *Equation (1) has a unique solution if and only if* $d = 1$ *and* $N = 1$. *In particular, the homogeneous equation*

$$BX_{n+1} = AX_n, \quad n \in Z_+ \qquad (2)$$

has only trivial solution if and only if $d = 1$ *and* $N = 1$.

Corollary 2. *The equation (1) has a unique solution if and only if* B *is nilpotent and* A *is an invertible element of the ring* Z_m.

Corollary 3. *If the homogeneous equation (2) has only trivial solution, then for any sequence* $\{F_n\}_{n=0}^{\infty}$ *Equation (1) has a unique solution.*

We also proved the theorem about solvability of the initial problem $X_0 = Y_0 \in Z_m$ for Equation (1).

This work was completed with the support by the Akhiezer Foundation.

References:

1. S.Gefter, A. Goncharuk, A. Piven', Implicit Linear First Order Difference Equations Over Commutative Rings. In: Elaydi, S., Kulenovic, M.R.S., Kalabusic, S. (eds) Advances in Discrete Dynamical Systems, Difference Equations and Applications. ICDEA 2021. Springer Proceedings in Mathematics\& Statistics, vol 416, Springer, Cham.–2023.–P. 199–216, https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-3-031-25225-9_10.

2. M.V. Heneralov and A.L. Piven', Implicit Linear Difference Equation over Residue Class Rings, http://arxiv.org/abs/2301.13704.

Геометричні властивості інваріантних векторних полів
на групах Лі з біінваріантною метрикою

Кравченко С.С.
Харківський національній університет ім. В.Н. Каразіна
email: sophia.kr2001@gmail.com
(Науковий керівник: Ямпольський О.Л.)

Головною метою роботи є дослідження геометричних властивостей інваріантних векторних полів на групах Лі із біінваріантною метрикою.

В роботі наведено основний теоретичний матеріал, що стосується вищезазначених об'єктів. Згадується доведення теореми про наявність біінваріантної метрики на компактній групі Лі. Також наводяться доведення теореми про вигляд формул коваріантної похідної та тензору кривини у випадку біінваріантної метрики.

Окремий розділ призначений гармонічним та мінімальним векторним полям. Розглядається твердження щодо умов існування гармонійного відображення на дотичний простір лівоінварінтного векторного поля.

В практичній частині роботи розглядаються питання, що стосуються мінімальності одиничного векторного поля. Основну увагу приділено формулі, яка задає умову мінімальності одиничного векторного поля:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{(\nabla_{e_i} A_\xi)e_i + A_\xi R(\xi, A_\xi e_i)e_i}{1+\lambda_i^2} = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i^2}{1+\lambda_i^2}\right)\xi. \quad (1)$$

Виводиться аналог формули **(1)** для біінваріантної метрики. Обчислено значення вектора середньої кривини на групі SO(3). В результаті чого підтверджено наступний результат із **[GV]**: будь-яке одиничне векторне поле на

групі SO(3) є мінімальним. Також проведені відповідні обчислення для групи SO(4).

Для цього було обрано сингулярний базис що задовольняє умовам:

$$A_\xi e_i = \lambda_i e_{m+i}, A_\xi e_{m+i} = -\lambda_i e_i,\ i = 1 \dots m,$$

$$A_\xi e_i = 0,\ i = (m+1) \dots n.$$

Тоді умова мінімальності векторного поля (1) набуває наступного вигляду:

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{\lambda_i [e_i, e_{m+i}]}{1+\lambda_i^2} = \left(\sum_{i=1}^{m} \frac{2\lambda_i^2}{1+\lambda_i^2} \right) \xi. \quad (2)$$

Виходячи із вигляду формули (2) зроблено висновок щодо коефіцієнтів векторного поля, яке задовольняє умові мінімальності. Сформульовано і доведено наступну теорему:

Th. На групі SO(4) векторне поле є мінімальним тоді і тільки тоді, коли $\lambda_I = 0$ або $\lambda_i = \frac{\sqrt{(2)}}{2}$ для будь-якого $i = 1 \dots 6$.

Також доведено лему, яка стверджує, що група SO(3) задовольняє умову **(2)**.

В подальшому планується узагальнити результати роботи на групу SO(n).

Література:

[AB] Alexandrino Marcos M.; Bettiol Renato G., Lie groups and geometric aspects of isometric ac- tionsSpringer, Cham, 2015.

[GV] J. C. Gonzaalez-Davila, L. Vanhecke, Invariant harmonic unit vector fields on Lie groups, Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. 5-B 377–403., no.2, 2002.

[Y] Yampolsky A., On properties of the Reeb vector field of (α,β) trans- Sasakian structure Turkish Journal of Mathematics: Vol. 46: no. 6, Article 19, 2022.

Асимптотична нормальність оцінок параметрів
змішаного дробового броунівського руху
з узагальненням на випадок лінійного тренду

Яковлєв М.С.
Київський національний університет імені Тараса Шевченка
e-mail: mykyta.yakovliev@gmail.com
Ральченко К.В.
Київський національний університет імені Тараса Шевченка
e-mail: kostiantynralchenko@knu.ua

Ціла низка змінних у часі природних процесів традиційно моделюється математично з допомогою стандартного броунівського руху. Водночас, численні сучасні дослідження демонструють існування процесів з властивостями автомодельності, довготермінової залежності та складними кореляційними структурами [4, 5], які не можуть бути належним чином змодельовані за допомогою лише броунівського руху. Натомість, можна використати дробовий броунівський рух з індексом Херста H, прирости якого корелюють, та який має властивості короткотермінової $(H < \frac{1}{2})$ або довготермінової $(H > \frac{1}{2})$ залежності [3].

Досліджується така модель змішаного дробового броунівського руху:

$$X_t = \sigma W_t + \kappa B_t^H, \quad t \geq 0,$$

де W_t – вінерівський процес, B_t^H – дробовий броунівський рух з параметром Херста $H \in (0,1)$, W_t та B_t^H – незалежні. Задача полягає в оцінюванні невідомих параметрів (H, σ, κ) за спостереженнями $\{X_{kh}, k \in (N) \cup \{0\}\}$, $h > 0$.

Введемо позначення:

$$\xi_N := \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left(X_{(k+1)h} - X_{kh}\right)^2$$

$$\eta_N := \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left(X_{(k+1)h} - X_{kh}\right)\left(X_{(k+2)h} - X_{(k+1)h}\right)$$

$$\zeta_N := \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left(X_{(k+2)h} - X_{kh}\right)\left(X_{(k+4)h} - X_{(k+2)h}\right)$$

Нехай $\tau_N = (\xi_N, \eta_N, \zeta_N)$. Відповідно до Леми 3.2 з [2] для довільного $H \in (0,1)$,

$$\tau_N \to \left(E\xi_N, E\eta_N, E\zeta_N\right)$$

$$= \left(\sigma^2 h + \kappa^2 h^{2H}, \kappa^2 h^{2H}\left(2^{2H-1} - 1\right), \kappa^2 h^{2H} 2^{2H}\left(2^{2H-1} - 1\right)\right) =: \tau_0$$

м.н., при $N \to \infty$. Тоді для невідомих параметрів $(H, \sigma, \kappa), H \in \left(0, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ роботі [2] було побудовано наступні консистентні оцінки:

$$\hat{H}_N = \frac{1}{2}\frac{\varsigma_N}{\eta_N}$$

$$\hat{\kappa}_N^2 = \frac{\eta_N}{h^{2\hat{H}_N}\left(2^{2\hat{H}_N - 1} - 1\right)}$$

$$\hat{\sigma}_N^2 = \frac{1}{h}\left(\xi_N - \hat{\kappa}_N^2 h^{2\hat{H}_N}\right)$$

У випадку $H = \frac{1}{2}$ відповідна модель є неідентифіковною, тому цей випадок не розглядається.

У цій роботі доведено асимптотичну нормальність оцінок у випадку $H \in \left(0, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$ та побудовано формули для знаходження її асимптотичної коваріаційної матриці $\tilde{\Sigma}$. У випадку $H > \frac{3}{4}$ асимптотична нормальність не матиме місце через порушення умов збіжності для рядів, які визначають

відповідну асимптотичну коваріаційну матрицю $\tilde{\Sigma}$ для . Це є типовою ситуацією для моделей з дробовим броунівським рухом [1].

Введемо позначення:

$$\theta = \left(H, \kappa^2, \sigma^2\right), \ \hat{\theta}_N = \left(\hat{H}_N, \hat{\kappa}_N^2, \hat{\sigma}_N^2\right), \ N \in N.$$

Використовуючи отриману асимптотичну нормальність статистик , одержано такий основний результат щодо асимптотичної нормальності оцінок:

Теорема. Нехай $H \in \left(0, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$. Оцінка $\hat{\theta}_N$ є асимптотично нормальною:

$$\sqrt{N}\left(\hat{\theta}_N - \theta\right) = \sqrt{N}\left(\hat{H} - H\, \hat{\kappa}_N^2 - \kappa^2\, \hat{\sigma}_N^2 - \sigma^2\right) \to^d N\left(\vec{0}, \Sigma^0\right)$$

з асимптотичною коваріаційною матрицею , яка знаходиться з Σ^0а формулою $\Sigma^0 = g'\left(\tau_0\right)\tilde{\Sigma}\left(g'\left(\tau_0\right)\right)^T$, де $\tilde{\Sigma}$ - асимптотична коваріаційна матриця та $g'\left(\tau_0\right)$ - матриця похідних функції $g(\tau) = g(\xi, \eta, \zeta)$ такої що $g\left(\xi_N, \eta_N, \zeta_N\right) = (\hat{H}, \hat{\kappa}_N^2, \hat{\sigma}_N^2)$.

Також досліджено поведінку побудованих оцінок за допомогою методу Монте-Карло. Виявляється, що для великих H побудовані оцінки є менш якісними ніж для малих значень H, а також для великих значень індексу Херста значно зростає складність та час обрахунків необхідних для оцінювання асимптотичних коваріаційних матриць.

Аналогічні результати щодо асимптотичної нормальності оцінок одержано для задачі одночасного оцінювання чотирьох невідомих параметрів $(H, \sigma, \kappa, \theta)$ у моделі змішаного дробового броунівського руху з трендом вигляду

$$X_t = \theta t + \sigma W_t + \kappa B_t^H, \quad t \geq 0.$$

Однак через нецентрованість приростів процесу елементи матриці $\tilde{\Sigma}$ в цьому випадку будуть збіжними лише на інтервалі $H \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$.

Література

1. P. Cheridito, Mixed fractional Brownian motion, Bernoulli 7 (2001), no. 6, 913–934.

2. A. Kukush, S. Lohvinenko, Y. Mishura, and K. Ralchenko, Two approaches to consistent estimation of parameters of mixed fractional Brownian motion with trend, Statistical Inference for Stochastic Processes 25 (2021), no. 1, 159–187.

3. Y. S. Mishura, Stochastic calculus for fractional Brownian motion and related processes, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1929, Springer-Verlag, Berlin, 2008.

4. S. Sadique and P. Silvapulle, Long-term memory in stock market returns: international evidence, International Journal of Finance & Economics 6 (2001), no. 1, 59–67.

5. W.-G. Zhang, W.-L. Xiao, and C.-X. He, Equity warrants pricing model under fractional Brownian motion and an empirical study, Expert Systems with Applications 36 (2009), no. 2, 3056–3065.

Апроксимація відображення «вхід-вихід»

Андреєва Д.М.

Харківський національний університет ім. В. Н. Каразіна

e-mail: andrejeva_darja@ukr.net

(Науковий керівник Ігнатович Світлана Юріївна)

Розглянемо відображення, яке співставляє вектор-функції $u(t) = (u_1(t), ..., u_m(t))$, $t \in [0, T]$ скалярну функцію вигляду

$$S(t) = \sum c_{i_1 \dots i_k} \int_0^t \int_0^{\tau_1} \dots \int_0^{\tau_{k-1}} u_{i_1}(\tau_1) \dots u_{i_k}(\tau_k) d\tau_k \dots d\tau_1, \quad (1)$$

де $c_{i_1 \dots i_k}$ – скалярні коефіцієнти, а сума береться по всіх $k \geq 1$, $1 \leq i_1, ..., i_k \leq m$. Ми вважаємо, що функції $u_1(t), ..., u_m(t)$ обмежені, $|u_j(t)| \leq 1$, а коефіцієнти $c_{i_1 \dots i_k}$ такі, що ряд у правій частині (1) збігається при малих T.

Відображення (1) можна інтерпретувати як відгук деякої системи, «чорної скриньки»: на вхід подається вхідний сингал $u(t) = (u_1(t), ..., u_m(t))$, а на виході спостерігаємо вихідний сигнал $S(t)$. Зауважимо, що вихідний сигнал в момент часу t залежить лише від значень вхідного сигналу на проміжку $[0, T]$, тобто залежить лише від минулого, а не від майбутнього.

Вигляд правої частини мотивуються тим, що при певних додаткових умовах на коефіцієнти $c_{i_1 \dots i_k}$ система, тобто «чорна скринька», може бути описана за допомогою системи диференціальних рівнянь

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^{m} X_i(x) u_i(t), \quad (2)$$

$$S(t) = h(x(t)), \quad (3)$$

де $x \in R^n$, а вектор-функції $X_i(x)$ і функція $h(x)$ дійсно-аналітичні в околі початку координат. Якщо такі реалізації існують, то їх нескінченно багато. Але реалізація мінімальної вимірності n єдина з точністю до заміни змінних. Будемо розглядати лише такі відображення (1).

Кожний доданок у правій частині (1) можна інтерпретувати як моном, що залежить від k змінних, що не комутують. Такий погляд дозволяє використати плідний алгебраїчний підхід [2] при дослідженні систем (2), (3).

Для використання в локальному аналізі, при малих T, зручно замість нескінченного ряду в правій частині (1) розглянути його наближення. Це можна зробити принаймні двома способами.

1) Можна розглянути однорідну апроксимацію мінімальної реалізації системи (2). Задача однорідної апроксимації добре досліджена; вона припускає опис мовою вільних алгебр. Зокрема, за однорідну апроксимацію відповідає так звана коренева підалгебра Лі [3]. Кореневу підалгебру Лі можна побудувати без знаходження системи (2),а користуючись лише коефіцієнтами $c_{i_1 \dots i_k}$ [4].

2) Можна розглянути однорідну апроксимацію правої частини (1), тобто доданки, які містять інтеграли найменшої довжини (з ненульовими коефіцієнтами), і її реалізацію у вигляді системи. Можна показати, що ця реалізація має не більшу вимірність, ніж реалізація відображення (1). За цю реалізацію відповідає її коренева підалгебра Лі.

У доповіді будуть наведені результати щодо зв’язку між цими підалгебрами Лі.

Література

1. M. Fliess, Fonctionnelles causales non lineaires et indeterminees non commutatives, Bull. Soc. Math. France, 1981, V. 109, P. 3-40.

2. G.M. Sklyar, S.Yu. Ignatovich. Free algebras and noncommutative power series in the analysis of nonlinear control systems: an application to approximation

problems, Dissertationes Math. (Rozprawy Mat.) - 2014. - V. 504. - P. 1-88; doi: 10.4064/dm504-0-1.

3. D. N. Andreieva, S. Yu. Ignatovich. Homogeneous approximation for minimal realizations of series of iterated integrals. Visnyk of V. N. Karazin Kharkiv National University. Ser. Mathematics, Applied Mathematics and Mechanics. – 2022 – V. 96. – P. 23-39; doi: 10.26565/22215646-2022-96-02.

Оцінювання параметрів у стохастичному диференціальному рівнянні теплопровідності з дробовим броунівським шумом

Аветісян Д.А., Ральченко К.В.

Київський національний університет імені Тараса Шевченка

Механіко-математичний факультет

email: diana.avetisian2017@gmail.com

У роботі розглядається стохастичне диференціальне теплопровідності з трьома різними видами шуму: білий шум, дробовий броунівський шум та змішаний дробовий шум. Досліджено коваріаційну структуру, стаціонарність, верхні межі та асимптотичну поведінку розв’язку рівняння для кожного випадку.

Для випадку з білим шумом побудовано строго консистентну та асимптотично нормальну оцінку параметру дифузії.

Для одновимірного стохастичного рівняння теплопровідності з дробовим броунівським шумом було побудовано спільну строго консистентну оцінку двох невідомих параметрів, а саме параметру дифузії σ та параметру Хюрста $H \in (0, 1)$, на основі дискретних спостережень розв’язку. Також доведено асимптотичну нормальність побудованої оцінки для випадку $H \in (0; 3/4)$.

У випадку стохастичного рівняння теплопровідності, керованого змішаним дробовим броунівським шумом, одержано строго консистентну оцінку параметру Хюрста H і доведено її асимптотичну нормальність для $H < \frac{3}{4}$. Далі припускаючи, що параметр Хюрсту відомий, розглянуто задачу спільного оцінювання коефіцієнтів вінерівського процесу та дробового броунівського руху та побудовано строго конзистентні асимптотично нормальні оцінки.

Теоретичні результати проілюстровано за допомогою комп'ютерного моделювання.

Явний вигляд поверхні перемикання в задачі допустимого позиційного синтезу

Возняк О. С.
Харківський національний університет імені В.Н.Каразіна
Науковий керівник: д.ф.-м.н., проф. Коробов В.І.

Дана робота присвячена методу фукції керованості в задачі допустимого позиційного синтезу для лінійних керованих систем, а саме допустимому принципу максимуму та побудові поверхні перемикання.

Ми розглядаємо канонічну керовану систему

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \dots \\ \dot{x}_n = u \end{cases}$$

з обмеженнями на керування вигляду $|u| \leq d$. Задача синтезу для довільної лінійної системи вигляду $\dot{x} = Ax + bu$ може бути зведена до канонічної.

На відміну від більш звичайного підходу, допустимий принцип максимуму дає розривний розв'язок задачі синтезу. Функція керованості $\Theta(x)$

задається як єдиний додатний розв'язок деякого рівняння $\Phi(x, \Theta) = 0$. Керування обирається таким чином, щоб мінімізувати похідну функції $\Theta(x)$ за часом в кожній точці, і може бути записано у вигляді

$$u(x) = - d\, sign(s(x, \Theta(x))).$$

Множина точок, що задовольняє рівності $s(x, \Theta(x)) = 0$, називається поверхнею перемикання і визначає точки, де керування змінює свій знак. Зазвичай вона включає змінну Θ, що є неявним розв'язком рівняння$\Phi(x, \Theta) = 0$. На відміну від цього в роботі шукається явне представлення поверхні перемикання, тобто таке, що не включає змінної Θ.

Раніше було відомо рішення для 2-вимірного випадку. Але в ході дослідження з'ясувалося, що для систем більшої розмірності існують певні труднощі. У цій роботі представлено розв’язок для тривимірної задачі.

Після підстановки поверхні перемикання в систему ми отримуємо систему диференційних рівнянь з розривною правою частиною

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \dots \\ \dot{x}_n = -d\ \mathrm{sign}\, s(x) \end{cases}$$

В роботі показано, що в тривімірному випадку ця поверхня перемикання є поверхнею ковзання для системи (згідно з визначенням Філіппова), тобто після потрапляння на неї траєкторія вже не зможе її покинути.

Також були запропоновані способи наближеної побудови поверхні перемикання за допомогою інтерполяції та апроксимації. Ці способи застосовано на проілюстровано на прикладах знаходження траєкторій конкретних початкових точок.

Ключові слова: теорія керування, задача допустимого синтезу, функція керованості, допустимий принцип максимуму.

Література:

1. 1. R. Kalman, Y. Ho, K. Narendra. Controllability of linear dynamical systems. Contributions to Dierential Equations 1 (1963), 189-213.
2. Bellman R. // SIAM J. Control, Ser. A, 1962.№1. P. 32–34.
3. Korobov, V. I., and G. M. Sklyar. "Methods of constructing positional controls and an admissible maximum principle." Differential Equations 26.11 (1990): 1422-1431.
4. A. E. Choque-Rivero and P. L. Cástulo Cruz, "On Korobov's admissible maximum principle," 2016 IEEE International Autumn Meeting on Power, Electronics andComputing (ROPEC), Ixtapa, Mexico, 2016, pp. 1-6, doi: 10.110 9/ROPEC.2016.7830634.

Функція керованості як час руху

Андрієнко Т.В.
Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна
Науковий керівник: д.ф.-м.н., проф. Коробов В.І.

Дана робота присвячена методу функції керованості в задачах допустимого синтезу для лінійних канонічних систем. В роботі розглянуті способи побудови такого керування, щоб функція керованості була часом руху довільної точки в початок координат. Розглядається канонічна керована система лінійних рівнянь $\dot{x}_i = x_{i+1}, i = 1, \dots, n-1, \dot{x}_n = u$ з обмеженнями на керування $|u| \leq d$. Функція керованості $\Theta(x)$ знаходиться як єдиний додатній розв'язок неявного рівняння $2a_0\Theta = (D(\Theta)FD(\Theta)x, x)$, де $D(\Theta) = diag(\Theta^{-\frac{-2n-2i+1}{2}})_{i=1}^{n}$, матриця $F = \{f_{ij}\}_{i,j=1}^{n}$ додатно визначена, а $a_0 > 0$ обирається так, щоб виконувались обмеження на керування. Функція керованості є часом руху, якщо $\dot{\Theta} = -1$. Звідси отримано рівняння, розв'язання якого розглядається у даній роботі.

На відміну від попередніх робіт з цієї теми, на вигляд матриці F не накладені додаткові обмеження. Задачею було знаходження множини параметрів матриці F та вектор-стовпця a, які задовольняють отриманому рівнянню та для яких функція керованості час руху із точки x у початок координат. Таким чином описується весь клас функцій керованості, які є часом руху. У загальному випадку при знаходження розв'язку задачі Коші відповідної системи можуть виникати труднощі. Система, яка розглядалась у даній роботі зводиться до рівняння Ейлера, для якого неважко знайти характеристичне рівняння, а отже і траєкторію у явному вигляді.

Розглянуто двовимірну, тривимірну та чотиривимірну канонічну системи. У кожному випадку розв’язано матричне рівняння та знайдено множини параметрів, при яких значення функції керованості буде часом руху довільної точки в початок координат. Також обрано деякі параметри, які задовольняють отриманим нерівностям, та довільну початкову точку для якої знайдено розв’язок задачі Коші в аналітичній формі.

Ключові слова: керованість , функція керованості, функція керованості як час руху.

Література:

1. V. I. Korobov, A general approach to the solution of the bounded control synthesis problem in a controllability problem, Math. USSR-Sb.,37:4 (1980), 535-557

2. V. I. Korobov, A. E. Choque Rivero, V.O. Skoryk: Controllability function as time of motion I, Mat. Fiz. Anal. Geom., 11(2), (2004), 208-225

3. V. I. Korobov, A. E. Choque Rivero, V.O. Skoryk: Controllability function as time of motion II, Mat. Fiz. Anal. Geom., 11(3), (2004), 341-354

4. A. E. Choque-Rivero, Extended set of solutions of a bounded finite-time stabilization problem via the controllability function, IMA Journal of Mathematical

Control and Information, Volume 38, Issue 4, December 2021, Pages 1174?1188, https://doi.org/10.1093/imamci/dnab028

5. A. E. Choque-Rivero, Korobov's controllability function as time of motion: Extension of the solution set of the synthesis problem, Mat. Fiz. Anal. Geom., Volume 10, Pages 1-32

Розв’язання задачі теорії керування за допомогою нейронної мережі

Брусенцева О.Є.

Харківський національний університет ім. В. Н. Каразіна

e-mail: brusentcevva@gmail.com

(Науковий керівник: проф. С.Ю.Ігнатович)

Дана робота представляє альтернативний спосіб пошуку оптимального часу перемикань в задачі швидкодії наступного вигляду:

$$\dot{x}_1 = u, \dot{x}_k = x_{k-1},\ k = 2,\ \ldots, n, |u(t)| \leq 1, x(0) = x^0,\ x(\theta) = 0,\ \theta \to min$$

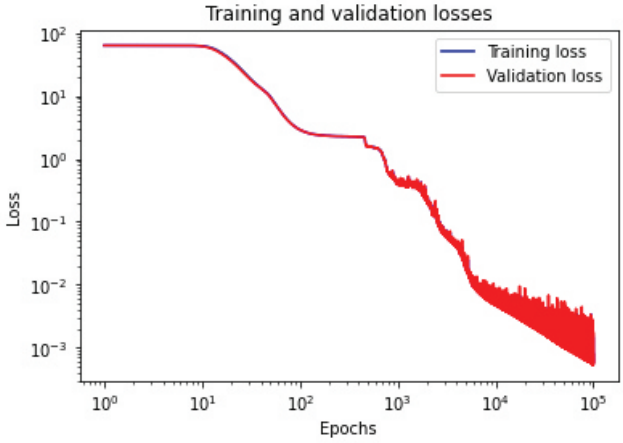
Останні роки популярності набувають моделі штучного інтелекту для розв'язку завдань різноманітного характеру, оскільки можуть забезпечити низку переваг, зокрема автоматизацію повторюваних задач, підвищення ефективності та точності рішень, персоналізацію та вдосконалення досвіду користувачів, зниження витрат тощо. Однією з переваг алгоритмів штучного інтелекту є обчислювальна простота. Наприклад, нейронній мережі достатньо один раз навчитися розв'язувати клас задач, щоб потім давати миттєві рішення вже з іншими початковими умовами.

Нейронна мережа є альтернативним способом розв'язку таких задач, у яких аналітичний алгоритм пошуку рішення є занадто складним та поскладнюється зі збільшенням розмірності. Дана задача є яскравим прикладом. Обчислювальна складність залежить як від розмірності, так й від складності вигляду початкової точки. Наприклад, для $n = 25$ програма класичного алгоритму рахує розв’язок, менше хвилини, у той час, коли для розмірності $n = 40$ обчислювальний час збільшується до 30 хвилин. Якщо ми розглянемо $n = 100$ для точки $x^0 = (0, \ldots, 0, 1)$, то рішення отримаємо за секунди, хоча якщо взяти довільну точку x^0, витрачений час буде більше години.

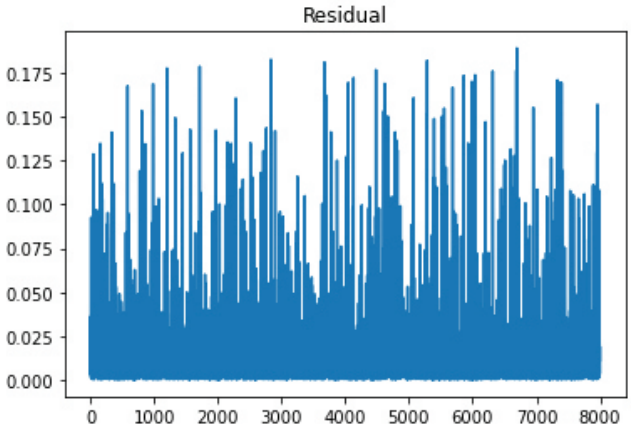
Нашою задачею було створити таку нейронну мережу, яка зможе за даними початкової точки з найбільшою точністю спрогнозувати оптимальний час перемикань. Для побудови використано мову програмування Python, стандартні бібліотеки numpy, pandas, matplotlib та бібліотеки глибинного навчання такі як tensorflow [3] та keras [2].

Отримана мережа є прикладом моделі навчання із вчителем. Було створено тренувальний, валідаційний та тестовий набори даних за допомогою програми, що відповідає стандартному алгоритму розв'язку задачі.

Під час тренування нейронної мережі застосовано функцію активації тангенса. Функцією витрат є середня квадратична помилка. У процесі тренування зберігається модель з найкращим значенням функції витрат. На наступному графіку показано динаміку змін функції витрат.



В результаті тренування моделі значення функції витрат знижується до порядку 10^{-4}. На графіку похибок видно, що нев'язка не перевищує 0.175.



Для перевірки якості нейронної мережі було проведено експеримент при розмірності $n = 4$ та з початковою умовою $x_0 = (1, -1, 1, -1)$. Класичний алгоритм розв'язку дає наступний результат: $t_1 = 0.1185222964$, $t_2 = 1.539741406$, $t_3 = 2.425990476$ [1]. Час перемикань згідно результату нейронної мережі: $t_1 = 1.5318072$, $t_2 = 2.2357028$, $t_3 = 0.1465114$.

Для розмірності $n = 4$ та набору тренувальних даних в 10^4 рядків модель тренується 40 хвилин да надає результат для довільної початкової умови на 0.0396279 секунди. За тих самих умов стандартний алгоритм дає результат за 0.039976 секунди. Проте для $n = 40$ натренована мережа дає результат за 2.563783 секунди, а класичний метод більш, ніж за 30 хвилин [1].

Таким чином, нейронні мережі можуть використовуватися для моделювання складних фізичних процесів, де інші методи можуть бути надто складними для застосування. У цьому контексті, використання нейронної мережі для задачі швидкодії може стати альтернативою традиційними методами розв'язку.

Література:

1. V. I. Korobov, G. M. Sklyar, S.Yu.Ignatovich Solving of the polynomial systems arising in the linear time-optimal control. Communications in Mathematical Analysis Conference 03 (2011), pp. 1–19 Proceedings of "Analysis, Mathematical Physics and Applications" held in Ixtapa, Mexico, March 1-5, 2010 ISSN 1938-9787
2. Документація бібліотеки keras [Електронний ресурс] - Режим доступу: https://keras.io/api/models/model/
3. Документація бібліотеки TensorFlow [Електронний ресурс] - Режим доступу: https://www.tensorflow.org/api_docs/python/tf/keras/Model

Математична модель системи для роупджампінгу з базовою мотузкою

Собур Микита Станіславович

Харківський національний університет імені В.Н.Каразіна

e-mail: nikitosss2102@gmail.com

(Науковий керівник: Пославський Сергій Олександрович)

Дослідження поведінки мотузкових систем при різних видах навантажень є важливою задачею у зв'язку з різними практичними застосуваннями: у страхувальних системах альпіністів і спелеологів, у різних екстремальних видах спорту, таких як скалолазання, бейс-джампінг, роуп-джампінг, тощо.

Сучасні мотузкові системи мають різноманітні характеристики. Насамперед, вони мають пружні властивості, що описуються поведінкою звичайної пружини і, відповідно, законом Гука при малих деформаціях, а також в'язкі властивості, що описуються поведінкою демпфера (або поршня у трубці з високов'язкою речовиною всередині) і законом в'язкого тертя Ньютона.

У роботі було розглянуто систему, що складається з двох мотузок: базової горизонтальної мотузки з закріпленими кінцями (далі просто база) і з'єднаної з нею посередині вертикальної мотузки (далі поводок), до вільного кінця якої прикріплений вантаж. Зазвичай, у реальних системах роуп-джампінгу точка кріплення поводка до бази є рухомою, тобто поводок приєднаний до ролика, який рухається вздовж бази. У нашій спрощеній моделі вважаємо, що точка кріплення, а разом з нею і всі точки поводка здійснюють лише вертикальні рухи. Таку систему ми моделюємо як ланцюжок точкових мас, послідовно з'єднаних пружинами. Положення кожної маси задається двома координатами, тобто розглядається плоский рух. Також ми вважаємо, що пружинки у базі мають більшу жорсткість (у 1.5 - 2 рази більше, ніж жорсткість пружин поводку) і що вони мають попередній натяг (тобто їх довжина у початковий момент часу більша за натуральну довжину цих пружин у стані

спокою). Остання умова є дуже важливою, оскільки база має плавно сповільнювати дуже швидкий вертикальний рух вантажу на поводку за рахунок сил натягу, направлені від точки кріплення вздовж бази у напрямку її крайніх точок. Система є цікавою для дослідження тим, що у базовій мотузці виникають хвилі, причому як поздовжні, так і поперечні. До того ж диференціальні рівняння руху частинок в ланцюжках, які імітують рух мотузок з розподіленою масою, є нелінійними. Комп'ютерне моделювання даної системи дозволяє оцінити максимальні навантаження, що виникають у точках кріплення, а також визначити закон руху вантажу і силу, яка діє на нього з боку мотузки.

Література:

1. Ulrich Leuthausser. The physics of a climbing rope under a heavy dynamic load. Journal of sports engineering and technology. 2017, Vol. 231(2) P. 125-135
2. Ulrich Leuthausser. Physics of a climbing ropes: impact forces, fall factors and rope drag, part 2, Version 3 (12.7.2016)
3. David Morin. Introduction to Classical Mechanics With Problems and Solutions, Cambridge University Press, 2008.

Автоматичне моделювання патернів будови органів

Чергикало Д.О.
Київський національний університет імені Тараса Шевченка
e-mail: cherhykalo@gmail.com
(Науковий керівник: Гуляницький Андрій Леонідович)

Одним з найбільш просунутих моделей для моделювання будови складних патернів розвитку ембріону, органів та тканин є мультикомпонентне нелінійне диференційне рівняння в частинних похідних. Найвідомішим з таких є рівняння реакції-дифузії, ось його загальній вигляд:

$$\frac{\partial u(t,x,y)}{\partial t} - (f(u(t,x,y)) + \Delta u(t,x,y)) = 0,\ (x,y) \in B$$

де $u(t,x,y) = (u_1(t,x,y), u_2(t,x,y), \dots, u_n(t,x,y))$.

Або якщо записувати для кожної компоненти, то маємо:

$$\frac{\partial u_i(t,x,y)}{\partial t} - (f_i((u_1(t,x,y), \dots, u_n(t,x,y)) + \Delta u_i(t,x,y)) = 0,\ i \in \overline{1,n}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = b = 0,\ (x,y) \in B$$

Були спроби узагальнити це диференційне рівняння використовувавши різні коефіцієнти для дифузії[7]:

$$\frac{\partial u_i(t,x,y)}{\partial t} - (f_i((u_1(t,x,y), \dots, u_n(t,x,y)) + d_i \Delta u_i(t,x,y)) = 0,\ i \in \overline{1,n}$$

в рамках яких будувалася теорія того як будувати на основі диференційних рівнянь моделі складних біологічних процесів.

Але ця теорія не давала відповіді як шукати рівняння в більш загальному вигляді:

$$\frac{\partial u(t,x,y)}{\partial t} - (f(u(t,x,y)) + D\Delta u(t,x,y)) = 0$$

де D - матриця n × n коефіцієнтів дифузії.

Як виявляється не достатньо шукати матрицю лише в такому вигляді, в якому вона додатньо визначена ($x^T Dx \geq 0$). А тому прості теорії можуть не дати всіх моделей що можуть бути в природі.

Але нещодавно в Google Research почали займатися Differentiable Self-organizing Systems[5] що дало можливість спробувати розширити область пошуку моделей для патернів[6].

Таким чином була отримана більш якісна модель того як формуються шкіра суслика(Ictidomys tridecemlineatus) та візерунки на ній. Її було порівняно з методами[8] та теоріями[7] які існують та було показано що для моделювання складних патернів вона більш ефективна.

Література:

[1] D.A. Klyushin, S.I. Lyashko, V.V. Pavlychko Model-Based Analysis of Biological Tissue Heating by Point Ultrasound Sources. // Journal of Automation and Information Sciences, – 2010, – vol. 42, Issue 2, – p. 44-50.

[2] Weinan, E. Principles of Multiscale Modeling; Cambridge University Press: Cambridge, UK, 2011; ISBN 9781107096547

[3] Alber, M., Buganza Tepole, A., Cannon, W. R., De, S., Dura-Bernal, S., Garikipati, K., ... & Kuhl, E. (2019). Integrating machine learning and multiscale modeling—perspectives, challenges, and opportunities in the biological, biomedical, and behavioral sciences. NPJ digital medicine, 2(1), 115.

[4] He, Z. The control mechanisms of heart rate dynamics in a new heart rate nonlinear time series model. Sci Rep 10, 4814 (2020). https://doi.org/10.1038/s41598-020-61562-6

[5] Mordvintsev, A., Randazzo, E., Niklasson, E., & Levin, M. (2020). Growing neural cellular automata. Distill, 5(2), e23.

[6] Mordvintsev, A., & Niklasson, E. (2021). μNCA: Texture Generation with Ultra-Compact Neural Cellular Automata. arXiv preprint arXiv:2111.13545.

[7] Murray, J. D. (2001). Mathematical biology II: Spatial models and biomedical applications (Vol. 3). New York: Springer.

[8] de Gomensoro Malheiros, M., Fensterseifer, H., & Walter, M. (2020). The leopard never changes its spots: realistic pigmentation pattern formation by coupling tissue growth with reaction-diffusion. ACM Transactions on Graphics (TOG), 39(4), 63-1.

Огляд можливостей застосування ChatGPT для розв'язування задач чисельних методів

Тарнавський П. В.

Львівський національний університет ім. Івана Франка

e-mail: petro.tarnavskyi@lnu.edu.ua

науковий керівник: доцент Ящук Ю. О.

У роботі представлено огляд застосування ChatGPT [1] для розв'язування як простих, так і складних задач чисельних методів. Оцінено приблизні можливості та напрями чисельних методів в яких доцільно використовувати ChatGPT. Про актуальність та важливість теми свідчить те, що багато учнів та студентів використовують його для розв’язування домашніх завдань. Викладачі задумуються над тим що потрібно робити з ChatGPT [2], оскільки студенти можуть використовувати його для порушення академічної доброчесності. Тому важливо розуміти можливості цього штучного інтелекту.

У роботі використали класичний підручник [3] і з нього виділили декілька стандартних методів, одні з них:

- Метод розрізу навпіл
- Ітерація з фіксованою точкою
- Інтерполяція Лагранжа та Ньютона
- Метод скінченних різниць

Для кожного завдання штучний інтелект мав описати розв’язок і написати код програми. Приклад завдання подано на рисунку 1.

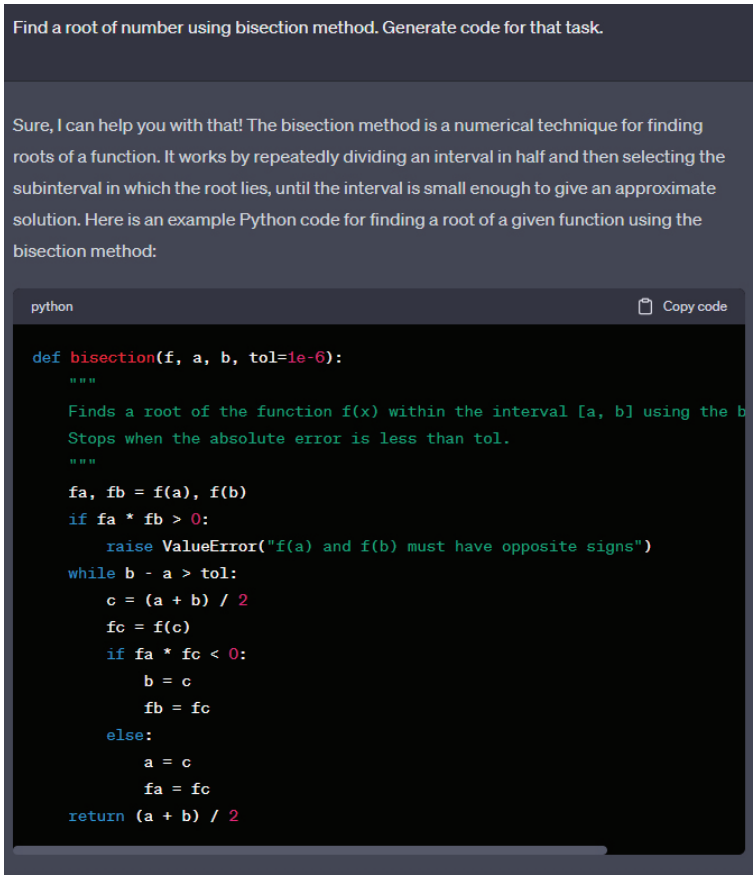


Рисунок 1. Взаємодія з ChatGPT

Для кожної задачі перевіряли правильність описаного розв’язку та запускали код на декількох прикладах. У задачах де ChatGPT використовував правильні формули, він же ж генерував правильний код, можливо з незначними помилками. Проте у випадку неправильних формул він генерував код який не виконується або давав неправильні результати, що зображено на рисунку 2.

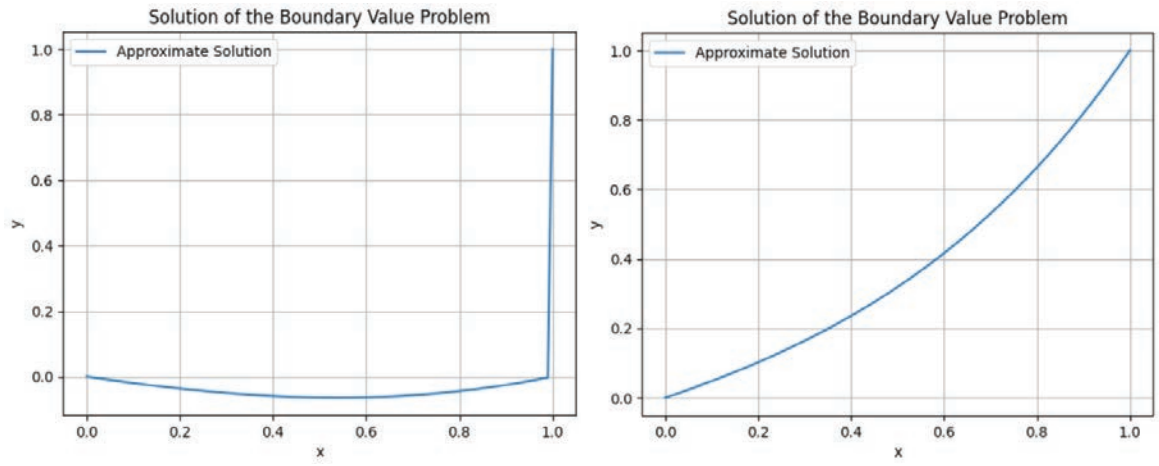


Рисунок 2. а) результат з кодом ChatGPT б) результат з правильними формулами

На основі досліджень дійшли висновку, що використовувати ChatGPT є доцільно для задач, що містять методи з простими математичними формулами. Це може бути наслідком того, що різні статті мають різний формат і відповідні формули відображаються по різному. Проте теоретичну частину він знає достатньо добре. Тому для задач чисельних методів варто перевіряти формули, звіряти їх з достовірним джерелом. Текст теж необхідно перевіряти бо неправильні формули можу призвести до неправильних тверджень.

Література:

1. ChatGPT – Режим доступу: https://chat.openai.com/ – Дата звернення: 29.04.2023

2. Five Ideas for How Pre Ideas for How Professors Can Deal with GPT … For Now / Travis R. Pickell and Brian R. Doak – Режим доступу: https://digitalcommons.georgefox.edu/cgi/viewcontent.cgi?article=1432&context=ccs – Дата звернення: 29.04.2023

3. Numerical Analysis / R. L. Burden and J. D. Faires – Режим доступу: https://faculty.ksu.edu.sa/sites/default/files/numerical_analysis_9th.pdf – Дата звернення: 30.04.2023

Застосування методу двобічних наближень у чисельному аналізі мікроелектромеханічних систем під дією зовнішнього тиску

Кончаковська О.С.

Харківський національний університет радіоелектроніки

e-mail: oksana.konchakovska@nure.ua

Розглянемо математичну модель електростатичної МЕМС під дією зовнішнього тиску [1, 2]:

$$-\Delta u = \frac{\lambda f(\mathbf{x})}{(1-u)^2} + P(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \tag{1}$$

$$u(\mathbf{x}) > 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \tag{2}$$

$$u(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega, \tag{3}$$

де Ω – плоска область з кусково-гладкою межею $\partial\Omega$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$, $f(\mathbf{x})$ – функція, що описує діелектричні властивості, $0 \le f(\mathbf{x}) \le 1$, u – величина прогину, $P(\mathbf{x})$ – зовнішній тиск, $P(\mathbf{x}) \ge 0$, λ – параметр, що характеризує сили Кулона.

Задача (1) – (3) еквівалентна інтегральному рівнянню Гаммерштейна

$$u(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x},\mathbf{s}) \left[\frac{\lambda f(\mathbf{s})}{(1-u(\mathbf{s}))^2} + P(\mathbf{s}) \right] d\mathbf{s}, \tag{4}$$

де $G(\mathbf{x},\mathbf{s})$ – функція Гріна задачі, $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$, $\mathbf{s} = (s_1, s_2)$.

Розглядатимемо рівняння (4) у банаховому просторі неперервних функцій $\mathrm{C}(\bar{\Omega})$ з нормою $\|u\| = \max\limits_{\mathbf{x}\in\bar{\Omega}} |u(\mathbf{x})|$. Визначимо у $\mathrm{C}(\bar{\Omega})$ конус невід'ємних функцій $\mathrm{K}_+ = \{u \in \mathrm{C}(\bar{\Omega}) : u(\mathbf{x}) \ge 0, \mathbf{x} \in \bar{\Omega}\}$ та введемо у просторі напівупорядкованість за правилом: $u \preceq v$, якщо $v - u \in \mathrm{K}_+$, тобто $u(\mathbf{x}) \le v(\mathbf{x})$ для всіх $\mathbf{x} \in \bar{\Omega}$.

З рівнянням (4) пов'яжемо нелінійний інтегральний оператор T, що діє у банаховому просторі неперервних функцій $C(\bar{\Omega})$ за правилом

$$T(u)(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x},\mathbf{s}) \left[\frac{\lambda f(\mathbf{s})}{(1-u(\mathbf{s}))^2} + P(\mathbf{s}) \right] d\mathbf{s} .$$

Лема (*властивості оператора* T). Оператор T є:

а) додатним оператором;

б) u_0 -додатним оператором з $u_0(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x},\mathbf{s}) d\mathbf{s}$;

в) є ізотонним оператором;

г) має інваріантний конусний відрізок $<0,\beta>$, причому стала β, $0<\beta<1$, є розв'язком нерівності

$$\lambda M_f \le (\beta - M_P)(1-\beta)^2 ,$$

де $M_f = \max\limits_{\mathbf{x}\in\bar{\Omega}} \int\limits_{\Omega} G(\mathbf{x},\mathbf{s}) f(\mathbf{s}) d\mathbf{s}$, $M_P = \max\limits_{\mathbf{x}\in\bar{\Omega}} \int\limits_{\Omega} G(\mathbf{x},\mathbf{s}) P(\mathbf{s}) d\mathbf{s}$;

д) є ліпшиц-неперервним оператором на конусному відрізку $<0,\beta>$:

$$\|T(v) - T(w)\| \le \frac{2\lambda M_f}{(1-\beta)^3} \|v - w\|$$ для всіх $v, w \in <0,\beta>$.

Побудуємо метод двобічних наближень знаходження додатного розв'язку інтегрального рівняння (4) (а отже, і крайової задачі (1) – (3)).

Сформуємо ітераційний процес за схемою

$$v^{(k+1)}(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x},\mathbf{s}) \left[\frac{\lambda f(\mathbf{s})}{(1-v^{(k)}(\mathbf{s}))^2} + P(\mathbf{s}) \right] d\mathbf{s} , \quad k = 0, 1, 2, \ldots ; \tag{5}$$

$$w^{(k+1)}(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x},\mathbf{s}) \left[\frac{\lambda f(\mathbf{s})}{(1-w^{(k)}(\mathbf{s}))^2} + P(\mathbf{s}) \right] d\mathbf{s} , \quad k = 0, 1, 2, \ldots ; \tag{6}$$

$$v^{(0)}(\mathbf{x}) = 0 , \quad w^{(0)}(\mathbf{x}) = \beta . \tag{7}$$

Враховуючи інваріантність конусного відрізка $<0,\beta>$ та ізотонність оператора T послідовності $\{v^{(k)}(\mathbf{x})\}$ і $\{w^{(k)}(\mathbf{x})\}$ неспадають та незростають за конусом K_+ відповідно. Існування границь цих послідовностей $v^*(\mathbf{x})$ і $w^*(\mathbf{x})$ випливає з нормальності конуса K_+ і повної неперервності оператора T. Отже, справджується ланцюг нерівностей

$$v^0 = v^{(0)} \leqslant v^{(1)} \leqslant \ldots \leqslant v^{(k)} \leqslant \ldots \leqslant v^* \leqslant w^* \leqslant \ldots \leqslant w^{(k)} \leqslant \ldots \leqslant w^{(1)} \leqslant w^{(0)} = w^0 .$$

Умови, за виконання яких $v^* = w^*$, наведені у наступній теоремі.

Теорема. Нехай $<0,\beta>$ – інваріантний конусний відрізок для оператора T і $\dfrac{2\lambda M_f}{(1-\beta)^3} < 1$. Тоді ітераційний процес (5) – (7) двобічно збігається у нормі простору $C(\bar{\Omega})$ до єдиного на $<0,\beta>$ неперервного додатного розв'язку u^* крайової задачі (1) – (3).

Для опису діелектричних властивостей та впливу зовнішнього тиску пропонується обрати функції

$$f(\mathbf{x}) = e^{\zeta(|\mathbf{x}|^2-1)} = e^{\zeta(x_1^2+x_2^2-1)}, \quad \zeta \geq 0,$$

$$P(\mathbf{x}) = 0{,}5(1-|\mathbf{x}|^2)(5-(1-|\mathbf{x}-\mathbf{a}|^2)), \quad \mathbf{a} = (0{,}75;\ 0{,}75).$$

Обчислювальний експеримент було проведено у одиничному колі для різних значень ζ. У таблиці 1 наведено значення норми наближеного розв'язку задачі (1) (3) в залежності від параметрів ζ та λ.

Таблиця 1. Норма наближеного розв'язку в залежності від параметрів

ζ	$\lambda_{\max}(\zeta)$	λ	$\|u\|$	ζ	$\lambda_{\max}(\zeta)$	λ	$\|u\|$
0	0,1629	0,04	0,3646	1	0,3361	0,08	0,3631
		0,16	0,4333			0,32	0,4245
0,5	0,2356	0,05	0,3616	1,5	0,4724	0,10	0,3607
		0,20	0,4167			0,40	0,4118

Література:
1. Beckham J. R., Pelesko J. A. An electrostatic-elastic membrane system with an external pressure. *Mathematical and computer modelling*. 2011. Vol. 54, №11–12. P. 2686–2708.
2. Guo Y., Zhang Y., Zhou F. Singular behavior of an electrostatic–elastic membrane system with an external pressure. *Nonlinear Analysis*. 2020. Vol. 190. P. 111611.

Розподілені алгоритми для мережевих агрегативних ігор

Коваленко О.Ю.
Київський національний університет імені Тараса Шевченка
e-mail: alexandra.kovalenko2000@gmail.com

Мережеві агрегативні ігри – модель теорії ігор, яка описує соціальну або мережеву структуру взаємодії між гравцями. У мережевій агрегативній грі кожен гравець пов’язаний з іншими гравцями через мережу або граф, і їх виграш залежить не лише від їх власних дій, але й від дій гравців у мережі. Такі ігри використовуються для моделювання різноманітних соціальних та економічних явищ, наприклад динаміки думок, проблеми координації та поширення інформації через соціальну мережу.

У роботі представлено розподілені алгоритми, що були отримані на основі проєкційних методів, зокрема, метод Корпелевич, метод екстраполяції з минулого та відбиваючий проєкційний метод.

У роботі розглянуто гру, де функція втрат $f_i(x_i, \bar{x})$ гравця і залежить від його власної дії $x_i \in X_i$ і сукупної дії інших гравців $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$

Метою і-го гравця в такій грі є мінімізація його локальних втрат, тобто:

$$f_i(x_i, \bar{x}) \to min,\ x_i \in X_i,$$

де точки x_i, $i \neq j$ є фіксованими. Розв'язком задачі є набір точок, на яких досягається рівновага Неша для всіх гравців.

У роботі описано мережеву агрегативну гру, де гравці розподілені по одноранговій мережі (P2P) і не мають прямого доступу до сукупної дії. Гру представлено у вигляді задачі моделювання того, як ідеї, інновації чи «думки» поширюються в соціальній мережі з кількістю «впертих» агентів n. Припускаючи, що кожен агент i має вектор $x^i \in \{0;\ 1\}^N$ з думок щодо N тем. Кожен компонент вектора представляє думку агента і щодо конкретної теми, де 0 означає негативну, а 1 – позитивну думку. Для знаходження рівноваги Неша (нерухомих точок) записано гру у вигляді варіаційної нерівності і застосовано до неї градієнтні методи, що дозволять знайти розв’язок поставленої задачі. Під час виконання роботи було розроблено бібліотеку, що описує відомі градієнтні методи та застосовує їх для чисельних експериментів з різною кількістю гравців. Динаміку зміни думки можна описати як задачу оптимізації:

$$g\left(x^{N^i}\right) = \arg\min_{x^i \in \mathbb{R}^n} \sum_{i \neq j}^{N} \left(P_{i,j}\left\|x^i - x^j\right\|^2\right) + \theta_i \left\|x^i - x^i_{(0)}\right\|^2,$$

де $P_{i,j}$ означає релевантність думки агента j до рішення агента i, а θ_i позначає впертість агента і.

Для практичного прикладу розглянуто задачу з 5 агентами та 10 темами. Отримані результати відображені в таблиці:

Алгоритм	Крок	Кількість ітерацій	Похибка
Відбиваючий проєкційний	0.0002	2309	0.00013
Метод Корпелевич	0.0001	3684	0.00004
Метод екстраполяції з минулого	0.0001	2360	0.00014

Результати дослідження свідчать про розбіжність отриманих результатів, що визначає необхідність нових розробок для подальшого теоретичного аналізу.

Література:

1. Ro gpi g Zhu, Jiaqi Zhang and Keyou You, Networked Aggregative Games with Li ear Convergence, https://doi.org/10.48550/arXiv.2105.05465

2. Fra cesca Parise, Sergio Gra atico, Basilio Ge tile a d Joh Lygeros, Network Aggregative Ga es a d Distributed Mea Field Co trol via Co se sus Theory, https://doi.org/10.48550/arXiv.1506.07719

Інформаційні технології

Моделі машинного навчання для прогнозування ціни криптовалют

Салата К.В.
Національний університет «Києво-Могилянська академія»
E-mail: kirill.salata@ukma.edu.ua

У доповіді досліджено використання моделей машинного навчання для прогнозування ціни криптовалют. Метою проведення такого дослідження є визначення оптимальної моделі для використання у автоматизованих торгівельних стратегіях. Для прогнозування ціни на криптовалюти використовуються регресійні моделі машинного навчання такі як ARIMA, SARIMA[1], SGDRegressor. Прогнозування часових рядів можна розділити на прогнозування одного параметру та прогнозування багатьох параметрів[2]. У подальших розділах будуть розглядатись моделі які прогнозують один параметр.

Важливим етапом створення моделі машинного навчання є підготовка даних для навчання. На цьому етапі необхідно зібрати дані та обробити їх. Для цього дослідження було використано дані від сервісу YahooFinance, які було отримано за допомогою відкритого API, вони містять інформацію про ціну криптовалют Bitcoin, Ethereum та Dogecoin за період з березня 2022 року по лютий 2023. Дані представлено в свічковому форматі, вони були нормалізовано та відібрано головні параметри:

- Дата
- Ціна відкриття свічки
- Найвища ціна за період
- Найменша ціна за період

- Ціна закриття свічки

Модель ARIMA (Autoregressive Moving Average) є покращенням моделі ARMA, яка складається з авторегресійної частини та рухомого середнього, яка використовується для прогнозування стаціонарних часових рядів. ARIMA має інтегровану компоненту диференціювання, яка допомагає використовувати модель для нестаціонарних рядів завдяки вирівнюванню тренду часового ряду, що дозволяє використовувати модель для прогнозування ціни криптовалют. Модель SARIMA додатково містить сезонний компонент. Для дослідження було використано моделі з бібліотеки statsmodel на мові Python.

Модель SGDRegressor заснована на алгоритмі стохастичного градієнтного спуску, в статтях [1,4] для дослідження використовували RandomForestRegressor. Під час дослідження використання прогностичної моделі для криптовалют модель на випадковому лісі не дала бажаних результатів, тому для покращення було вирішено використати саме модель стохастичного градієнтного спуску. Було використано модель з бібліотеки sklearn та емпіричним шляхом налаштовано необхідні гіперпараметри.

Для порівняння моделей було використано середньоквадратичну помилку. Результати можна побачити в таблиці 1:

	Bitcoin	Ethereum	Dogecoin
ARIMA	2598.420	121.663	0.016
ARIMA_RSI	3193.223	126.151	0.015
ARIMA_SMA	4499.207	146.872	0.014
SARIMA	1604.508	109.013	0.035
SARIMA_RSI	4051.923	107.794	0.014
SARIMA_SMA	2091.092	273.760	0.049
SGD	327.933	26.219	0.011
SGD_RSI	389.641	28.785	0.011
SGD_SMA	632.847	44.117	0.011

Аналізуючи результати можна прийти до висновку, що модель SGD працює краще за інші моделі та рекомендується до подальших досліджень. Також в результаті дослідження було отримано залежність роботи моделей від даних. З метою покращення роботи моделей було проаналізовано декілька варіантів набору даних з індикатором RSI, з також з індикатором SMA та RSI. Для моделі ARIMA індикатори погіршують результати для криптовалют Bitcoin та Ethereum, для моделі SARIMA виявлено, що індикатор RSI для криптовалюти Bitcoin погіршує результат але з іншими валютами навпаки покращує. Варто також зазначити що для криптовалюти Bitcoin для моделей ARIMA та SARIMA проводилась нормалізація даних для тестування без індикаторів оскільки це значно покращувало результати, у зв'язку з великим розкидом ціни криптовалюти, для інших експериментів нормалізація не проводилась. Модель SGD дала найкращий результат без використання індикаторів, причиною може бути краще визначення прихованих залежностей моделлю ніж у інших досліджених моделей.

Література:

1. On Forecasting Cryptocurrency Prices: A Comparison of Machine Learning, Deep Learning, and Ensembles - Kate Murray, Andrea Rossi, Diego Carraro, Andrea Visentin
2. 10 Time Series Forecasting Methods We Should Know - Prosenjit Chakraborty
3. Wirawan, I Made & Widiyaningtyas, Triyanna & Hasan, Muchammad. (2019). Short Term Prediction on Bitcoin Price Using ARIMA Method. 260-265. 10.1109/ISEMANTIC.2019.8884257.
4. Architecture of Automated Crypto-Finance Agent - Ali Raheman, Ben Goertzel, Anton Kolonin, Gergely Hegyközi, Ikram Ansari

Майбутнє електронного навчання

Нагнибіда Андрій Андрійович

Національний університет «Києво-Могилянська академія»

email: grandadmiral777@gmail.com

Стаття "Майбутнє електронного навчання" присвячена дослідженню перспектив розвитку електронної освіти в майбутньому. Через перевантаження кількості інформації в Інтернеті стає дедалі важче індексувати та повторно використовувати існуючий контент. Машинне навчання може допомогти у розвитку електронного навчання шляхом вдосконалення класифікації елементів навчальних матеріалів, оскільки студенти все частіше очікують, що контент буде пропонуватися в різних форматах і на різноманітних платформах. У сфері електронного навчання процес машинного навчання відбувається автономно, починаючи від вилучення та оцінки наборів даних з Інтернету і закінчуючи прогнозуванням того, що потрібно студентам на основі їх минулої успішності.

Машинне навчання — це технологія, яка дозволяє комп’ютерам автоматично навчатися на основі попередніх даних. Машинне навчання використовує різні алгоритми для побудови математичних моделей і прогнозування з використанням історичних даних або інформації. Наразі це навчання використовується для виконання різноманітних завдань, таких як розпізнавання зображень, розпізнавання мовлення, фільтрація електронної пошти, автоматичне тегування Facebook, система рекомендацій та багато іншого.

Машинне навчання сприяє кращому розподілу ресурсів онлайн. Щоб онлайн-студенти отримували саме ті онлайн-ресурси, які їм потрібні для досягнення цілей навчання. Крім того, це дозволить вчителям витрачати більше часу на розробку контенту електронного навчання. Машинне навчання може автоматизувати планування курсової роботи для студентів або показ

відповідних онлайн-ресурсів на основі результатів оцінювання електронного навчання. Найближчим часом стане можливим автоматичне створення унікальних карт курсу для кожного студента, який записується на відповідний курс електронного навчання.

За допомогою машинного навчання студенти отримають більш індивідуальний досвід замість загального курсу, який може зосереджуватися на нерелевантних для них темах. Таким чином, учні отримують мотивацію до взаємодії з контентом електронного навчання та реалізації свого потенціалу. У майбутньому приватний віртуальний репетитор може запропонувати допомогу з курсовими роботами, необхідними для студентів. Система машинного навчання пропонує повний огляд великих масивів даних і використовує їх для прогнозування результату. Наприклад, результати онлайн-оцінювання або результати опитування - це може підняти взаємодію між викладачами та учнями на новий рівень. Наприклад, підбирати викладачів для тих, хто навчається в Інтернеті, в залежності від викладацьких навичок чи минулого досвіду.

Окрім користі для студентів, електронне навчання приносить велику користь викладачам та їх можливостям навчати своїх студентів. Завдяки великій кількості студентів і онлайн-збору даних викладачі тепер можуть мати широкий огляд участі студентів і поступового прогресу. Таке колективне представлення індивідуального розвитку всього класу є надзвичайно цінним для вчителя. Під час побудови різноманітних відповідей на певне домашнє завдання, якщо отримані дані показують, що більшість класу відповіла на нього неправильно, учитель може швидко визначити, чи існує поширене неправильне уявлення щодо цієї проблеми, і тоді зможе негайно надати пораду своїм студентам про те, як уникнути цієї помилки в майбутньому. Обсяг детального бачення та управління своїм класом, до якого вчителі тепер мають доступ, ніколи раніше не був таким необхідним та зручним. За допомогою інструментів електронного навчання учні можуть переглядати та завершувати матеріал стільки разів, скільки потрібно, чого не можуть робити вчителі, оскільки вони втомлюються,

коли змушені повторювати один і той самий матеріал та оцінювати незліченну кількість завдань. Електронне навчання усуває проблеми, які можуть заважати вчителям звертати індивідуальну увагу для своїх учнів, і значно допомагає їм у забезпеченні кращого та інклюзивного навчання.

Щоб покращити існуючі програми електронного навчання, середовища машинного навчання повинні надавати більш персональний функціонал, який допомагає студентам використовувати, керувати та взаємодіяти з системою навчання. Це все, як правило, наголошує на розвитку технологій, але мало використовувати можливості технологій лише при збільшенні ефективності навчання чи педагогіки - машинне навчання може застосовувати принципи дизайну, орієнтованого на користувача, для створення нового контенту, для розпізнавання цільових студентів і проектування змісту завдань відповідно до їх потреб, а персоналізація навчання експоненціально буде покращуватись.

Література:

1. Colace Francesco, Santo, Massimo De and Greco, Luca. (2014). E-Learning and Personalized Learning Path: A Proposal Based on the Adaptive Educational Hypermedia System. International Journal of Emerging Technologies in Learning (iJET), 9 (2): 9-16.
2. Sayan Guha (2018). AI Chatbots In eLearning: Trends Embracing across Digital Landscape.
3. Shen Xiaoxuan, et. al. (2016). Automatic Recommendation Technology for Learning Resources with Convolutional Neural Network. 30-34.
4. J.E. Allen and J.Seaman , The quality and extent of online education in the United States, MA: Sloan Consortium, 2004.
5. Koller, Daphne. "Daphne Koller: What we're learning from online education." TED: Ideas worth spreading. N.p., Aug. 2012. Web. 03 Nov. 2012
6. Negroponte, Nicholas. "Nicholas Negroponte on One Laptop per Child." TED: Ideas worth Spreading. TED, Apr. 2006. Web. 03 Nov. 2012

Fine-Tuning large NLP models with Federated Learning

Miedviediev Dmytro

First year graduate student

National University "Kyiv-Mohyla Academy"

e-mail: dmytro.miedviediev@ukma.edu.ua

In this work, we are going to explore the prospects of fine-tuning large Natural Language Processing (NLP) models with Federated Learning (FL), which is the focus of growing attention in recent years [1]. FL is a distributed machine learning approach that allows training models on data distributed across multiple devices without centralizing the data. In FL, each device trains a local model on its data and sends only the model updates to a central server, where they are aggregated to create a centralized model [1]. FL has emerged as a profitable solution due to 5G technology expansion and regulations about data privacy [1].

By developing large-scale pre-trained on billions of text data NLP models such as BERT, GPT, and RoBERTa we got the opportunity to effectively solve a variety of NLP tasks, including question answering, summarization, text classification, and many others. The release of ChatGPT is only one example of use for such models. One of the problems that engineers have to cope with is the size of the models. For example, GPT-3 contain 175 billion parameters (800GB) and all indicated that the size of the new models will increase in the future. This is a substantially larger size than most default computers or edge devices can work with. Moreover, in most cases, it is not enough to use a pre-trained model, there is a need to tune it with our data to effectively solve our tasks. In this case, we need to work with data that often is regulated by many compliances such as GDPR or HIPAA and can't be freely transferred between clients.

The large model size is a significant issue not only for serving and storing but also for model training. The reason is that FL uses a network to send updated weights to the central model. One of the proposed solutions to reduce the model size is to use

quantization. For Transformer architecture (25M parameters) trained using FL, we can achieve a similar perplexity score and reduce total communication cost by 62.5% with quantization. Additionally, by using a pre-trained model and transfer learning for the training process we can improve the results and reduce communication costs by 3x [2]. As for model size, using 8-bit compression allows for reducing model size up to 5 times. For example, GPT-J-6B takes 25GB, while when quantized version only 5GB.

Full fine-tuning of large NLP models is not always a good idea, especially for the FL approach. Recent studies have shown that parameter-efficient tuning methods such as LoRA, BitFit, Adapter, and Prefix-tuning can help to achieve satisfactory performance and to reduce communication costs. For example, using Adapter can decrease communication costs by 97.4% with only 7% performance degradation [3]. It also means that models need rather less data for the fine-tuning process.

These approaches offer new opportunities for more effective use of large NLP models while getting all the benefits of using FL. Quatinization and parameter-efficient tuning methods allow to reduce both model size and communication costs. The outcome of combining these methods is a good topic for future research.

Literature:

1. Kairouz, Peter, McMahan, H. B., Avent, Brendan, Bellet, Aurélien, Bennis, Mehdi, Bhagoji, Arjun N., Bonawitz, Kallista et al. "Advances and Open Problems in Federated Learning." *arXiv*, (2019), https://doi.org/10.48550/arXiv.1912.04977.

2. Ro, Jae H., Breiner, Theresa, McConnaughey, Lara, Chen, Mingqing, Suresh, Ananda T., Kumar, Shankar, and Rajiv Mathews. "Scaling Language Model Size in Cross-Device Federated Learning." *arXiv*, (2022), https://doi.org/10.48550/arXiv.2204.09715.

3. Zhang, Zhuo, Yang, Yuanhang, Dai, Yong, Qu, Lizhen, and Zenglin Xu. "When Federated Learning Meets Pre-trained Language Models' Parameter-Efficient Tuning Methods." *arXiv*, (2022), https://doi.org/10.48550/arXiv.2212.10025.

Періодичні розв'язки неявних лінійних різницевих рівнянь над кільцем $Z[\sqrt{d}]$

Сергушенков В.А.

Харківський ліцей № 89 Харківської міської ради Харківської області

e-mail: vladsergush@gmail.com

(Наукові керівники: Півень О.Л., ХНУ ім. В. Н. Каразіна,

Бондаренко І.С., учитель Харківського ліцею № 89)

Останніми роками в Харкові активно проводяться дослідження неявних лінійних різницевих рівнянь з коефіцієнтами з різних числових кілець [1,2]. Як і в теорії класичних різницевих рівнянь над полем дійсних чисел, виникає питання про існування та єдиність періодичних розв'язків таких рівнянь. Метою даної роботи було дослідження періодичних розв'язків неявного різницевого рівняння над кільцем $Z[\sqrt{d}]=\{m + n\sqrt{d} : m, n \in Z\}$, де число $d \in N$ не є квадратом цілого числа.

Лінійне різницеве рівняння над числовим кільцем A

$$bx_{n+1} = ax_n + f_n, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots. \tag{1}$$

де $a, b, f_n \in A$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ називають неявним, якщо b є необоротним елементом кільця A. Припускається, що f_n $(n = 0, 1, 2, \ldots.)$ M-періодична послідовність елементів цього кільця, тобто вона задовольняє умову $f_{n+M} = f_n$ $(n = 0, 1, 2, \ldots.)$.

При дослідженні M-періодичних розв'язків неявного лінійного різницевого рівняння над кільцем $Z[\sqrt{d}]$ важливу роль відіграє умова

оборотності елементу $b^M - a^M$ [2]. На основі чисельного експерименту нами висунуто гіпотезу, що при $M \geq 3$ елемент $b^M - a^M$ є оборотним елементом кільця $Z\left[\sqrt{d}\right]$ тоді й тільки тоді, коли $b = 0,\ a -$ оборотний або $b -$ оборотний, $a = 0$. Її справедливість доведено при додаткових припущеннях, коли M – парне, a – оборотний елемент. Будемо використовувати наступні зображення елементів кільця $Z\left[\sqrt{d}\right]$:

$$b = b_1 + b_2\sqrt{d},\ \ a = a_1 + a_2\sqrt{d},\ f_n = g_n + h_n\sqrt{d}\,,\ \ a_1, a_2,\ b_1, b_2, h_n, g_n \in Z.$$

Теорема 1 ***(умови існування M-періодичного розв'язку неявного лінійного різницевого рівняння для заданої M-періодичної послідовності*** $f_n\ (n = 0, 1, 2, \ldots)$***.)***

1) Нехай $M = 2S$ *і* $f_n(n = 0, 1, 2, \ldots)$ *– M-періодична послідовність елементів кільця* $Z\left[\sqrt{d}\right]$. *Припустимо, що* $|a| \neq |b|$ *і при кожному* $n = 0, \ldots, M - 1$ *обидва числа*

$$p_n = g_n\left(\sum_{k=0}^{S} C_{2S}^{2k} b_2^{2k} d^k b_1^{2S-2k} - \sum_{k=0}^{S} C_{2S}^{2k} a_2^{2k} d^k a_1^{2S-2k}\right) -$$

$$- dh_n\left(\sum_{k=0}^{S-1} C_{2S}^{2k+1} b_2^{2k+1} d^K b_1^{2S-2k-1} - \sum_{k=0}^{S-1} C_{2S}^{2k+1} a_2^{2k+1} d^k a_1^{2S-2k-1}\right)$$

та

$$q_n = h_n\left(\sum_{k=0}^{S} C_{2S}^{2k} b_2^{2k} d^k b_1^{2S-2k} - \sum_{k=0}^{S} C_{2S}^{2k} a_2^{2k} d^k a_1^{2S-2k}\right) -$$

$$- g_n\left(\sum_{k=0}^{S-1} C_{2S}^{2k+1} b_2^{2k+1} d^K b_1^{2S-2k-1} - \sum_{k=0}^{S-1} C_{2S}^{2k+1} a_2^{2k+1} d^k a_1^{2S-2k-1}\right)$$

діляться на число

$$c = \left(\sum_{k=0}^{S} C_{2S}^{2k} b_2^{2k} d^k b_1^{2S-2k} - \sum_{k=0}^{S} C_{2S}^{2k} a_2^{2k} d^k a_1^{2S-2k}\right)^2 -$$

$$- d\left(\sum_{k=0}^{S-1} C_{2S}^{2k+1} b_2^{2k+1} d^K b_1^{2S-2k-1} - \sum_{k=0}^{S-1} C_{2S}^{2k+1} a_2^{2k+1} d^k a_1^{2S-2k-1}\right)^2$$

Тоді рівняння (1) над кільцем $Z\left[\sqrt{d}\right]$ *має єдиний M-періодичний розв'язок. Цей розв'язок має вигляд*

$$x_n = \frac{\sum_{j=0}^{M-1} b^j a^{M-1-j} f_{n+j}}{b^M - a^M}, \quad n = 0, 1, \ldots, M-1 \qquad (2)$$

$$x_{n+M} = x_n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

2) Нехай $M = 2S+1$ *і* $f_n (n = 0, 1, 2, \ldots)$ *– M-періодична послідовність елементів кільця* $Z\left[\sqrt{d}\right]$. *Припустимо, що* $a \neq b$ *і при кожному* $n = 0, \ldots, M-1$ *обидва числа*

$$p_n = g_n\left(\sum_{k=0}^{S} C_{2S+1}^{2k} b_2^{2k} d^k b_1^{2S+1-2k} - \sum_{k=0}^{S} C_{2S+1}^{2k} a_2^{2k} d^k a_1^{2S+1-2k}\right) -$$

$$- dh_n\left(\sum_{k=0}^{S} C_{2S+1}^{2k+1} b_2^{2k+1} d^K b_1^{2S-2k} - \sum_{k=0}^{S} C_{2S+1}^{2k+1} a_2^{2k+1} d^k a_1^{2S-2k}\right)$$

та

$$q_n = h_n\left(\sum_{k=0}^{S} C_{2S+1}^{2k} b_2^{2k} d^k b_1^{2S+1-2K} - \sum_{k=0}^{S} C_{2S+1}^{2k} a_2^{2k} d^k a_1^{2S+1-2k}\right) -$$

$$- g_n\left(\sum_{k=0}^{S} C_{2S+1}^{2k+1} b_2^{2k+1} d^k b_1^{2S+1-2k-1} - \sum_{k=0}^{S} C_{2S+1}^{2k+1} a_2^{2k+1} d^k a_1^{2S-2k}\right)$$

діляться на

$$c = \left(\sum_{k=0}^{S} C_{2S+1}^{2k} b_2^{2k} d^k b_1^{2S+1-2k} - \sum_{k=0}^{S} C_{2S+1}^{2k} a_2^{2k} d^k a_1^{2S+1-2k}\right)^2 -$$

$$- d\left(\sum_{k=0}^{S} C_{2S+1}^{2k+1} b_2^{2k+1} d^K b_1^{2S-2k} - \sum_{k=0}^{S} C_{2S+1}^{2k+1} a_2^{2k+1} d^k a_1^{2S-2k}\right)^2$$

Тоді рівняння (1) над кільцем $Z\left[\sqrt{d}\right]$ *має єдиний M-періодичний розв'язок. Цей розв'язок має вигляд (2).*

Література:

1. Martseniuk V., Gefter S., Piven' A. Uniqueness Criterion and Cramer's Rule for Implicit Higher Order Linear Difference Equations Over Z. Progress on Difference Equations and Discrete Dynamical Systems. ICDEA 2019. Springer Proceedings in Mathematics & Statistics, vol 341. Springer, Cham. https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-3-030-60107-2_16 2

2. S. Gefter, A. Goncharuk, A. Piven', Implicit Linear First Order Difference Equations Over Commutative Rings. // In: Elaydi, S., Kulenovic, M.R.S., Kalabusic, S. (eds) Advances in Discrete Dynamical Systems, Difference Equations and Applications. ICDEA 2021. Springer Proceedings in Mathematics \& Statistics, vol 416, Springer, Cham.
https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-3-031-25225-9_10

Про множення плоских та просторових векторів

Гуркіна О.М.

Харківський ліцей No 89 Харківської міської ради Харківської області

e-mail: lenagurkina2006@gmail.com

Науковий керівник:

Гефтер С.Л. Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна

Векторна алгебра є дуже важливим розділом математики. Скалярний та векторний добуток векторів застосовуються у механіці, електродинаміці та інших розділах фізики. Для плоских векторів є ще один дуже важливий добуток – їх можна перемножати як комплексні числа.

У роботі досліджується зв'язок між цими трьома видами добутків плоских векторів. Показано, що скалярний і векторний добуток плоских векторів, та їх добуток як комплексних чисел є незалежними величинами. Оскільки скалярний і векторний добуток мають дільники нуля, то у роботі вивчено новий варіант

добутку плоских векторів (цей добуток названо комбінованим). Він суттєво відрізняється від добутку комплексних чисел, оскільки не має одиниці, не є комутативним й асоціативним. Але одна його важлива властивість збігається із відповідною властивістю добутку комплексних чисел: комбінований добуток не має дільників нуля, тобто якщо комбінований добуток двох плоских векторів дорівнює нулю, то принаймні один з цих векторів є нульовим. Загальну природу цих властивостей комбінованого добутку пояснює теорема 3.1.

Теорема 3.1.

Нехай на множині плоских векторів задана асоціативна операція множення без дільників нуля. Тоді ця операція має одиницю і є комутативною.

Ми показали, що комбінований добуток не має дільників нуля, але не є асоціативним, не є комутативним та не має одиниці. Ці властивості комбінованого добутку є невипадковими, оскільки є правильним наступне загальне твердження.

Теорема 4.1.

Нехай у множині дійсних тривимірних векторів визначено множення, що є асоціативним, тобто

$$\left(\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2\right) \cdot \vec{a}_3 = \vec{a}_1 \cdot \left(\vec{a}_2 \cdot \vec{a}_3\right)$$

для всіх векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$.

Тоді знайдуться такі ненульові вектори $\vec{a}_1$ і $\vec{a}_2$, що $\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 = 0$.

Література:

1. О. Г. Ганюшкін, «Вступ до алгебри», Навчальний посібник для студентів механіко-математичного факультету. Видавничо-поліграфічний центр “Київський університет”, Київ, 2011.

2. В. В. Булдигін, І. В. Алєксєєва, В. О. Гайдей, О. О. Диховичний, Н. Р. Коновалова, Л. Б. Федорова, «Лінійна алгебра та аналітична геометрія». ТвіМС, Київ, 2011.

Наукове видання

СУЧАСНІ ПРОБЛЕМИ МАТЕМАТИКИ ТА ЇЇ ЗАСТОСУВАННЯ В ПРИРОДНИЧИХ НАУКАХ ТА ІНФОРМАЦІЙНИХ ТЕХНОЛОГІЯХ

Тези доповідей
XVII Міжнародної наукової конференції студентів та молодих вчених
(17-18 березня 2023 року, м. Харків, Україна)

Тези подано в авторській редакції

Комп`ютерне верстання Єльчанінова А.Д.
Макет обкладинки Єльчанінова А.Д., Полоніна Т.О.

Формат 60x84/ 16. Обл. вид. арк. 4,1. Ум. друк. арк. 3,28.
Наклад 100 пр. Зам. 454/25

Видавець і виготовлювач
Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна,
61022, м. Харків, майдан Свободи, 4. Свідоцтво суб`єкта видавничої справи
ДК №3367 від 13.01.09

Видавництво ХНУ імені В. Н. Каразіна