

✓
К-14038

ПЗ06590



ХАРЬКОВСКОГО
УНИВЕРСИТЕТА

254'84

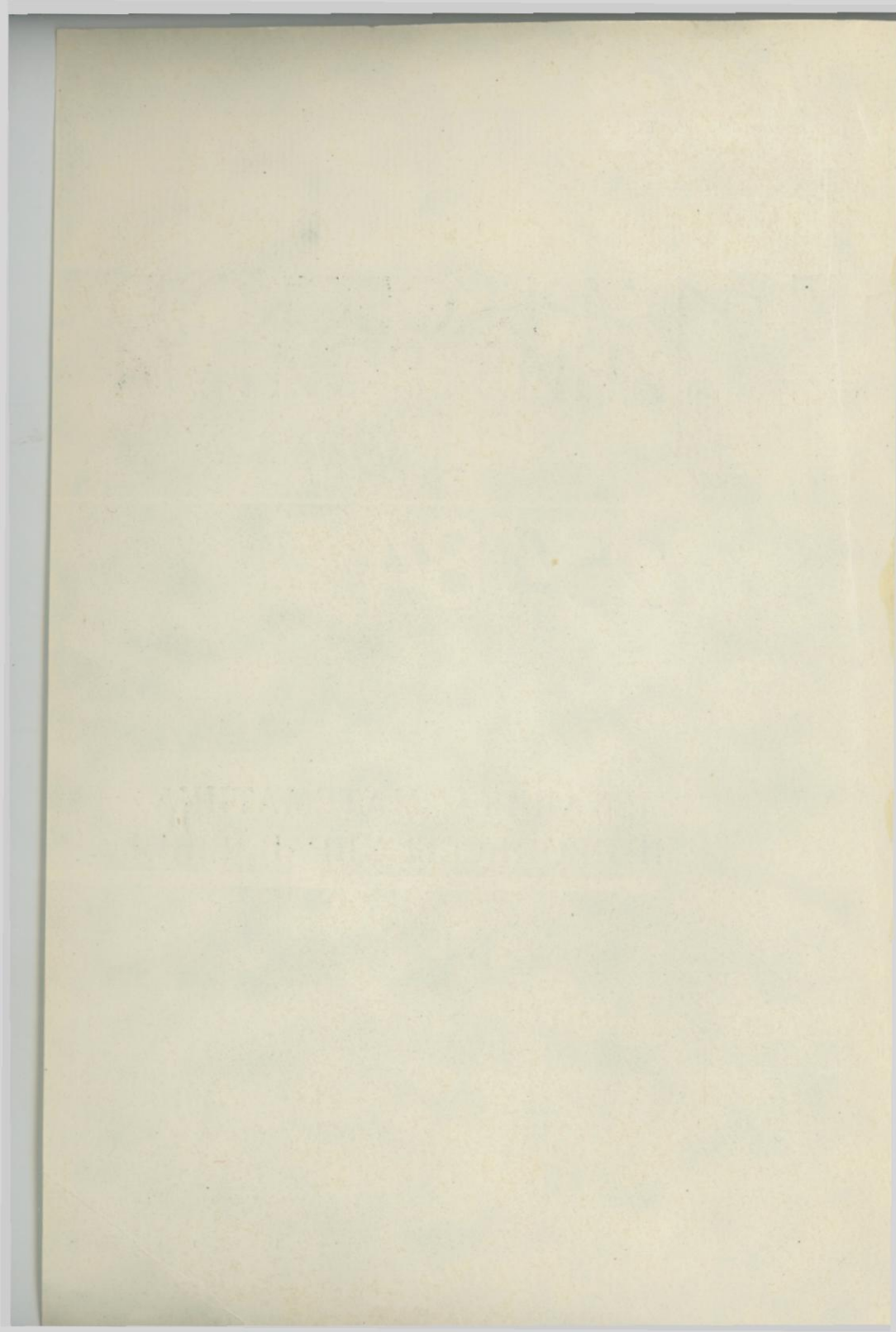
МЕХАНИКА, МАТЕМАТИКА
И ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ

»ВИЩА ШКОЛА«

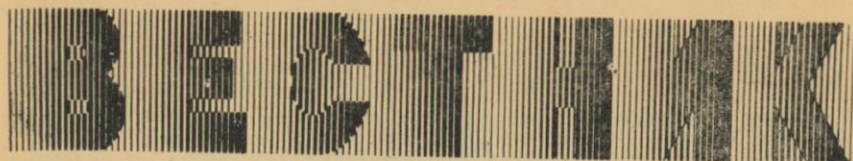
85 к.

Вест. Харьк. ун-та, 1984, № 254, 1—73.





МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО
СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ УССР



ХАРЬКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

№ 254

**МЕХАНИКА, МАТЕМАТИКА
И ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ**

Основан в 1965 г.

ХАРЬКОВ
ИЗДАТЕЛЬСТВО ПРИ ХАРЬКОВСКОМ
ГОСУДАРСТВЕННОМ УНИВЕРСИТЕТЕ
ИЗДАТЕЛЬСКОГО ОБЪЕДИНЕНИЯ
«ВИЩА ШКОЛА»

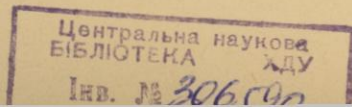
1984

Механика, математика и процессы управления.— Вестн. Харьк. ун-та, № 254. — Харьков: Вища школа. Изд-во при Харьк. ун-те, 1984: 73 с.
В вестнике опубликованы статьи по математической теории оптимальных процессов, предельному движению одной следящей системы, некоторым вопросам прикладной математики и алгебры.
Нормативные материалы приведены по состоянию на 1 января 1984 г.
Для научных работников и специалистов.

Редакционная коллегия: И. Е. Тарапов (отв. ред.), А. П. Маринич (отв. секр.), В. В. Баранов, В. И. Коробов, Ю. И. Любич, В. А. Марченко

Печатается по решению Ученого совета механико-математического факультета Харьковского университета (протокол № 7 от 19 апреля 1983 г.)

Адрес редакционной коллегии: 310077, Харьков-77, пл. Дзержинского, 4, университет, механико-математический факультет, тел. 40-14-40
Редакция естественнонаучной литературы



ОДНА ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ С ПОМОЩЬЮ КОЭФФИЦИЕНТА ИЗЛУЧЕНИЯ

Рассмотрим следующую задачу оптимального управления: $J(u(\cdot)) = \int_D F(x, z(x)) dx \rightarrow \inf$ (1), $\Delta z(x) - \lambda^2 z(x) = \varphi(x)$ $x \in D$ (2),

$$\frac{\partial z(x)}{\partial n_x} + u(x)z(x) = 0 \quad x \in \Gamma \quad (3), \quad u(x) \in \Omega \subset [0, \infty] \quad \forall x \in \Gamma \quad (4).$$

Здесь D — область в R_3 , ограниченная поверхностью Ляпунова Γ с показателем Ляпунова, равным единице; n — внешняя к поверхности Γ нормаль; $F: R_4 \rightarrow R$, $\varphi: R_3 \rightarrow R$ — заданные функции, которые мы будем считать по крайней мере непрерывными по совокупности аргументов; Δ — оператор Лапласа; $\lambda > 0$ — постоянная; Ω — заданное множество.

1. *Принцип максимума в задаче (1) — (4).* Допустимыми управлениями здесь мы будем считать функции $u(\cdot)$, кусочно-непрерывные на Γ со значениями в Ω . Множество допустимых управлений условимся обозначать U .

Лемма 1. Пусть $u(\cdot) \in U$ и пусть $z(\cdot)$, отвечающее $u(\cdot)$, решение краевой задачи (2) — (3). Тогда $|z(x)| \leq c \quad \forall x \in D$ с константой c , не зависящей от $u(\cdot) \in U$.

Доказательство. Обозначим через $G_u(x, y)$ функцию Грина краевой задачи (2) — (3) (функцию Робена). Хорошо известно, что $G_u(x, y) \leq G_{u'}(x, y) \quad \forall x, y \in D$, если $u(x) \geq u'(x) \quad \forall x \in \Gamma$. В частности, $\forall u(\cdot) \in U \quad 0 \leq G_u(x, y) \leq G_0(x, y) \equiv N(x, y) \quad \forall x, y \in D$, где $N(x, y)$ — функция Неймана для уравнения (2) в области D . Так как $z(x) = - \int_D \varphi(y) G_u(x, y) dy$, то, очевидно, $|z(x)| \leq c_1 c_2$, где

$$c_1 = \max_{x \in D} |\varphi(x)|, \quad c_2 = \max_{x \in D} \int_D N(x, y) dy.$$

Лемма доказана.

Пусть $u(\cdot)$ — допустимое управление. Назовем вариацией $u(\cdot)$, отвечающей выбранной точке $x_0 \in \Gamma$, выбранному числу $\varepsilon > 0$ и

выбранному $v \in \Omega$, допустимое управление $u_\varepsilon(\cdot)$, определяемое равенством

$$u_\varepsilon(x) = \begin{cases} u(x), & \|x - x_0\| > \varepsilon, \\ v, & \|x - x_0\| \leq \varepsilon. \end{cases} x \in D$$

Лемма 2. Пусть $u(\cdot)$ — допустимое управление и $u_\varepsilon(\cdot)$ — его вариация и пусть z и z_ε — решения краевой задачи (2) — (3), отвечающие соответственно u и u_ε . Тогда $|z_\varepsilon(x) - z(x)| \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ равномерно в D .

Доказательство. Так как

$$z(x) = - \int_D \varphi(y) N(x, y) dy - \int_\Gamma u(y) z(y) N(x, y) ds_y,$$

$$z_\varepsilon(x) = - \int_D \varphi(y) N(x, y) dy - \int_\Gamma u_\varepsilon(y) z_\varepsilon(y) N(x, y) ds_y,$$

то $z_\varepsilon(x) - z(x) = \int_\Gamma (uz - u_\varepsilon z_\varepsilon) N(x, y) ds_y$, что можно переписать еще

$$\text{и так: } z_\varepsilon(x) - z(x) = - \int_\Gamma u(z_\varepsilon - z) N(x, y) ds_y + \int_\Gamma (u_\varepsilon - u) z_\varepsilon N(x, y) ds_y = - \int_\Gamma u(z_\varepsilon - z) N(x, y) ds_y + \int_{K(x_0, \varepsilon) \cap \Gamma} (v - u) z_\varepsilon N(x, y) ds_y, \quad (5)$$

где $K(x_0, \varepsilon) = \{x: \|x - x_0\| \leq \varepsilon\}$.

Рассмотрим интегральное уравнение

$$\alpha(x) = - \int_\Gamma \alpha(y) u(\cdot) N(x, y) ds_y + f(x).$$

Хорошо известно, что ядро этого интегрального уравнения имеет слабую особенность и что это интегральное уравнение разрешимо при любом f . Обозначая через $R(x, y)$ ядро резольвенты этого уравнения, из (5) получаем

$$z_\varepsilon(x) - z(x) = \int_{K(x_0, \varepsilon) \cap \Gamma} (v - u) z_\varepsilon N(x, y) ds_y + \int_\Gamma R(x, y) \left[\int_{K(x_0, \varepsilon) \cap \Gamma} (v - u) z_\varepsilon N(y, t) ds_t \right] ds_y, \quad x \in \Gamma,$$

откуда, очевидно, следует, что

$$|z_\varepsilon(x) - z(x)| \leq c_3 \int_{\Gamma \cap K(x_0, \varepsilon)} [N(x, y) + \int_\Gamma |R(x, y)| N(y, t) ds_t] ds_y, \quad (6)$$

$$\text{где } c_3 = \max_{x \in \Gamma} |(v - u(x)) z_\varepsilon(x)|. \quad (7)$$

Так как R и N имеют слабую особенность, то из последней оценки и леммы 1, вероятно, имеем $|z_\varepsilon(x) - z(x)| \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ равномерно на Γ . Возвращаясь теперь к формуле (5), получаем

$$|z_\varepsilon(x) - z(x)| \leq \max_{x \in \Gamma} |u(x)(z_\varepsilon(x) - z(x))| \int_{\Gamma} N(x, y) ds_y + \\ + c_3 \int_{\Gamma \cap K(x_0, \varepsilon)} N(x, y) ds_y,$$

откуда, как и выше, выводим: $|z_\varepsilon(x) - z(x)| \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ равномерно в D . Лемма доказана.

Лемма 3. В условиях леммы 2 справедлива оценка

$$\int_D |z_\varepsilon(x) - z(x)| dx \leq c \operatorname{mes}(\Gamma \cap K(x_0, \varepsilon))$$

с константой c , не зависящей от ε .

Доказательство. Из представления (5) и леммы 1 вытекает оценка

$$\int_D |z_\varepsilon(x) - z(x)| dx \leq c_2 c_4 \int_{\Gamma} |z_\varepsilon(x) - z(x)| ds_x + \\ + c_2 c_3 \operatorname{mes}(K(x_0, \varepsilon) \cap \Gamma), \quad (8)$$

$$\text{где} \quad c_4 = \max_{x \in \Gamma} |u(x)|, \quad (9)$$

а константы c_2, c_3 определены ранее.

Пользуясь еще оценкой (6), легко выводим $\int_{\Gamma} |z_\varepsilon(x) - z(x)| ds_x \leq c_3 c_5 \operatorname{mes}(K(x_0, \varepsilon) \cap \Gamma)$, (10),

$$\text{где} \quad c_5 = \max_{y \in \Gamma} \int_{\Gamma} [N(x, y) + \int_{\Gamma} |R(x, y)| N(y, t) ds_t] ds_x. \quad (11)$$

Возвращаясь теперь к оценке (8), в силу (10) имеем

$\int_D |z_\varepsilon(x) - z(x)| dx \leq (c_2 c_3 c_4 c_5 + c_2 c_3) \operatorname{mes}(K(x_0, \varepsilon) \cap \Gamma)$. Так как константы c_2, c_3, c_4, c_5 , как это следует из (7), (9), (11), не зависят от ε , то, тем самым, лемма доказана.

Теорема 1. Пусть в задаче (1) — (4) функции F, F_z, φ непрерывны по совокупности аргументов. Если $u(\cdot), z(\cdot)$ — решение задачи (1) — (4), то они удовлетворяют следующему принципу максимума: во всех точках $x \in \Gamma$, являющихся точками непрерывности управления $u(x)$

$$\psi(x) u(x) z(x) = \max_{u \in \mathcal{Q}} \psi(x) u z(x), \quad (12)$$

где функция $\psi(\cdot)$ есть решение следующей задачи: $\Delta\psi(x) - \lambda^2\psi(x) = -F_z(x, z(x))$ $x \in D$ (13),

$$\frac{\partial\psi(x)}{\partial n_x} + u(x)z(x) = 0 \quad x \in \Gamma. \quad (14)$$

Доказательство. Пусть $u_\varepsilon(x)$ — вариация u , отвечающая $x_0 \in \Gamma$, $\varepsilon > 0$, $v \in \Omega$. Так как $u(\cdot)$ — оптимальное управление, а $u_\varepsilon(\cdot)$, вообще говоря, нет, то $J(u_\varepsilon(\cdot)) - J(u(\cdot)) \geq 0$, т. е. $\int_D [F(x, z_\varepsilon \times$

$\times(x)) - F(x, z(x))] dx \geq 0$.
(Мы обозначили здесь, как и раньше, через $z_\varepsilon(x)$ решение задачи (2), (3), отвечающее допустимому управлению $u_\varepsilon(x)$).

Перепишем это соотношение, пользуясь формулой Тейлора, следующим образом:

$$\int_D F_z(x, z(x))(z_\varepsilon(x) - z(x)) dx + \int_D [F_z(x, \tilde{z}(x)) - F_z(x, z(x))](z_\varepsilon(x) - z(x)) dx \geq 0, \quad (15)$$

где $\tilde{z} = z + \theta(z_\varepsilon - z)$, $0 \leq \theta \leq 1$. Так как $\tilde{z} - z = \theta(z_\varepsilon - z)$, $0 \leq \theta \leq 1$, то в силу леммы 2 $\tilde{z} - z \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ равномерно в D . Учитывая еще непрерывность F_z и пользуясь леммами 1 и 3, получаем такую оценку для второго слагаемого в (15):

$$\left| \int_D [F_z(x, \tilde{z}) - F_z(x, z)](z_\varepsilon - z) dx \right| \leq \alpha(\varepsilon) \text{mes}(K(x_0, \varepsilon) \cap \Gamma), \quad (16)$$

где $\alpha(\varepsilon) \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ (17).

Первое слагаемое в (15) преобразуем по формулам Грина, используя вспомогательную функцию ψ , являющуюся решением краевой задачи (13) — (14). Имеем после несложных выкладок

$$\begin{aligned} \int_D F_z(x, z(x))(z_\varepsilon(x) - z(x)) dx &= - \int_D \Delta\psi(x) \lambda^2 \psi(x) (z_\varepsilon - z) dx = \\ &= \int_\Gamma \psi(x) (u - u_\varepsilon(x)) z_\varepsilon(x) ds_x, \end{aligned}$$

откуда, пользуясь еще и определением u_ε , получаем

$$\int_D F_z(x, z)(z_\varepsilon - z) dx = \int_{\Gamma \cap K(x_0, \varepsilon)} \psi(u - v) ds.$$

Эту последнюю формулу нам будет удобнее преобразовать к виду

$$\begin{aligned} \int_D F_z(x, z)(z_\varepsilon - z) dx &= \int_{\Gamma \cap K(x_0, \varepsilon)} \psi(x) [u(x) - v] z(x) ds_x + \\ &+ \int_{\Gamma \cap K(x_0, \varepsilon)} \psi(x) [u(x) - v] (z_\varepsilon - z) ds_x. \end{aligned} \quad (18)$$

(Заметим, что использование формул Грина здесь вполне оправдано, так как в условиях теоремы 1 функции z и ψ могут быть

представлены в виду сумм потенциалов простого слоя и объемного s , по крайней мере, ограниченными плотностями). Второе слагаемое в (18) в силу леммы 2 и ограниченности функций ψ , u допускает оценку

$$\left| \int_{\Gamma \cap K(x_0, \varepsilon)} \psi(x) [u(x) - v] (z_\varepsilon - z) ds_x \right| \leq \alpha_1(\varepsilon) \text{mes}(K(x_0, \varepsilon) \cap \Gamma), \quad (19)$$

причем $\alpha_1(\varepsilon) \rightarrow 0$ при $(\varepsilon) \rightarrow 0$ (20).

Пусть $x_0 \in \Gamma$ — точка непрерывности управления $u(x)$. Поделив (15) на $\text{mes}(K(x_0, \varepsilon) \cap \Gamma)$, устремив ε к нулю, имеем, учитывая (16) — (20) и непрерывность подынтегральной функции в первом слагаемом правой части (18) в точке x_0 : $\psi(x_0)(u(x_0) - v)z(x_0) \geq 0$. Заметим, что это соотношение мы доказали $\forall x_0 \in \Gamma$, являющегося точкой непрерывности $u(x)$ и для любого $v \in \Omega$. Поэтому мы можем написать $\psi(x)u(x)z(x) \geq \psi(x)vz(x) \forall v \in \Omega$ и для любого $x \in \Gamma$, являющегося точкой непрерывности управления $u(x)$. Так как $u(x) \in \Omega$, то, тем самым, нами доказан принцип максимума (12). Теорема 1 доказана.

Теорема 2. Пусть в задаче (1) — (4) функции F, F_z, φ непрерывны по совокупности аргументов, причем F — выпуклая функция $z \forall x \in D$, и функция $\varphi \not\equiv 0$ неотрицательна (или неположительна) в D . Тогда принцип максимума (12), (13), (14) является необходимым и достаточным условием оптимальности.

Доказательство. Так как необходимость уже установлена теоремой 1, то в доказательстве нуждается лишь достаточность. Итак, пусть $\bar{u}(x), \bar{z}(x)$ — процесс удовлетворяющий принципу максимума (12) — (14), а $u(x), z(x)$ — произвольный допустимый процесс. Тогда, в силу выпуклости F по z , имеем:

$$\begin{aligned} J(u) - J(\bar{u}) &= \int_D (F(x, z(x)) - F(x, \bar{z}(x))) dx \geq \\ &\geq \int_D F_z(x, \bar{z}(x)) (z - \bar{z}) dx. \end{aligned}$$

Преобразуя последний интеграл с помощью функции $\bar{\psi}$ так, как это было сделано при доказательстве теоремы 1, получаем

$$J(u) - J(\bar{u}) \geq \int_{\Gamma} \bar{\psi}(\bar{u} - u) z ds \quad (21)$$

При сделанных относительно φ предположениях z и $\bar{z}$ имеют одинаковый знак и, следовательно, $\bar{\psi}(\bar{u} - u)z$ и $\bar{\psi}(\bar{u} - u)\bar{z}$ имеют одинаковый знак или одновременно обращаются в нуль. Так как $\bar{\psi}, \bar{u}, \bar{z}$ удовлетворяют принципу максимума

$$\bar{\psi} \bar{u} \bar{z} = \max_{u \in \Omega} \psi u \bar{z},$$

то $\psi(\bar{u} - \bar{u})\bar{z} \geq 0$ всюду на Γ и, значит, $\psi(\bar{u} - u)z \geq 0$ всюду на Γ . Поэтому из (21), очевидно, имеем $I(u) - I(\bar{u}) \geq 0 \quad \forall u(\cdot) \in U$. Теорема 2 доказана.

Задачу (1) — (4) можно рассматривать и в классе ограниченных измеримых на Γ управлений. В этом классе, как легко видеть, теоремы 1 и 2 остаются справедливыми, если требовать выполнения условия (12) почти всюду на Γ .

2. Теоремы существования и единственности в задаче (1) — (4).

Теорема 3. Пусть в задаче (1) — (4) F и φ непрерывные по совокупности аргументов функции, Ω — отрезок вещественной оси. Тогда задача (1) — (4) имеет по крайней мере одно решение в классе ограниченных измеримых на Γ управлений $u(x)$.

Доказательство. Множество допустимых управлений будем по-прежнему обозначать U . Доказательство леммы 1 проходит и в этом классе управлений, поэтому для любого допустимого процесса u , справедлива оценка $|z(x)| \leq c \quad \forall x \in D$ (22) и, следовательно, из непрерывности F и ограниченности множеств Ω и D вытекает

$$\inf_{u \in U} J(u) = \alpha,$$

где α — конечное число. Пусть $\{u_n, z_n\}$ — минимизирующая последовательность в задаче (1) — (4), т. е. пусть

$$\lim_{n \rightarrow \infty} J(u_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_D F(x, z_n(x)) dx = \alpha, \quad (23)$$

где $u_n \in U$,

$$\Delta z_n - \lambda^2 z_n = \varphi(x) \quad x \in D \quad (24), \quad \frac{\partial z_n}{\partial n} + u_n z_n = 0 \quad x \in \Gamma \quad (25).$$

Так как z_n есть решение краевой задачи (24), (25), то

$$z_n(x) = - \int_D \varphi(y) N(x, y) dy - \int_{\Gamma} u_n(y) z_n(y) N(x, y) ds_y, \quad (26)$$

откуда, используя равномерную ограниченность u_n ($u_n(y) \in \Omega \quad \forall y \in \Gamma$), оценку (22) и хорошо известные свойства функции $N(x, y)$, легко устанавливаем: $\{z_n(x)\} \quad x \in D$ — равномерно ограниченное и равномерно непрерывное в D семейство функций. Таким образом, согласно теореме Арцела—Асколи, можно считать (переходя, если нужно, к подпоследовательностям), что в (23) $z_n(x) \rightarrow \bar{z}(x) \in C(\bar{D})$ равномерно в $\bar{D}$ и, если учесть еще, что U — слабокомпактное в $L_1(D)$ множество (см. [1, с. 169]), то можно считать, что и $u_n \rightarrow \bar{u}(x) \in U$ слабо в $L_1(D)$.

Полученных свойств вполне достаточно для перехода к пределу в (23), (26), и мы приходим к соотношениям:

$$\int_D F(x, \bar{z}(x)) dx = \alpha \inf_{u \in U} I(u), \quad (27)$$

$$\bar{z}(x) = - \int_D \varphi(y) N(x, y) dy - \int_{\Gamma} \bar{u}(y) \bar{z}(y) N(x, y) ds_y, \quad (28)$$

где $\bar{z}(\cdot) \in C(\bar{D})$, $\bar{u} \in U$. Заметим еще, что из непрерывности $\bar{z}$, ограниченности $\bar{u}$ и (28) вытекает, что $\Delta \bar{z}(x) - \lambda^2 \bar{z}(x) = \varphi(x)$ $x \in D$

(29), $\frac{\partial \bar{z}(x)}{\partial n} + \bar{u}(x) \bar{z}(x) = 0$ $x \in \Gamma$ (30). Так как $\bar{u}(\cdot) \in U$, то соотношения (27), (29), (30) показывают, что процесс $\bar{u}$, $\bar{z}$ есть решение задачи (1)–(4). Теорема 3 доказана.

Теорема 4. Пусть в задаче (1)–(4) Ω — отрезок, F и φ непрерывны по совокупности аргументов, причем $F(x, z)$ — строго выпуклая функция z $\forall x \in D$ и функция φ удовлетворяет условиям теоремы 2, тогда задача (1)–(4) имеет решение и это решение единственно.

Доказательство. Существование решения устанавливается теоремой 3. Для доказательства единственности введем в рассмотрение множество

$$Z = \left\{ z(\cdot) : \Delta z(x) - \lambda^2 z(x) = \varphi(x) \quad x \in D, \quad \frac{\partial z(x)}{\partial n} + u(x) z(x) = 0 \right. \\ \left. x \in \Gamma, \quad u(\cdot) \in U \right\}.$$

Таким образом, Z есть совокупность допустимых «траекторий» в задаче оптимального управления (1)–(4). Ясно, что для доказательства единственности решения достаточно проверить, что Z — выпуклое множество. Этот факт может быть установлен, например, так: $\forall z_1, z_2 \in Z, \forall \alpha : 0 \leq \alpha \leq 1$, имеем $\Delta(\alpha z_1 + (1-\alpha)z_2) - \lambda^2(\alpha z_1 + (1-\alpha)z_2) = \varphi$ $x \in D$ (31),

$$\frac{\partial(\alpha z_1 + (1-\alpha)z_2)}{\partial n} + u(\alpha z_1 + (1-\alpha)z_2) = 0 \quad x \in \Gamma, \quad (32)$$

где u_1, u_2 — отвечающие z_1 и z_2 управления, а

$$u = \frac{\alpha u_1 z_1 + (1-\alpha) u_2 z_2}{\alpha z_1 + (1-\alpha) z_2}. \quad (33)$$

Поскольку при сделанных относительно φ предположениях z_1 и z_2 не обращаются в нуль и имеют одинаковый знак и так как u_1 и u_2 неотрицательны всюду, то из (33), очевидно, $\alpha \leq u \leq \beta$, где α и β — концы отрезка Ω , таким образом, u — допустимое управление. Тем самым мы установили выпуклость множества Z и завершили доказательство теоремы 4.

Теорема 5. Пусть в задаче (1)–(4) Ω — отрезок на $[0, \infty)$, F, F_z, φ — непрерывные по совокупности аргументов функции,

причем $F_z > 0$ всюду. Тогда задача (1)–(4) имеет решение и это решение единственно.

Доказательство. Единственность. Так как оптимальный процесс u, z удовлетворяет принципу максимума (12)–(14), то, очевидно, выполнены следующие соотношения:

$$\Delta z(x) - \lambda^2 z(x) = \varphi(x) \quad x \in D \quad (34), \quad \frac{\partial z(x)}{\partial n_x} + \Phi(z(x)) = 0 \quad x \in \Gamma \quad (35),$$

где $\Phi(\mu) = \begin{cases} \beta\mu, & \text{если } \mu > 0, \\ \alpha\mu, & \text{если } \mu < 0 \end{cases}$ и $\Omega = [\alpha, \beta]$. (При получении этих соотношений мы использовали неравенство $\psi(x) > 0$ всюду, вытекающее из условия $F_z > 0$ всюду). Краевая задача (34), (35), как нетрудно видеть, эквивалентна следующей вариационной:

$$I_1(z) = \int_D [(\nabla z)^2 + \lambda^2 z^2 + 2\varphi(x)z] dx + \int_{\Gamma} R(z(x)) ds_x \rightarrow \inf, \quad (36)$$

$$z(x) \in H_1(D) \quad (37), \quad R(\mu) = \begin{cases} \beta\mu^2, & \mu > 0 \\ \alpha\mu^2, & \mu < 0 \end{cases}$$

Так как I_1 строго выпуклый и непрерывный на $H_1(D)$ функционал, удовлетворяющий условию $I_1(z) \rightarrow \infty$ при $\|z\|_{H_1} \rightarrow \infty$, то вариационная задача (36), (37) и, следовательно, краевая задача (34), (35) имеет единственное решение.

Существование. Пусть $\bar{z}$ — решение задачи (36), (37) (или, что то же самое, (34), (35)). Тогда, очевидно,

$$\Delta \bar{z} - \lambda^2 \bar{z} = \varphi(x) \quad x \in D, \quad \frac{\partial \bar{z}(x)}{\partial n_x} + \bar{u}(x) \bar{z}(x) = 0 \quad x \in \Gamma,$$

где $\bar{u}(x) = \begin{cases} \beta, & \text{если } \bar{z}(x) > 0, \\ \alpha, & \text{если } \bar{z}(x) < 0 \end{cases}$ (38) и, таким образом, $\bar{u}, \bar{z}$ — допустимый в задаче (1)–(4) процесс.

Пусть $u(\cdot), z(\cdot)$ — произвольный процесс. Тогда, как нетрудно видеть,

$$\Delta(\bar{z} - z) - \lambda^2(\bar{z} - z) = 0 \quad x \in D, \quad \frac{\partial}{\partial n}(\bar{z} - z) + u(\bar{z} - z) = u\bar{z} - \bar{u}z \quad x \in \Gamma.$$

Поскольку $u \in [\alpha, \beta]$, то правая часть в последнем равенстве (в силу (38)) неположительна, и тогда, как известно, $\bar{z}(x) - z(x) \leq 0$, т. е. $\bar{z}(x) \leq z(x) \quad \forall u(\cdot) \in U$. Так как $F_z > 0$ всюду, то, тем самым, мы установили, что

$$J(\bar{u}) = \int_D F(x, \bar{z}(x)) dx \leq \int_D F(x, z(x)) dx = J(u)$$

$\forall u \in U$, что и требовалось доказать. Теорема 5 доказана.

Заметим в заключение, что задачи типа (36), (37) интенсивно изучаются. В частности, они рассматриваются в [2], где имеется обширная библиография, относящаяся, например, к вопросам численного решения.

Список литературы: 1. Ли Э. Б., Маркус Л. Основы теории оптимального управления.— М.: Наука, 1972.— 574 с. 2. Дюво Г., Лионс Ж.-Л. Неравенства в механике и физике.— М.: Наука, 1980.— 383 с.

Поступила в редколлегию 01.02.83.

УДК 62—506

В. Ф. КОРОП, канд. физ.-мат. наук, В. Н. КОВНИР

ЛАГРАНЖИАН КАК ШТРАФНАЯ ФУНКЦИЯ

Введение. Рассмотрим задачу нелинейного программирования

$$f_0(x) \rightarrow \min_{x \in G \subset \mathbb{R}^n}; \quad G = \{x: f_i(x) \leq 0, \quad i = \overline{1, m}\} \quad (1)$$

и соответствующую ей задачу

$$L(x, \lambda) \equiv \sum_{i=0}^m \lambda_i f_i(x) \rightarrow \min_{x \in \mathbb{R}^n} \quad (2)$$

Назовем $\lambda^* = (\lambda_0^*, \dots, \lambda_m^*)$ вектором Куна — Таккера задачи (1), если некоторое решение x^* задачи (1) является решением задачи (2) при $\lambda = \lambda^*$. При этом, конечно, $\lambda_i^* \geq 0, \quad i = \overline{0, m}, \quad L(x^*, \lambda^*) = \lambda_0^* f_0(x^*)$.

Пусть λ^* существует. Тогда лагранжиан $L(x, \lambda)$ является параметрической (λ_i — параметры) комбинированной (наличие как внешнего, так и внутреннего штрафа) штрафной функцией для задачи (1) [1]. Так как λ^* нам не известен, то для решения (1) методом штрафной функции $L(x, \lambda)$ нужно в дополнение к какому-либо методу безусловной минимизации (x -метод) построить метод поиска λ^* в пространстве переменных $\lambda_0, \dots, \lambda_m$ (λ -метод). В статье предлагается один такой метод. Совокупность x -метода и λ -метода является комбинированным x, λ -методом нахождения точки $(x^*, \lambda^*) \in \mathbb{R}^{n+m+1}$.

Заметим, что этот метод не имеет ничего общего с методами поиска, основанными на том, что (x^*, λ^*) (при $\lambda_0 = \text{const}$) — седловая точка функции $L(x, \lambda)$. Комбинированный x, λ -метод более привлекателен в двух отношениях. Во-первых, $L(x, \lambda)$ является сложной по x и простой (линейной) по λ , поэтому для движения в x -пространстве нужны «сильные» оптимизирующие средства, а для нахождения λ^* следует ожидать существования весьма простых эффективных методов. Во-вторых, x -метод не нужно придумывать, так как на сегодняшний день имеется большой набор мощных методов безусловной минимизации. В-третьих, $L(x, \lambda)$ имеет преимущество перед другими штрафными функциями, связанное с тем, что рельеф $L(x, \lambda)$ не сложнее рельефов $f_i(x)$, т. е. задача (2) хорошо обусловлена.

Настоящая статья посвящена построению и исследованию λ -метода. Она содержит два параграфа. В первом рассматривается предварительное преобразование (при помощи так называемой операции излома) задачи (1) в другую, эквивалентную, задачу нелинейного программирования. Это преобразование сопровождается существенным расширением множества векторов Куна — Таккера, что, конечно, резко улучшает работу λ -метода, которому достаточно попасть в любую точку этого множества. Более того, в некоторых случаях эта операция приводит к появлению множества векторов Куна-Таккера при условии, когда для исходной задачи это множество было пусто (невыпуклые задачи).

Во втором параграфе предлагается один конкретный λ -метод, построенный на идеях адаптивного регулирования. Этот метод дополнен методом Пауэлла (см. [1]) до x , λ -метода. Приведены результаты экспериментов, иллюстрирующие работу метода.

Заметим еще, что предлагаемый метод допускает также наличие ограничений типа равенств, каждое из которых следует заменить на два ограничения типа неравенств.

1. *Операция излома.* Эта операция состоит в переходе от задачи (1) к задаче $f_0(x) \rightarrow \min_{x \in G \subset \mathbb{R}^n}$; $G = \{x: \hat{f}_i(x) \leq 0, i = \overline{1, m}\}$

$$(3), \text{ где } \hat{f}_i(x) = \begin{cases} \alpha f_i(x) & \text{при } f_i(x) > 0; \\ \beta f_i(x) & \text{при } f_i(x) \leq 0; \end{cases} \quad 0 \leq \beta < 1, \alpha > 1. \quad (4)$$

Ясно, что допустимая область G в задаче (3) та же самая, что и в задаче (1), т. е. эти задачи эквивалентны.

Операция излома приводит к потере гладкости, так как градиенты функций $\hat{f}_i(x)$ терпят разрыв на гиперповерхностях $f_i(x) = 0$ (т. е. на границе G), но этот недостаток с лихвой компенсируется расширением множества векторов Куна-Таккера.

Теорема 1. Пусть λ^* -вектор Куна-Таккера задачи (1). Тогда любой вектор λ , удовлетворяющий условиям $\lambda_i = 0$ при $\lambda_i^* = 0$; $\alpha \lambda_i \geq \lambda_i^*$, $\beta \lambda_i \leq \lambda_i^*$ при $\lambda_i^* \neq 0$, $i > 0$ (5) является вектором Куна-Таккера задачи (3).

Доказательство. Так как λ^* — вектор Куна-Таккера задачи (1), то $(x^* — решение (1)) \lambda^* \geq 0$, $\lambda_i^* f_i(x^*) = 0$, $i = \overline{1, m}$, (6), $L(x, \lambda^*) \geq L(x^*, \lambda^*) = \lambda_0^* f_0(x^*)$ (7). Рассмотрим лагранжиан задачи (3)

$$\hat{L}(x, \lambda) = \lambda_0 f_0(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \hat{f}_i(x). \quad (8)$$

В силу (4), (5) $\lambda_i \hat{f}_i(x) \geq \lambda_i^* f_i(x)$. Поэтому $\hat{L}(x, \lambda) \geq L(x, \lambda^*)$, что вместе с (7) дает $\hat{L}(x, \lambda) \geq \lambda_0^* f_0(x^*)$ (9). С другой стороны, при $x = x^*$ в (9) достигается точное равенство, так как, в силу (6),

$\lambda_i^* f_i(x^*) = 0$ и, либо (см. (5)) $\lambda_i^* = 0 \Rightarrow \lambda_i = 0 \Rightarrow \lambda_i \widehat{f_i}(x^*) = 0$, либо (см. (4)) $f_i(x^*) = 0 \Rightarrow \widehat{f_i}(x^*) = 0 \Rightarrow \lambda_i \widehat{f_i}(x^*) = 0$, т. е. сумма в (8) пропадает. Теорема доказана.

Таким образом, операция излома приводит к существенному расширению множества векторов Куна — Таккера. Именно в подпространстве тех λ_i , для которых $\lambda_i^* \neq 0$, вместо точки появляется брус (см. (5)):

$$\lambda_i^* - \lambda_i^* \left(\frac{\alpha - 1}{\alpha} \right) \leq \lambda_i \leq \lambda_i^* + \lambda_i^* \left(\frac{1 - \beta}{\beta} \right)$$

(при $\beta = 0$ правое неравенство отсутствует), причем за счет выбора α, β этот брус можно как угодно сильно расширить. Заметим также, что если λ удовлетворяет (5), в котором $\geq$ и $\leq$ заменено на $>$ и $<$ и если хотя бы для одного $i > 0$ $\lambda_i^* \neq 0$, то неравенство (9) заменяется на строгое неравенство, т. е. задача минимизации $\widehat{L}(x, \lambda)$ не содержит решений, отличных от решений исходной задачи (1). Это позволяет, в частности, решать предлагаемым методом задачи линейного программирования, что было бы невозможно без излома, так как в этом случае $L(x, \lambda^*) = \text{const}(x)$.

Мы рассмотрели случай, когда существует λ^* . Однако операция излома может привести к появлению не пустого множества векторов Куна — Таккера в случае, когда исходная задача таковой не обладала. Переходим к рассмотрению такого случая.

Назовем задачу (1) гладкой, если в некоторой окрестности решения x^* функции $f_i(x)$, $i = \overline{0, m}$ непрерывно дифференцируемы. Тогда [2] существует такой ненулевой вектор $\lambda^* = (\lambda_0^*, \dots, \lambda_m^*)$, что $(f'_i(x) - \text{градиент } f_i(x))$:

$$\lambda_i^* \geq 0, \lambda_i^* f_i(x^*) = 0, i = \overline{1, m}; L'(x^*, \lambda^*) \equiv \sum_{i=0}^m \lambda_i^* f'_i(x^*) = 0, \\ \lambda_0^* \geq 0. \quad (10)$$

Обозначим через V множество точек единичной сферы с центром в x^* , в которых $x - x^*$ ортогонально $f'_i(x^*)$ для всех $i = \overline{1, m}$, т. е. $V = \{x: \|x - x^*\| = 1, (x - x^*, f'_i(x^*)) = 0, i = \overline{1, m}\}$. Пусть V_0 — некоторое открытое множество, содержащее V . Тогда $V_1 = \{x: \|x - x^*\| = 1, x \notin V_0\}$ является замкнутым множеством. Обозначим еще через K, K_0, K_1 конусы, образованные лучами, выходящими из x^* и проходящими через точки множеств V, V_0, V_1 соответственно.

Теорема 2. Пусть задача (1) гладкая, x^* — ее решение, λ^* определено (10). Тогда, если хотя бы для одного $i > 0$ $f'_i(x^*) \neq 0$, существует такая окрестность точки x^* $S_\varepsilon(x, x^*) = \{x: \|x - x^*\| \leq \varepsilon > 0\}$, что в области $S_\varepsilon(x, x^*) \cap K_1 x^*$ является точкой минимума функции $\widehat{L}(x, \lambda^*)$ (см. (8)).

Доказательство. Произведем излом с $\alpha = 1 + \gamma$, $\beta = 1 - \gamma$, $0 < \gamma < 1$. Тогда, в силу (4), (8), (10), при $x \in K_1$

$$\begin{aligned} \widehat{L}(x, \lambda^*) &= \lambda_0^* f_0(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^* (1 + \operatorname{sign} f_i(x)) f_i(x) = L(x, \lambda^*) + \\ &+ \gamma \sum_{i=1}^m \lambda_i^* |f_i(x)| = \lambda_0 f_0(x^*) + \gamma \sum_{i=1}^m \lambda_i^* (x - x^*, f_i'(x^*)) + \\ &+ 0(\|x - x^*\|) \geq \lambda_0 f(x^*) + \gamma \delta \|x - x^*\| + 0(\|x - x^*\|), \end{aligned}$$

где

$$\delta = \inf_{x \in V_1} \sum_{i=1}^m \lambda_i^* |(x - x^*, f_i'(x^*))|. \quad (11)$$

Так как для каждого $x \in V_1$ сумма в (11) строго больше нуля, а V_1 не пусто (имеется $f_i'(x^*) \neq 0$) и замкнуто, то $\delta > 0$. Поэтому найдется такое $\varepsilon > 0$, что при $\|x - x^*\| \leq \varepsilon$ $\widehat{L}(x, \lambda^*) \geq \lambda_0 f_0(x^*)$ ($= \widehat{L}(x^*, \lambda^*)$). Теорема доказана.

Следствие. Если задача (1) гладкая, то x^* является локальным минимумом $\widehat{L}(x, \lambda^*)$ в следующих случаях: 1) множество V пусто; 2) существует такое ε_1 , что в области $S_{\varepsilon_1}(x, x^*) \cap K_0$ x^* является точкой минимума функции $L(x, \lambda^*)$ (а следовательно, и функции $\widehat{L}(x, \lambda^*)$).

Доказательство. Случай 1 тривиален, так как если V пусто, то V_0 строить не надо, а в (11) $\inf$ берется по всей единичной сфере. В случае 2 x^* является точкой минимума $L(x, \lambda^*)$ в окрестности $S_{\varepsilon_2}(x, x^*)$, где $\varepsilon_2 = \min\{\varepsilon, \varepsilon_1\}$, а ε — число, фигурирующее в доказательстве теоремы 2.

Заметим, что доказанное следствие часто применимо. Случай 1 имеет место, если среди векторов $f_i'(x^*)$ ($i = \overline{1, m}$) имеется n линейно независимых, а случай 2, когда $L(x, \lambda^*)$ не является выпуклой вообще (в связи с невыпуклостью задачи (1)), но является выпуклой вдоль направлений $x - x^*$ при $x \in V$.

Пример. $n = 2$, $m = 1$, $f_0(x) = -x_1$, $f_1(x) = (x_1^2 + x_2^2)^{\frac{1}{3}} - 1$. Здесь $x^* = (1, 0)$, $\lambda^* = (1, \frac{2}{3})$, V состоит из двух точек: $(1, 1)$ и $(1, -1)$. x^* не является минимумом $L(x, \lambda^*)$, но x^* минимизирует $L(x, \lambda^*)$ на прямой $x_1 = 1$, $x_2 = t$ ($t \in R$), проходящей через точки V и близких к ней прямых $x_1 = 1 + \varepsilon t$, $x_2 = t$, из которых и составляется K_0 . Действительно, на этих прямых

$$\begin{aligned} L(x, \lambda^*) &= -x_1 + \frac{3}{2} [(x_1^2 + x_2^2)^{\frac{1}{3}} - 1] = -1 - \varepsilon t + \\ &+ \frac{3}{2} [(1 + \varepsilon t)^2 + t^2]^{\frac{1}{3}} - 1 = \varphi(t). \end{aligned}$$

Нетрудно убедиться, что $t = 0$ (что соответствует $x = x^*$) является минимумом $\varphi(t)$ при достаточно малом $|\varepsilon|$. Таким образом, для этого примера имеет место случай 2 следствия.

Заметим, наконец, что если даже x^* не является точкой минимума $\widehat{L}(x, \lambda^*)$ в области $S_\varepsilon(x, \lambda^*) \cap K_0$, то метод минимизации скорее всего приведет все же к $x = x^*$, так как объем этой области мал (объем $S_\varepsilon(x, \lambda^*) \cap K$ равен нулю), и метод редко будет туда попадать в процессе поиска.

Таким образом, операция излома позволяет для широкого класса задач применять лагранжиан $\widehat{L}(x, \lambda^*)$ в качестве штрафной функции, причем множество пригодных λ^* весьма обширно.

2. *Метод поиска вектора Куна — Таккера.* В этом параграфе предлагается один конкретный алгоритм для λ -метода (λ -алгоритм), который вместе с алгоритмом минимизации $\widehat{L}(x, \lambda)$ по x (x -алгоритм) и алгоритмом вычисления значений $f_i(x)$, $i = \overline{0, m}$ при данном x (f -алгоритм) позволяет решать задачу (1).

Сам процесс решения состоит из получения последовательности точек $(x^{(k)}, \lambda^{(k)})$, $k = 0, 1, \dots$ в пространстве переменных $x_1, \dots, x_n, \lambda_0, \dots, \lambda_m$, причем $x^{(k)} \rightarrow x^*$, $\lambda^{(k)} \rightarrow \lambda^*$. Порядок работы алгоритмов на k -м шаге следующий. Сначала x -алгоритм вырабатывает $x^{(k)}$. Затем f -алгоритм вычисляет $f_i^{(k)} = f_i(x^{(k)})$. Наконец, λ -алгоритм вырабатывает $\lambda^{(k)}$. x -алгоритм для своей работы использует значения $\widehat{L}(x^{(k)}, \lambda^{(k)})$, воспринимая их, как значения минимизируемой по x функции (изменение λ при этом игнорируется).

Переходим к описанию λ -алгоритма. Имеется m независимых автоматов $A_1, \dots, A_m$, причем A_i вырабатывает $\lambda_i^{(k)}$. Что касается λ_0 , то либо полагается $\lambda_0^{(k)} = 1$, либо после выработки $\lambda_1^{(k)}, \dots, \lambda_m^{(k)}$ вектор $\lambda^{(k)} = (\lambda_0^{(k)}, \lambda_1^{(k)}, \dots, \lambda_m^{(k)})$ как-то нормируется. Автомат A_i для своей работы использует кроме значений $\widehat{L}^{(k)}$ еще и значения $\widehat{f}_i^{(k)} = \widehat{f}_i(x^{(k)})$, где $\widehat{f}_i(x)$ — левая часть i -го ограничения задачи (3). Более точно, используются последовательности $\{s^{(k)}\}$, $\{s_i^{(k)}\}$ и $\{\sigma_i^{(k)}\}$, где $s_i^{(k)} = \text{sign}(f_i^{(k)} - f_i^{(k-1)})$, $\sigma_i^{(k)} = \text{sign } f_i^{(k)}$, $s^{(k)} = \text{sign}(\widehat{L}^{(k)} - \widehat{L}^{(k-1)})$. В зависимости от значений $s^{(k)}$, $s_i^{(k)}$, $\sigma_i^{(k)}$ автомат A_i переходит в одно из трех состояний: комфорт, дискомфорт внешний, дискомфорт внутренний. Состояние комфортное, если произведение $s^{(k)} s_i^{(k)} \sigma_i^{(k)} \geq 0$, в противном случае одно дискомфортно, причем при $\sigma_i^{(k)} = 1$ ($x^{(k)}$ находится вне области $f_i(x) \leq 0$) дискомфорт внешний, а при $\sigma_i^{(k)} = -1$ — внутренний. Если состояние комфортное, то λ_i на k -м шаге не меняется, при дискомфорте внешнем может, но не обязательно, произойти увеличение λ_i , а при дискомфорте внутреннем — уменьшение. Практическая разумность такого изменения очевидна.

Например, если $f_i(x^{(k)}) > 0$ ($\sigma_i^{(k)} = 1$), то $x^{(k)}$ находится вне допустимой области G , и для попадания в G необходимо уменьшить $f_i(x)$. Но эта цель при $s_i^{(k)} \neq s^{(k)}$ находится в противоречии с целью уменьшения $\widehat{L}(x, \lambda)$, которую преследует x -алгоритм. Поэтому нужно усилить влияние $f_i(x)$ на $\widehat{L}(x, \lambda)$, т. е. увеличить λ_i .

При решении вопроса о необходимости изменения λ_i (при дискомфорте) A_i использует информацию о своих предыдущих состояниях. Для этого хранится в памяти величина $a_i^{(k)}$ («напряжение»), которая в начале поиска ($k = 0$) равна нулю, а затем изменяется следующим образом. Если на k -м шаге имеется внешний дискомфорт, то при $a_i^{(k-1)} < 0$ полагается $a_i^{(k)} = 0$ (напряжение снимается), а в противном случае $a_i^{(k)} = a_i^{(k-1)} + 1$ (увеличивается внешнее дискомфортное напряжение). При внутреннем дискомфорте операции аналогичны. Если же на k -м шаге состояние A_i комфортно, то $|a_i^{(k)}| = \max(0, |a_i^{(k-1)}| - 1)$ (напряжение ослабевает). Так вот, изменение λ_i происходит лишь тогда, когда $|a_i^{(k)}| \geq h$, где h — заданный порог напряжения.

Само изменение λ_i производится при помощи либо умножения (при внешнем дискомфорте), либо деления (при внутреннем дискомфорте) на величину $h_i^{(k)} > 1$, которая в процессе поиска увеличивается (например, $h_i^{(k)} = 1,5 h_i^{(k-1)}$), если предыдущее изменение λ_i имело тот же знак, что и текущее, и уменьшается, приближаясь к единице (например, $h_i^{(k)} = 0,5(1 + h_i^{(k-1)})$) в противном случае. Такой способ приводит к резкому увеличению скорости изменения при наличии серии увеличений или серии уменьшений и затуханию этой скорости в случае чередования увеличений и уменьшений, что является признаком близости $\lambda_i^{(k)}$ к искомому значению λ_i^* .

Переходим к изложению результатов экспериментов. В качестве x -метода нами были испробованы метод Ньютона и метод Пауэлла, описание которых имеется в [1]. Применение метода Ньютона оказалось менее эффективным, одной из причин чего является его чувствительность к потере гладкости задачи в связи с операцией излома. Применение же метода Пауэлла привело к высокой эффективности и работоспособности (т. е. к возможности решения широкого класса задач) построенного x, λ -метода. При этом λ -алгоритму разрешалось менять λ лишь в моменты, соответствующие завершению очередного цикла метода Пауэлла (но $a_i^{(k)}$ преобразовывались после каждого обращения к f -алгоритму).

В качестве примера рассмотрим 5 тестовых задач, использованных в [1, гл. 9, п. 9.2] для сравнения различных методов решения задач с ограничениями (не только связанных со штрафными функциями). Все пять задач были успешно решены x, λ -методом с эффективностью не хуже, чем лучший из рассматриваемых в [1] методов (для каждой задачи свой лучший). Особо следует отметить

решение задачи № 5, с которой не справился ни один метод. x , λ -метод решил эту задачу с точностью до 0,001 за 14 циклов метода Пауэлла, затратив 620 обращений к подпрограмме f -алгоритма (вычисление $f_i(x)$).

В качестве параметров излома брались $\alpha = 10$, $\beta = 0,1$, в качестве порога напряжения $h = 3$. В начале поиска все λ_i брались одинаковыми ($\lambda_i^0 = (m+1)^{-1}$) и после каждого изменения λ вектор $(\lambda_0, \dots, \lambda_m)$ нормировался на единицу ($\sum_{i=0}^m (\lambda_i^{(k)})^2 = 1$).

Заключение. Изложенное показывает, что функция Лагранжа может быть эффективно использована в качестве штрафной функции, особенно в совокупности с операцией излома. Что касается самой операции излома, то, во-первых, множество, описываемое (1.3), является лишь частью всего множества векторов Куна — Таккера задачи (1.1) (в частности, нулевые λ_i^* расширяются до интервалов), во-вторых, условия к теореме 2 не исчерпывают всех случаев появления векторов Куна — Таккера (не существовавших до излома) и, в-третьих, операция излома может быть полезна для многих методов, использующих так или иначе лагранжиан.

Список литературы: 1. Химмельблау Д. Прикладное нелинейное программирование. — М.: Мир, 1975. — 534 с. 2. Пшеничный Б. Н., Данилин Ю. М. Численные методы в экстремальных задачах. — М.: Физматгиз, 1975. — 320 с.

Поступила в редколлегию 28.01.83.

УДК 517.977

В. И. КОРОБОВ, В. И. КРУТИНЬ, Г. М. СКЛЯР

РЕШЕНИЕ ОДНОЙ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОЙ СТАБИЛИЗАЦИИ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ

Введение. Пусть поведение объекта описывается системой дифференциальных уравнений, которую мы предполагаем в дальнейшем полностью управляемой: $\dot{x} = Ax + Bu$ (1), где A — $(n \times n)$ -матрица; B — $(n \times r)$ -матрица, $x \in E_n$, $u \in E_r$.

Рассмотрим задачу об оптимальной стабилизации уравнения (1) с критерием качества $J(u) = \int_0^\infty [(Wx(t), x(t)) + (Ru(t), u(t))] dt$ (2).

Здесь R — положительно определенная $(r \times r)$ -матрица; W — неотрицательно определенная $(n \times n)$ -матрица.

Задача (1) — (2) традиционно исследовалась в предположении положительной определенности матрицы W [1 — 4]. В этом случае положен алгоритм нахождения оптимального управления, основывающийся на однозначной разрешимости матричного уравнения Рикатти: $A^*X + XA = XBR^{-1}B^*X - W$, $W > 0$. В случае, когда матрица W вырождена, уравнение Рикатти не обязательно однозначно разрешимо, что не позволяет эффективно применять существующие методы для нахождения его решения.

В данной статье изучается задача (1) — (2) в случае $W \equiv 0$, т. е. задача оптимальной стабилизации с критерием качества $J(u) =$

$$= \int_0^{\infty} (Ru(t), u(t)) dt \quad (3), \text{ где } R — \text{положительно определенная } (r \times r)\text{-}$$

матрица. Определена область начальных данных, для которых задача (1) — (3) разрешима, и построено оптимальное управление с помощью некоторого решения неоднородного матричного уравнения Рикатти (теорема 2).

Вспомогательные утверждения. Рассмотрим отображение $N: R^+ \rightarrow E_{n^2}$, задаваемое формулой

$$N(\Theta) = \int_0^{\Theta} e^{-At} B R^{-1} B^* e^{-A^* t} dt, \quad \Theta > 0. \quad (1.1)$$

Нетрудно видеть, что при каждом $\Theta > 0$ матрица $N(\Theta)$ невырождена в силу полной управляемости системы (1) и удовлетворяет уравнению $A^* N^{-1}(\Theta) + N^{-1}(\Theta) A = N^{-1}(\Theta) B R^{-1} B^* N^{-1}(\Theta) - N^{-1}(\Theta) J(\Theta) N^{-1}(\Theta)$ (1.2). Здесь $J(\Theta) = e^{-A\Theta} B R^{-1} B^* e^{-A^* \Theta}$ (1.3).

Лемма 1. Функция $N^{-1}(\Theta)$ имеет некоторый конечный предел $M \in E_{n^2}$ при $\Theta \rightarrow \infty$, удовлетворяющий уравнению $A^* M + M A = M B R^{-1} B^* M$ (1.4).

Доказательство. Заметим, что функция $(N^{-1}(\Theta)x, x)$ монотонно убывает по Θ при каждом $x \in E_n$, поскольку в силу (1.3) ее производная $-(N^{-1}(\Theta)J(\Theta)N^{-1}(\Theta)x, x)$ неположительна. Так как функция $(N^{-1}(\Theta)x, x)$ также ограничена снизу, то отображение $N^{-1}(\Theta)$ имеет предел M при $\Theta \rightarrow \infty$.

Рассмотрим далее уравнение (1.2) и, переходя в нем к пределу при $\Theta \rightarrow \infty$, убеждаемся, что отображение $N^{-1}(\Theta)J(\Theta)N^{-1}(\Theta): R^+ \rightarrow E_{n^2}$ также имеет предел. Заметим, что при этом функция $-(N^{-1}(\Theta)J(\Theta)N^{-1}(\Theta)x, x)$, являющаяся производной функции $(N^{-1}(\Theta)x, x)$, также имеет некоторый предел. Поскольку функция $(N^{-1}(\Theta)x, x)$ имеет конечный предел, то $\lim_{\Theta \rightarrow \infty} (N^{-1}(\Theta)J(\Theta)N^{-1}(\Theta)x, x) = 0$ для $\forall x \in E_n$, откуда получаем, что $\lim_{\Theta \rightarrow \infty} N^{-1}(\Theta)J(\Theta)N^{-1}(\Theta) = 0$.

Поэтому матрица M удовлетворяет уравнению (1.4). Лемма 1 доказана.

Пусть $\tilde{A} = A - B R^{-1} B^* M$. Будем обозначать через $L_+(\cdot)$, $L_-(\cdot)$, $L_0(\cdot)$ корневые подпространства, отвечающие собственным значениям соответственно с положительной, отрицательной и нулевой вещественной частью для оператора, стоящего в скобках.

Лемма 2. $L_+(\tilde{A}) \cap \text{Ker } M = \{0\}$; $L_+(A) \cap \text{Ker } M = \{0\}$.

Доказательство. От противного. Пусть $\text{Re } \lambda > 0$, x — собственный вектор матрицы A или $\tilde{A}$, соответствующий собственному значению λ , $Mx = 0$. Тогда $\tilde{A}x = Ax = \lambda x$. Пусть управление $u(t)$, $t \in [0, T]$ переводит точку $x \in E_n$ в начало координат за время T .

Имеем $-x = \int_0^T e^{-At} Bu(t) dt$. Обозначим через y корневой вектор матрицы A^* , соответствующий собственному значению $\bar{\lambda}$, и такой, что $(x, y) \neq 0$. Тогда существует некоторый векторный полином $q(t)$ такой, что

$$\begin{aligned} |(x, y)| &= \left| \int_0^T (e^{-At} Bu(t) dt, y) \right| = \left| \int_0^T (u(t), B^* e^{-\bar{\lambda}t} q(t)) dt \right| \leq \\ &\leq \left(\int_0^T (Ru(t), u(t)) dt \right)^{1/2} \left(\int_0^T |B^* e^{-\bar{\lambda}t} q(t)|^2 dt \right)^{1/2} \leq \\ &\leq C \left(\int_0^T (Ru(t), u(t)) dt \right)^{1/2}, \end{aligned} \quad (1.5)$$

где C — некоторая константа, $C = \left(\int_0^\infty |B^* e^{-\bar{\lambda}t} q(t)|^2 dt \right)^{1/2} > 0$.

Выберем $u(t)$ в виде $u(t) = -R^{-1} B^* e^{-A^*t} N^{-1}(T) x$. Нетрудно видеть, что это управление переводит точку x в начало координат. Тогда из (1.5) имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{C} |(x, y)| &\leq \left(\int_0^T (Ru(t), u(t)) dt \right)^{1/2} = \left(\int_0^T (B^* e^{-A^*t} N^{-1}(T) x, \right. \\ &\quad \left. R^{-1} B^* e^{-A^*t} N^{-1}(T) x) dt \right)^{1/2} = (N(T) N^{-1}(T) x, \\ &\quad N^{-1}(T) x)^{1/2} = (N^{-1}(T) x, x)^{1/2}, \end{aligned}$$

откуда $(Mx, x) \geq \frac{1}{C^2} |(x, y)|^2 > 0$ (1.6). Неравенство (1.6) противоречит предположению о том, что $Mx = 0$. Лемма доказана.

Лемма 3. $L_0(\tilde{A}) + L_+(\tilde{A}) \subset \text{Ker } M$.

Доказательство. Пусть x — произвольный собственный вектор матрицы $\tilde{A}$, отвечающий собственному значению λ , $\text{Re } \lambda \geq 0$. Покажем, что $Mx = 0$.

От противного. Пусть $Mx \neq 0$. Тогда из соотношения (1.4) следует, что $A^* Mx = -\lambda Mx$ (1.7). Домножая равенство $Ax = BR^{-1} B^* Mx = \lambda x$ скалярно на Mx и используя (1.7), имеем $(Ax, Mx) = (BR^{-1} B^* Mx, Mx) = -\bar{\lambda} (Mx, x) - \|(V\bar{R})^{-1} B^* Mx\|^2 = \lambda (Mx, x)$, т. е. $0 \leq (\bar{\lambda} + \lambda) (Mx, x) = -\|(V\bar{R})^{-1} B^* Mx\|^2$ (1.8). В силу (1.8) $B^* Mx = 0$. Так как $Mx \neq 0$ — собственный вектор матрицы A^* , то отсюда $B^* (A^*)^i Mx = 0$, $i = 1, 2, 3, \dots$, что противоречит полной управляемости системы (1). Следовательно, $Mx = 0$.

Дальнейшее доказательство проведем по индукции. Пусть доказано, что для всех корневых векторов x высоты r матрицы $\tilde{A}$, ле-

жащих в $L_0(\tilde{A}) + L_+(\tilde{A})$, выполнено $Mx = 0$. Докажем, что $My = 0$, где $y \in L_0(\tilde{A}) + L_+(\tilde{A})$ — произвольный корневой вектор высоты $r + 1$.

От противного. Пусть $My \neq 0$. Тогда из соотношения (1.4) и предположения индукции имеем — $(A^* + \lambda I) My = M(\tilde{A} - \lambda I)y = 0$ (1.9), т. е. My — собственный вектор A^* , соответствующий значению $-\bar{\lambda}$. Как и ранее, из равенства $Ay - BR^{-1}B^*My = \lambda y + x$, где x — корневой вектор высоты r . Используя (1.9), получаем $(Ay, My) - (BR^{-1}B^*My, My) = -\bar{\lambda}(My, y) - \|(V\bar{R})^{-1}B^*My\|^2 = \lambda(My, y) + (x, My) = \lambda(My, y)$, так как $(x, My) = (Mx, y) = 0$ в силу предположения индукции. Отсюда $0 \leq (\lambda + \bar{\lambda})(My, y) = -\|(V\bar{R})^{-1} \times \times B^*My\|^2$, что противоречит полной управляемости системы (1.7). Лемма доказана.

Лемма 4. $\text{Im } M \subset L_+(A^*)$.

Доказательство. Пусть $y_1, \dots, y_n$ — базис пространства E_n , состоящий из собственных и корневых векторов оператора $\tilde{A}$. Тогда $\text{Im } M = L(My_1, \dots, My_n)$.

Пусть $My_i \neq 0$ и λ_i — собственное значение, отвечающее корневому вектору y_i ; i — фиксированное произвольное, $1 \leq i \leq n$.

В силу леммы 3 $\text{Re } \lambda_i < 0$. Имеем, используя соотношение (1.4)

$$(A^* + \lambda I) My_i = (A^* + \lambda I) My_i^0 = My_i^1,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$(A^* + \lambda I) My_i^{r-1} = 0,$$

где r — высота корневого вектора y_i . Тогда $(A^* + \lambda I)^r My_i = 0$, следовательно, $My_i \in L_+(A^*)$.

В силу произвольности i , $1 \leq i \leq n$ лемма доказана.

Основные результаты. Теорема 1. Спектр матрицы $\tilde{A} = A - BR^{-1}B^*M$ лежит в замкнутой левой полуплоскости, т. е. все пространство может быть представлено в виде прямой суммы $E_n = L_-(\tilde{A}) + L_0(\tilde{A})$, где $L_0(\tilde{A}) = L_0(A)$, $L_-(\tilde{A}) \supset L_-(A)$.

Доказательство. Из лемм 2, 3 непосредственно следует, что $L_+(\tilde{A}) = \{0\}$, так что $E_n = L_-(\tilde{A}) + L_0(\tilde{A})$. Из леммы 3 следует, что $L_0(\tilde{A}) \subset \text{Ker } M$, откуда $L_0(\tilde{A}) \subseteq L_0(A)$ (2.1). Действительно, $\tilde{A}x = Ax$ для $\forall x \in L_0(\tilde{A})$. Поэтому $\tilde{A}^2x = A^2x + BR^{-1}B^*MAx = A^2x + BR^{-1}B^*M\tilde{A}x = A^2x$. Аналогично $\tilde{A}^nx = A^nx$, $\forall n = 1, 2, \dots$, что и доказывает данное включение.

Далее, из леммы 2 следует, что $\dim L_+(A) = \dim L_+(A^*) \leq \dim \text{Im } M$. Но тогда из леммы 4 заключаем, что $\text{Im } M = L_+(A^*)$. Отсюда $\text{Ker } M = L_0(A) + L_-(A)$, откуда, как и ранее, $L_0(A) \subseteq L_0(\tilde{A})$ (2.2), $L_-(A) \subset L_-(\tilde{A})$ (2.3).

Утверждение теоремы следует из включений (2.1) — (2.3).

Теорема 2. (О решении задачи оптимальной стабилизации).

1. Для любых начальных данных $x \in L_-(\tilde{A})$ управление $u = u(x) = -R^{-1}B^*Mx$ дает оптимальное решение задачи (1), (3). 2. Если $x \notin L_-(\tilde{A})$, то оптимального решения задачи (1), (3) не существует.

Доказательство. Обозначим $m(x) = \inf_{u(t) \in \Omega} J(u)$, где $J(u) =$

$$= \int_0^\infty (Ru(t), u(t)) dt; \Omega — \text{множество ограниченных измеримых управлений, переводящих начальное состояние } x \text{ в начало координат за бесконечное время.}$$

Докажем, что $m(x) = (Mx, x)$. Действительно, пусть

$$u_k(t) = \begin{cases} -R^{-1}B^*e^{-A^*t}N^{-1}(k)x, & t \in [0, k], \\ 0, & t \in (k, \infty), \end{cases}$$

$$k = 1, 2, \dots$$

Тогда $J(u_k) = (N^{-1}(k)x, x)$, $k = 1, 2, \dots$. Отсюда $m(x) \leq (Mx, x)$ (2.4). Пусть $m(x) < (Mx, x)$. Тогда существуют $\varepsilon > 0$ и управление $\bar{u}(t)$, переводящие точку x в начало координат за бесконечное время, и такие, что

$$m(x) \leq \int_0^\infty (R\bar{u}(t), \bar{u}(t)) dt < (Mx, x) - \varepsilon \quad (2.5).$$

Пусть $\bar{x}(t)$ — решение уравнения $\dot{x} = Ax + B\bar{u}(t)$. Поскольку $\bar{x}(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$, то $\exists T > 0$ такое, что $(N^{-1}(1)\bar{x}(T), \bar{x}(T)) < \varepsilon$ (2.6).

Зададим управление $u(t)$ на отрезке $[0, T+1]$ формулой

$$u(t) = \begin{cases} \bar{u}(t), & t \in [0, T] \\ -R^{-1}B^*e^{-A^*(t-T)}N^{-1}(1)\bar{x}(T), & t \in (T, T+1]. \end{cases}$$

Ясно, что управление $\bar{u}(t)$ переводит точку x в начало координат за время $T+1$, и в силу (2.5), (2.6)

$$\int_0^{T+1} (R\bar{u}(t), \bar{u}(t)) dt < (Mx, x). \quad (2.7)$$

Кроме того, (см. [2, с. 214]), известно, что для любого управления $\tilde{u}(t)$, переводящего точку x в точку 0 за время $T+1$, выполнено

$$\int_0^{T+1} (R\tilde{u}(t), \tilde{u}(t)) dt \geq (N^{-1}(T+1)x, x) \geq (Mx, x). \quad (2.8)$$

Противоречие между (2.7) и (2.8) показывает, с учетом (2.4), что $m(x) = (Mx, x)$.

Докажем утверждение теоремы 1. Пусть $x \in L_-(\tilde{A})$, $x(t)$ — решение уравнения (1) с управлением $u(x) = -R^{-1}B^*Mx$. Тогда $x(t) \rightarrow 0$, $t \rightarrow \infty$. С другой стороны, в силу (1.4)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(Mx(t), x(t)) &= (MAx(t), x(t)) + (A^*Mx(t), x(t)) - \\ &- 2(MBR^{-1}B^*Mx(t), x(t)) = -(MBR^{-1}B^*Mx(t), x(t)) = \\ &= -(Ru(x(t)), u(x(t))). \end{aligned} \quad (2.9)$$

Интегрируя соотношение от 0 до T , получаем $\int_0^T (Ru(x(t)), u(x(t))) \times$
 $\times dt = - \int_0^T \frac{d}{dt}(Mx(t), x(t)) dt = (Mx, x) - (Mx(T), x(T)) \xrightarrow{T \rightarrow \infty} (Mx, x) =$
 $= m(\tilde{x})$, что и доказывает утверждение теоремы 1.

Докажем утверждение 2. Пусть вначале $x \in L_0(\tilde{A}) = L_0(A)$ (в силу теоремы 1). В силу леммы 3 $L_0(A) \subset \text{Ker } M$, т. е. $m(x) = (Mx, x) = 0$. Поскольку управление $u \equiv 0$ не переводит точку x в точку 0, то утверждение 2 в этом случае доказано.

Пусть $x \notin L_-(\tilde{A})$. Тогда из теоремы 1 следует, что $x = y + z$, где $y \in L_-(\tilde{A})$, $z \in L_0(\tilde{A})$.

Пусть $v(t)$ — любое управление, переводящее точку x в точку 0 за бесконечное время, а $x(t)$ — соответствующее ему решение уравнения (1) такое, что $J(v) = \int_0^\infty (Rv(t), v(t)) dt = m(x)$. Обозначим

$y(t)$ — решение уравнения (1) с начальным условием y и управлением $u(y) = -R^{-1}B^*My$. В силу линейности уравнения (1) ясно, что управление $w(t) = v(t) - u(y(t))$ переводит точку z в начало координат.

Рассмотрим $\frac{d}{dt}(My(t), x(t)) = (M\tilde{A}y(t), x(t)) + (My(t), Ax(t) + Bv(t)) = ((MA - MBR^{-1}B^*M + A^*M)y(t), y(t)) + (My(t), Bv(t))$. В силу уравнения (1.4) $\frac{d}{dt}(My(t), x(t)) = (My(t), Bv(t)) = (RR^{-1} \times B^*My(t), v(t)) = (Ru(y(t)), v(t))$ (2.10). Следовательно, для $\forall T > 0$, в силу (2.9), (2.10), имеем

$$\begin{aligned} \int_0^T (Rw(t), w(t)) dt &= \int_0^T (Rv(t), v(t)) dt - 2 \int_0^T (Rv(t), u(y(t))) dt + \\ &+ \int_0^T (Ru(y(t)), u(y(t))) dt = \int_0^T (Rv(t), v(t)) dt - 2(My, x) + \\ &+ (My, y) + 2(My(T), x(T)) - (My(T), y(T)) \xrightarrow{T \rightarrow \infty} (Mx, x) - \\ &- 2(My, x) + (My, y), \end{aligned} \quad (2.11)$$

так как $x(T)$, $y(T)$ стремятся к 0, когда $T \rightarrow \infty$. Поскольку в силу теоремы 1 $Mx = My$, то из (2.11) получим $J(w) = (My, x) - 2 \times \times (My, x) + (Mx, y) = -(My, x) + (Mx, y) = 0$, так как $(Mx, y) = (Mx, x)$ — вещественное число; т. е. получаем, что $w(t)$ должно равняться 0, однако, как мы видели ранее, это управление не переводит точку z в точку 0, что и заканчивает доказательство утверждения 2. Теорема полностью доказана.

Следствие. Если спектр матрицы A не пересекается с мнимой осью, то для любого начального состояния $x \in E_n$ управление $u(x) = -R^{-1}B^*Mx$ дает оптимальное решение задачи (1), (3).

Пример. Пусть управляемый процесс описывается системой

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -11x_1 + 6x_2; \\ \dot{x}_2 = -20x_1 + 11x_2 + u, \end{cases} \quad J(u) = \int_0^{\infty} u^2(t) dt \quad \text{или} \quad \dot{x} = Ax + Bu, \quad x \in \mathbb{R}_2, \quad u \in \mathbb{R},$$

$$A = \begin{pmatrix} -11 & 6 \\ -20 & 11 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$N(\Theta) = \begin{pmatrix} \frac{9}{2}e^{2\Theta} - \frac{9}{2}e^{-2\Theta} - 18\Theta & \frac{15}{2}e^{2\Theta} - 9e^{-2\Theta} - 33\Theta + \frac{3}{2} \\ \frac{15}{2}e^{2\Theta} - 9e^{-2\Theta} - 33\Theta + \frac{3}{2} & \frac{25}{2}e^{2\Theta} - 18e^{-2\Theta} - 60\Theta + \frac{11}{2} \end{pmatrix},$$

$$N^{-1}(\Theta) = \frac{1}{\frac{9}{4}e^{2\Theta} + \frac{9}{4}e^{-2\Theta} - 9\Theta^2 - \frac{18}{4}} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} \frac{25}{2}e^{2\Theta} - 18e^{-2\Theta} - 60\Theta + \frac{11}{2} & -\frac{15}{2}e^{2\Theta} + 9e^{-2\Theta} + 33\Theta - \frac{3}{2} \\ -\frac{15}{2}e^{2\Theta} + 9e^{-2\Theta} + 33\Theta - \frac{3}{2} & \frac{9}{2}e^{2\Theta} - \frac{9}{2}e^{-2\Theta} - 18\Theta \end{pmatrix},$$

$$M = \begin{pmatrix} \frac{50}{9} - \frac{10}{3} \\ -\frac{10}{3} & 2 \end{pmatrix},$$

$$u = -B^*Mx = \frac{10}{3}x_1 - 2x_2.$$

Система принимает вид

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -11x_1 + 6x_2; \quad \dot{x}_2 = -20x_1 + 11x_2 + \frac{10}{3}x_1 - 2x_2 = \\ &= -\frac{50}{3}x_1 + 9x_2 \quad (\lambda_1 = \lambda_2 = -1). \end{aligned}$$

Оптимальное значение критерия для начального состояния $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ равно $m(x) = \frac{50}{9}x_1^2 + 2x_2^2 - \frac{20}{3}x_1x_2$.

Список литературы: 1. Красовский Н. Н. Проблемы стабилизации управляемых движений. — В кн.: Теория устойчивости движения. 2-е изд., исправл., М.: Наука, 1966, с. 475—514. 2. Ли Э. Б., Маркус Л. Основы теории опти-

мального управления.— М.: Наука, 1972.— с. 574. 3. Летов А. М. Динамика полета и управление.— М.: Наука, 1969.— 359 с. 4. Э. Г. Альбрехт, Г. С. Шелементьев. Лекции по теории стабилизации.— Свердловск: Изд-во Уральск. ун-та, 1972.— 279 с.

Поступила в редколлегию 14.04.83.

УДК 517.934.1

С. И. ВОВНА, Е. Н. ПОДОЛЬСКИЙ, канд. физ.-мат. наук

О ПРЕДЕЛЬНОМ ДВИЖЕНИИ ОДНОЙ СЛЕДЯЩЕЙ СИСТЕМЫ

Данная статья является обобщением работ [1—3]. Самоходная машина, управляемая автоматом вождения, при каждом движении отслеживает полосу шириной $2h$ и с помощью маркерного устройства вычерчивает на плоскости очередную полосу. При этом в отличие от работы [1], возникающие автоколебания не имитируются синусоидами, а строятся с помощью нелинейной модели, как в работах [2, 3].

Опишем кратко математическую модель последовательных движений данной следящей системы.

На оси машины имеется точка Φ , скорость которой постоянна по модулю и направлена вдоль оси. Угол γ между осью ox и осью машины отсчитывается от оси ox против часовой стрелки. Угол α — угол поворота передних колес машины (середина оси которых — точка B оси машины) по отношению к оси машины, угол φ — угол поворота штанги копира CP по отношению к оси машины (оба угла также отсчитываются против часовой стрелки). Точка P — конец копира находится в отслеживаемой полосе $f(x_p) - h \leq y_p(x_p) \leq f(x_p) + h$, где $y = f(x)$ — уравнение оси полосы. В точке S оси машины перпендикулярно к оси прикреплен штанга маркера SM , траектория точки M является осью следующей полосы той же ширины $2h$. Обозначим $\Phi B = L_B$, $\Phi C = L_C$, $\Phi S = L_S$, $CP = l$, $L_C - l = L$, $SM = D$.

Теоретический закон управления, осуществляемого автоматом вождения, таков: $\alpha = -k\varphi$. Реально существующие в автомате зона нечувствительности, люфты и запаздывание приводят к отклонению от теоретического закона. Управление происходит следующим образом (см. [2, 3]): $\alpha(t)$ остается постоянным, если отклонение $\xi(t)$ от теоретического закона

$$\xi(t) = \varphi(t) + \frac{\alpha(t)}{k}$$

заклучено в пределах $-\delta_1 < \xi < \delta_1$. Когда величина $\xi(t)$ достигает значения δ_1 , то через промежуток времени Δ угол α уменьшается скачком, причем величина скачка определяется из условия: $\xi(t)$ после скачка равно δ_2 ($-\delta_1 < \delta_2 < \delta_1$). Этот скачок мы называем правым поворотом. Совершенно аналогично (с заменой δ_1, δ_2 на $-\delta_1, -\delta_2$) определяется левый поворот, при котором угол α увеличивается скачком.

Из уравнений движения машины $\dot{x}_\Phi = v$; $\dot{y}_\Phi = v\gamma$; $\gamma = \frac{v}{L_B} \alpha$ (1)

следует, что в промежутках между скачками ($\alpha(t) = \alpha_0$) траектория точки M является дугой параболы:

$$x_\Phi = x_\Phi^0 + vt; \quad \gamma = \gamma_0 + \frac{v}{L_B} \alpha_0 t; \quad y_\Phi = y_\Phi^0 + v\gamma_0 t + \frac{v^2}{2L_B} \alpha_0 t^2,$$

$$x_M = x_\Phi^0 + vt - L_S - D\gamma; \quad y_M = y_\Phi - L_S\gamma + D\left(1 - \frac{\gamma^2}{2}\right),$$

откуда $y_M = y_M^0 + N(x_M - x_{M_0}) + Q(x_M - x_{M_0}^0)^2$, где $Q = \frac{\alpha_0}{2(L_B - D\alpha_0)}$;

$$N = \gamma_0 - 2L_S Q.$$

Вычисления, проведенные студентами Харьковского университета О. В. Серебряковой и З. М. Гарашко, показали, что в широком диапазоне значений параметров машины и автомата вождения (но при достаточно малом h) для любой начальной полосы при последовательных движениях быстро устанавливается некоторая предельная полоса, ось которой является периодической кривой. Каждый период состоит из двух дуг парабол — с положительной и отрицательной кривизной, длина периода Π равна длине периода автоколебаний при отслеживании прямолинейной полосы [3]:

$$\Pi = \frac{4L_B \gamma_0}{\alpha_0} = \frac{4L_B (l\delta_1 + l\delta_2 + 2h) - 2kv\Delta (2L - v\Delta) (l\delta_2 + h)}{kL (l\delta_1 - l\delta_2) + kv\Delta (l\delta_2 + h)}.$$

Каждый сигнал правого поворота (обращение $\xi(t)$ в δ_1) и сам поворот осуществляются при движении точки P по верхней границе участка полосы положительной кривизны, а сигнал левого поворота и левый поворот происходят при движении точки P по нижней границе участка полосы отрицательной кривизны.

Эти результаты численного исследования позволяют найти ось предельной полосы аналитически, исходя из того, что она является кусочно-параболической кривой заданного периода и такой, что при ее отслеживании точка M описывает точно такую же (с точностью до сдвига по осям ox и oy) кривую.

Пусть искомая ось полосы имеет вид

$$y = f(x) = \begin{cases} Q_1 x^2 + N_1 x + Z_1 & (0 \leq x \leq \Pi_1, Q_1 > 0); \\ Q_2 (x - \Pi_1)^2 + N_2 (x - \Pi_1) + Z_2 & (\Pi_1 \leq x \leq \Pi, Q_2 < 0) \end{cases}$$

и продолжается периодически на всю ось (величины $Q_1, N_1, Q_2, N_2, \Pi_1$ подлежат определению); из непрерывности $f(x)$ следует $Z_2 = Z_1 + Q_1 \Pi_1^2 + N_1 \Pi_1$, (величина Z_1 несущественна, т. к. характеризует сдвиг вдоль оси oy).

Из уравнений (1) удобно исключить время:

$$\frac{dy_\Phi}{dx_P} = \gamma; \quad \frac{d\gamma}{dx_P} = \frac{\alpha}{L_B},$$

кроме того, нам потребуется уравнение

$$\frac{d\gamma}{dx_M} = 2Q. \quad (2)$$

Правый поворот происходит, когда точка P находится на участке $0 < x < \Pi_1$; обозначим абсциссу x_P этой точки через s_1 , а значение α после скачка через $-\alpha_2$ ($\alpha_2 > 0$). Левый поворот происходит на участке $\Pi_1 < x < \Pi$, в точке $x_P = \Pi_1 + s_2$, и угол α принимает после скачка значение α_1 ($\alpha_1 > 0$).

Так как траектория оси предельной полосы строилась при тех же значениях углов α и γ , то

$$Q_1 = \frac{\alpha_1}{2(L_B - D\alpha_1)}; \quad N_1 = -\gamma_2 - 2L_S Q_1;$$

$$Q_2 = \frac{-\alpha_2}{2(L_B + D\alpha_2)}; \quad N_2 = \gamma_2 - 2L_S Q_2 \quad (3)$$

(в формуле для N_1 вместо γ_1 стоит $-\gamma_2$, так как из условий периодичности $y_\Phi(x_P)$ следует, что максимальное значение $\gamma(s_1) = \gamma_2$ должно совпадать с модулем минимального значения $\gamma(\Pi_1 + s_2) = -\gamma_1 < 0$). Из условия периодичности $\gamma(x_P)$ и уравнения (2) следует $\gamma_2 = Q_1 \Pi_1 = -Q_2(\Pi - \Pi_1)$ (4), а из соотношения $x_M(\Pi_1 + s_2) - x_M(s_1) = \Pi - \Pi_1$ получаем уравнение $\Pi_1 + s_2 - s_1 + 2D\gamma_2 = \Pi - \Pi_1$ (5).

Остальные уравнения, связывающие неизвестные $\alpha_1, \alpha_2, \Pi_1, \gamma_2, s_1, s_2, Q_1, Q_2, N_1, N_2$, выводятся из формулы $y_P(x_P) = y_\Phi + L\gamma - l\Phi$.

Пусть в точках $x_P^{(1)}$ и $x_P^{(2)}$ известны значения угла Φ . Тогда

$$l\Phi(x_P^{(2)}) - l\Phi(x_P^{(1)}) = \int_{x_P^{(1)}}^{x_P^{(2)}} \gamma(x_P) dx_P +$$

$$+ L \int_{x_P^{(1)}}^{x_P^{(2)}} \frac{\alpha}{L_B} dx_P - y_P(x_P^{(2)}) + y_P(x_P^{(1)}). \quad (6)$$

Значения φ нам известны в точках $s_1 - v\Delta$, s_1 , $\Pi_1 + s_2 - v\Delta$, $\Pi_1 + s_2$:

$$\begin{aligned}\varphi(s_1 - v\Delta) &= \xi(s_1 - v\Delta) - \frac{\alpha_1}{k} = \delta_1 - \frac{\alpha_1}{k}; \quad \varphi(s_1) = \xi(s_1 + 0) + \\ &+ \frac{\alpha_2}{k} = \delta_2 + \frac{\alpha_2}{k}; \quad \varphi(\Pi_1 + s_2 - v\Delta) = \xi(\Pi_1 + s_2 - v\Delta) + \\ &+ \frac{\alpha_2}{k} = -\delta_1 + \frac{\alpha_2}{k}; \quad \varphi(\Pi_1 + s_2) = \xi(\Pi_1 + s_2 + 0) - \frac{\alpha_1}{k} = -\delta_2 - \frac{\alpha_1}{k}.\end{aligned}$$

Применяя формулу (6) к промежуткам $[s_1 - v\Delta, s_1]$, $[\Pi_1 + s_2 - v\Delta, \Pi_1 + s_2]$, $[s_1, \Pi_1 + s_2]$ и учитывая, что на первом из них $y_P(x_P) = f(x_P) + h$, на втором $y_P(x_P) = f(x_P) - h$, а на концах третьего точка P находится на противоположных границах полосы, получим три уравнения:

$$\begin{aligned}l\left(\delta_2 + \frac{\alpha_2}{k}\right) - l\left(\delta_1 - \frac{\alpha_1}{k}\right) &= \int_{s_1 - v\Delta}^{s_1} \left[\gamma_2 + \frac{\alpha_1}{L_B}(x_P - s_1) \right] dx_P + \frac{Lv\Delta}{L_B} \alpha_1 - \\ &- (Q_1 s_1^2 + N_1 s_1 + Z_1 + h) + Q_1 (s_1 - v\Delta)^2 + N_1 (s_1 - v\Delta) + \\ &+ Z_1 + h, \quad l\left(-\delta_2 - \frac{\alpha_1}{k}\right) - l\left(-\delta_1 + \frac{\alpha_2}{k}\right) = \int_{\Pi_1 + s_2 - v\Delta}^{\Pi_1 + s_2} \left[-\gamma_2 - \frac{\alpha_2}{L_B} \times \right. \\ &\times (x_P - \Pi_1 - s_2) \left. \right] dx_P - \frac{Lv\Delta}{L_B} \alpha_2 - (Q_2 s_2^2 + N_2 s_2 + Z_2 - h) + \\ &+ Q_2 (s_2 - v\Delta)^2 + N_2 (s_2 - v\Delta) + Z_2 - h, \quad l\left(-\delta_2 - \frac{\alpha_1}{k}\right) - \\ &- l\left(\delta_2 + \frac{\alpha_2}{k}\right) = \int_{s_1}^{\Pi_1 + s_2} \left[\gamma_2 - \frac{\alpha_2}{L_B}(x_P - s_1) \right] dx_P + L(\gamma(\Pi_1 + s_2) - \\ &- \gamma(s_1)) - (Q_2 s_2^2 + N_2 s_2 + Z_2 - h) + Q_1 s_1^2 + N_1 s_1 + Z_1 + h.\end{aligned}$$

После некоторых упрощений эти уравнения принимают вид

$$l(\delta_2 - \delta_1) + \frac{l}{k}(\alpha_1 + \alpha_2) = v\Delta \left[\frac{L}{L_B} \alpha_1 - 2Q_1 s_1 + 2L_S Q_1 - \left(\frac{\alpha_1}{2L_B} - Q_1 \right) v\Delta \right], \quad (7)$$

$$l(\delta_1 - \delta_2) - \frac{l}{k}(\alpha_1 + \alpha_2) = v\Delta \left[-\frac{L}{L_B} \alpha_2 - 2Q_2 s_2 + 2L_S Q_2 + \left(\frac{\alpha_2}{2L_B} + Q_2 \right) v\Delta \right], \quad (8)$$

$$2l\delta_2 + \frac{l}{k}(\alpha_1 + \alpha_2) = 2L\gamma_2 + Q_2 s_2^2 + N_2 s_2 - Q_1 s_1^2 - N_1 s_1 + Q_1 \Pi_1^2 + N_1 \Pi_1 - 2h. \quad (9)$$

Таким образом, мы имеем 10 уравнений (3), (4), (5), (7), (8), (9) с 10-ю неизвестными.

Эту систему не удалось решить в замкнутом виде. Ее можно привести к системе двух уравнений с двумя неизвестными α_1 и α_2 :

$$l \left(\delta_2 - \delta_1 + \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{k} \right) = v \Delta \frac{D}{L_B^2} \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\alpha_1 - \alpha_2 + \frac{2D}{L_B} \alpha_1 \alpha_2} \times \\ \times \left[\left(L - \frac{v \Delta}{2} \right) (\alpha_1 + \alpha_2) + \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2} \Pi \right], \quad (10)$$

$$2l \delta_2 + 2h + \frac{l(\alpha_1 + \alpha_2)}{k} = \frac{\alpha_1 \alpha_2 \Pi}{2L_B(\alpha_1 + \alpha_2)} \left\{ 4(L - \omega) + \right. \\ \left. + \Pi(1 - \theta) \right\} \theta + 2\omega - [(L - \omega)^2 - L_B^2] \frac{L_B(\alpha_1 + \alpha_2)}{2(L_B - D\alpha_1)(L_B + D\alpha_2)}, \quad (11)$$

где введены обозначения

$$\omega = \frac{D}{L_B} \left(L - \frac{v \Delta}{2} \right) \frac{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \frac{D}{L_B} \alpha_1 \alpha_2 (\alpha_1 - \alpha_2)}{\alpha_1 - \alpha_2 + \frac{2D}{L_B} \alpha_1 \alpha_2}, \\ \theta = \frac{D}{L_B} \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\alpha_1 - \alpha_2 + \frac{2D}{L_B} \alpha_1 \alpha_2}.$$

Для решения этой системы двух уравнений с двумя неизвестными вида $f(\alpha_1, \alpha_2) = 0$; $F(\alpha_1, \alpha_2) = 0$ был применен следующий алгоритм. Так как функция F чрезвычайно громоздка, то двигались по кривой $f(\alpha_1, \alpha_2) = 0$ и следили только за знаком $F(\alpha_1, \alpha_2)$. Движение осуществлялось по такому правилу. В точке $(\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2)$ кривой находился орт касательной $\tau = (\tau_1, \tau_2)$. Начальное движение шло в точку $(\alpha_1^0, \alpha_2^0) = (\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2) + h\tau$.

Если $|\tau_1| > |\tau_2|$, то отыскивался корень α_2^* уравнения $f(\alpha_1^0, \alpha_2) = 0$ методом Ньютона с начальным приближением α_2^0 и, таким образом, мы попадали в точку кривой (α_1^*, α_2^0) .

Если же $|\tau_1| \leq |\tau_2|$, то находился корень α_1^* уравнения $f(\alpha_1, \alpha_2^0) = 0$ и мы переходили в точку кривой (α_1^*, α_2^0) .

Движение с шагом h продолжалось до перемены знака функции $F(\alpha_1, \alpha_2)$. После этого полученное грубое значение решения системы уточнялось за счет уменьшения шага h .

Список литературы: 1. Вовна С. И., Подольский Е. Н. Исследование накопления погрешностей при рекуррентных движениях одной следящей системы. — Вестн. Харьк. ун-та, № 230. Механика, теория управления и математическая физика, 1982, вып. 47, с. 18—23. 2. Вовна С. И., Подольский Е. Н. Автоколебания системы самоходная машина — автомат вождения. — Вестн. Харьк. ун-та. Прикладная математика и механика, 1979, вып. 44, с. 11—22. 3. Вовна С. И., Подольский Е. Н. Автоколебания при отслеживании полосы. — Вестн. Харьк. ун-та, № 230. Механика, теория управления и математическая физика, 1982, вып. 47, с. 14—19.

Поступила в редколлегию 04.02.83.

Ю. Г. СТОЯН, д-р техн. наук,
В. Я. ВИНАРСКИЙ

ОБ ОДНОМ ОБОБЩЕНИИ ТЕОРЕМЫ ВЫБОРА БЛЯШКЕ

В работе [1] доказана так называемая теорема выбора Бляшке, означающая локальную компактность пространства выпуклых тел относительно метрики Хаусдорфа [2]. Приведем формулировку теоремы, следуя [1].

Теорема выбора Бляшке. Из бесконечного множества M равномерно ограниченных выпуклых тел K всегда можно выбрать последовательность тел $K_1, \dots, K_m, \dots$, которая сходится к некоторому выпуклому телу.

Г. Хадвигер обобщил [3] теорему выбора Бляшке на случай системы компактных множеств конечномерного евклидова пространства, снабженной метрикой Хаусдорфа.

В данной работе делается обобщение теоремы выбора Бляшке для системы ограниченных множеств конечномерного евклидова пространства с метрикой, порождающей более сильную топологию, чем топология метрики Хаусдорфа.

Введем эту метрику. Будем рассматривать систему X_0^n непустых ограниченных подмножеств n -мерного евклидова пространства E^n и систему $\bar{X}_0^n$ непустых компактных подмножеств E^n , при этом $\bar{X}_0^n \subset X_0^n$.

Определим на системе $\bar{X}_0^n$ метрику ρ_3 [5] следующими тождественными соотношениями: $\rho_3(T_1, T_2) = \max \{ \max_{t_1 \in T_1} \min_{t_2 \in T_2} \rho(t_1, t_2), \max_{t_2 \in T_2} \min_{t_1 \in T_1} \rho(t_1, t_2), \max_{t_1 \in \text{Fr} T_1, t_2 \in \text{Fr} T_2} \min_{t_1 \in \text{Fr} T_1, t_2 \in \text{Fr} T_2} \rho(t_1, t_2) \}$ (1), $\rho_3(T_1, T_2) = \max \{ \rho_1, (T_1, T_2), \rho_1(\text{Fr} T_1, \text{Fr} T_2) \}$ (2), где $T_1, T_2 \in \bar{X}_0^n$, $\rho(\cdot)$ — евклидова метрика пространств E^n ; $\text{Fr} T$ — граница множества T ; $\rho_1(\cdot)$ — метрика Хаусдорфа.

Из равенства (2) вытекает, что $\rho_3(T_1, T_2) \geq \rho_1(T_1, T_2)$. Следовательно, метрика ρ_3 индуцирует топологию сильнее, чем топология метрики Хаусдорфа. Топологическую неэквивалентность метрик ρ_1 и ρ_3 можно подтвердить следующим примером. Последовательность ограниченных множеств $\{T_m\} \subset \bar{X}_0^n$, где $T_m = \{x \in E^n \mid \rho(x, 0) \leq 1\} = T$ при нечетном m и $T_m = \{x \in E^n \mid 1/m \leq \rho(x, 0) \leq 1\}$ при четном m , сходится по метрике Хаусдорфа к множеству T и не имеет предела на системе $\bar{X}_0^n$ относительно метрики ρ_3 .

Продолжим метрику ρ_3 на систему множеств X_0^n по формуле $\rho_3(T_1, T_2) = \max \{ \rho_1(\text{Cl} T_1, \text{Cl} T_2), \rho_1(\text{Fr} T_1, \text{Fr} T_2) \}$ (3). Здесь $T_1, T_2 \in X_0^n$, $\text{Cl} T$ — замыкание множества T .

Функция ρ_3 , определенная на X_0^n соотношением (3), удовлетворяет, очевидно, аксиоме симметрии и неравенству треугольника. Однако аксиома тождества несправедлива, поскольку два ограниченных множества могут иметь одинаковые замыкания и совпадающие границы, но отличаться друг от друга. Поэтому на системе X_0^n функция ρ_3 является псевдометрикой [4] и индуцирует псевдометрическое пространство (X_0^n, ρ_3) .

Для образования метрического пространства на базе псевдометрического пространства (X_0^n, ρ_3) воспользуемся теоремой 15 работы [4]. Введем на X_0^n отношение эквивалентности R следующим образом:

$$T_1 R T_2 \leftrightarrow \begin{cases} \text{Fr } T_1 = \text{Fr } T_2; \\ \text{Cl } T_1 = \text{Cl } T_2, \end{cases} \quad (4)$$

где $T_1, T_2 \in X_0^n$, « $\leftrightarrow$ » — эквивалентность по определению.

Отношение R образует фактор-множество (X_0^n/R) , на котором функция ρ_3 является метрикой и индуцирует метрическое фактор-пространство $(X_0^n/R, \rho_3)$. Осуществим изометрическое вложение $g: (\bar{X}_0^n, \rho_3) \rightarrow (X_0^n/R, \rho_3)$ пространства $(\bar{X}_0^n, \rho_3)$ в фактор-пространство $(X_0^n/R, \rho_3)$, отождествив всякое компактное множество системы $\bar{X}_0^n$ с классом фактор-системы X_0^n/R , содержащим данное множество. В дальнейшем результат указанного вложения для простоты будем обозначать также через $(\bar{X}_0^n, \rho_3)$. При этом $(\bar{X}_0^n, \rho_3)$ является подпространством метрического пространства $(X_0^n/R, \rho_3)$. Неизометричность пространств $(\bar{X}_0^n, \rho_3)$ и $(X_0^n/R, \rho_3)$ будет показана ниже.

Пространство $(\bar{X}_0^n, \rho_3)$ не полно. Так, пусть B^n — замкнутый единичный шар пространства E^n с центром в нуле. В качестве фундаментальной последовательности выберем последовательность конечных $1/m$ -сетей множества B^n , для которой, очевидно, не существует предельный элемент в $(\bar{X}_0^n, \rho_3)$.

Справедлива [5] следующая

Лемма. Пространство (X_0^n, ρ_3) всюду плотно в метрическом пространстве $(X_0^n/R, \rho_3)$.

Приведенную лемму используем для доказательства полноты пространства $(X_0^n/R, \rho_3)$.

Теорема 1. Пространство $(X_0^n/R, \rho_3)$ является полным метрическим пространством.

Доказательство. Рассмотрим произвольную фундаментальную последовательность $\{A_k\}$ пространства $(X_0^n/R, \rho_3)$. Требуется доказать, что она сходится по метрике ρ_3 к некоторому классу $A \in X_0^n/R$. Для этого образуем последовательность компактов $\{B_k\} \subset \bar{X}_0^n$, для которой $\rho_3(A_k, B_k) \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$. В силу леммы это можно сделать.

Легко видеть, что, во-первых, последовательность $\{B_k\}$ фундаментальна по ρ_3 и, во-вторых, из ее сходимости к некоторому множеству системы X_0^n относительно ρ_3 следует сходимость последовательности $\{A_k\}$ к соответствующему классу пространства $(X_0^n/R, \rho_3)$, а значит, и полнота этого пространства.

Итак, докажем сходимость последовательности $\{B_k\}$ по ρ_3 . Из фундаментальности $\{B_k\}$ относительно ρ_3 следует фундаментальность последовательностей $\{B_k\}$ и $\{Fr B_k\}$ относительно метрики Хаусдорфа в пространстве $(\bar{X}_0^n, \rho_1)$. В силу полноты $(\bar{X}_0^n, \rho_1)$ [3] последовательности $\{B_k\}$ и $\{Fr B_k\}$ сходятся по метрике Хаусдорфа к некоторым множествам B и $B^* \in \bar{X}_0^n$ соответственно. Докажем, что $Fr B \subset B^* \subset B$ (5). Очевидно, что $Fr B \subset B$. Кроме этого, $Fr B_k = B_k \cap Fr B_k$. Тогда, учитывая (69) из [3], имеем $\lim_{k \rightarrow \infty} Fr B_k \subset \lim_{k \rightarrow \infty} B_k \cap \lim_{k \rightarrow \infty} Fr B_k$

(здесь $\lim$ — предел по метрике Хаусдорфа). Отсюда следует, что $B^* \subset B$. Докажем теперь, что $Fr B \subset B^*$. Доказательство проведем от противного. Пусть существует точка x такая, что $x \in Fr B$ и $x \notin B^*$. Тогда $\rho(x, B^*) = \min_{t \in B^*} \rho(x, t) = a > 0$ (6). Выберем в ε -ок-

рестности точки x точку $x_1 \in B$. Это возможно, поскольку x является граничной точкой множества B . Пусть $\rho(x_1, B) = \varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_1 < \varepsilon$. Образует множества $B' = B \oplus \frac{\varepsilon_1}{2} B^n$ и $B^{**} = B^* \oplus \frac{\varepsilon_1}{2} B^n$, где $\oplus$ — операция сложения Минковского [3]. Очевидно, $x_1 \in B'$. Вследствие сходимости последовательностей $\{B_k\}$ и $\{Fr B_k\}$ по ρ_1 существует номер N такой, что для всех $m \geq N$ $B_m \subset B'$ и $Fr B_m \subset B^{**}$. Отсюда $x_1 \in B_m$, $\rho(x, B) \geq \rho(x_1, B_m) - \rho_1(B, B_m) = \rho(x_1, Fr B_m) - \rho_1(B, B_m)$.

Устремим ε к нулю, а m — к бесконечности. Тогда $x_1 \rightarrow x$, $Fr B_m \rightarrow B^*(\rho_1)$, $\rho_1(B, B_m) \rightarrow 0$. При этом последнее неравенство после предельного перехода примет вид $\rho(x, B) \geq \rho(x, B^*)$. Учитывая (6), получим $\rho(x, B) \geq a > 0$, которое противоречит условию $x \in Fr B$. Этим доказано включение $Fr B \subset B^*$. Доказательство (5) завершено.

Далее рассмотрим множество $C = B \setminus D$, где $D \subset B^* \setminus Fr B$ не более чем счетное плотное в $(B^* \setminus Fr B)$ множество. Легко показать, что тогда $Fr C = B^*$, $Cl C = B$. Поэтому множество $C \in \bar{X}_0^n$ является пределом фундаментальной последовательности $\{B_k\}$ по ρ_3 , а класс $\tilde{C} \in X_0^n/R$, представленный множеством C , является пределом последовательности $\{A_k\} \subset X_0^n/R$ в пространстве $(X_0^n/R, \rho_3)$. Теорема доказана.

Следствие. Пополнением метрического пространства $(\bar{X}_0^n, \rho_3)$ является пространство $(X_0^n/R, \rho_3)$.

Из полноты пространства $(X_0^n/R, \rho_3)$ также следует неизометричность пространств $(\bar{X}_0^n, \rho_3)$ и $(X_0^n/R, \rho_3)$.

Воспользовавшись теоремой 1, сформулируем и докажем для пространства $(\bar{X}_0^n/R, \rho_3)$ утверждение, обобщающее теорему выбора Бляшке.

Теорема 2. Из бесконечной системы Λ непустых множеств, содержащихся в фиксированном кубе $U \subset E^n$, можно выбрать последовательность $\{A_k\}$, сходящуюся по метрике ρ_3 к непустому множеству A_0 , содержащемуся в U .

Доказательство. Пусть $\Lambda' = \{C|A|A \in \Lambda\}$. Тогда $\Lambda' \subset \bar{X}_0^n$ и для любого $A \in \Lambda$ $C|A \subset U$. Поэтому в силу локальной компактности пространства $(\bar{X}_0^n, \rho_3)$ [3] существует последовательность $\{A_k^*\} = \{C|A_k\} \subset \Lambda'$, сходящаяся по метрике Хаусдорфа к некоторому множеству $A^* \in \bar{X}_0^n$, при этом $A^* \subset U$.

Далее, рассмотрим последовательность $\{Fr A_k^*\} = \{A_k^{**}\} \subset \bar{X}_0^n$. Так как $A_k^{**} \subset U$ и $A_k^{**} \in \bar{X}_0^n$, то на основании локальной компактности $(\bar{X}_0^n, \rho_1)$ существует подпоследовательность $\{A_{k_m}^{**}\}$, сходящаяся по метрике Хаусдорфа к некоторому множеству A^{**} . Отсюда следует, что подпоследовательность $\{A_{k_m}\} \subset \Lambda$, соответствующая подпоследовательности $\{A_{k_m}^{**}\}$, фундаментальна по ρ_3 и на основании теоремы 1 имеет пределом некоторый элемент $A_0 \subset A^* \subset U$. Теорема доказана.

Из теоремы 2 следует локальная компактность фактор-пространства $(\bar{X}_0^n/R, \rho_3)$, что служит обобщением принципа компактности Бляшке [6].

Отметим, что аналогичные результаты для метризованных семейств линейных нормированных подпространств получены в [7, 8].

Список литературы: 1. Бляшке В. Круг и шар. — М.: Наука, 1967. — 232 с. 2. Хаусдорф Ф. Теория множеств. — М.: Л.: ОНТИ, 1937. — 317 с. 3. Хадзигер Г. Лекции об объеме, площади поверхности и изопериметрии. — М.: Наука, 1966. — 416 с. 4. Келли Дж. Л. Общая топология. — М.: Наука, 1981. — 432 с. 5. Стоян Ю. Г., Винарский В. Я. Метрики на системах множеств конечномерного евклидова пространства. — Харьков, 1982. — 46 с. (Препринт / АН УССР. Ин-т пробл. машиностроения; № 178). 6. Иванов А. Б. Бляшке теорема выбора. — В кн.: Математическая энциклопедия, т. 1. — М.: Наука, 1977. — 509 с. 7. Гурарий В. И. О растворах и наклоне подпространств банахова пространства. — Теория функций, функционал. анализ и их прил., 1965, вып. 1, с. 194—204. 8. Гохберг И. Ц., Маркус А. С. Две теоремы о растворе подпространств банахова пространства. — Усп. мат. наук, 1959, 14, вып. 5, с. 135—140.

Поступила в редколлегию 04.02.83.

УДК 517.97

А. Е. ПОДОЛЬСКИЙ

ОПТИМИЗАЦИЯ УПРАВЛЕНИЯ ПРОГРЕВОМ ТУРБИНЫ

С физической точки зрения задача состоит в том, что необходимо обеспечить минимальное время пуска (прогрева оборудования) с учетом заданных тепломеханических ограничений. Так как основным

фактором, ограничивающим скорость прогрева, является разность температур по наиболее термонапряженному сечению, а максимальная скорость прогрева достигается при максимально возможной разности температур, то данная задача состоит из двух этапов: наискорейшего попадания фазовой точки, характеризующей состояние объекта регулирования в окрестность максимально допустимой разности температур;

удержание текущей разности температур в окрестности ограничений.

Так как некоторые параметры модельных соотношений неизвестны, то в алгоритм управления введена идентификация, позволяющая определить значения требуемых параметров непосредственно в процессе управления. В статье приведен алгоритм импульсного управления системой, который может быть сколь угодно близким к оптимальному, а процесс идентификации устойчив к ошибкам измерений и округлений. Простейшая модель процесса: $T_1 \dot{x}_1 = u$; $T_2 \dot{x}_2 = -x_2 + f(x_1)$; $T_3 \dot{x}_3 = x_2 - x_3$, где $x_1(t)$ — параметр, характеризующий интенсивность потока пара $x_2(t)$; $x_3(t)$ — температуры в некоторых термонапряженных сечениях; u — управляющее воздействие. Ограничения таковы: $y(t) = x_2(t) - x_3(t) \leq y_{кр}$, $0 \leq x_1(t) \leq 1$. Управление характеризует скорость изменения $x_1(t)$. Из технических особенностей конструкции следует, что $x_1(t)$ либо постоянно, либо меняется с определенной заданной скоростью, этому соответствует лишь два значения управления — нуль и единица. Алгоритм управления состоит из последовательности импульсов, т. е. промежутков времени, когда $u \equiv 1$ (в остальное время $u \equiv 0$). Следовательно, можно весь процесс разбить на «циклы», если за начало и конец цикла принимать момент переключения управления с $u \equiv 0$ на $u \equiv 1$.

Целью управления является достижение величинами x_2 и x_3 конечного значения X , причем разность $y(t) = x_2(t) - x_3(t)$ не должна превышать заданного $y_{кр}$. Будем считать основными переменными x_1 , x_2 , y . Тогда для них система примет вид: $T_1 \dot{x}_1 = u$; $T_2 \dot{x}_2 = -x_2 + f(x_1)$; $T_3 \dot{y} = -y + \frac{T_3}{T_2}(f(x_1) - x_2)$, где $f(x_1) = f(x_1^j) + k^j(x_1 - x_1^j)$ на j -м цикле управления. Начальные условия $x_1(0) = x_1^0$, $x_2(0) = x_3(0) = f(x_1^0) = X_0$. Приближенно задаем параметры T_2^0 и k^0 . Эти параметры далее будут идентифицироваться.

Начальный цикл начинается со включения управления, т. е. $u \equiv 1$ до момента Δ^0 . А с момента Δ^0 управление $u \equiv 0$ до момента t_1 , момент Δ^0 определяем из условия $\max y(t) = y_{кр}^0$, $t \in [\Delta^0, t_1]$ (взято $y_{кр}^0 < y_{кр}$, так как T_2^0 , k^0 заданы приближенно). Момент t_1 определяется из условия $y(t_1) = y_{кр} - \delta$, где $y_{кр} - \delta$ — принятая нижняя граница для $y(t) = x_2(t) - x_3(t)$.

Решая систему, где управление сначала единица, а затем нуль, получаем уравнение для Δ^0 :

$$T_2 \left[\frac{T_3 k^0}{T_1} \left(\frac{T_2}{T_3 - T_2^0} \exp \left(-\frac{\Delta^0}{T_2^0} \right) - \frac{T_3}{T_3 - T_2^0} \exp \left(-\frac{\Delta^0}{T_3} \right) + 1 \right) + \right. \\ \left. + \frac{T_3}{T_3 - T_2^0} \frac{T_2^0 k^0}{T_1} \left(1 - \exp \left(-\frac{\Delta^0}{T_2^0} \right) \right) \right] = \\ = \left(\frac{T_2^0 T_3 y_{\text{кр}}^0}{T_3 - T_2^0} \right)^{\frac{T_3 - T_2^0}{T_3}} \left[T_3 \frac{T_3}{T_3 - T_2^0} \frac{T_2^0 k^0}{T_1} \left(1 - \exp \left(-\frac{\Delta^0}{T_2^0} \right) \right) \right]^{\frac{T_2^0}{T_3}}.$$

Так как некоторые параметры известны приближенно, то полученные уравнения можно решать с невысокой точностью, поэтому в разложении экспонент ограничиваемся двумя первыми членами и получаем

$$\Delta^0 = \frac{y_{\text{кр}}^0 T_1}{k^0} \left(\frac{T_3}{T_2^0} \right)^{\frac{T_2^0}{T_3 - T_2^0}}.$$

С этого момента управление переключается на $u \equiv 0$, измеряется $x_1(\Delta^0) = x_1^1$ и через каждые h^0 минут проводятся измерения величины $x_2(t)$, используемые для идентификации

$$h^0 = \frac{t_1^0 - \Delta^0}{3n},$$

где t_1^0 — предварительная оценка момента времени t_1 . Вводя обозначение $\exp \left(-\frac{\Delta^0}{T_2^0} \right) = \beta$, имеем

$$\beta = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{x_2(\Delta^0 + (j+2)h^0) - x_2(\Delta^0 + (j+1)h^0)}{x_2(\Delta^0 + (j+1)h^0) - x_2(\Delta^0 + jh^0)}.$$

Среднее арифметическое взято, чтобы скомпенсировать ошибки измерения и вычисления (теоретически β равно любой из дробей). Отсюда идентифицированное значение для T_2 дается формулой

$$T_2^1 = -\frac{h^0}{\ln \beta}.$$

Далее обозначим $z(\Delta^0) = f(x_1^1) - x_2(\Delta^0)$ и получаем, снова используя принцип среднего арифметического:

$$z(\Delta^0) = \frac{1}{n(1-\beta)} \sum_{j=0}^{n-1} \left(\frac{1}{\beta} \right)^j (x_2(\Delta^0 + (j+1)h^0) - x_2(\Delta^0 + jh^0)); \\ f(x_1^1) = \frac{1}{n} \sum_{j=n+2}^{2n+1} x_2(\Delta^0 + jh^0) + \frac{z(\Delta^0)}{n} \beta \frac{1-\beta^n}{1-\beta}.$$

Теперь имеем идентифицированное значение параметра k на первом цикле:

$$k^1 = \frac{f(x_1^1) - f(x_1^0)}{x_1^1 - x_1^0}.$$

Итак, на этом идентификация закончена; переходим к вычислению момента t_1 . Он определяется из условия $y(t_1) = x_2(t_1) - x_3(t_1) = y_{кр} - \delta$, при этом для $x_2(t)$ пользуемся идентифицированными $f(x_1^1)$, $z(\Delta^0)$ (т. е. полученными в результате измерений и усреднений), а $x_3(t)$ находятся из исходной системы. После идентификации параметров может оказаться, что $\max y(t) \leq y_{кр} - \delta$, $t \geq \Delta^0$. В этом случае приведенное выше уравнение не может иметь решения и за t_1 следует принять ранее вычисленную грубую оценку t_1^0 .

В случае, когда $\max y(t) > y_{кр} - \delta$, указанное уравнение принимает вид:

$$y(t_1) = -\frac{T_3}{T_3 - T_2^1} z(\Delta^0) \exp\left(-\frac{t_1 - \Delta^0}{T_2^1}\right) + \left(y(\Delta^0) + \frac{T_3}{T_3 - T_2^1} z(\Delta^0)\right) \exp\left(-\frac{t_1 - \Delta^0}{T_3}\right) = y_{кр} - \delta.$$

Вводя обозначение

$$V = \exp\left(-\frac{t_1 - \Delta^0}{T_3}\right),$$

решаем уравнение уже относительно V методом итераций и получаем $t_1 = \Delta^0 - T_3 \ln V$.

Таким образом, в любом случае t_1 определено. Теперь еще до того, как в момент t_1 управление переключается с $u \equiv 0$ на $u \equiv 1$ (т. е. начинается следующий цикл), необходимо вычислить величину Δ^1 и интервал времени h^1 , с которым будет измеряться $x_2(t)$ на этом цикле. Аналогично тому, как поступали на предыдущем цикле, получаем после упрощения уравнения для Δ^1 :

$$\frac{k^1 T_3}{T_1} - \left[\frac{k^1 T_3}{T_1} - \frac{T_3 - T_2^1}{T_3} y(t_1) - z(t_1) \right] \exp\left(-\frac{\Delta^1}{T_3}\right) = y_{кр} \left\{ \frac{T_3}{T_2^1 y_{кр}} \left[\frac{k^1 T_2^1}{T_1} - \left(\frac{k^1 T_2^1}{T_1} - z(t_1) \right) \exp\left(-\frac{\Delta^1}{T_2^1}\right) \right] \right\}^{\frac{T_2^1}{T_3}}.$$

Разлагая элементы по степеням Δ^1 и отбрасывая кубические члены, имеем

$$\Delta^1 = \left(\frac{\Delta^1}{2T_3} \right)^2 + \frac{1}{1 - \frac{T_1}{k^1 T_3} \left(\frac{T_3 - T_2^1}{T_3} y(t_1) + z(t_1) \right)} \left\{ -\frac{T_1}{k^1} \left(\frac{T_3 - T_2^1}{T_3} y(t_1) + z(t_1) \right) + z(t_1) + \frac{y_{кр} T_1}{k^1} \left[\frac{k^1 T_3}{T_1 T_2 y_{кр}} \left(\frac{T_1 z(t_1)}{k^1} + \left(1 - \frac{T_1 z(t_1)}{k^1} \right) \Delta^1 \left(1 - \frac{\Delta^1}{2T_2^1} \right) \right) \right] \right\}^{\frac{T_2^1}{T_3}}.$$

Это уравнение решаем методом итераций. Теперь управление в момент t_1 переключается с $u \equiv 0$ на $u \equiv 1$ и остается равным единице до момента $t_1 + \Delta^1$, в который снова переключается на $u \equiv 0$. Далее проводятся аналогичные шаги. Идентифицируются параметры T_2 и k . Получаем

$$T_2^2 = \frac{h^1}{\ln \beta}; \quad k^2 = \frac{f(x_1^2) - f(x_1^1)}{x_1^2 - x_1^1},$$

где $h^1 = \frac{t_2^1 - (t_1 + \Delta^1)}{3n}$, $\beta = \exp\left(-\frac{h^1}{T_2^2}\right)$ вычисляется методом среднего

арифметического, $x_1^2 = x_1^1 + \frac{\Delta^1}{T_1}$; $f(x_1^2)$ получается в результате идентификации. Используя эти идентифицируемые величины, находим момент окончания этого цикла t_2 . Имея уравнение

$$y(t_2) = x_2(t_2) - x_3(t_2) = -\frac{z(t_1 + \Delta^1) T_3}{T_3 - T_2^2} \exp\left(-\frac{t - (t_1 + \Delta^1)}{T_2^2}\right) + \\ + \left(\frac{T_3}{T_3 - T_2^2} z(t_1 + \Delta^1) + y(t_1 + \Delta^1)\right) \exp\left(-\frac{t - (t_1 + \Delta^1)}{T_3}\right) = y_{кр} - \delta$$

и вводя обозначение

$$V = \exp\left(-\frac{t_2 - (t_1 + \Delta^1)}{T_3}\right),$$

после решения его методом итераций находим $t_2 = t_1 + \Delta^1 - T_3 \ln V$. Окончание алгоритма определяется равенством $x_1^j \geq 1$. В этом случае Δ^j нужно пересчитать из условия $x_1(t_j + \Delta^j) = 1$, т. е. $x_1^{j-1} + \frac{\Delta^j}{T_1} = 1$, отсюда взять Δ^j равным $\Delta^j = T_1(1 - x_1^{j-1})$ и после импульса этой длины алгоритм закончен.

Поступила в редколлегию 25.01.83

УДК 519.9 + 575.1

Ю. И. ЛЮБИЧ, д-р физ.-мат. наук

КЛАССИФИКАЦИЯ НЕИСКЛЮЧИТЕЛЬНЫХ БЕРНШТЕЙНОВСКИХ АЛГЕБР ТИПА (3, n - 3)

Настоящая статья является продолжением работы [1]. В качестве основного поля по-прежнему примем $\mathbb{C}$. Наименьшая интересующая нас размерность $n = 5$, так как случай $n = 4$ полностью разобран в [1]. Соединение излагаемых ниже фактов с результатами работы [1] приводит к классификации неисклчительных бернштейновских алгебр размерности $n = 5$. Для исклчительных алгебр, начиная с $n = 5$, по-видимому нет обозримой классификации.

Теорема 1. Правильная неисклужительная бернштейновская алгебра типа $(3, n-3)$ изоморфна одной и только одной из канонических алгебр¹:

1) $v_1 = \{u_1^2, v_2 = u_2^2, v_3 = u_1 u_2, v_k = 0 (k \geq 4)\}$; 2) $v_1 = u_1^2, v_2 = u_2^2, v_k = 0 (k \geq 3)$; 3) $v_1 = u_1^2, v_2 = u_1 u_2, v_k = 0 (k \geq 3)$; 4) $v_1 = u_1^2 + u_2^2, v_k = 0 (k \geq 2)$; 5) $v_1 = u_1^2, v_k = 0 (k \geq 2)$.

Доказательство. Пространство N исчезающих линейных форм для алгебры типа (m, δ) имеет размерность $\leq \delta$, а если алгебра неисклужительная, то $\dim N < \delta$. Следовательно, в нашем случае $\dim N \leq n-4$. С другой стороны, поскольку все квадратичные формы v_i ($1 \leq i \leq n-3$) зависят только от $u_1 u_2$, а N можно рассматривать как пространство линейных зависимостей между ними, то $\dim N \geq n-6$.

Если $\dim N = n-6$ (и, тем самым, $n \geq 6$), то пространство $W = \text{Lin}(v_1, \dots, v_{n-3})$ состоит из всех квадратичных форм от u_1, u_2 . Поэтому в нем можно выбрать базис $u_1^2, u_2^2, u_1 u_2$, и мы приходим к случаю 1.

Если $\dim N = n-5$, то $\dim W = 2$. Пусть $\{f, g\}$ — базис в W . Покажем, что если формы f, g взаимно просты, то существует базис $\{f_1, g_1\}$ такой, что $g f_1 = g g_1 = 1$. Если исходный базис этим свойством не обладает, то можно считать, что $g g f = 2$. Рассмотрим линейный пучок $g - \mu f$ с параметром μ . Характеристическое уравнение $\det(g - \mu f) = 0$, будучи алгебраическим уравнением (второй степени), имеет корень λ . Форма $g_1 = g - \lambda f$ вырождена и отлична от нуля. Следовательно, $g g_1 = 1$. Если существует еще корень $\lambda' \neq \lambda$, то он определяет форму $f_1 = g - \lambda' f$, образующую вместе с g_1 требуемый базис. Остается разобрать случай кратного корня. Учитывая сказанное, можно считать, что с самого начала $g g g = 1$. Тогда характеристическое уравнение имеет корень $\lambda = 0$, и этот корень нужно считать кратным, т. е. $\det(g - \mu f) \equiv \mu^2 (\det f)$. Можно считать также, что $g(u_1, u_2) = u_2^2$, так как этого можно добиться преобразованием координат u_1, u_2 . Если при этом (a_{ik}) — матрица формы f , то

$$\begin{vmatrix} -\mu a_{11} & -\mu a_{12} \\ -\mu a_{21} & 1 - \mu a_{22} \end{vmatrix} = \mu^2 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},$$

откуда $a_{11} = 0$. Следовательно, f делится на u_2 , что противоречит взаимной простоте форм f, g . Итак, случай кратного корня исключен. Тем самым, требуемый базис $\{f_1, g_1\}$ существует. Тогда можно считать $f_1(u_1, u_2) = u_1^2, g_1(u_1, u_2) = u_2^2$, и мы приходим к случаю 2.

¹ $s^4 = s^2$ для любой бернштейновской алгебры и, кроме того, $u_1' = s u_1, u_2' = s u_2$ ввиду правильности.

² Этот случай возможен только при $n \geq 6$.

³ Это условие инвариантно относительно преобразования базиса в W , ибо оно эквивалентно отсутствию общих линейных делителей у всего семейства W .

Пусть теперь базисные формы f, g имеют общий линейный делитель. Тогда можно из прежних соображений считать, что $gf = 1$ и, тем самым, $f(u_1, u_2) = u_1^2$ с точностью до преобразования координат. Но тогда $g(u_1, u_2) = u_1\varphi$, где φ — линейная форма, не пропорциональная u_1 (ибо f, g линейно независимы). Поэтому можно считать $\varphi = u_2$, и мы приходим к случаю 3.

Если, наконец, $\dim N = n - 4$, то $\dim W = 1$ и, приводя единственную базисную форму семейства W к каноническому виду, получаем 4 или 5. Теорема доказана.

Для анализа более сложной ситуации неправильной неисклужительной алгебры нам понадобятся две леммы.

Лемма 1. В неисклужительной бернштейновской алгебре существует нетривиальная (т. е. отличная от $\text{const} \cdot s$) инвариантная линейная форма.

Эта лемма была анонсирована автором еще в [2]. Приведем здесь ее доказательство.

Доказательство. Запишем стандартную форму следующим образом: $s' = s^2$, $u' = su + \sum_{i=1}^{\delta} v_i B_i u + Kv$, $v_j = Q_j(u)$ ($1 \leq j \leq \delta$) (1), где B_i — линейные операторы; K — квадратичное отображение; Q_j — квадратичные формы. Если ввести псевдоевклидову структуру¹ и записать Q_j в виде $Q_j(u) = (S_j u, u)$, где S_j — соответствующие псевдосамосопряженные операторы, то, как было показано в [3], имеют место соотношения $B_i^* S_j + S_j B_i = 0$, $(B_i^* B_k^* + B_k^* B_i^*) S_j = 0$ для всевозможных i, j, k . Поэтому подпространства $\text{Im } S_j$ инвариантны для всех B_i^* и семейство $\{B_i^*\}$ на каждом из этих подпространств антикоммутирует. Но ввиду неисклужительности алгебры среди операторов S_j имеется хотя бы один, отличный от нуля, например, S_1 . Тогда существует вектор $z \in \text{Im } S_1$, $z \neq 0$, такой, что $B_i^* z = 0$ для всех i . Кроме того $z \perp \text{Ker } S_1$, откуда следует, как было отмечено в [3], что $z \perp \text{Im } K$. Рассмотрим линейную форму $f(u) = (z, u)$. В силу (1) и свойств вектора z имеем $f(u') = sf(u)$, т. е. f — инвариантная линейная форма. Очевидно, форма f нетривиальна. Лемма 1 доказана.

Лемма 2. Пусть $a_1, \dots, a_m$ и $\tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_m$ — две системы векторов в n -мерном псевдоевклидовом пространстве. Для того чтобы существовала псевдоизометрия T , такая, что $Ta_k = \tilde{a}_k$ ($1 \leq k \leq m$), необходимо и достаточно, чтобы для данных систем совпадали 1) пространства линейных зависимостей (т. е. $\sum \lambda_k a_k = 0 \iff \sum \lambda_k \tilde{a}_k = 0$) и 2) матрицы Грама (т. е. $(a_k, a_j) = (\tilde{a}_k, \tilde{a}_j)$) ($1 \leq k, j \leq m$).

Необходимость указанных условий очевидна.

¹ Псевдоевклидова структура в комплексном пространстве определяется псевдоскалярным произведением, т. е. невырожденным симметричным билинейным функционалом $(\cdot, \cdot)$.

В доказательстве достаточности в силу условия 1 можно предполагать обе системы линейно независимыми. Тогда условие 2 означает, что их линейные оболочки L_1, L_2 псевдоизометричны. Соответствующая псевдоизометрия $T_0: L_1 \rightarrow L_2$ имеет вид $T_0(\sum \xi_k a_k) = \sum \xi_k \tilde{a}_k$. При этом, очевидно, $T_0 a_k = \tilde{a}_k$ ($1 \leq k \leq m$). По теореме Витта (см., например, [4]) T_0 продолжается до псевдоизометрии T всего пространства.

Теорема 2. Если бернштейновская алгебра типа $(3, n-3)$ неправильна и неисключительна, то она изоморфна алгебре $s' =$

$$= s^2, \quad u'_1 = su_1, \quad v'_1 = u_1^2, \quad v'_k = 0 \quad (k \geq 2), \quad u'_2 = su_2 + \sum_{k=3}^r v_k^2 + (b_2 + \eta v_1) v_2 + u_1(\lambda_1 + \mu_1) + u_2(\lambda_2 + \mu_2) \quad \text{где } 2 \leq r \leq n-3,$$

$$\eta = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad b_2 = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \{\mu_1, \mu_2\} = \begin{bmatrix} v_{r+1}, v_{r+2} \\ v_{r+1}, \gamma v_{r+1} \\ 0, v_{r+1} \\ 0, 0 \end{bmatrix}$$

и

$$\{\lambda_1, \lambda_2\} = \begin{bmatrix} \alpha v_3, \beta v_3 + \gamma v_4 \quad (\alpha \neq 0, \gamma \neq 0) \\ \alpha v_3, \beta v_3 + v_4 + i v_5 \quad (\alpha \neq 0) \\ v_3 + i v_4, \beta v_3 + \gamma v_4 \\ v_3 + i v_4, v_3 + i v_4 + \varepsilon v_5 \quad (\varepsilon \neq 0) \\ v_3 + i v_4, v_5 + i v_6 \\ \alpha v_3, \beta v_3 \\ 0, v_3 + i v_4 \end{bmatrix}$$

Квадратные скобки означают дизъюнкцию; $\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon$ — константы. Случаи, относящиеся к $\{\lambda_1, \lambda_2\}$, реализуются лишь с соблюдением неравенств $n \geq 6, r \geq v$, где v — наибольший из номеров переменных v_k , входящих в λ_1, λ_2 . Случаи, относящиеся к $\{\mu_1, \mu_2\} \neq \{0, 0\}$, реализуются лишь с соблюдением неравенств $r \geq v$ и $v \leq n-3$, где v — наибольший из номеров переменных v_k , входящих в μ_1, μ_2 . При $r=2$ исключается комбинация¹ $\eta=0, b_2=0$.

Доказательство. Если u_1 — инвариантная линейная форма, существование которой гарантировано леммой, то $u'_1 = su_1$. Так как алгебра неправильна, то $\dim N \geq \delta - 1 = n - 4$ (см. [3]), а так как она неисключительна, то $\dim N \leq \delta - 1$. Следовательно, $\dim N = \delta - 1$ и можно считать $v'_k = 0$ ($k \geq 2$). Кроме того, в стандартной форме есть еще координаты u_2, v_1 , причем $v'_1 = f(u_1, u_2)$, где f — квадратичная форма, $f \neq 0$ и

$$u'_2 = su_2 + \sum_{i=1}^8 v_i b_i(u_1, u_2) + g(v_1, \dots, v_8), \quad (2)$$

где b_i — линейные формы; g — квадратичная форма. Из условий

¹ Алгебра, отвечающая этой комбинации, при $r=2$ правильна.

стационарности $b_1(u'_1, u'_2) = 0$, $g(v_1, 0, \dots, 0) = 0$, $f(u'_1, u'_2) = s^2 f(u_1, u_2)$. Квадратичные формы u'_1, u'_2 линейно независимы. Поэтому $b_1 = 0$. Квадратичная форма v'_1 , будучи отличной от нуля, принимает все значения. Поэтому $g(v_1, 0, \dots, 0) = 0$ для всех v_1 , т. е. g не содержит v_1^2 . Наконец, тождество $f(u'_1, u'_2) = s^2 f(u_1, u_2)$ означает, что $f(su_1, su_2 + h) - f(su_1, su_2) = 0$, где h — квадратичная форма от $u_1, u_2, v_1, \dots, v_\delta$, определяемая из (2). Так как алгебра неправильна, то $h \neq 0$. Но тогда h принимает все значения, даже если зафиксировать u_1, u_2 (кроме, быть может, удовлетворяющих связям $b_i(u_1, u_2) = 0$ ($2 \leq i \leq \delta$)). Следовательно, квадратичная форма f не зависит от второго аргумента, т. е. $f(u_1, u_2) = cu_1^2$. Можно считать $c = 1$. Итак, $v'_1 = u_1^2$. Остается принести к надлежащему виду правую часть (2), т. е. форму

$$u'_2 = su_2 + \sum_{i=2}^{\delta} v_i b_i(u_1, u_2) + v_1 a_1(v_2, \dots, v_\delta) + \sum_{i=2}^{\delta} v_i a_i(v_i, \dots, v_\delta),$$

где a_i — линейные формы. Здесь учтено, что $b_1 = 0$ и g не содержит v_1^2 . Если форма $a_1 \neq 0$, то ее можно считать равной v_2 за счет преобразования координат $v_2, \dots, v_\delta$. Тогда заменой $v_1 \rightarrow v_1 - a_2(v_2, \dots, v_\delta)$ уничтожается слагаемое $v_2 a_2$. Канонизируя оставшуюся квадратичную форму от $v_3, \dots, v_\delta$, получаем

$$u'_2 = su_2 + \sum_{i=2}^{\delta} v_i b_i(u_1, u_2) + v_1 v_2 + \sum_{i=3}^r v_i^2, \quad (3)$$

где $2 \leq r \leq \delta$ (преобразования, которым подвергались коэффициенты b_i , мы не отражаем в обозначениях). Если же $a_1 = 0$, то u'_2 приводится к виду

$$u'_2 = su_2 + \sum_{i=2}^{\delta} v_i b_i(u_1, u_2) + \sum_{i=2}^r v_i^2, \quad (4)$$

где $1 \leq r \leq \delta$.

Продолжим рассмотрение случая (3). Заменой $u_1 \rightarrow \alpha u_1$, $u_2 \rightarrow \beta u_1 + \gamma u_2$ ($\alpha \neq 0$, $\gamma \neq 0$) с компенсацией $v_1 \rightarrow \alpha^2 v_1$, $v_2 \rightarrow \gamma^{-1} \alpha^{-2} v_2$, $v_k \rightarrow \gamma^{-\frac{1}{2}} v_k$ ($k \geq 3$) мы, сохраняя в целом вид (3), сможем привести линейную форму b_2 к одному из видов: 1) u_1 ; 2) u_2 ; 3) 0. Этого же результата еще проще добиться в случае (4). Остается преобразовать

$$\begin{aligned} \sum_{i=3}^{\delta} v_i b_i(u_1, u_2) &= \sum_{i=3}^r v_i b_i(u_1, u_2) + \sum_{i=r+1}^{\delta} v_i b_i(u_1, u_2) = \\ &= u_1 \{ \lambda_1(v_3, \dots, v_r) + \mu_1(v_{r+1}, \dots, v_\delta) \} + \\ &\quad + u_2 \{ \lambda_2(v_3, \dots, v_r) + \mu_2(v_{r+1}, \dots, v_\delta) \}, \end{aligned}$$

где $\lambda_1, \mu_1, \lambda_2, \mu_2$ — линейные формы. Пара форм μ_1, μ_2 невырожденным преобразованием переменных $v_{r+1}, \dots, v_\delta$ приводится к виду 1) v_{r+1}, v_{r+2} , если μ_1, μ_2 линейно независимы; 2) $v_{r+1}, \gamma v_{r+1}$, если

они линейно зависимы, но $\mu_1 \neq 0$; 3) 0, v_{r+1} , если $\mu_1 = 0$, $\mu_2 \neq 0$;
4) 0, 0, если с самого начала $\mu_1 = 0$, $\mu_2 = 0$.

Формы λ_1 , λ_2 запишем прежде всего в виде $\lambda_1 = (a_1, \omega)$, $\lambda_2 = (a_2, \omega)$, где a_1, a_2 — некоторые векторы, $\omega = (v_3, \dots, v_r)$. Ввиду (3) для ω допустимо любое псевдоортогональное преобразование.

Пусть a_1, a_2 линейно независимы. Если

$$(a_1, a_1) \neq 0, \begin{vmatrix} (a_1, a_1) & (a_1, a_2) \\ (a_1, a_2) & (a_2, a_2) \end{vmatrix} \neq 0,$$

то, решая систему уравнений $\alpha^2 = (a_1, a_1)$, $\alpha\beta = (a_1, a_2)$, $\beta^2 + \gamma^2 = (a_2, a_2)$, мы получаем пару векторов $\tilde{a}_1 = (\alpha, 0, \dots, 0)$, $\tilde{a}_2 = (\beta, \gamma, 0, \dots, 0)$, псевдоизометричную паре a_1, a_2 на основании леммы 2. При этом $\alpha \neq 0$, $\gamma \neq 0$. Если же

$$(a_1, a_1) \neq 0, \begin{vmatrix} (a_1, a_1) & (a_1, a_2) \\ (a_1, a_2) & (a_2, a_2) \end{vmatrix} = 0$$

(что совместимо с линейной независимостью лишь для векторов размерности ≥ 3), то $\tilde{a}_1, \tilde{a}_2$ находятся в виде $\tilde{a}_1 = (\alpha, 0, \dots, 0)$, $\tilde{a}_2 = (\beta, \gamma, \varepsilon, 0, \dots, 0)$, где $\alpha^2 = (a_1, a_1)$ (так что $\alpha \neq 0$), $\alpha\beta = (a_1, a_2)$, $\gamma^2 + \varepsilon^2 = 0$, но $\gamma \neq 0 \vee \varepsilon \neq 0$. Положим $\gamma = 1$, $\varepsilon = i$ и перейдем к следующему случаю. Если $(a_1, a_1) = 0$, $(a_1, a_2) \neq 0$, то можно сделать $\tilde{a}_1 = (1, i, 0, \dots, 0)$, $\tilde{a}_2 = (\beta, \gamma, 0, \dots, 0)$, где $\beta + \gamma i = (a_1, a_2) \neq 0$, $\beta^2 + \gamma^2 = (a_2, a_2)$ (т. е. $\beta - \gamma i = (a_2, a_2)/(a_1, a_2)$). Если $(a_1, a_1) = 0$, $(a_1, a_2) = 0$, $(a_2, a_2) \neq 0$, то можно сделать $\tilde{a}_1 = (1, i, 0, \dots, 0)$, $\tilde{a}_2 = (1, i, \varepsilon, 0, \dots, 0)$, где $\varepsilon^2 = (a_2, a_2)$ (так что $\varepsilon \neq 0$). Если, наконец, $(a_1, a_1) = (a_1, a_2) = (a_2, a_2) = 0$ (что совместимо с линейной независимостью лишь для векторов размерности ≥ 4), то $\tilde{a}_1 = (1, i, 0, \dots, 0)$, $\tilde{a}_2 = (0, 0, 1, i, 0, \dots, 0)$. Случай линейно независимой пары a_1, a_2 исчерпан.

Пусть a_1, a_2 линейно зависимы, причем $a_1 \neq 0$, $a_2 = \theta a_1$. Если $(a_1, a_1) \neq 0$, то $\tilde{a}_1 = (\alpha, 0, \dots, 0)$, где $\alpha^2 = (a_1, a_1)$, а если $(a_1, a_1) = 0$, то $\tilde{a}_1 = (1, i, 0, \dots, 0)$. Вектор $\tilde{a}_2$ определен автоматически: $\tilde{a}_2 = \theta \tilde{a}_1$. Если $a_1 = 0$, $a_2 \neq 0$, то $\tilde{a}_1 = 0$, $\tilde{a}_2 = (\beta, 0, \dots, 0)$ ($\beta \neq 0$) или $\tilde{a}_2 = (1, i, 0, \dots, 0)$ в зависимости от того, будет ли $(a_2, a_2) \neq 0$ или $(a_2, a_2) = 0$.

Последняя возможность: $a_1 = 0$, $a_2 = 0$. Тогда и $\tilde{a}_1 = 0$, $\tilde{a}_2 = 0$. Теорема доказана (с учетом объединения некоторых случаев).

При $n = 5$ переменные v_k ($k \geq 3$) отсутствуют. Формулировка результата резко упрощается. Получаем

Следствие 1. Если бернштейновская алгебра типа (3, 2) неправильна и неисклнчительна, то она изоморфна алгебре $s' = s^2$, $u_1' = su_1$, $u_2' = su_2 + (b_2 + \eta v_1)v_2$, $v_1' = u_1^2$, $v_2' = 0$, где $\eta = 1$ или 0, $b_2 = u_1$, или u_2 , или 0.

При $n = 6$ появляется v_3 , но отсутствуют v_k ($k \geq 4$). Получаем

Следствие 2. Если бернштейновская алгебра типа (3, 3) неправильна и неисклнчительна, то она изоморфна алгебре $s' = s^2$, $u_1' = su_1$, $u_2' = su_2 + v_3^2 + (b_2 + \eta v_1)v_2 + (\alpha u_1 + \beta u_2)v_3$, $v_1' = u_1$, $v_2' = 0$,

$v'_3 = 0$, где $\eta = 1$ или 0 , $b_2 = u_1$ или u_2 , или 0 (или алгебре, описанной в следствии 1 с добавлением $v'_3 = 0$).

Соответствующие упрощения возникают также при $7 \leq n \leq 10$. При $n = 11$ уже присутствуют все возможные варианты для $\{\mu_1, \mu_2\}$ и $\{\lambda_1, \lambda_2\}$. Отметим тот из них, в котором эффективно присутствуют все v_k ($3 \leq k \leq 8$): $u'_2 = su_2 + \sum_{k=3}^8 v_k^2 + (b_2 + \eta v_1) v_2 + u_1 (v_3 + iv_4 + v_7) + u_2 (u_5 + iv_6 + v_8)$ (с обычными возможностями для η и b_2).

Список литературы: 1. Любич Ю. И. Классификация некоторых типов бернштейновских алгебр. — Вестн. Харьк. ун-та, 1980, № 205. Прикл. мат. и мех., вып. 45, с. 124—137. 2. Любич Ю. И. Бернштейновские алгебры. — Усп. мат. наук, 1977, 32, вып. 6, 198, с. 261—262. 3. Любич Ю. И. Об одном классе квадратичных отображений. — Теория функций, функцион. анализ и их приложения, 1974, вып. 21, с. 36—42. 4. Ленг С. Алгебра. — М.: Мир, 1968. — 564 с.

Поступила в редколлегию 10.04.83.

УДК 517.948.3

А. С. СОХИН

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ РЕШЕНИЙ НЕСТАЦИОНАРНОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА

В обратной задаче теории рассеяния (как стационарной [1] для уравнения Штурма — Лиувилля, так и нестационарной [2] для уравнения колебаний) существенное значение имеют преобразования, переводящие решения невозмущенного уравнения $L_0(z) = 0$ в решения возмущенного уравнения $\{L_0 + Q\}(y) = 0$, обладающие той же асимптотикой, что и решения невозмущенного уравнения. Оператор L_0 имеет вид $-d^2/dx^2 + \lambda^2$ для стационарной задачи и $\partial^2/\partial t^2 - \partial^2/\partial x^2$ — для нестационарной, а Q — оператор умножения на функцию.

В данной работе построено преобразование, переводящее обобщенное решение $z(x, t, a)$ нестационарного уравнения переноса

$$\frac{\partial z}{\partial t} + a \frac{\partial z}{\partial x} = \int_{-1}^1 p(x, t, a, a') z(x, t, a') da',$$

$$-\infty < x < \infty, t_0 < t < t_1, \quad (1)$$

удовлетворяющее условию $\lim_{t \rightarrow t_1} z(x + at, t, a) = f_1(x, a)$ (2), в обобщенное решение $y(x, t, a)$ уравнения

$$\frac{\partial y}{\partial t} + a \frac{\partial y}{\partial x} = \int_{-1}^1 q(x, t, a, a') y(x, t, a') da',$$

$$-\infty < x < \infty, t_0 < t < t_1, \quad (3)$$

ведущее при $t \rightarrow t_1$, так же, как $z(x, t, a)$. Существование преобразования доказано для ограниченных по всем переменным и непрерывных по t функций p и q , удовлетворяющих условиям $n(a) \subset D(a)$, $n(a) \cap n^*(a') = \emptyset$, $\forall a' \notin n(a)$ (4),

$$v_1(t) = \operatorname{vraimax}_{x, a, a'} \left| \frac{v(x, t, a, a')}{a'} \right| < \infty, \quad \int_t^\infty v_1(\tilde{t}) d\tilde{t} < \infty, \quad (5)$$

$$v_2(t) = \operatorname{vraimax}_{x, a, a'} \left| \frac{v(x, t, a, a')}{a' - a} \right| < \infty, \quad (5')$$

где $n(a) = \supp_{a'} v(x, t, a, a')$, $n^*(a') = \supp v(x, t, a, a')$, $D(a) = \{a' : a/a' < 1\}$, $v = p, q$. Решение $z(x, t, a)$ предполагается исчезающим при $t \rightarrow +\infty$. Для этого требуется, чтобы функция $f_1(x, a) \in L_1(-\infty, \infty; -1, 1)$ и $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f_1(x, a)$. Если одно или оба

из чисел t_0 и t_1 конечны, то функции p и q считаем продолженными нулем для $t < t_0$ и $t > t_1$.

Построенное ниже преобразование применяется при решении обратной задачи рассеяния для нестационарного уравнения переноса.

Назовем обобщенным решением задачи (1) — (2) решение такого интегрального уравнения:

$$z(x, t, a) = f_1(x - at, a) - \int_t^{t_1} \int_{n(a)} p(x', t', a, a') z \times \\ \times (x', t', a') \Big|_{x' = x - a(t - t')} dt' da',$$

Если функции $f_1(x, a)$ и $p(x, t, a, a')$ гладкие по x , то можно показать, что это интегральное уравнение эквивалентно уравнению (1) и равенству (2).

Считая пока функции p и q гладкими, будем искать представление решения $y(x, t, a)$ уравнения (3) через решение $z(x, t, a)$ уравнения (1) в виде

$$y(x, t, a) = z(x, t, a) + \int_t^\infty \int_{n(a)} K(x, t, t', a, a') z(x, t, a') dt' da'. \quad (6)$$

Подставляя формально правую часть равенства (6) в уравнение (3) и учитывая, что функция $z(x, t, a)$ удовлетворяет уравнению (1), получаем после интегрирования по частям равенство

$$0 = \int_{n(a)} \left\{ \left[(p - q)(x, t, a, a') - \left(1 - \frac{a}{a'} \right) K(x, t, t', a, a') \right] z(x, t, a') - \right. \\ \left. - \frac{a}{a'} K(x, t, t', a, a') z(x, t', a') \Big|_{t' = +\infty} \right\} da' +$$

$$+ \int_t^\infty \int_{n(a)} \left\{ \frac{\partial K}{\partial t} + a \frac{\partial K}{\partial x} + \frac{a}{a'} \frac{\partial K}{\partial t'} + \int_{n(a, a')} [K(x, t, t', a, \tilde{a}) \times \right. \\ \times p(x, t', \tilde{a}, a') \frac{a}{\tilde{a}} - q(x, t, a, \tilde{a}) K(x, t, t', \tilde{a}, a')] d\tilde{a} \Big\} \times \\ \times z(x, t', a') dt' da',$$

где $n(a, a') = n(a) \cap n^*(a')$. Здесь при изменении последовательности интегрирования учтено равенство

$$\int_{n(a)} d\tilde{a} \int_{n(\tilde{a})} da' = \int_{n(a)} da' \int_{n(a) \cap n^*(a')} d\tilde{a},$$

вытекаемое из условий (4). Для того, чтобы правая часть равенства (6) удовлетворяла уравнению (3) и условию (2), достаточно, чтобы функция $K(x, t, t', a, a')$ была ограниченной, непрерывной по t' и являлась решением следующей задачи при $a' \in n(a)$:

$$\frac{\partial K}{\partial t} + a \frac{\partial K}{\partial x} + \frac{a}{a'} \frac{\partial K}{\partial t'} = \int_{n(a, a')} \left[-K(x, t, t', a, \tilde{a}) p(x, t', \tilde{a}, a') \frac{a}{\tilde{a}} + \right. \\ \left. + q(x, t, a, \tilde{a}) K(x, t, t', \tilde{a}, a') \right] d\tilde{a}, \quad (7)$$

$$K(x, t, t', a, a') \Big|_{t'=t} = \frac{1}{1-a/a'} (p-q)(x, t, a), \quad (8)$$

$$\lim_{t \rightarrow t_1} K(x, t, t', a, a') = 0, \quad \forall t' \geq t_1. \quad (9)$$

Обратно, если существует ограниченная, непрерывная по t' функция $K(x, t, t', a, a')$, удовлетворяющая условиям (7) — (9), то формула (6) задает нужное преобразование, т. е. ее правая часть удовлетворяет уравнению (3) и равенству (2).

Сведем уравнение (7) с условиями (8), (9) к интегральному уравнению. Нетрудно убедиться непосредственной подстановкой, что искомое интегральное уравнение имеет вид

$$K(x, t, t', a, a') = \frac{1}{1-a/a'} (p-q) \left(x + a \frac{t'-t}{1-a/a'}, t + \frac{t'-t}{1-a/a'}, \right. \\ \left. a, a' \right) + \int_t^{t'} d\tilde{t} \int_{n(a, a')} \left[K(\tilde{x}, \tilde{t}, \tilde{t}', a, \tilde{a}) p(\tilde{x}, \tilde{t}', \tilde{a}, a') \frac{a}{\tilde{a}} - \right. \\ \left. - q(\tilde{x}, \tilde{t}, a, \tilde{a}) K(\tilde{x}, \tilde{t}, \tilde{t}', \tilde{a}, a') \right] d\tilde{a} \quad (10)$$

при $\tilde{x} = x + a(\tilde{t}-t)$, $\tilde{t}' = t' + a(\tilde{t}-t)/a'$, $\theta(t, t') = \frac{t'-at/a'}{1-a/a'}$. Положим $\tau = t' - t$ и введем обозначение $L(x, t, \tau, a, a') = K(x, t, t + \tau, a, a')$, тогда функция L удовлетворяет такому интегральному уравнению:

$$L(x, t, \tau, a, a') = d(x, t, \tau, a, a') +$$

$$+ \int_{\tilde{t}}^{\theta(t, t+\tau)} \tilde{d}\tilde{t} \int_{n(a, a')} \left[L(\tilde{x}, \tilde{t}, \tilde{\tau}, a, \tilde{a}) p(\tilde{x}, \tilde{\tau}, \tilde{a}, a') \frac{a}{\tilde{a}} - q(\tilde{x}, \tilde{t}, a, \tilde{a}) L \times \right. \quad (11)$$

$$\left. \times (\tilde{x}, \tilde{t}, \tilde{\tau}, \tilde{a}, a') d\tilde{a} \right] \text{ при } \tilde{x} = x + a(\tilde{t} - t), \quad \tilde{\tau} = \tau - (\tilde{t} - t)(1 - a/a'),$$

$$\text{где } d(x, t, \tau, a, a') = \frac{1}{1 - a/a'} (p - q) \left(x + \frac{a\tau}{1 - a/a'}, t + \frac{\tau}{1 - a/a'}, a, a' \right).$$

Введем банахово пространство E ограниченных функций $f(x, \tau, a, a')$, нормированных по формуле $\|f\|_E = \text{vgraimax} |f(x, \tau, a, a')|$, в которой максимум рассматривается на множестве $(-\infty, \infty) \times (0, \infty) \times (-1, 1) \times n(a)$. Функции $L(x, t, \tau, a, a') = L(t)$ и $d(t) = d(x, t, \tau, a, a')$ будем рассматривать как функции переменной $t \in [t_0, t_1]$, принимающие значения в пространстве E . Интегральное уравнение (11) обозначим так: $L(t) = d(t) + R[L](t)$ (12). Формальным решением уравнения (12) является сумма ряда $d(t) + R[d](t) + \dots + R^n[d](t) + \dots$ (13). Оценим члены этого ряда. Введем обозначения

$$v_1(x, t, a, a') = \frac{1}{a'}(x, t, a, a'), \quad v_2(x, t, a, a') = \frac{1}{a' - a} v(x, t, a, a'),$$

$$\|v_i(t', a')\| = \text{vgraimax}_{x, a} \|v_i(x, t', a, a')\|, \quad \|v_i(t')\| = \text{vgraimax}_{a'} \|v_i(t', a')\|,$$

$$\|v_i\|_{\infty}^+(t) = \text{vgraimax}_{t' \in [t, \infty], a' \in [-1, 1]} \|v_i(t', a')\|, \quad (14) \quad \|v_i\|_1^+(t) = \int_t^{\infty} \int_{-1}^1 \|v_i(t', a')\| dt' da',$$

$$f(t) = \|p_1\|_{\infty}^+(t) + \|q(t)\|, \quad F(t) = \int_t^{\infty} f(\tilde{t}) d\tilde{t}, \quad i = 1, 2, \emptyset$$

($\emptyset$ — символ отсутствия индекса). Нетрудно видеть, что функция $\|d(t)\|_E$ не возрастающая и справедливы такие неравенства: $\|v(t)\| \leq \|v_1(t)\|$, $\|v(t)\| \leq 2\|v_2(t)\|$, $\|d(t)\|_E \leq \|p - q\|_{\infty}^+(t)$,

$$\|R[d](t)\| \leq \int_t^{\infty} f(\tilde{t}) \|d(\tilde{t})\| d\tilde{t}. \quad (15)$$

Легко доказать методом индукции, что неравенство (15) приводит к неравенству

$$\|R^n[d](t)\|_E \leq - \int_t^{\infty} F'(\tilde{t}) \frac{F^{n-1}(\tilde{t})}{(n-1)!} \|d(\tilde{t})\|_E d\tilde{t}. \quad (16)$$

Из монотонности $\|d(t)\|_E$ и (16) окончательно получаем неравенство

$$\|R^n[d](t)\|_E \leq \|d(t)\|_E \frac{F^n(t)}{n!}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

указывающее на абсолютную и равномерную сходимость ряда (13) и справедливость для его суммы $L(t)$ неравенства $\|L(t)\|_E \leq \|p - q\|_{\infty}^+(t) \exp[F(t)]$ (17). Последнее означает ограниченность функции

$K(x, t, t', a, a') = L(x, t, t' - t, a, a')$, а ее непрерывность по t' непосредственно вытекает из интегрального уравнения (10) в силу непрерывности p и q по t' . Итак, существование преобразования (6) для гладких ограниченных функций p и q доказано.

Совершенно аналогично нетрудно показать, что ряд (13) сходится в банаховом пространстве F измеримых абсолютно суммируемых функций $f(x, \tau, a, a')$, нормированных по формуле

$$\|f\|_F = \text{vrgimax}_{x, a} \int_0^\infty \int_{-1}^1 \left| \frac{1}{a'} f(x, \tau, a', a) \right| d\tau da',$$

и для его суммы справедливо неравенство $\|L(t)\|_F \leq \|p_1 - q_1\|_1^+(t) \exp[F(t)]$ (17').

Пусть теперь p и q — произвольные ограниченные функции, удовлетворяющие условиям (4) — (5), (5'); $L(x, t, \tau, a, a')$ — решение интегрального уравнения (11). Аппроксимируем функции p и q последовательностью гладких функций p_n и q_n так, чтобы $\lim_{n \rightarrow \infty} \|(p_n - p)_i\|_\infty^+(t) = 0$, $i = 1, 2$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \|(q_n - q)_2\|_\infty^+(t) = 0$, тогда последовательность решений $L_n(x, t, \tau, a, a')$ интегрального уравнения (11) при $p = p_n$, $q = q_n$ сходится, как нетрудно видеть из неравенства (17), к функции $L(x, t, \tau, a, a')$ по норме в пространстве E при $t \in [t_0, t_1]$.

Отсюда следует, что функция $K(x, t, t', a, a') = L(x, t, t' - t, a, a')$ является ядром преобразования в случае ограниченных функций p и q , подчиненных условиям (4) — (5'). Принимая во внимание обозначение (14), заключаем, что справедлива

Теорема 1. Пусть $p(x, t, a, a')$ и $q(x, t, a, a')$ — непрерывные по t и ограниченные в $[-\infty, \infty] \times [t_0, t_1] \times [-1, 1] \times [-1, 1]$ функции, удовлетворяющие условиям (4) — (5'); тогда уравнение (3) имеет обобщенное решение $y(x, t, a)$, представимое в виде (6), где $z(x, t, a)$ — исчезающее при $t \rightarrow +\infty$ обобщенное решение уравнения (1) при условии (2). Функция $K(x, t, t', a, a')$ ограничена, непрерывна по t' , удовлетворяет интегральному уравнению (10) и, следовательно, равенствам

$$K(x, t, t, a, a') = \frac{1}{1 - a/a'} [p(x, t, a, a') - q(x, t, a, a')],$$

$$\lim_{t \rightarrow t_1} K(x, t, t', a, a') = 0, \quad \forall t' \geq t_1$$

и неравенствам $\left| \frac{1}{a'} K(x, t, t', a, a') \right| \leq \|p_2 - q_2\|_\infty^+(t) \exp[F(t)]$,

$$\int_t^\infty \int_{-1}^1 \left| \frac{1}{a'} K(x, t, t', a, a') \right| dt' da' \leq \|p_1 - q_1\|_\infty^+(t) \exp[F(t)].$$

Рассматривая вместо условия (2) начальное условие

$$\lim_{t \rightarrow t_0} z(x + at, t, a) = f_0(x, a), \quad (18)$$

совершенно аналогично можно доказать существование преобразования исчезающего при $t \rightarrow -\infty$ решения уравнения (1) в решение уравнения (3). Обозначим

$$\begin{aligned} \|v_i\|_{\infty}^-(t) &= \operatorname{vgr} \max_{t' \in [-\infty, t], a' \in [-1, 1]} \|v_i(t', a')\|, \quad \|v_i\|_1^-(t) = \\ &= \int_{-\infty}^t \int_{-1}^1 \|v_i(t', a')\| dt' da'. \end{aligned}$$

Теорема 2. Пусть $p(x, t, a, a')$ и $q(x, t, a, a')$ — непрерывные по t и ограниченные в $[-\infty, \infty] \times [t_0, t_1] \times [-1, 1] \times [-1, 1]$ функции, удовлетворяющие условиям (4) — (5'); тогда уравнение (3) при условии (18) имеет обобщенное решение $y(x, t, a)$, пред-

ставимое в виде $y(x, t, a) = z_-(x, t, a) + \int_{-\infty}^t \int_{n(a)} K^-(x, t, t', a, a') \times$
 $\times z_-(x, t', a') dt' da'$, где $z_-(x, t, a)$ — исчезающее при $t \rightarrow -\infty$ решение уравнения (1) при условии (18). Функция $K^-(x, t, t', a, a')$ ограничена, непрерывна по t' , удовлетворяет интегральному уравнению

$$\begin{aligned} K(x, t, t', a, a') &= -\frac{1}{1-a/a'}(p-q)\left(x-a\frac{t-t'}{1-a/a'}, t-\frac{t-t'}{1-a/a'}, a, \right. \\ &\left. a'\right) + \int_{\theta(t, t')}^t \int_{n(a, a')} \left[K^-(\tilde{x}, \tilde{t}, \tilde{t}', a, \tilde{a}) p(\tilde{x}, \tilde{t}', \tilde{a}, a') \frac{a}{\tilde{a}} - q(\tilde{x}, \tilde{t}, a, \tilde{a}) K^- \times \right. \\ &\left. \times (\tilde{x}, \tilde{t}, \tilde{t}', \tilde{a}, a') \right] d\tilde{t} d\tilde{a} \text{ при } \tilde{x} = x + a(\tilde{t} - t), \tilde{t}' = t' + a(\tilde{t} - t)/a' \text{ и,} \\ &\text{следовательно, равенствам} \end{aligned}$$

$$K^-(x, t, t, a, a') = -\frac{1}{1-a/a'}(p-q)(x, t, a, a'), \quad \lim_{t \rightarrow t_0} K^-(x, t, t', a, a') = 0$$

$$\begin{aligned} \text{и } \left| \frac{1}{a'} K^-(x, t, t', a, a') \right| &\leq \|p_2 - q_2\|_{\infty}^-(t) \exp[F^-(t)], \quad \int_{-\infty}^t \int_{-1}^1 \left| \frac{1}{a'} \times \right. \\ &\times K^-(x, t, t', a, a') \left| dt' da' \leq \|p_1 - q_1\|_{\infty}^-(t) \exp[F^-(t)], \text{ где } F^-(t) = \right. \\ &= \int_{-\infty}^t (\|p_1\|_{\infty}^-(\tilde{t}) + \|q(\tilde{t})\|) d\tilde{t}. \end{aligned}$$

В заключение опишем некоторые носители по переменной a' функций p и $\bar{q}$, удовлетворяющие условиям (4). Пусть $a \rightarrow r(a)$ — произвольная вещественная непрерывная, монотонно убывающая

функция на интервале $(-\infty, \infty)$, принимающая значение $r(0) = 0$ и совпадающая со своей обратной функцией. Введем множества точек на интервале $(-\infty, \infty)$:

$$N_r(a) = \begin{cases} [-\infty, r(a)] \cup [a, \infty], & a > 0 \\ [-\infty, a] \cup [r(a), \infty], & a < 0, \end{cases}$$

$$N_r^c(a) = [-\infty, \infty] \setminus N_r(a).$$

Тогда нетрудно видеть, что множество $N_r^*(a)$, получаемое при изменении последовательности интегрирования из равенства

$$\int_{-\infty}^{\infty} da' \int_{N_r^*(a')} da = \int_{-\infty}^{\infty} da \int_{N_r^*(a)} da',$$

совпадает с $N_r^c(a)$, т. е.

$$N_r^*(a) = N_r^c(a) = \begin{cases} [r(a), a], & a > 0, \\ [a, r(a)], & a < 0. \end{cases}$$

При этом мы учитываем свойства функции $r(a)$. Непосредственной проверкой устанавливаем, что $N_r(a) \cap N_r^*(a) = \emptyset, \forall a' \notin N_r(a)$. Последнее равенство приводит к такому выражению при изменении последовательности интегрирования:

$$\int_{N_r(a)} d\tilde{a} \int_{N_r(\tilde{a})} da' = \int_{N_r(a)} da' \int_{N_r(a) \cap N_r^*(a)} d\tilde{a},$$

используемому при выводе уравнения для ядра преобразования (6). Если взять в качестве носителя функций p и q по переменной множество точек $n_r(a) = [-1, 1] \cap N_r(a), a \in [-1, 1]$, то свойства (4) будут выполнены.

Аналогично нетрудно получить, что множество точек

$$n_r(a) = [-1, 1] \cap \begin{cases} [a, r(a)], & a > 0 \\ [r(a), a], & a < 0, \end{cases}$$

где функция $r(a)$ непрерывна, монотонно возрастает, принимает значение $r(0) = 0$ и удовлетворяет неравенствам $r(a) > a$ при $a > 0$ и $r(a) < a$ при $a < 0$, а также удовлетворяет условиям (4).

Список литературы: 1. Марченко В. А. Спектральная теория операторов Штурма — Лиувилля. — К.: Наук. думка, 1972. — 219 с. 2. Нижник Л. П. Обратная нестационарная задача рассеяния. — К.: Наук. думка, 1973 — 182 с.

Поступила в редколлегию 20.03.83.

Пусть $A_1, A_2, \dots, A_n$ — система дважды перестановочных линейных ограниченных операторов, действующих в гильбертовом пространстве H . Пусть $\dim H_0 = r < \infty$, где $H_0 = \bigcap_{k=1}^n \overline{2 \operatorname{Im} A_k H}$.

Пусть $z(x_1, x_2, \dots, x_n) = e^{i(x_1 A_1 + x_2 A_2 + \dots + x_n A_n)} z_0$, $z_0 \in H_0$ — линейное представимое случайное поле [1, 2]. Пусть $L_k = V_{m_k, \dots, m_n > 0} A_k^{m_k} \dots A_n^{m_n} H_0$ и $H_k = \bigcap_{s \neq k} \overline{2 \operatorname{Im} A_s H} = V_{m > 0} A_k^m H_0$, тогда $L_k \perp H_s \ominus H_0$, $(s < k)$ [3].

Вычислим корреляционную функцию поля $z(x_1, x_2, \dots, x_n)$: $K(x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_n) = (z(x_1, \dots, x_n), z(y_1, \dots, y_n)) = (e^{i(x_1 A_1 + \dots + x_n A_n)} z_0, e^{i(y_1 A_1 + \dots + y_n A_n)} z_0) = (e^{-iy_1 A_1^*} \dots e^{ix_1 A_1} z_0, e^{-i(x_2 A_2^* + \dots + x_n A_n^*)} e^{i(y_2 A_2 + \dots + y_n A_n)} z_0)$. Разложим $e^{-iy_1 A_1^*} e^{ix_1 A_1} z_0 \in H_1$ на компоненты из H_0 и из $H_1 \ominus H_0$

$$e^{-iy_1 A_1^*} e^{ix_1 A_1} z_0 = \sum_{\gamma_1=1}^r (e^{-iy_1 A_1^*} e^{ix_1 A_1} z_0, h_{\gamma_1}) h_{\gamma_1} + \tilde{h}_1,$$

где $\{h_1, h_2, \dots, h_r\}$ — ортонормированный базис в H_0 и $h_1 \in H_1 \ominus H_0$. Тогда в силу $e^{-i(x_2 A_2^* + \dots + x_n A_n^*)} \cdot e^{i(y_2 A_2 + \dots + y_n A_n)} z_0 \in L_2$ и $L_2 \perp H_1 \ominus H_0$ получим:

$$\begin{aligned} K(x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_n) &= \sum_{\gamma_1=1}^r (e^{-iy_1 A_1^*} e^{ix_1 A_1} z_0, h_{\gamma_1}) \times \\ &\times (h_{\gamma_1}, e^{-i(x_2 A_2^* + \dots + x_n A_n^*)} e^{i(y_2 A_2 + \dots + y_n A_n)} z_0) = \\ &= \sum_{\gamma_1=1}^r (e^{ix_1 A_1} z_0, e^{iy_1 A_1} h_{\gamma_1}) (e^{i(x_2 A_2 + \dots + x_n A_n)} h_{\gamma_1}, e^{i(y_2 A_2 + \dots + y_n A_n)} z_0). \end{aligned}$$

Повторяя эту процедуру $(n-1)$ раз, имеем

$$\begin{aligned} K(x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_n) &= \sum_{\gamma_1, \dots, \gamma_{n-1}=1}^r (e^{ix_1 A_1} z_0, e^{iy_1 A_1} h_{\gamma_1}) \dots \\ &\dots (e^{ix_n A_n} h_{\gamma_{n-1}}, e^{iy_n A_n} z_0). \end{aligned}$$

Пусть $z_0 = \sum_{\gamma_0=1}^r c_{\gamma_0} h_{\gamma_0}$, тогда $K(x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_n) =$

$$= \sum_{\gamma_0, \dots, \gamma_{n-1}=1}^r c_{\gamma_0} \cdot \bar{c}_{\gamma_n} (e^{ix_1 A_1} h_{\gamma_0}, e^{iy_1 A_1} h_{\gamma_1}) \dots (e^{ix_n A_n} h_{\gamma_{n-1}}, e^{iy_n A_n} h_{\gamma_n}),$$

$$K(x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_n) = \sum_{\tau_0, \dots, \tau_n=1}^r c_{\tau_0} \cdot \bar{c}_{\tau_n} \prod_{k=1}^n \Phi_k^{\tau}(x_k, y_k), \text{ где}$$

$$\Phi_k^{\tau}(x_k, y_k) = (e^{ix_k \dot{A}_k} h_{\tau_{k-1}}, e^{iy_k \dot{A}_k} h_{\tau_k}).$$

Если $\dot{H}$ — модельное пространство и $\dot{A}_1, \dots, \dot{A}_n$ — модельные операторы в нем, а U — унитарный оператор, действующий из H в $\dot{H}$, такой, что $UA_k = \dot{A}_k U$, то $\Phi_k^{(\tau)}(x_k, y_k) = (e^{ix_k \dot{A}_k} \dot{g}_{\tau_{k-1}}, e^{iy_k \dot{A}_k} \dot{g}_{\tau_k})$, где $\{\dot{g}_1, \dots, \dot{g}_r\}$ базис в $\dot{H}_0 = \bigcap_{k=1}^n 2 \operatorname{Im} \dot{A}_k \dot{H}$ и $\dot{g}_\alpha = U h_\alpha$.

Пусть теперь операторы $A_1, \dots, A_n$ удовлетворяют следующим условиям: 1) спектр каждого из них сосредоточен в нуле; 2) резольвента каждого A_k , ($k = 1, \dots, n$) есть функция экспоненциального типа от $\lambda = \frac{1}{\mu}$; 3) A_k — диссипативные операторы, ($k = 1, 2, \dots, n$); 4) A_k — вполне несамосопряженные, ($k = 1, 2, \dots, n$). Тогда модельное пространство $\dot{H}$ определяется следующим образом: $\dot{H} = \left\{ f(x) = (f_1(x), \dots, f_r(x)) \mid \int_D f(x) \cdot f^*(x) dx < \infty \right\}$, где

$$D = \prod_{k=1}^n [a, a_k]; \quad x = (x_1, \dots, x_n), \quad x_k \in [a, a_k] \quad \text{и} \quad dx = dx_1 \dots dx_n$$

($\dot{H}$ получаем после факторизации по ядру).

Построим модельные операторы: $\dot{A}_k(f_1, \dots, f_r) = \left(i \int_{x_k}^{a_k} f_1(x_1, \dots, x_{k-1}, \tau, x_{k+1}, \dots, x_n) d\tau, \dots \right)$, $\dot{H}_0$ есть подпространство функций $f(x)$ с постоянными компонентами. Пусть $\{g_\alpha\}_{\alpha=1}^r$ — базис в $\dot{H}_0$, $g_\alpha = (0, \dots, 0, \underbrace{1}_{\alpha}, 0, \dots, 0)$, ($\alpha = 1, 2, \dots, r$). Тогда $\Phi_k^{(\tau)}(x_k, y_k) = (e^{ix_k \dot{A}_k} \dot{g}_{\tau_{k-1}}, e^{iy_k \dot{A}_k} \dot{g}_{\tau_k}) = \left(\frac{-1}{2\pi i} \right)^2 \oint_{\Gamma_k} \oint_{\bar{\Gamma}_k} e^{ix_k \lambda_1 - iy_k \bar{\lambda}_2} ((\dot{A}_k - \lambda_1 I)^{-1} \times$
 $\times \dot{g}_{\tau_{k-1}}, (A_k - \lambda_2 I)^{-1} \dot{g}_{\tau_k}) d\lambda_1 d\bar{\lambda}_2, \quad \Gamma_k$ — контур, охватывающий спектр A_k .

Для вычисления $\Phi_k^{(\tau)}$ подсчитаем значение резольвенты A_k на элементе $\dot{g}_\alpha$: $[(\dot{A}_k - \lambda I)^{-1} \dot{g}_\alpha](x) = f_\alpha^{(k)}(x)$, где

$$f_\alpha^{(k)}(x) = \left(0, \dots, 0, \underbrace{-\frac{1}{\lambda} e^{\frac{i}{\lambda}(a_k - x_k)}}_{\alpha}, 0, \dots, 0 \right),$$

$$\Phi_k^{(\tau)}(x_k, y_k) = \left(\frac{-1}{2\pi i} \right)^2 \oint_0 \oint_0 e^{ix_k \lambda_1 - iy_k \bar{\lambda}_2} \delta_{\tau_k, \tau_{k-1}} \int_0^{a_1} \int_0^{a_2} \dots$$

$$\begin{aligned}
& \dots \int_0^{a_n} \left(-\frac{1}{\lambda_1} e^{\frac{i}{\lambda_1}(a_k - \xi_k)} \right) \left(-\frac{1}{\bar{\lambda}_2} e^{-\frac{i}{\bar{\lambda}_2}(a_k - x_k)} \right) d\xi_1 \dots d\xi_n d\lambda_1 d\bar{\lambda}_2 = \\
& = \left(\frac{-1}{2\pi i} \right)^2 \oint_{\Gamma_k} \oint_{\Gamma_k} e^{ix_k \lambda_1 - iy_k \bar{\lambda}_2} \delta_{\gamma_k, \gamma_{k-1}} \prod_{s \neq k}^{a_k} \int_0^{a_s} \left(-\frac{1}{\lambda_1} e^{\frac{i}{\lambda_1}(a_k - \xi)} \right) \times \\
& \quad \times \left(-\frac{1}{\bar{\lambda}_2} e^{-\frac{i}{\bar{\lambda}_2}(a_k - \xi)} \right) d\xi d\lambda_1 d\bar{\lambda}_2 = \int_0^{a_k} \delta_{\gamma_k, \gamma_{k-1}} \prod_{s \neq k}^{a_k} \int_0^{a_s} a_s \times \\
& \quad \times \left(\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_k} \frac{1}{\lambda_1} e^{ix_k \lambda_1} e^{\frac{i}{\lambda_1}(a_k - \xi)} d\lambda_1 \right) \left(\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_k} \frac{1}{\bar{\lambda}_2} e^{-iy_k \bar{\lambda}_2} e^{-\frac{i}{\bar{\lambda}_2}(a_k - \xi)} d\bar{\lambda}_2 \right) d\xi = \\
& = \int_0^{a_k} \delta_{\gamma_k, \gamma_{k-1}} \prod_{s \neq k}^{a_k} J_0(2\sqrt{x_k(a_k - \xi)}) \cdot J_0(2\sqrt{y_k(a_k - \xi)}) d\xi, \quad (1) \\
& \delta_{\gamma_k, \gamma_{k-1}} = \begin{cases} 0, & \text{если } \gamma_k \neq \gamma_{k-1}; \\ 1, & \text{если } \gamma_k = \gamma_{k-1}. \end{cases}
\end{aligned}$$

Итак, корреляционная функция

$$\begin{cases} K(x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_n) = \sum_{\gamma_0, \dots, \gamma_n=1}^r c_{\gamma_0} \bar{c}_{\gamma_n} \prod_{k=1}^n \Phi_k^{(\gamma)}(x_k, y_k), \\ \text{где } \Phi_k^{(\gamma)}(x_k, y_k) \text{ имеет вид (1).} \end{cases} \quad (2)$$

Имеет место обратное утверждение.

Если $K(x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_n)$ функция от $2n$ переменных представляется в виде (2), то она является корреляционной функцией некоторого линейно-представимого случайного поля с дважды перестановочными операторами A_k , ($k = 1, 2, \dots, n$).

В самом деле, построим универсальную модель следующим образом: $\dot{H} = L_2(D) + \dots + L_2(D)$ — сумма r экземпляров, где $D = \prod_{k=1}^n [0, a_k]$ (r, n и a_k , ($k = 1, 2, \dots, n$) взяты из представления K).

Операторы $\dot{A}_k$ определяем таким образом: $\dot{A}_k f = \left(i \int_{x_k}^{a_k} f_1(x_1, \dots, x_{k-1}, \tau, x_{k+1}, \dots, x_n) d\tau, \dots \right)$, где $f = (f_1, \dots, f_r)$.

Рассмотрим гиперповерхность $\dot{z}(x_1, \dots, x_n) = e^{i(x_1 \dot{A}_1 + \dots + x_n \dot{A}_n)} \dot{z}_0$, где $\dot{z}_0 \in \dot{H}_0$, ($\dot{H}_0 = \bigcap_{k=1}^n 2 \operatorname{Im} \dot{A}_k \dot{H}$), тогда корреляционная функция гиперповерхности имеет вид (2).

Пусть сейчас операторы $A_1, \dots, A_n$ удовлетворяют следующим условиям: 1)' вещественный спектр у операторов A_k , ($k = 1, \dots, n$)

отсутствует; 2)' A_k , ($k = 1, \dots, n$) диссипативные операторы; 3)' A_k , ($k = 1, \dots, n$) вполне несамосопряженные.

Тогда модельное пространство $\dot{H}$ определяется следующим образом: $\dot{H} = l_2(\beta^{(1)}, \beta^{(2)}, \dots, \beta^{(n)}) + \dots + l_2(\beta^{(1)}, \beta^{(2)}, \dots, \beta^{(n)})$ — сумма r экземпляров, где $l_2(\beta^{(1)}, \beta^{(2)}, \dots, \beta^{(n)}) = \{f(p_1, \dots, p_n);$

$p_1 = 1, \dots, N_1; \dots; p_n = 1, \dots, N_n$ таких, что $\sum_{p_1=1}^{N_1} \dots$

$\dots \sum_{p_n=1}^{N_n} |f(p_1, \dots, p_n)|^2 (\beta_{p_1}^{(1)})^2 \dots (\beta_{p_n}^{(n)})^2 < \infty\}$. Модельные операторы определяем таким образом:

$$\begin{aligned} \dot{A}_k(f_1, \dots, f_r) &= (\lambda_{p_k}^{(k)} f_1(p_1, \dots, p_n) + \\ &+ i \sum_{r=p_k+1}^{N_k} f_1(p_1, \dots, p_{k-1}, r, p_{k+1}, \dots, p_n) (\beta_r^{(k)})^2 \dots), \end{aligned}$$

где $\{\lambda_{p_k}^{(k)}\}_{k=1}^{N_k}$ — последовательность невещественных точек спектра оператора A_k : $\lambda_{p_k}^{(k)} = \alpha_{p_k}^{(k)} + \frac{i}{2} (\beta_{p_k}^{(k)})^2$; $\dot{H}_0 = \bigcap_{k=1}^n \overline{2 \operatorname{Im} \dot{A}_k \dot{H}}$ есть совокупность постоянных векторных функций.

Пусть $\{\dot{g}_\alpha\}_{\alpha=1}^r$ — ортогональный базис в $\dot{H}_0$: $\dot{g}_\alpha = (0, \dots, 0, \underbrace{1}_{\alpha}, 0, \dots, 0)$. Тогда $\Phi_k^{(\gamma)}(x_k, y_k)$ в этом случае имеет вид

$$\begin{aligned} \Phi_k^{(\gamma)}(x_k, y_k) &= \left(\frac{-1}{2\pi i}\right)^2 \oint_{\Gamma_k} \oint_{\Gamma_k} e^{ix_k \lambda_1 - iy_k \bar{\lambda}_2} ((\dot{A}_k - \lambda_1 I)^{-1} \dot{g}_{\gamma_{k-1}}, (\dot{A}_k - \\ &- \lambda_2 I)^{-1} \dot{g}_{\gamma_k}) d\lambda_1 d\bar{\lambda}_2. \end{aligned}$$

Контур Γ_k содержит внутри себя множество собственных чисел оператора A_k .

Вычислим значение резольвенты оператора $\dot{A}_k$ на элементе $\dot{g}_\alpha$:

$$(\dot{A}_k - \lambda I)^{-1} \dot{g}_\alpha = \left(0, \dots, 0, \underbrace{\frac{\beta_{p_k}^{(k)}}{\lambda_{p_k}^{(k)} - \lambda} \prod_{j=p_k+1}^{N_k} \frac{\lambda - \bar{\lambda}_j^{(k)}}{\lambda - \lambda_j^{(k)}}}_{\alpha}, 0, \dots, 0\right),$$

$$\begin{aligned} \Phi_k^{(\gamma)}(x_k, y_k) &= \left(\frac{-1}{2\pi i}\right)^2 \oint_{\Gamma_k} \oint_{\Gamma_k} e^{ix_k \lambda_1 - iy_k \bar{\lambda}_2} \cdot \delta_{\gamma_{k-1}, \gamma_k} \times \\ &\times \sum_{\alpha_1}^{N_1} \dots \sum_{p_n=1}^{N_n} \left(\frac{\beta_{p_k}^{(k)}}{\lambda_{p_k}^{(k)} - \lambda_1} \prod_{j=p_k+1}^{N_k} \frac{\lambda_1 - \bar{\lambda}_j^{(k)}}{\lambda_1 - \lambda_j^{(k)}} \right) \times \end{aligned}$$

$$\times \left(\frac{\beta_{p_k}^{(k)}}{\bar{\lambda}_{p_k}^{(k)} - \bar{\lambda}_2} \prod_{j=p_k+1}^{N_k} \frac{\bar{\lambda}_2 - \lambda_j^{(k)}}{\bar{\lambda}_2 - \bar{\lambda}_j^{(k)}} \right) (\beta_{p_1}^{(1)})^2 \dots (\beta_{p_n}^{(n)})^2 d\lambda_1 \dots d\lambda_2 =$$

$$= \sum_{p_k=1}^{N_k} (\delta_{\tau_{k-1}, \tau_k} \prod_{s=1}^n \sum_{p_s=1}^{N_s} (\beta_{p_s}^{(s)})^2) \Lambda_{p_k}(x_k) \overline{\Lambda_{p_k}(y_k)},$$

$$\text{где } \Lambda_{p_k}(x_k) = \frac{-1}{2\pi i} \beta_{p_k} \oint_{\Gamma_k} e^{ix_k \lambda_1} \frac{1}{\bar{\lambda}_{p_k}^{(k)} - \lambda_1} \prod_{j=p_k+1}^{N_k} \frac{\lambda_1 - \bar{\lambda}_j^{(k)}}{\lambda_1 - \bar{\lambda}_j^{(k)}} d\lambda_1.$$

В том случае, когда операторы $A_1, \dots, A_n$ удовлетворяют условиям $1', 2', 3'$, корреляционная функция соответствующего случайного поля представляется в виде $K(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) =$

$$= \sum_{\tau_0, \dots, \tau_n=1}^r c_{\tau_0} \bar{c}_{\tau_n} \prod_{k=1}^n \Phi_k^{(\tau)}(x_k, y_k), \text{ где } \Phi_k^{(\tau)}(x_k, y_k) \text{ имеет вид (3).}$$

Имеет место и обратное утверждение. Если функция $K(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$ имеет вид (3), то она является корреляционной функцией некоторого линейно-представимого случайного поля с дважды перестановочными операторами.

В самом деле, построим соответствующую универсальную модель, используя представление функции $K(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$. Рассмотрим гиперповерхность $z(x_1, \dots, x_n) = e^{ix_1 \bar{A}_1 + \dots + ix_n \bar{A}_n} z_0$; $z_0 \in \dot{H}_0$. Корреляционная функция этой гиперповерхности совпадает с функцией $K(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$.

Список литературы: 1. Лившиц Н. С., Янцевич А. А. Теория оперативных узлов в гильбертовых пространствах. — Х.: Вища школа, Изд-во при Харьк. ун-те, 1971. — 160 с. 2. Аббади Л., Янцевич А. А. Некоторые классы неоднородных случайных полей. — Деп. в ВИНТИ, 1983. — 36 с. 3. Золотарев В. А. О треугольных моделях систем дважды перестановочных операторов. — Докл. АН Арм. ССР, 1976, № 3, с. 136—140. 4. Янцевич А. А. Применение теории оперативных узлов к исследованию нестационарных случайных процессов и последовательностей. — Материалы Всесоюз. симпозиума по статистике случайных процессов. — К., 1973, с. 229—232.

Поступила в редколлегию 20.01.83.

УДК 517.919.2

А. П. ПРИХОДЬКО, канд. физ.-мат. наук

О ФУНКЦИОНАЛЕ БЕЛЛМАНА В БЕСКОНЕЧНОМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Рассмотрим управляемое уравнение

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + B(t)u + v(t), \quad (1)$$

где $A(t) \in [X]$ при каждом $t \geq t_0$ и $A(\cdot) \in L_1^{loc}([t_0, +\infty), [X])$;

$B(t) \in [U, X]$ при $t \geq t_0$ и $B(\cdot) \in L_p^{loc}([t_0, +\infty), [U, X])$ при $p \geq 1$; $u(t)$ — сильно измеримая функция из U , $u(\cdot) \in L_{p'}^{loc}([t_0, +\infty), U)$, $(1/p + 1/p' = 1)$; $v(\cdot) \in L_1^{loc}([t_0, +\infty), U)$.

Теорема 1. Предположим, что в задаче на быстроедействие из начального множества P на подвижное целевое множество M_t уравнение (1) является локально ε -управляемым [1, 2] при ограничениях на управление $u(\tau) \in \Omega_\tau$ и в. Семейство множеств $\Omega_\tau \subset U$ — измеримое многозначное отображение, $\|\Omega_\tau\| \leq r(\tau)$, $r(\tau) \in L_1^{loc}([t_0, +\infty))$. Начальное множество P — выпукло, целевое множество M_t также выпукло и непрерывно в метрике Хаусдорфа.

Тогда, если $\{u_i(t)\}_{i=1}^\infty$ оптимальная по быстродействию последовательность управлений [3] ($x(t^*, u_i) \rightarrow \bar{x}$), то существует нетривиальное решение сопряженного уравнения $\dot{\eta}(t) = -A^*(t)\eta(t)$, $\eta(t_0) \neq 0$ (2), такое, что

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \langle \eta(t), B(t)u_n(t) \rangle \stackrel{n. n.}{=} \sup_{u \in \Omega_t} \langle \eta(t), B(t)u \rangle. \quad (3)$$

Причем $\eta(t_0)$ — внешний опорный функционал к множеству P в точке $x_0 = x_0(t, u_i)$, $\eta(t^*)$ — внешний опорный функционал к множеству $\overline{K(\Omega_\tau, P, t_0, t)}$ в точке $\bar{x}$ (t^* — время быстрейшего падения из P на M_t).

Доказательство. В силу локальной ε -управляемости уравнения (1) множество достижимости $\overline{K(\Omega_\tau, 0, t_0, t^*)}$ имеет непустую внутренность, поэтому $\overline{K(\Omega_\tau, P, t_0, t^*)} \supset \Phi(t^*, t_0)P + \overline{K(\Omega_\tau, 0, t_0, t^*)}$ также имеет непустую внутренность и непрерывно по Хаусдорфу [4]. Нетрудно видеть, что $\bar{x} \notin \text{Int } \overline{K(\Omega_\tau, P, t_0, t^*)}$, $\bar{x} \in \partial \overline{K(\Omega_\tau, 0, t_0, t^*)} \cap M_{t^*}$.

Следовательно, существует разделяющий функционал $f \in X^*$, $\|f\| = 1$ такой, что $\langle f, M_{t^*} \rangle \geq c$, $\langle f, \overline{K(\Omega_\tau, P, t_0, t^*)} \rangle \geq c$.

Далее, полагая $\eta(t^*) = f$, получаем неравенство $\langle \eta(t^*), \Phi(t^*, \tau)(B(\tau)u(\tau) + v(\tau)) \rangle \leq c$ (4), $\forall x \in P$,

$\forall u(\tau) \in \Omega_\tau$ п. в. Исходя из неравенства (4), получаем [3] локальное условие (3) и условия трансверсальности для решения $\eta(t)$ сопряженного уравнения (2).

Следствие 1. Пусть в условиях теоремы 1 будет $A(t) \equiv A$, где A — инфинитезимальный производящий оператор c_0 -полугруппы $S(t)$, фазовое пространство X — рефлексивно. Тогда для оптимальной по быстродействию последовательности управлений $\{u_i(\tau)\}$ ($x(t^*, u_i) \rightarrow x$) выполняется условие

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \langle \eta(t), B(t)u_i(t) \rangle \stackrel{n. n.}{=} \sup_{u \in \Omega_t} \langle \eta(t), B(t)u \rangle,$$

где $\eta(t)$ — произвольное обобщенное решение сопряженного уравнения, удовлетворяющее условиям трансверсальности: $\eta(t^*)$ — внешний опорный функционал к множеству $K(\Omega, P, t_0, t^*)$; $\eta(t_0)$ — внешний опорный функционал к множеству P .

Далее рассмотрим локально управляемые уравнения [2, 5]. Для них естественно определить функционал Беллмана $T(x)$, который равен времени быстродействия из 0 в заданную точку x .

Теорема 2. Рассмотрим автономное дифференциальное уравнение $\dot{x} = Ax + Bu$ (5), $u(\tau) \in \Omega$ п. в. (6), где операторы A и B — линейные, ограниченные; пространства X, U — рефлексивны. Множество $\Omega \subset U$ — замкнуто, ограничено, строго выпукло с точкой покоя $u_0 \in \Omega$ ($Bu_0 = 0$). Уравнение (5) локально управляемо за свободное время. Тогда функционал Беллмана $T(x)$ определен, по крайней мере, в некоторой окрестности начала координат и непрерывен в каждой точке области определения.

Доказательство. В силу локальной управляемости существует окрестность $v(0, \varepsilon) = \{x: \|x\| < \varepsilon\}$ такая, что любая точка этой окрестности достижима за некоторое время $t(x)$ с управлением $u_x(t)$, удовлетворяющим условию (6).

Тогда для каждого x из множества достижимости существует оптимальное время быстродействия $t^* = T(x)$ и оптимальное управление $u_x^*(t)$ [6]. Таким образом, функция $T(x)$ определена во всех точках области достижимости.

Заметим, что уравнение (5) является точно управляемым за свободное время без ограничений на управление, так как $\bigcup_{n=1}^{\infty} v(0, n\varepsilon) \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} K(n\Omega, 0)$, и, следовательно, $\bigcup_{n=1}^{\infty} K(n\Omega, 0) = X$. Здесь $K(n\Omega, 0)$ — множество достижимости равенства (5) при ограничении на управление $u(t) \in n\Omega$ п. в. за свободное время. Критерием точной управляемости [2] уравнения (5) является $Sp\{A^i B U\}_{i=0}^m = X$ (7) при некотором натуральном $m \geq 0$. Условие (7) — также критерий точной управляемости (5) за любое наперед заданное время. Поэтому уравнение (5) является точно управляемым без ограничения управления на любом отрезке $[0, t]$, $t > 0$. Тогда множества достижимости $K(\Omega, 0, 0, t)$ имеют непустую внутренность при $t > 0$ и слабо компактны в себе [4].

Покажем, что граница множества достижимости $\partial K(\Omega, 0, 0, t)$ — поверхность уровня $T(x) = t$. Нетрудно видеть, что $K(\Omega, 0, 0, t_1) \subset K(\Omega, 0, 0, t_2)$ при $t_1 \leq t_2$. Если $x_1 \in \partial K(\Omega, 0, 0, t_1)$, то, очевидно, $T(x_1) \leq t_1$. Пусть $T(x_1) < t_1$, тогда в силу $\text{Int } K(\Omega, 0, 0, t_1) \neq \emptyset$ применима теорема 1:

$$\langle \eta(t), Bu_1(t) \rangle \stackrel{\text{п. в.}}{=} \max_{u \in \Omega} \langle \eta(t), Bu \rangle, \quad (8)$$

где $\eta(t)$ — решение сопряженного уравнения $\dot{\eta} = -A^*\eta$, $\eta(T(x_1)) = f$. Функционал f выберем внешним опорным к множеству $K(\Omega, 0, 0, t_1)$ в точке x_1 . В силу включения $K(\Omega, 0, 0, T(x_1)) \subset$

$\subset K(\Omega, 0, 0, t_1)$ он же будет опорным к множеству $K(\Omega, 0, 0, T(x_1))$. Таким образом, принцип максимума (8) удовлетворяется почти всюду на отрезке $[0, T(x_1)]$. Поэтому [7] оптимальное управление единственно и совпадает с $u_1(t)$ почти всюду на $[0, T(x_1)]$.

Если $T(x_1) \leq t_1/2$, то строим управление

$$u_2(\tau) = \begin{cases} u_0 : \tau \in [0, t_1 - T(x_1)]; \\ u_1(\tau + T(x_1) - t_1) : \tau \in (t_1 - T(x_1), t_1]. \end{cases}$$

В силу автономности уравнения (5) имеем $x(t^*, u_2) = x_1$, откуда в силу единственности оптимального управления $u^*(t) \stackrel{\text{п. в.}}{=} u_0$, т. е. $x_1 = 0$ лежит на границе множества достижимости, что противоречит локальной управляемости на $[0, T(x_1)]$.

Если $T(x_1) > t_1/2$, то, как и в предыдущем случае, получим $u^*(\tau) = u_0$ при $\tau \in [0, t_1 - T(x_1)]$ и $t_1 - T(x_1) < T(x_1)$. Далее строим управление

$$u_3(\tau) = \begin{cases} u_0 : \tau \in [0, t_1 - T(x_1)]; \\ u_2(\tau + T(x_1) - t_1) : \tau \in (t_1 - T(x_1), t_1]. \end{cases}$$

В силу $u_2(\tau) \stackrel{\text{п. в.}}{=} u^*(\tau)$, $\tau \in [0, T(x_1)]$ и автономности уравнения (5), управление $u_3(\tau)$ также приводит в точку x_1 . Тогда $u_3(\tau)$ также удовлетворяет принципу максимума и единственно на $[0, T(x_1)]$, поэтому $u_3(\tau) \stackrel{\text{п. в.}}{=} u^*(\tau)$, $\tau \in [0, T(x_1)]$. Отсюда получаем $u^*(\tau) \stackrel{\text{п. в.}}{=} u_0$ на отрезке $[0, 2(T(x_1) - t_1)]$, причем $x(T(x_1), u_3) = x_1$. Продолжая процесс построения последовательности управлений, на N шаге построим

$$u_{N+1}(\tau) = \begin{cases} u_0 : \tau \in [0, t_1 - T(x_1)]; \\ u_N(\tau + T(x_1) - t_1) : \tau \in (t_1 - T(x_1), t_1], \end{cases}$$

где $N-1$ есть целая часть от $T(x_1)/(t_1 - T(x_1))$. Применив принцип максимума и теорему единственности, получим $u^*(\tau) \stackrel{\text{п. в.}}{=} u_0$. Тогда $x_1 = 0$ и, следовательно, уравнение (5) не является локально управляемым. Полученное противоречие показывает, что $T(x_1) = t_1$.

Непрерывность $T(x)$. Предположим, что x_1 лежит в области определения функционала $T(x)$, тогда $x_1 \in K(\Omega, 0, 0, T(x_1))$. Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. В силу вложенности множеств $x_1 \in K(\Omega, 0, 0, T(x_1) + \varepsilon)$, $x_1 \notin K(\Omega, 0, 0, T(x_1) - \varepsilon)$. Более того, $x_1 \in \text{Int } K(\Omega, 0, 0, T(x_1) + \varepsilon)$, так как граница множества достижимости является поверхностью уровня функционала $T(x)$. Таким образом, существует $\delta > 0$ такое, что открытый шар $v(x_1, \delta) \subset \text{Int } K(\Omega, 0, 0, T(x_1) + \varepsilon) \setminus K(\Omega, 0, 0, T(x_1) - \varepsilon)$. Последнее включение означает, что функционал $T(x)$ непрерывен.

Для задачи на скорейшее попадание из заданной точки $x \in X$ в начало координат также можно ввести функционал времени

быстродействия $\theta(x)$. При этом оказывается, что для функционала $\theta(x)$ можно сформулировать аналогичное утверждение.

Следствие 2. Предположим, что в уравнении (5) операторы A и B ограничены, ограничения на управление заданы в форме (6). Тогда, если X , U — рефлексивные пространства, Ω — замкнутое ограниченное строго выпуклое множество, содержащее точку покоя, и уравнение (5) локально управляемо за свободное время, то функционал $\theta(x)$ определен в некотором открытом множестве и непрерывен в каждой точке, лежащей в области определения.

Для доказательства достаточно рассмотреть уравнение с обращенным временем: $\dot{x} = -Ax - Bv$, и $(\tau) \in \Omega$.

Следствие 3. Рассмотрим автономное дифференциальное уравнение (3) с ограничением на управление (6). Пусть операторы A и B — линейные ограниченные, Ω — замкнутое ограниченное, строго выпуклое множество с точкой покоя $u_0 \in \Omega$ ($Bu_0 = 0$), уравнение (5) локально управляемо за свободное время.

Тогда принцип максимума является достаточным условием оптимальности.

Список литературы. 1. Коробов В. И., Нгуен Хоа Шон. Управляемость линейных систем в банаховом пространстве при наличии ограничений на управление. II. — Дифференц. уравнения, 1980, 16, с. 1010—1022. 2. Приходько А. П., Рабах Р. Некоторые свойства линейных управляемых уравнений в бесконечномерных пространствах. — Вестн. Харьк. ун-та, № 174. Прикладная математика и механика, 1978, с. 37—43. 3. Приходько А. П. Необходимые условия оптимальности для линейной задачи на быстродействие в банаховом пространстве. — Тез. докл. III Всесоюз. семинара (25—27 сентября). Численные методы нелинейного программирования, Х., 1979, с. 154—158. 4. Приходько А. П. О множествах достижимости в банаховом пространстве. — Вестн. Харьк. ун-та, № 177. / Прикладная математика и механика, 1979, с. 27—35. 5. Коробов В. И., Нгуен Хоа Шон. Управляемость линейных систем в банаховом пространстве при наличии ограничений на управление. I. — Дифференц. уравнения, 1980, 16, № 5, с. 806—817. 6. Приходько А. П. О существовании оптимальных быстродействий при ограничениях на управление, зависящих от фазовых переменных. — Тез. докл. школы по теории операторов в функциональных пространствах. — Минск, 1978, с. 118—119. 7. Приходько А. П. О единственности оптимального быстродействия в банаховом пространстве. — Вестн. Харьк. ун-та, № 230. Механика, теория управления и математическая физика, 1982, с. 28—32. 8. Коробов В. И., Рабах Р. Точная управляемость в банаховом пространстве. — Дифференц. уравнения, 1979, 15, № 12, с. 2142—2150.

Поступила в редколлегию 29.04.83.

УДК 621.396

ВУ-НГОК-ФАТ

КВАЗИВЫПУКЛЫЕ МНОЖЕСТВА И УПРАВЛЯЕМОСТЬ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

1. Введение. За последнее время многих исследователей привлекает все большее внимание вопрос управляемости дискретных систем с ограничением на управление.

В [1, 2] получены необходимые и достаточные условия управляемости линейных систем, где ограничение на управление предполагается выпуклым в бесконечномерном банаховом пространстве.

В [3] вводится понятие ϵ -выпуклости множеств, которое является обобщением выпуклых множеств, содержащих нуль, и установлены критерии локальной управляемости дискретных систем в конечномерном пространстве. Оказалось, что понятие ϵ -выпуклости носит «конечномерный» характер и не применяется при изучении управляемости систем в бесконечномерном пространстве.

2. *Квазивыпуклые множества.* Пусть X, U — бесконечномерные пространства Банаха. Через $K(M, 0)$ обозначим конус, порожденный множеством $M \subset X$ в точке $0 \in M$, т. е. $K(M, 0) = \{x \in X / x = \lambda t, t \in M, \lambda > 0\}$.

Определение 2.1. Множество $M \subset X$ называется квазивыпуклым по конусу, если $0 \in M$ и существует выпуклое подмножество $N \subset M$ такое, что $0 \in N, K(M, 0) = K(N, 0)$ (1).

Заметим, что любое выпуклое множество, содержащее нуль, является квазивыпуклым по конусу.

Определение 2.2. ([3]). Множество $M \subset X$ называется ϵ -выпуклым, если $0 \in M$ и для любого конечного набора точек $\{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ из M , существует число $\epsilon > 0$ такое, что $\epsilon' \text{co}\{x_1, x_2, \dots, x_k\} \subset M$ при любом $\epsilon' \in (0, \epsilon)$.

Свойство 2.1. Любое квазивыпуклое по конусу множество является ϵ -выпуклым, но обратное, вообще говоря, неверно.

Доказательство. Пусть $M \subset X$ — квазивыпуклое по конусу множество. Тогда существует выпуклое подмножество $N \subset M$ со свойством (1). Пусть $\{x_1, x_2, \dots, x_k\} \subset M$. Так как $M \subseteq K(N, 0)$, то найдутся такие числа $\epsilon_i > 0$, что $\epsilon_i x_i \in N, i = 1, 2, \dots, k$. С другой стороны, в силу выпуклости N , полагая $\epsilon = \min \epsilon_i$, получим, что $\epsilon' x_i \in N$ при любом $\epsilon' \in (0, \epsilon)$. Докажем, что $\epsilon' \text{co}\{x_1, x_2, \dots, x_k\} \subset M$ при любом $\epsilon' \in (0, \epsilon)$.

В самом деле, пусть y — произвольная точка множества $\epsilon' \text{co}\{x_1, \dots, x_k\}$, т. е. $y = \epsilon' \sum_{i=1}^k \alpha_i x_i, \alpha_i \geq 0, \sum_i \alpha_i = 1$. Следовательно,

$$y = \sum_{i=1}^k \alpha_i (\epsilon' x_i) \in N \subset M$$

означает, что $y \in M$. Итак, по определению 2.2. множество M ϵ -выпукло. Чтобы доказать, что из ϵ -выпуклости не вытекает квазивыпуклость по конусу, рассмотрим следующий пример.

Пусть X — бесконечномерное гильбертово пространство с ортонормированным базисом $\{e_1, e_2, \dots, e_n, \dots\}$. Положим

$$x_n = \frac{1}{n} e_n, \quad B_n = \left\{ x \in X \mid \|x - x_n\| < \frac{1}{2n} \right\}.$$

Покажем, что множество $M = X \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ является ε -выпуклым, но не является квазивыпуклым по конусу. Для этого предварительно докажем следующую лемму.

Лемма 2.1. Любое конечномерное пространство P пространства X пересекается лишь с конечным числом шаров B_n .

Доказательство (от противного). Пусть существует последовательность $\{y_n\} \in P \cap B_n$. Имеем $\|y_n - x_n\| \leq \frac{1}{2^n}$. Поскольку $x_n = \frac{1}{n}e_n$, получим

$$\|ny_n - e_n\| \leq \frac{n}{2^n};$$

так как $\|e_n\| = 1$, то

$$\|ny_n\| \leq 1 + \frac{n}{2^n}. \quad (2)$$

Из оценки (2) вытекает, что при достаточно большом n точки $z_n = ny_n \in \bar{B}(1 + \delta, 0)$ для некоторого $\delta > 0$, где $\bar{B}(a, 0) = \{x \in X \mid \|x\| < a\}$.

С другой стороны, $z_n \in P$, следовательно, $z_n \in P \cap \bar{B}(1 + \delta, 0)$. Так как $P \cap \bar{B}(1 + \delta, 0)$ — компактное множество в P , существует подпоследовательность z_{n_k} , сходящаяся к некоторой $z^* \in P \cap \bar{B}(1, 0)$. Имеем $\|z^* - e_{n_k}\| \leq \|z^* - z_{n_k}\| + \|z_{n_k} - e_{n_k}\|$ (3).

Из оценки (3) вытекает, что $\|z^* - e_{n_k}\| \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0$ (4). Тогда при $k \neq p$, $k \rightarrow \infty$, $p \rightarrow \infty$ имеем $\|e_{n_k} - e_{n_p}\| \leq \|e_{n_k} - z^*\| + \|z^* - e_{n_p}\| \rightarrow 0$.

Но $\|e_{n_k} - e_{n_p}\| = \sqrt{2}$ при $k \neq p$. Это противоречие показывает, что P не может пересекаться с бесконечным числом шаров B_n . Лемма доказана.

Их леммы 2.1., нетрудно доказать, что M является ε -выпуклым. Чтобы доказать, что M не является квазивыпуклым по конусу, предположим противное, т. е., что существует выпуклое подмножество $N \subset M$ со свойством (1). Очевидно, что $K(N, 0) =$

$\bigcup_{\lambda=1}^{\infty} \lambda N$. Следовательно, $K(M, 0) = \bigcup_{\lambda=1}^{\infty} \lambda N$. С другой стороны, из

построения множества M имеем $K(M, 0) = X$, откуда $\bigcup_{\lambda=1}^{\infty} \lambda N = X$

(5).

По теореме Бэра о категориях [4] и (5) вытекает, что существует число $\lambda > 0$ такое, что $\text{int} \lambda \bar{N} = \emptyset$. Так как N — выпукло, то $\text{int} \bar{N} = \emptyset$ и $\bar{N}$ — выпукло. Поскольку $0 \in \text{int} M$ и M замкнуто, то $0 \in \text{int} \bar{N}$. Применяя теорему об отделимости выпуклых множеств [5], получаем $\exists f^* \in X^*: \langle f^*, x \rangle \leq 0$ (6), при любом $x \in N$, где X^* —

сопряженное пространство пространству X . Из (6) следует, что $K(N, 0) \neq X$ или так же $K(M, 0) \neq X$, а это невозможно в силу (5).

Свойство 2.2. Пусть $M \subset X$ — квазивыпуклое по конусу множество и $0 \in \text{int } M$. Тогда $K(M, 0) \neq X$.

Доказательство свойства 2.2. проводится от противного путем применения теоремы об отделимости выпуклых множеств и теоремы Бэра о категориях.

Определение 2.3. Многозначная функция $T(x) : x \rightarrow 2^X$ называется квазивыпуклой по конусу, если ее график является квазивыпуклым по конусу множеством.

Свойство 2.3. Пусть $T(x)$ — квазивыпуклая по конусу многозначная функция. Тогда

i) $T(0)$ — квазивыпуклое по конусу множество.

ii) Если M квазивыпукло по конусу, то множество

$$M_1 = \bigcup_{x \in M} T(x)$$

также квазивыпукло по конусу.

Доказательство. Утверждение i) очевидно. Пусть M — квазивыпукло по конусу, т. е. существует выпуклое подмножество $N \subset M$ со свойством (1). Так как $\text{graf } T$ квазивыпукло, то существует выпуклое множество $Q \subset \text{graf } T$ такое, что $0 \in Q$, $K(Q, 0) = K(\text{graf } T, 0)$ (7).

Обозначим через $t(\cdot) : X \rightarrow 2^X$ — многозначную функцию, график которой является множеством Q . Тогда $t(x)$ — выпуклая функция (в обычном смысле). Докажем, что $N_1 = t(N)$ является искомым для M_1 . В самом деле, очевидно, $0 \in N_1$ и $N_1 \subseteq M_1$. Докажем, что $K(N_1, 0) = K(M_1, 0)$. Для этого достаточно доказать включение $K(M_1, 0) \subseteq K(N_1, 0)$ (8).

Пусть $a \in K(M_1, 0)$. Тогда существует число $\lambda > 0$ такое, что $\lambda a \in M_1$. Так как $M_1 = \bigcup_{x \in M} T(x)$, то существует $x_1 \in M$ такая, что

$\lambda a \in T(x_1)$. Из (1) вытекает, что $\exists \gamma > 0 : \gamma' x_1 \in N$, $\gamma' \in (0, \gamma)$. Так как $(x_1, \lambda a) \in \text{graf } T$, из (7) вытекает, что $\exists \beta < \gamma : (\beta x_1, \beta \lambda a) \in Q = \text{graf } t$.

Следовательно, $\beta \lambda a \in t(\beta x_1)$. Так как $\beta x_1 \in N$, то $\beta \lambda a \in t(N)$, т. е. $a \in K(N_1, 0)$; (8) доказано.

3. *Локальная управляемость дискретных систем.* Рассмотрим линейную систему следующего вида:

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k), & k = 0, 1, 2, \dots; \\ x(k) = X, & u(k) \in \Omega \subset U, \end{cases} \quad (9)$$

где A, B — линейные ограниченные операторы из X и U в X соответственно; Ω — некоторое непустое множество в U .

Определение 3.1. Система (9) называется локально-управляемой, если существует окрестность нуля в X такая, что для любой точки x_1 из этой окрестности существует номер $\hat{N} > 0$, и управления $u(0), \dots, u(\hat{N}-1)$ такие, что соответствующая им траектория системы (9) с нулевым начальным условием $x(0) = 0$ удовлетворяет условию $x(\hat{N}) = x_1$.

На основании доказанных выше свойств квазивыпуклости рассуждая так же, как и при доказательстве основных теорем об управляемости в [1], получим следующие условия локальной управляемости.

Теорема 3.1. Допустим, что $ri\Omega \neq \emptyset$ и $B\Omega$ является квазивыпуклым по конусу. Система (9) локально управляема тогда и только тогда, когда

i) $sp\{B\tilde{\Omega}, AB\tilde{\Omega}, \dots, A^{\hat{N}-1}B\tilde{\Omega}\} = X$, где $\hat{N} > 0$, $\tilde{\Omega} = \overline{sp}\Omega$.

ii) Не существует собственного вектора оператора A^* , отвечающего собственному значению $\lambda \geq 0$, опорного к множеству $B\Omega$.

Теорема 3.2. Пусть функция $f(x, u)$ — непрерывно дифференцируема по Фреше [4] относительно x . Пусть многозначная функция $T(x) = \{f(x, u), u \in \Omega\}$ квазивыпукла по конусу.

Тогда система

$$x(k+1) = f(x(k), u(k)); \quad x(k) \in X,$$

$$u(k) \in \Omega \subset U; \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

локально управляема, если линейная система

$$x(k+1) = \frac{\partial f(0, u_0)}{\partial x} x(k) + v(k);$$

$$v(k) \in f(0, \Omega), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

локально управляема, где u_0 — некоторая точка из $\{u \in \Omega / f(0, u) = 0\}$.

Список литературы: 1. Коробов В. И., Шон Н. Х. Управляемость линейных систем в Банаховом пространстве при наличии ограничений на управление. — Дифференц. уравнения, 1980, № 5, 6. 2. Evans M., Murthy D. Controllability of discretetime system with positive controls. — IEEE trans. aut. contr. AC—22, 1977, p. 42—54. 3. Vu — ngoc — Phat. Controllability of discretetime systems with nonconvex nestrained controls Math. Operat. Statist. ser. Optimization, 14, № 2, 1983 p. 22—31. 4. Колмогоров А., Фомин С. Элементы теории функции и функционального анализа. — М.: Наука, 1981. — 342 с. 5. Рокафеллар Р. Выпуклый анализ. — М.: Мир, 1973. — 450 с.

Поступила в редколлегию 18.04.83.

М. БЕНАБДАЛЛАХ, А. Г. РУТКАС

НОРМАЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ РАЗНОСТНОГО УРАВНЕНИЯ $Ax_{n+1} + Bx_n = f_n$ В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

1°. В системе уравнений (1, а) с начальным условием (1, б)

$$а) Ax_{n+1} + Bx_n = f_n \quad (n = 0, 1, 2, \dots); \quad б) x_0 = a \quad (1)$$

предполагается, что A, B — замкнутые линейные операторы, действующие из банахова пространства X в банахово пространство Y с областями определения D_A, D_B соответственно.

Уравнение (1, а) можно трактовать как разностный аналог дифференциального уравнения $A\dot{x}(t) + Bx(t) = f(t)$, которое интенсивно изучается последнее время [1—4].

Для детерминированной задачи Коши (З. К.) (1, а; б) множество допустимых начальных векторов $\{a\}$ может не совпадать с пространством X , даже если X конечномерно.

Действительно, при $X = Y = C^2$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad f_n = \begin{pmatrix} \alpha_n \\ \beta_n \end{pmatrix}, \quad a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

система (1, а) имеет решение $x_n = \begin{pmatrix} \alpha_n - \beta_{n-1} \\ \beta_{n-1} \end{pmatrix}$, $n = 1, 2, \dots$ только при начальном условии вида $a_1 + a_2 = \alpha_0 - \beta_0$, причем решение единственно.

Обозначим через $\sigma_p(A, B)$ множество собственных чисел пучка $zA + A$, и при $z \notin \sigma_p(A, B)$ введем два типа резольвент: $\gamma_z \doteq (zA + B)^{-1}$; $R_z \doteq (zA + B)^{-1}A$ (2).

Функция γ_z голоморфна на открытом множестве $\rho(A, B)$ регулярных точек пучка (по определению $z \in \rho(A, B)$, если оператор γ_z ограничен и определен на всем пространстве Y). Функция R_z голоморфна на множестве $\rho_l(A, B)$ леворегулярных точек пучка ($z \in \rho_l(A, B)$, если оператор R_z определен и ограничен на D_A) [2, 3].

Определение. Решение ЗК (1а, б) — последовательность $x = \{x_n\}_0^\infty$, $x_n \in D_A \cap D_B$, удовлетворяющая (1а, б). Решение нормальное, если оно имеет конечный экспоненциальный тип $h_x \doteq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \|x_n\|}{n} < \infty$, и A — нормально, если конечны типы последо-

вательностей $\{x_n\}$, $\{Ax_n\}$. Сумма ряда $\tilde{x}(z) = \sum_{n=0}^\infty z^{-n}x_n$, сходящегося при $|z| > \sigma_x \doteq e^{h_x}$, называется Z — преобразованием последовательности $\{x_n\}_0^\infty$, а сама последовательность — оригиналом. Очевидно, $\|x_n\| \leq M\sigma^n$, $\sigma > e^{h_x}$.

2°. Всякое решение $\{x_n\}_0^\infty$ ЗК (1а, б) удовлетворяет условию

$$\sum_{k=0}^n z^{-k} x_k = (zA + B)^{-1} [zAa - z^{-n} Ax_{n+1} + \sum_{k=0}^n z^{-k} f_k] \quad (3)$$

при любом $z \notin \sigma_p(A, B)$, $n = 0, 1, 2, \dots$. Обратно, если формула (3) справедлива хотя бы при одном z для всех $n = 0, 1, 2, \dots$, причем $x_n \in D_A \cap D_B$, $x_0 = a$, то $\{x_n\}_0^\infty$ есть решение ЗК (1а, б).

Теорема 1. Пусть $\{x_n\}_0^\infty$ есть A -нормальное решение, и последовательность правых частей $\{f_n\}_0^\infty$ имеет экспоненциальный тип $\ln \sigma_f < \infty$ и Z -преобразование $\tilde{f}(z)$. Тогда Z -преобразование решения имеет вид $\tilde{x}(z) = (zA + B)^{-1} [zAx_0 + \tilde{f}(z)]$; (4). $\forall z \notin \sigma_p(A, B)$, $|z| > \max \{\sigma_x, \sigma_{Ax}, \sigma_f\}$.

Действительно, если $|z| > \sigma_{Ax}$, то $z^{-n} Ax_{n+1} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Поскольку операторы A, B замкнуты, то умножив равенство (3) на $zA + B$, получим (при $n \rightarrow \infty$) соотношение $(zA + B)\tilde{x}(z) = zAa + \tilde{f}(z)$.

Следствие. Если собственные числа пучка не скрывают всю плоскость, то всякое A -нормальное решение $\{x_n\}_0^\infty$ однозначно определяется начальным условием $x_0 = a$. Пусть $\{f_n\}_0^\infty$ допускает Z -преобразование $\tilde{f}(z)$, и некоторая окружность $|z| = \alpha$, $\alpha > \max \{\sigma_x, \sigma_{Ax}, \sigma_f\}$ свободна от собственных чисел пучка. Тогда решение представляется формулами

$$x_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=\alpha} (zA + B)^{-1} [zAx_0 + \tilde{f}(z)] z^{n-1} dz \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (5)$$

3°. Для практического построения решений удобно пользоваться следующим методом, не требующим вычисления резольвентного оператора $(zA + B)^{-1}$. Функции $v(z)$, $g(z)$, $\theta(z)$ назовем множителями сходимости для системы уравнений (1а) на окружности $|z| = \alpha$ ($\alpha > \sigma_f$), если при $\forall n = 0, 1, 2, \dots$

$$\int_{|z|=\alpha} v(z) z^n dz = 0, \quad (zA + B)g(z) = v(z), \quad (zA + B)\theta(z) = \frac{1}{2\pi i} \frac{\tilde{f}(z)}{z} \quad (6)$$

и сходятся интегралы

$$x_n \doteq \int_{|z|=\alpha} [g(z) + \theta(z)] z^n dz < \infty. \quad (7)$$

Теорема 2. Пусть $v(z)$, $g(z)$, $\theta(z)$ — множители сходимости (6, 7) и при $\forall n = 0, 1, 2, \dots$ существует хотя бы один из интегралов

$$\int_{|z|=\alpha} A[g(z) + \theta(z)] z^n dz, \quad \int_{|z|=\alpha} B[g(z) + \theta(z)] z^n dz. \quad (8)$$

Тогда последовательность $\{x_n\}_0^\infty$ интегралов (7) является решением системы (1a). Если сверх того, сходятся интегралы

$$\int_{|x|=\alpha} \|g(z)\| dz, \quad \int_{|z|=\alpha} \|\theta(z)\| dz, \quad (9)$$

то $\{x_n\}_0^\infty$ — нормальное решение системы (1a) типа $h_x \leq \ln \alpha$, а если вместе с (9) сходятся еще интегралы

$$\int_{|z|=\alpha} \|Ag(z)\| dz, \quad \int_{|z|=\alpha} \|A\theta(z)\| dz, \quad (10)$$

то решение A — нормально и $h_{Ax} \leq \ln \alpha$.

Доказательство. Предположим, сходится первый интеграл в (8). Тогда $x_n \in D_A$, $Ax_n = \int_{|z|=\alpha} [Ag(z) + A\theta(z)] z^n dz$, $Ax_{n+1} = \int_{|z|=\alpha} [v(z) - Bg(z) + zA\theta(z)] z^n dz = - \int_{|z|=\alpha} [Bg(z) + B\theta(z)] z^n dz + \int_{|z|=\alpha} (zA + B)\theta(z) z^n dz = -Bx_n + f_n$. Попутно установлена сходимость второго интеграла в (8).

Замечание 1. Теорема 2 дает оценку начального многообразия ЗК (1a, б): это множество векторов $x_0 = \int_{|z|=\alpha} [g(z) + \theta(z)] dz$ по всевозможным тройкам $v(z)$, $g(z)$, $\theta(z)$ множителей сходимости (6), (7), (8) системы (1a).

Замечание 2. В случае нулевой меры множества собственных чисел на окружности $|z| = \alpha$ функции $g(z)$, $\theta(z)$ почти всюду однозначно восстанавливаются по $v(z)$, $\tilde{f}(z)$ с помощью резольвенты $(zA + B)^{-1}$. Теорема 2 справедлива, если интегралы понимать в смысле Бохнера.

4°. Если спектр $\sigma(A, B) = C \setminus \rho(A, B)$ имеет изолированную ограниченную компоненту σ_1 , то по доказанной в [3] теореме типа Рисса существуют прямые разложения $D \doteq D_A \cap D_B = D_1 + D_2$, $Y = Y_1 + Y_2$, приводящие пучок: $zA + B = (zA_1 + B_1) + (zA_2 + B_2)$, где Y_k — замкнутое подпространство ($k = 1, 2$).

Система (1a) распадается соответственно на две:

$$a) A_1 x_{n+1}^1 + B_1 x_n^1 = f_n^1 \quad б) A_2 x_{n+1}^2 + B_2 x_n^2 = f_n^2. \quad (11)$$

Относительно нормы графика A операторы $A_1, B_1: D_1 \rightarrow Y_1$, $A_1^{-1}: Y_1 \rightarrow D_1$, $A_2: D_2 \rightarrow Y_2$ ограничены, $B_2: D_2 \rightarrow Y_2$ — замкнут. Следовательно, при $\forall x_0^1 \in D_1, \forall f_n^1 \in Y_1$ система (11a) имеет решение, причем решение A — нормально, коль скоро правые части $\{f_n^1\}_0^\infty$ имеют экспоненциальный тип в пространстве Y .

Таким образом, с помощью проекторов Рисса [3]

$$P = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma(\sigma_1)} (zA + B)^{-1} A dz, \quad Q = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma(\sigma_1)} A (zA + B)^{-1} dz$$

получается оценка $D_1 = P(D)$ начального многообразия ЗК (1а, б) для произвольной правой части $f_n \in Y_1 = Q(Y)$.

5°. Рассмотрим некоторые свойства однородной ЗК (1а, б) ($f_n = 0$); начальное многообразие $\{x_0\}$ обозначим через D_0 . Для детерминированности необходимо, чтобы операторы A, B не имели общего ядра. Достаточным условием является существование такой последовательности точек $z_i \rightarrow \infty, z_i \notin \sigma_p(A, B)$, что $R_{z_i} x_0 \rightarrow 0$ при $\forall x_0 \in D_0$.

Эволюционный оператор $Ux_n = x_{n+1}$ однородной детерминированной ЗК (1а, б) определен на линейале $D_0 (UD_0 \subset D_0)$ и связан с операторами A, B условием $(AU + B)/D_0 = 0$. Если все решения A -нормальны, то оператор A не вырождается на $D_0, U = -A_0^{-1} B/D_0$, где $A_0 = A/D_0$. Детерминированную ЗК назовем корректной, если ее эволюционный оператор U ограничен (на D_0), соответственно A -корректной, если ограничены U, AU .

Предложение 1. Пусть $\{x_n\}_0^\infty$ — решение системы (1а) и для некоторого $z \notin \sigma_p(A, B)$ резольвента $R_z = (zA + B)^{-1} A$ определена на x_0 . Тогда R_z определена на $\{x_n\}_0^\infty$ и $\{R_z x_n\}_0^\infty$ — также решение системы (1а).

Следствие. Если R_z определена на D_0 , то $R_z(D_0) \subset D_0$. Если, кроме того, ЗК (1а, б) детерминирована, то $R_z(D_0) = D_0$.

Предложение 2. Пусть резольвента $R_z = (zA + B)^{-1} A$ определена на D_0 . Тогда для корректной задачи резольвента R_z с точностью до знака совпадает на D_0 с резольвентной ограниченного оператора $U (|z| > \|U\|)$. В случае A -корректности, сверх того, на D_0 ограничен оператор B .

Обратно, указанные свойства операторов A, B на D_0 обеспечивают корректность (A -корректность) задачи.

Заметим, что конкретные задачи с разностным уравнением (1а) возникают в теории управления [5, 6].

Список литературы: 1. Крейн С. Г., Осипов В. Б. Функции Ляпунова и задача Коши для некоторых систем уравнений в частных производных. — Дифференц. уравнения, 1970, VI, № 11, с. 2053—2061. 2. Руткас А. Г. Задача Коши для уравнения $A\dot{x}(t) + Bx(t) = f(t)$ — Дифференц. уравнения, 1975, XI, № 11, с. 1996—2010. 3. Радбель Н. И. О начальном многообразии и диссипативности задачи Коши для уравнения $A\dot{x}(t) + Bx(t) = 0$. Деп. № 3680—78, Минск, 1978. 4. Favini A. Laplace transform method for a class of degenerate evolution problems. — Rend. mat., 1979, 12, № 3—4, p. 511—536. 5. Bernhard Pierre. On singular implicit linear dynamical systems. — SIAM Journ., Contr. and optim., 1982, 20, № 5, p. 612—633. 6. Deistler M. z-Transform and identification of linear econometric models with autocorrelated errors. — Metrika, 1975, 22, № 1, p. 13—25.

Поступила в редколлегию 25.04.83.

К ЗАДАЧЕ АВТОМАТИЧЕСКОЙ РЕГУЛИРОВКИ АНАЛОГОВОЙ РЭА

Рассмотрим задачу автоматической регулировки, заключающуюся в оптимизации функции регулировочных параметров радиоэлектронной аппаратуры. Приведем алгоритм решения, основанный на использовании вероятностных характеристик коэффициентов функций качества, при котором выбор очередного испытания производится в точке наиболее вероятного расположения экстремума.

В условиях серийного производства качество РЭА достигается путем правильного подбора и соблюдения как технологического процесса в целом, так и процессов контроля и регулировки в особенности. Автоматизация контрольно-регулирующих работ дает возможность использования малоквалифицированных регулировщиков на сложных операциях, обеспечивая при этом настройку РЭА согласно технологическим условиям независимо от субъективных данных регулировщиков. В связи с этим представляет интерес разработка алгоритмов управления технологическим процессом регулировки параметров РЭА, применимых для широкого класса изделий.

Регулируемая РЭА характеризуется набором регулировочных параметров r_i , которые могут изменяться в заданных пределах: $r_{ni} \leq r_i \leq r_{ei}$, $i = \overline{1, R}$ (1).

Качество аналоговой РЭА определяется совокупностью выходных параметров $\bar{k} = (k_1, k_2, \dots, k_m)^T$, являющихся непрерывными, в общем случае нелинейными функциями r_i ; $k_j = f_j(r_1, r_2, \dots, r_R)$, $j = \overline{1, m}$ (2).

В соответствии с технологическими требованиями, предъявляемыми к отрегулированному изделию, задается вектор эталонных значений выходных параметров $\bar{k}_э$ и диапазон допустимых отклонений δ .

Задача настройки РЭА заключается в минимизации некоторой функции регулировочных параметров r_i : $I = F(\bar{k}, \bar{k}_э) \rightarrow \min$ (3) при ограничениях (1). Процесс регулировки заканчивается при выполнении условий $|k_j - k_{эj}| \leq \delta_j$, $j = \overline{1, m}$.

Выбор конкретного вида функции (3) зависит от характера регулируемой РЭА. В частности,

$$I = \sum_{j=1}^m \alpha_j \left| \frac{k_j - k_{эj}}{k_{эj}} \right|, \quad (4)$$

где α_j — весовые коэффициенты.

Значения регулировочных параметров r_j определяются в результате решения задачи (3), которое может быть проведено с помощью известных методов нелинейного программирования [1]. Сложность решения заключается в том, что функции (2) не являются постоянными для регулируемых радиоэлектронных изделий, а зависят от технологии изготовления, значений параметров компонент аппаратуры и т. д.

Зависимости выходных параметров РЭА от регулировок могут быть представлены в следующем виде:

$$k_j = X_{0j} + X_{1j}\psi_{1j}(r_1, r_2, \dots, r_R) + \dots + X_{nj}\psi_{nj}(r_1, r_2, \dots, r_R), \quad (5)$$

где $\psi_{ij}(r_1, r_2, \dots, r_R)$ — известные для данного радиоэлектронного изделия функции.

Коэффициенты X_{ij} являются случайными величинами, которые для каждого поступающего на регулировку изделия принимают некоторые конкретные значения x_{ij}^* . В ряде практических случаев X_{ij} представляют собой независимые случайные величины, распределенные по нормальному закону.

На каждом шаге итеративного процесса регулировки производятся измерения значений выходных параметров при фиксированных значениях регулировок. В частности, для одного выходного параметра на p -й итерации формируется система линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов x_i : $x_0 + x_1\psi_{1p} + \dots + x_n\psi_{np} = k_p$, $p = \overline{1, l}$, $l \leq n$ (6), где k_p — измеренное значение выходного параметра; ψ_{ip} — вычисленные значения функций $\psi_i(r_{1p}, \dots, r_{Rp})$ при известных регулировочных параметрах на p -м шаге.

Для независимых случайных величин X_i , плотность совместного распределения вероятностей равна произведению индивидуальных плотностей вероятностей [2]:

$$\begin{aligned} \Phi(x_0, x_1, \dots, x_n) &= \prod_{i=0}^n \frac{1}{\sigma_i \sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{(x_i - m_i)^2}{2\sigma_i^2} \right\} = \\ &= A \exp \left\{ -\sum_{i=0}^n \frac{(x_i - m_i)^2}{2\sigma_i^2} \right\}, \end{aligned} \quad (7)$$

где m_i , σ_i — соответственно математическое ожидание и среднеквадратичное отклонение случайной величины X_i ; A — некоторый коэффициент, не зависящий от x_i .

Очевидно, величина (7) будет иметь наибольшее значение, когда показатель степени минимален;

$$\sum_{i=0}^n \left(\frac{x_i - m_i}{\sigma_i} \right)^2 \rightarrow \min. \quad (8)$$

Для определения x_i при условиях (6) и (8) применим метод множителей Лагранжа. Согласно [3] вводятся дополнительные переменные $x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{n+l}$ и функция

$$\Phi = \sum_{i=0}^n \left(\frac{x_i - m_i}{\sigma_i} \right)^2 + \sum_{p=1}^l x_{n+p} (x_0 + x_1 \psi_{1p} + \dots + x_n \psi_{np} - k_p), \quad (9)$$

Необходимые условия минимума функции (9)

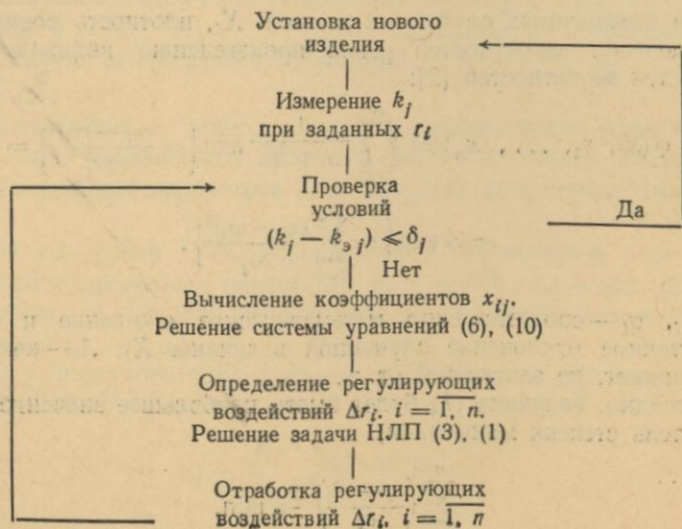
$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_0} = \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} = \dots = \frac{\partial \Phi}{\partial x_n} = 0$$

дают систему линейных алгебраических уравнений:

[illegible]

Значения коэффициентов x_i , $i = \overline{0, n+l}$ находятся из $(n+l+1)$ уравнений (6), (10). В случае нескольких выходных параметров k_l коэффициенты x_{ij} зависимостей (5) определяются аналогично.

Обобщенная блок-схема алгоритма регулирования представлена на рисунке.



Сходимость вычисленных значений коэффициентов функций качества к истинным значениям x_{ij}^* (при $l = n$ коэффициенты полностью определяются решением системы уравнений (6)) для непрерывных функций (5) обеспечивает сходимость решений задач нелинейного программирования к оптимальному решению. При этом на каждом шаге алгоритма очередное испытание проводится в точке наиболее вероятного расположения экстремума. Таким образом, использование вероятностных характеристик неизвестных коэффициентов функций качества регулируемых изделий позволяет повысить эффективность алгоритмов автоматической регулировки параметров радиоэлектронной аппаратуры.

Список литературы: 1. Хаммельблау В. Прикладное программирование. Пер. с англ. — М.: Мир, 1975. — 534 с. 2. Вентцель Е. С. Теория вероятностей. — М.: Физматгиз, 1962. — 464 с. 3. Кузин Л. Т. Основы кибернетики. — М.: Энергия, 1973. — 504 с.

Поступила в редколлегию 26.04.83.

СОДЕРЖАНИЕ

Сузигов Г. В. Одна задача оптимального управления с помощью коэффициента излучения	3
Короп В. Ф., Ковнир В. Н. Лагранжиан как штрафная функция	11
Коробов В. И., Крутинь В. И., Скляр Г. М. Решение одной задачи оптимальной стабилизации для линейных управляемых систем	17
Вовна С. Н., Подольский Е. Н. О предельном движении одной следящей системы	24
Стоян Ю. Г., Винарский В. Я. Об одном обобщении теоремы выбора Бляшке	29
Подольский А. Е. Оптимизация управления прогревом турбины	32
Любич Ю. И. Классификация неисклчительных бернштейновских алгебр типа $(3, n-3)$	36
Сохин А. С. Преобразование решений нестационарного уравнения переноса	42
Аббауи Лиазид. Об одном классе неоднородных случайных полей	49
Приходько А. П. О функционале Беллмана в бесконечномерном пространстве	53
Ву-Нгюк-Фат. Квазивыпуклые множества и управляемость дискретных систем в банаховом пространстве	57
Бенабдаллах М., Руткас А. Г. Нормальные решения разностного уравнения $Ax_{n+1} + Bx_n = f$ в банаховом пространстве	62
Сизов А. Б., Кучеров К. И., Воротилов А. Т. К задаче автоматической регуляции аналоговой РЭА	66

ВЕСТНИК ХАРЬКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

№ 254

Механика, математика
и процессы управления

Редактор А. П. Гужва
Художественный редактор Т. П. Воробиевко
Технический редактор Л. Т. Ена
Корректоры Л. М. Забродина, В. Л. Светличная

Сдано в набор 17.01.84. Подп. в печать 26.03.84. БЦ 09087. Формат 60×90/16.
Бумага кн.-журн. Лит. гарн. Выс. печать. 4,5 печ. л. 4,75 кр.-отт.
6,1 уч.-изд. л. Тираж 500 экз. Изд. № 1220. Зак. 4-535. Цена 85 к.

Издательство при Харьковском государственном университете издательского объединения «Вища школа», 310003, Харьков-3, ул. Университетская, 16

Отпечатано с матриц книжной фабрики им. М. В. Фрунзе в Харьковской городской типографии № 16, 310003, Харьков-3, ул. Университетская, 16.
Зак. 559.

РЕФЕРАТЫ

УДК 517.946

Одна задача оптимального управления с помощью коэффициента излучения. Су з и к о в Г. В. — Вестн. Харьк. ун-та, 1984, № 254. Механика, математика и процессы управления, с. 3—11.

Для задачи оптимального управления системой, описываемой решением третьей краевой задачи для уравнения Гельмгольца в случае, когда управлением является коэффициент при функции в краевом условии, получен принцип максимума и теоремы существования и единственности.

Библиогр.: 2 назв.

УДК 62—506

Лагранжиан как штрафная функция К о р о п В. Ф., К о в н и р В. Н. — Вестн. Харьк. ун-та, 1984, № 254. Механика, математика и процессы управления, с. 11—17.

Изучается возможность использования функции Лагранжа в качестве штрафной для задачи математического программирования с ограничениями типа равенств и неравенств. Построен метод, позволяющий решить исходную задачу. Рассмотрено также одно преобразование исходной задачи, приводящей к существенному увеличению множества векторов Куна—Таккера что облегчает применение предложенного подхода.

Библиогр.: 2 назв.

УДК 517.977

Решение одной задачи оптимальной стабилизации для линейных управляемых систем. К о р о б о в В. И., К р у т и н ь В. И., С к л я р Г. М. — Вестн. Харьк. ун-та, 1984, № 254. Механика, математика и процессы управления, с. 17—24.

Изучается задача оптимальной стабилизации для линейных управляемых систем. Показана, что эта задача разрешима, вообще говоря, не для любых начальных данных.

Библиогр.: 4 назв.

УДК 517.934.1

О предельном движении одной следящей системы. В о в н а С. И., П о д о л ь с к и й Е. Н. — Вестн. Харьк. ун-та, 1984, № 254. Механика, математика и процессы управления, с. 24—28.

Изучается предельное движение для последовательных движений самоходной машины с автоматом вождения, отслеживающим последовательно образуемые ориентировочные полосы на плоскости. Получены два алгебраических уравнения с двумя неизвестными, решение которых позволяет построить предельную полосу в явном виде.

Библиогр.: 3 назв.

УДК 515.122.252

Об одном обобщении теоремы выбора Бляшке. Стоян Ю. Г., Винарский В. Я. Вестн. Харьк. ун-та, 1984, № 254. Механика, математика и процессы управления, с. 29—32.

На системах множеств введена метрика, топология которой сильнее, чем топология метрики Хаусдорфа. Изучено свойство полноты пространств, снабженных данной метрикой. Сделано обобщение теоремы выбора Бляшке для системы ограниченных подмножеств конечномерного евклидова пространства с введенной метрикой.

Библиогр.: 8 назв.

УДК 517.97

Оптимизация управления прогревом турбины. Подольский А. Е. — Вестн. Харьк. ун-та, 1984, № 254. Механика, математика и процессы управления, с. 32—36.

Строится импульсное управление, приближенно решающее задачу на быстрейшее при наличии фазовых ограничений для простейшей математической модели прогрева оборудования турбины. Алгоритм управления включает идентификацию некоторых параметров.

УДК 519.9 + 575.1

Классификация неисклнчительных бернштейновских алгебр типа $(3, n-3)$. Любич Ю. И. — Вестн. Харьк. ун-та, 1984, № 254. Механика, математика и процессы управления, с. 36—42.

Решается задача, сформулированная в заглавии. В соединении с предыдущими результатами автора получается классификация неисклнчительных бернштейновских алгебр размерности $n = 5$.

Библиогр.: 4 назв.

УДК 517.948.3

Преобразование решений нестационарного уравнения переноса. Сохин А. С. — Вестн. Харьк. ун-та, 1984, № 254. Механика, математика и процессы управления, с. 42—48.

Построен оператор, преобразующий решение нестационарного уравнения переноса
$$\frac{\partial z}{\partial t} + a \frac{\partial z}{\partial x} = \int_{-1}^1 p(x, t, a, a') z(x, t, a') da'_1 - \infty < x < \infty, t_0 < t < t_1$$

с потенциалом $p(x, t, a, a')$ в решение $y(x, t, a)$ уравнения переноса с потенциалом $q(x, t, a, a')$, совпадающее при $t \rightarrow t_0$ (или $t \rightarrow t_1$) с преобразующим решением.

Библиогр.: 2 назв.

УДК 517.98 + 519.2

Об одном классе неоднородных случайных полей. Аббауи Л. — Вестн. Харьк. ун-та, 1984, № 254. Механика, математика и процессы управления, с. 49—53.

Рассматриваются неоднородные случайные поля конечного ранга. Получены представления для корреляционных функций, отвечающих различным типам спектра.

Библиогр.: 4 назв.

УчБ-12