Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна

Факультет математики і інформатики

Кафедра фундаментальної математики

Кваліфікаційна робота

магістра

на тему «*Формальне функціональне числення у просторі кополіномів*»

Виконав/Виконала:
студент/студентка групи М162
2 курсу магістратури
спеціальність 111 Математика
освітньо-професійна програма Математика

Лисіков І.Я.

Науковий керівник: *Гефтер Сергій Леонідович доцент кафедри фундаментальної математики*
Рецензент: *Півень Олексій Леонідович, доцент кафедри прикладної математики*

Харків - 2023 рік

Анотація

Іван ЛИСІКОВ, Формальне функціональне числення у просторі кополіномів

У дипломній роботі будується формальне функціональне числення для кополіномів від однієї змінної над довільним полем нульової характеристики та наведені змістовні приклади обчислення сум формальних степеневих рядів від δ-функції.

Abstract

IVAN LYSIKOV, Formal functional calculus in the space of copolynomials

The thesis builds a formal functional calculus for copolynomials of one variable over an arbitrary field of zero characteristic and provides meaningful examples of calculating the sums of formal power series from the δ-function.

ЗМІСТ

1. Вступ

Функціональні числення для самоспряжених, нормальних і для інших класів лінійних операторів у гільбертових та банахових просторах відіграє дуже важливу роль у функціональному аналізі та в його багаточисельних застосуваннях (див., наприклад, [1, 2]). Чисто алгебраїчний варіант функціонального числення виникає для нільпотентного лінійного оператора у векторному просторі над довільним полем F. В цьому випадку ми можемо застосовувати до оператора будь-який формальний степеневий ряд з коефіцієнтами з поля F. У роботі С.Л. Гефтера і О.Л. Півня [3] ця конструкція була узагальнена на випадок слабо локально нільпотентного лінійного оператора у просторі Фреше та в інших топологічних векторних просторах.

У представленій дипломній роботі методи, що були розвинуті у статті [3], застосовуються до зовсім іншого, суто алгебраїчного об'єкта – лінійного функціоналу у векторному просторі F[x] поліномів над довільним полем F нульової характеристики. Такі лінійні функціонали в роботах С.Л. Гефтера і О.Л. Півня отримали назву кополіномів, або формальних узагальнених функцій (див., наприклад, [4], [5]). Введене С.Л. Гефтером і О.Л. Півнем [5] множення у просторі кополіномів $F[x]'$ дає можливість побудувати алгебраїчний варіант функціонального числення для кополіному. Основний результат дипломної роботи – теорема про формальне функціональне числення для кополіномів (теорема 4.4). В роботі також наведені цікаві приклади обчислення сум формальних степеневих рядів від δ-функції (див. приклади 3.2 і 3.3). Зокрема, отримано представлення фундаментального розв'язку лінійного диференціального рівняння $aT' + T = S$ в просторі кополіномів $F[x]'$ у вигляді ряда за степенями δ-функції (приклад 3.3).

2. Попередні відомості

Нехай F є довільним полем нульової характеристики, і F[x] – простір поліномів з коефіцієнтами з F.

Означення 2.1

Кополіномом над полем F будемо називати лінійний функціонал у векторному просторі F[x].

Всі кополіноми створюють новий векторний простір, а саме спряжений простір до простору F[x]. Його будемо позначати F[x]'. Якщо T ∈ F[x] і p ∈ F[x], то для значення лінійного функціоналу T на векторі p будемо використовувати позначення (T, p), або (T(x), p(x)).

Приклад ($\delta -$ функція). Розглянемо кополіном δ: F[x] → F, $(\delta,\ p) = p(0)$. Можна показати, що у випадку F = ℝ, на відміну від класичної теорії узагальнених функцій, кополіном δ є регулярним, тобто існує така функція f з простору Шварца $S(\mathbb{R})$, що його можна задати за допомогою інтегралу (див. [6, теорема 7.3.4]):

$(\delta, p) = p(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x)f(x)dx$ для всіх поліномів $p \in \mathbb{R}[x]$.

Природним чином вводиться операція множення кополінома на поліном.

Означення 2.2

Нехай T ∈ F[x]' і q ∈ F[x]. Покладемо:

(qT, p) = (T, qp), p ∈ F[x]

Очевидно, що qT ∈ F[x]'. Таким чином, векторний простір F[x]' є водночас і модулем над кільцем поліномів F[x].

Означення 2.3

Похідна T' кополінома $T \in F[x]'$ визначається, як і у класичній ситуації, формулою: $(T, p') = - (T, p'), p \in F[x]$.

Для похідної к-го порядку маємо:

$(T^{(к)},p) = (-1)^{(к)} (T, p^{(к)}), p \in F[x]$.

Тому $(T^{(к)},p) = 0$, якщо к > deg p. (2.1)

Для добутку кополінома на поліном є правильною звичайна формула Лейбніца.

Лема 2.4. Якщо T належить F[x]', а p належить F[x], то (pT)' = p'T + pT'.

Доведення.

Щоб довести це, скористаємося визначенням похідної кополінома та властивістю лінійності кополінома.

Ми маємо для довільного полінома $q \in F[x]$: $((pT)',q) = -(pT,q') = - (T, pq')=$

$- (T, (pq)' - p'q) = = - (T, (pq)') + (T, p'q)$. З іншого боку,

$(p'T + pT', q) = (T, p'q) + (T', pq) = (T, p'q) - (T, (pq)')$. Лема доведена.

Приклад 2.5.

Покажемо, що диференціальне рівняння $T' = \delta$ (x) не має розв'язків, тобто δ-функція не має первісної. Маємо $(T', 1) = - (T, 1') = 0$, але $(\delta, 1) = 1$.

Розглянемо тепер операцію множення кополіномів [5]. Для цього ми введемо перетворення Коші-Стільтьєса для кополінома.

Нехай $T \in F[x]'$. Покладемо:

$$C(T)(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(T,x^n)}{z^{n+1}}=\frac{(T,1)}{z}+\frac{(T,x)}{z^2}+\frac{(T,x^2)}{z^3}+\dots$$

Формальний ряд Лорана C(T)(z) будемо називати перетворенням Коші-Стільтьєса кополінома T. Перетворення Коші- Стільтьєса C(T)(z) повністю визначає кополіном T. Це дає можливість визначити добуток кополіномів $\mathrm{T}_1, \mathrm{T}_2 \in \mathrm{F}[\mathrm{x}]$, як кополіном, що відповідає формальному ряду Лорана $\mathrm{C}(\mathrm{T}_1)\mathrm{C}(\mathrm{T}_2)$, тобто за допомогою рівності $\mathrm{C}(\mathrm{T}_1\mathrm{T}_2)=\mathrm{C}(\mathrm{T}_1)\mathrm{C}(\mathrm{T}_2)$. Для цього добутка є правильною формула Лейбниця.

Теорема 2.6

Нехай $\mathrm{T}_1, \mathrm{T}_2 \in F[x]$. Тоді $(\mathrm{T}_1\mathrm{T}_2)'=\mathrm{T}'_1\mathrm{T}_2+\mathrm{T}_1\mathrm{T}'_2$.

Для доведення буде необхідна наступна лема.

Лема 2.7.

Якщо $\mathrm{T} \in F[x]'$, тоді $\mathrm{C}(\mathrm{T}')(z)=\mathrm{C}(\mathrm{T})'(z)$.

Доведення.

$$\mathrm{C}(\mathrm{T}')(z)=\frac{(T',1)}{z}+\frac{(T',x)}{z^2}+\frac{(T',x^2)}{z^3}+\cdots=\frac{-(T,1)}{z^2}-\frac{(T,2x)}{z^3}-\cdots=$$

$$=\left(\frac{(T,1)}{z}+\frac{(T,x)}{z^2}+\frac{(T,x^2)}{z^3}+\dots\right)'=\mathrm{C}(\mathrm{T})'(z).$$

Доведення теореми.

Покажемо, що $\mathrm{C}\big((T_1,T_2)'\big)=C({T_1}'T_2+T_1{T_2}')$. Маємо:

$$C\big((T_1T_2)'\big)=C\big((T_1T_2)\big)'=\big(C(T_1)C(T_2)\big)'=C(T_1)'C(T_2)+C(T_1)C(T_2)'=$$
$$=C({T_1}')C(T_2)+C(T_1)C({T_2}')=C({T_1}'T_2)+C(T_1{T_2}')=C({T_1}'T_2+T_1{T_2}').$$

Теорему доведено.

Приклад 2.8.

Нехай $\mathrm{T}=\delta$. Тоді $\mathrm{C}(\delta)(z)=\frac{1}{z}$. Маємо $\left(\frac{1}{z}\right)^2=-\left(\frac{1}{z}\right)'$, тобто $\delta^2=-\delta'$.

Наслідок 2.9.

Нехай $P \in F[y]$, $P(0) = 0$, $T \in F[x]'$, $P(y) = a_1 y + a_2 y^2 + a_3 y^3 + \ldots + a_m y^m$ і $P(T) = a_1 T + a_2 T^2 + \ldots + a_m T^m$. Тоді

$\big(P(T)\big)' = P'(T)T' = a_1 T' + 2a_2 TT' + \ldots + m a_m T^{m-1} T'$.

Доведення:

Оскільки операція диференціювання є лінійною, то достатньо довести твердження у випадку $P(y) = y^m$, тобто довести рівність $(T^m)' = mT^{m-1}T'$. З теореми 2.6 для m множників маємо:

$(T^m)' = (TT\ldots T)' = T'(T\ldots T) + TT'(T\ldots T) + \ldots + (T\ldots T)T' = mT^{m-1}T'$.

Введемо тепер поняття збіжності у просторі кополіномів $F[x]'$.

Означення 2.10

Нехай $\{T_n\}$ - послідовність кополіномів і $T \in F[x]'$.

$T_n \to T \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \forall p \in F[x] \exists n_0 \in N \forall n \geqslant n_0 \colon (T_n, p) = (T, p)$.

Збіжність ряду із кополіномів, як завжди, визначається як збіжність послідовності його часткових сум.

Теорема 2.11 [4, теорема 2.1].

Нехай $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ - послідовність з F та $T \in F[x]'$. Тоді ряд

$\sum_{n=0}^{\infty} b_n T^{(n)}$збігається у просторі$F[x]'$ та $\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n T^{(n)}\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} b_n T^{(n+1)}$.

Наслідок 2.12 [4]. Для будь-якого кополінома $T \in F[x]'$:

$$T = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (T, x^n) \frac{\delta^{(n)}}{n!}. \qquad (2.1)$$

Доведення

За теоремою 2.1 права частина рівності (2.1) збігається у $K[x]'$ та

$\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\,(T,x^n)\,\frac{\delta^{(n)}}{n!},x^k\right)=(-1)^k(T,x^k)\left(\frac{\delta^{(k)}}{k!},x^k\right)=(T,x^k),\ \ k=0,1,2,\ldots$, що доводить (2.1).

Наслідок 2.13 [5]. Для будь-якого кополінома $T\in F[x]'$:

$$T=\sum_{n=0}^{\infty}(T,x^n)\,\delta^{n+1}.$$

Доведення:

Маємо:
$C(\delta^{n+1})(z)=(C(\delta)(z)^{n+1})=\frac{1}{z^{n+1}}=\frac{(-1)^n}{n!}\left(\frac{1}{z}\right)^{(n)}=\frac{(-1)^n}{n!}C(\delta)^{(n)}(z)=$
$\frac{(-1)^n}{n!}C\left(\delta^{(n)}\right)(z)\quad=C\left(\frac{(-1)^n}{n!}\delta^{(n)}\right)(z)$. Тому
$\delta^{n+1}=\frac{(-1)^n}{n!}\delta^{(n)},n=0,1,2,3,\ldots.$
Тепер твердження випливає з наслідку 2.12.

3. Формальний степеневий ряд від кополінома

Нехай $T \in F[x]'$ і $P \in F[y], P(0) = 0, P(y) = a_1 y + a_2 y^2 + a_3 y^3 + \ldots + a_m y^m$. Тоді $P(T) = a_1 T + a_2 T^2 + \ldots + a_m T^m$. Цю конструкцію можна узагальнити.

Нехай тепер $g(y)$ - формальний степеневий ряд з коефіцієнтами з поля F, $g(0) = 0$, $g(y) = g_1 y + g_2 y^2 + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} g_n y^n$.

Теорема 3.1.

Нехай $T \in F[x]$. Тоді ряд $\sum_{n=1}^{\infty} g_n T^n$ збігається у просторі $F[x]'$.

Доведення

Покажемо, що $\forall p \in F[x] \exists n_p \in N \forall n > n_p : (T^n, p) = 0$. Правильність цієї умови буде випливати з наступної леми.

Лема.

Нехай $T_1, T_2, \ldots, T_n, T_{n+1}, T_{n+2} \in F[x]'$.

Тоді $(T_1 T_2 \ldots T_n T_{n+1} T_{n+2}, x^n) = 0$.

Доведення леми

$C(T_1 T_2 \ldots T_n T_{n+1} T_{n+2})(z) = C(T_1)(z) \quad C(T_2)(z) \quad \ldots . C(T_{n+2})(z)$. Ми отримали формальний ряд Лорана, що починається з доданку $\frac{a_{n+2}}{z^{n+2}}$. Тому $\left(T_1 T_2 \ldots T_n T_{n+1} T_{n+2}, x^j\right) = 0$ для всіх $j \leqslant n$.

Доведення теореми

Нехай $p \in F[x]$ і $degp = k$. Беремо $n_p = k + 1$. Якщо тепер $n > n_p$, тоді $n \geqslant k + 2$. Тому $(T^n, x^k) = \left(T^{k+2} T^{n-(k+2)}, x^k\right) = \left(T^{k+1}\left(T T^{n-(k+2)}\right), x^k\right) = 0$, згідно з лемою.

Приклад 3.2.

Нехай $F = \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}$ і $a > 0$. Розглянемо формальний степеневий ряд

$$g(y) = \sum_{n=1}^{\infty} a^{n-1}\,(n-1)!\,y^n = y + ay^2 + 2!\,a^2y^3 + 3!\,a^3y^4 + \dots$$

Знайдемо $g(\delta)$, тобто суму ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a^{n-1}\,(n-1)!\,\delta^n$ у просторі кополіномів $\mathbb{R}[x]'$. Оскільки $\delta^{n+1} = (-1)^n \frac{\delta^{(n)}}{n!}$, то $\delta^n = (-1)^{n-1} \frac{\delta^{(n-1)}}{(n-1)!}, n \geqslant 1$. Тому $g(\delta) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} a^{n-1}\delta^{(n-1)} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a^n \delta^{(n)}$.

Покажемо, що

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a^n \delta^{(n)}(x) = \frac{1}{a} e^{\frac{-x}{a}}\theta(x)\,, \tag{3.1}$$

де $\theta(x)$ - функція Хевісайда, тобто $\theta(x) = \begin{cases} 1, x \geqslant 0 \\ 0, x < 0 \end{cases}$. При цьому, рівність (3.1) ми розуміємо у тому сенсі, що $\forall p \in \mathbb{R}[x]$:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a^n \left(\delta^{(n)}(x), p(x)\right) = \frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-x}{a}}\theta(x)p(x)dx,$$

тобто $\sum_{n=0}^{\infty} a^n\, p^{(n)}(0) = \frac{1}{a}\int_0^{+\infty} e^{\frac{-x}{a}}\, p(x)dx$.

Останню рівність достатньо перевірити на мономах $x^k, k = 0,1,2,\dots$. Відмитимо, що $(x^k)^{(n)}(0) = \begin{cases} 0, n \neq k \\ k!, n = k \end{cases}$. Тому все зводиться до перевірки такої рівності:

$\int_0^{+\infty} e^{\frac{-x}{a}}\, x^k dx = a^{k+1}k!$.

Маємо:

$\int_0^{+\infty} e^{\frac{-x}{a}}\, x^k dx = \begin{bmatrix} t = \frac{x}{a} \\ dx = adt \end{bmatrix} = a^{k+1}\int_0^{+\infty} e^{-t}\, t^k dt$. За допомогою інтегрування частинами можна показати, що $\int_0^{+\infty} e^{-t}\, t^k dt = k!, k = 0,1,2,\dots$.

Таким чином, можна вважати, що $\sum_{n=1}^{\infty} a^{n-1}\,(n-1)!\,\delta^n(x) = \frac{1}{a}e^{\frac{-x}{a}}\theta(x)$.

Цікаво відмітити, що існує така функція $f(x)$ із простору Шварца $S(\mathbb{R})$, для якої $(\delta, p) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x) f(x) dx$ для всіх поліномів $p \in \mathbb{R}[x]$, тобто $\int_{-\infty}^{+\infty} p(x) f(x) dx = p(0)$ для всіх $p \in \mathbb{R}[x]$ (див. [6, теорема 7.3.4]), але для цієї функції немає простої явної конструкції.

Приклад 3.3.

Нехай знову F – довільне поле нульової характеристики і $a \in F$. Розглянемо у просторі кополіномів $F[x]'$ наступне диференціальне рівняння $aT' + T = \delta$. Покажемо, що сума ряду $T = \sum_{n=1}^{\infty} a^{n-1} (n-1)!\, \delta^n$ є єдиним розв'язком цього рівняння, тобто фундаментальним розв'язком розглянутого рівняння. З огляду на те, що $\delta' = -\delta^2$, ми отримуємо:

$T = \delta + a\delta^2 + 2!\, a^2\delta^3 + 3!\, a^3\delta^4 + \cdots,$

$T' = \delta' + 2!\, a\delta\delta' + 3!\, a^2\delta^2\delta' + 4!\, a^3\delta^3\delta' + \cdots = -\delta^2 - 2!\, a\delta^3 - 3!\, a^2\delta^4 - \cdots .$

Тому $aT' = -a\delta^2 - 2!\, a^2\delta^3 - 3!\, a^3\delta^4 - \cdots$ і $aT' + T = \delta$. Доведемо тепер єдиність розв'язку розглянутого рівняння. Для цього достатньо перевірити, що однорідне рівняння $aT' + T = 0$ має тільки нульовий розв'язок (на відміну від класичної ситуації!). Маємо: $(T, 1) = -(aT', 1) = 0$, $(T, x) = -(aT', x) = a) = 0$. Продовжуючи цю побудову, отримуємо, що $(T, x^n) = 0$ для всіх $n = 0,1,2,3, \ldots$, тобто $T = 0$.

4. Основні результати

Нехай $F_0\left[[x]\right] = \left\{g \in F\left[[x]\right]: g(0) = 0\right\}$. Таким чином, $g \in F_0\left[[x]\right] \Leftrightarrow$ $g(y) = g_1 y + g_2 y^2 + g_3 y^3 + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} g_n\, y^n$. На просторі $F_0\left[[y]\right]$ будемо розглядати стандартну топологію Крулля [2]. Збіжність послідовності формальних степеневих рядів до нуля в цієї топології означає, що послідовність мінімальних степенів цих степеневих рядів прямує до $+\infty$. Наприклад, послідовність мономів y^k прямує до нуля, при $k \to \infty$. Відмітимо також, що простір $F_0\left[[y]\right]$ є кільцем без одиниці відносно стандартного множення формальних степеневих рядів.

Нехай тепер $T \in F[x]'$.

Розглянемо відображення

$\gamma: F_0\left[[y]\right] \to F[x]'$,
$\gamma(g) = g(T) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n\, T^n$ (див. теорему 2.14).

Теорема 4.1.

Відображення γ є неперервним гомоморфізмом кілець, причому $\gamma(g_1) = T$, де $g_1(y) = y$.

Доведення

Відображення γ є коректно визначеним згідно з теоремою 3.1. Доведемо його неперервність. Достатньо перевірити неперервність відображення γ в нулі. Нехай $\{g_k(y)\} \subset F_0\left[[y]\right]$, і послідовність формальних степеневих рядів $g_k(y)$ прямує до нуля при $k \to \infty$ у топології Крулля. Нехай тепер $p \in F[x]$. Тоді $\exists n_p \in N \forall n > n_p: (T^n, p) = 0$ (див. доведення теореми 3.1). З цього випливає, що $(\gamma(g_k), p) = (g_k(T), p) = (\sum_{n=1}^{\infty} g_{kn}\, T^n, p) = \sum_{n=1}^{\infty} g_{kn}\,(T^n, p) = \sum_{n=1}^{n_p} g_{kn}\,(T^n, p)$. Оскільки послідовність формальних степеневих рядів $g_k(y)$ прямує до нуля при $k \to \infty$ у топології Крулля, то $\exists k_p \in N \forall k > k_p: g_{kn} = 0$ для всіх $n \le n_p$.Тепер ми отримуємо, що $(\gamma(g_k), p) = 0$ при всіх $k > k_p$. Це й означає, що послідовність кополіномів $\gamma(g_k)$ прямує до нуля у просторі кополіномів $F[x]'$. Доведемо тепер, що відображення γ є гомоморфізмом кілець, Лінійність γ є очевидною. Доведемо мультпликативність відображення γ . Нехай спочатку $f\ i\ g$ – поліноми з кільця $F_0\left[[y]\right]$, і $f(y) = f_1y + f_2y^2 + f_3y^3 + \ldots$,

$g(y) = g_1y + g_2y^2 + g_3y^3 + \ldots$. Звісно, ці дві суми є скінченними. Тоді $(fg)(y) = f(y)g(y) = \sum_{n=2}^{\infty}\left(\sum_{k=2}^{n} f_{k-1}\,|g_{n-(k-1)}\right)y^n$ і $\gamma(fg) = (fg)(T) =$

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left(\sum_{k=2}^{n} f_{k-1}\,|g_{n-(k-1)}\right)T^n = \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_nT^n\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty} g_nT^n\right) = \gamma(f)\,\gamma(g).$$

Нехай тепер $f\ i\ g$ – довільні формальні степеневі ряди з кільця $F_0\left[[y]\right]$, і

$$f(y) = \sum_{n=1}^{\infty} f_ny^n\,, g(y) = \sum_{n=1}^{\infty} g_ny^n\,.\text{Тоді } f(y) = \lim_{N\to\infty} f^N\,(y)\ \ i$$

$g(y) = \lim_{N\to\infty} g^N\,(y)$ у топології кільця $F_0\left[[y]\right]$, де $f^N(y) = \sum_{n=1}^{N} f_ny^n$ і

$$g^N(y) = \sum_{n=1}^{N} g_ny^n\,.\text{Тому } \gamma(fg) = \gamma\left(\lim_{N\to\infty} f^N\,g^N\right) = \lim_{N\to\infty} \gamma\,(f^Ng^N) =$$

$$= \lim_{N\to\infty} \gamma(f^N)\,\gamma(g^N) = \lim_{N\to\infty} \gamma(f^N) \lim_{N\to\infty} \gamma(g^N) = \gamma\left(\lim_{N\to\infty} f^N\right)\gamma\left(\lim_{N\to\infty} g^N\right) = \gamma(f)\gamma(g).$$

Теорему доведено.

Наслідок 4.2.

Нехай $f, g \in F_0\left[[y]\right]$ і $T \in F[x]'$. Тоді формальний степеневий ряд

$(g \circ f)(y) = g\big(f(y)\big)$ є коректно визначеним елементом кільця $F_0\left[[y]\right]$ і

$(g \circ f)(T) = g\big(f(T)\big)$.

Доведення проводиться за схемою доведення теореми 2.4 із статті [3], з урахуванням теореми 4.1.

Є правильним й певною мірою обернене твердження до теореми 4.1.

Теорема 4.3.

Нехай, $\gamma: F_0[[y]] \to F[x]'$ - неперервний гомоморфізм. Тоді $\gamma(g) = g(T)$ для всіх $g \in F_0[[y]]$, де $T = \gamma(g_1)$.

Доведення

Якщо g – поліном з кільця $F_0[[y]]$, і $g(y) = a_1 y + a_2 y^2 + a_3 y^3 + \ldots + a_m y^m$, тоді $g = a_1 g_1 + a_2 {g_1}^2 + a_3 {g_1}^3 + \cdots + a_m {g_1}^m$. З огляду на те, що $\gamma: F_0[[y]] \to F[x]'$ – гомоморфізм кілець, отримуємо:

$\gamma(g) = \gamma(a_1 g_1 + a_2 {g_1}^2 + a_3 {g_1}^3 + \cdots + a_m {g_1}^m) =$

$= a_1 \gamma(g_1) + a_2 \gamma(g_1)^2 + \cdots + a_m \gamma(g_1)^m =$

$= a_1 T + a_2 T^2 + \ldots + a_m T^m = g(T)$. Нехай тепер $g \in F_0[[x]]$ – формальний степеневий ряд, $g(y) = a_1 y + a_2 y^2 + a_3 y^3 + \ldots + a_m y^m + \ldots$. Тоді $g(y) = \lim\limits_{N \to \infty} g^N(y)$ у топології кільця $F_0[[y]]$, де $g^N(y) = \sum_{n=1}^{N} a_n y^n$.

Враховуючи неперервність відображення γ, маємо:

$\gamma(g) = \gamma\left(\lim\limits_{N \to \infty} g^N\right) = \lim\limits_{N \to \infty} \gamma(g^N) = \lim\limits_{N \to \infty} g^N(T) = \lim\limits_{N \to \infty} \sum_{n=1}^{N} a_n T^n =$

$\sum_{n=1}^{\infty} g_n T^n = g(T)$ (див. теорему 3.1).

Теорему доведено.

Об’єднавши тепер твердження теорем 4.1 і 4.3, отримуємо наступне формулювання теореми про формальне функціональне числення для кополіномів.

Теорема 4.4.

Нехай $T \in F[x]'$. Тоді існує єдиний неперервний гомоморфізм $\gamma: F_0[[y]] \to F[x]'$, для якого $\gamma(g) = g(T)$ для всіх $g \in F_0[x]$, де $F_0[x]$ – підкільце кільця поліномів $F[x]$, що складається з поліномів $g(y)$, для яких $g(0) = 0$.

Список літератури

1. Rudin W. Functional Analysis 2nd Edition, 1991. – McGraw-Hill Science/Engineering/Math. – 448 pp.
2. Березанський Ю. М., Ус Г.Ф., Шефтель З.Г., Функціональний аналіз, Київ: «Вища школа», 1990.
3. Gefter S. L., Piven' A. L. FORMAL FUNCTIONAL CALCULUS FOR WEAKLY LOCALLY NILPOTENT OPERATORS IN FRECHET ́ SPACES. DOI 10.1007/s10958-020-04842-w, Journal of Mathematical Sciences, Vol. 247, No. 6, June, 2020, p. 97 – 107.
4. Gefter S. L., Piven' A. L. LINEAR PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS IN MODULE OF FORMAL GENERALIZED FUNCTIONS OVER COMMUTATIVE RING. DOI 10.1007/s10958-021-05505-0, Journal of Mathematical Sciences, Vol. 257, No. 5, September, 2021, p. 579 – 596.
5. S. Gefter, A. Piven', Partial differential equations in the module of copolynomials in several variables over a commutative ring // Book of abstracts of the 6-th International Conference "Differential Equations and control Theory", October 11–13, 2023, P. 15–16.
6. R. Estrada, R.P. Kanwal, A distributional approach to asymptotics theory and applications, Birkhauser}, (2002).
7. L.G. Hernandez, R. Estrada, Solutions of Ordinary Differential Equations by Series of Delta Functions, J. Math. Anal. Appls. **191**, 40 -- 55 (1995).

Висновки

У представленій дипломній роботі досліджена застосовність довільного формального степеневого ряду без нульового члена до будь-якого кополінома, наведені змістовні приклади обчислення сум формальних степеневих рядів від δ-функції та отримана теорема про формальне функціональне числення для кополіномів над довільним полем F нульової характеристики. У якості застосування отримано представлення фундаментального розв'язку лінійного диференціального рівняння першого порядку у просторі кополіномів у вигляді ряда за степенями δ-функції.