

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
імені В. Н. КАРАЗІНА

МОДЕЛЮВАННЯ ТА ОПТИМІЗАЦІЯ СИСТЕМ КЕРУВАННЯ

Методичні вказівки
до організації та планування самостійної роботи
здобувачів вищої освіти другого (магістерського) рівня
за спеціальністю 174 «Автоматизація, комп'ютерно-інтегровані
технології та робототехніка»

Електронний ресурс

Харків – 2025

Рецензенти:

Р. М. ТРИЩ – доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри мехатроніки та електротехніки Національного аерокосмічного університету ім. М. Є. Жуковського «Харківський авіаційний інститут»;

О. О. Литвин – доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри ХТЛПіД Навчально-наукового інституту «Українська інженерно-педагогічна академія».

*Затверджено до розміщення в мережі Інтернет рішенням Науково-методичної ради
Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна
(протокол № 8 від 28 березня 2025 року)*

М 74 **Моделювання** та оптимізація систем керування : методичні вказівки до організації та планування самостійної роботи здобувачів вищої освіти другого (магістерського) рівня за спеціальністю 174 «Автоматизація, комп'ютерно-інтегровані технології та робототехніка» [Електронний ресурс] / уклад. Г. І. Канюк, Т. Ю. Василюк, О. О. Варфоломійов. – Харків : ХНУ імені В. Н. Каразіна, 2025. – (PDF 45 с.)

У методичних вказівках до організації та планування самостійної роботи студентів наведено стислу характеристику предмета, тематику лекційних та практичних занять за курсом, характеристику видів організації самостійної роботи при вивченні навчальної дисципліни.

Видання призначене здобувачам вищої освіти освітнього ступеня «магістр», що навчаються за освітньо-професійною програмою «Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології» зі спеціальності 174 «Автоматизація, комп'ютерно-інтегровані технології та робототехніка».

УДК 519.6(075.5)

© Харківський національний університет
імені В. Н. Каразіна, 2025

© Канюк Г. І., Василюк Т. Ю.,
Варфоломійов О. О., уклад., 2025

ЗМІСТ

1. ЗАГАЛЬНІ ПОЛОЖЕННЯ	4
2. СТИСЛА РОБОЧА ПРОГРАМА	6
2.1 Тематичний план навчальної дисципліни	6
2.2 Структура навчальної дисципліни	8
2.3 Теми практичних занять	9
2.4 Самостійна робота	10
2.5 Методи навчання	11
2.6 Методи контролю	11
2.7 Схема нарахування балів для підсумкового семестрового контролю	11
2.8 Питання для самоперевірки	12
2.9 Рекомендована література	17
2.10 Інформаційні ресурси	18
3. ВИДИ ОРГАНІЗАЦІЇ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ	19
3.1 Види організації самостійної роботи у процесі проведення очних занять	19
3.2 Види організації самостійної роботи, що виконуються у позаурочний час	19
3.3 Приклади відповідей на питання	20
3.4 Приклади рішення задач	34

1. ЗАГАЛЬНІ ПОЛОЖЕННЯ

Метою вивчення дисципліни є формування у студентів знань сучасних методичних основ побудови моделей систем автоматичного управління, інструментальних засобів математичного моделювання систем, розкриття сучасних наукових концепцій, понять та математичних методів оптимізації, надання студентам необхідного обсягу теоретичних знань та практичних навичок в галузі математичного моделювання та оптимізації складних систем на основі широкого застосування засобів сучасної обчислювальної техніки. Знання, одержані при вивченні дисципліни, сприяють розвитку творчого підходу студентів до вивчення та удосконалення складних систем автоматичного управління, побудованих на основі застосування сучасної обчислювальної техніки та математичного забезпечення.

Основні завдання вивчення дисципліни

1. Ознайомлення з основами математичного моделювання систем:
 - Вивчення методів моделювання лінійних і нелінійних динамічних систем та процесів, що використовуються у сфері автоматизації.
 - Формування навичок побудови математичних моделей для аналізу поведінки керованих систем.
2. Опанування методами оптимізації:
 - Вивчення методів і алгоритмів оптимізації, які дозволяють знаходити оптимальні рішення в системах управління, що стосуються ресурсо- та енергозбереження, мінімізації часу або витрат.
 - Розробка алгоритмів для оптимізації параметрів систем керування з метою підвищення їх ефективності.
3. Моделювання і оптимізація за допомогою програмного забезпечення:
 - Використання середовища MATLAB/Simulink для моделювання, оптимізації та аналізу систем керування.
 - Розробка моделей реальних систем і оптимізація їх роботи для вирішення практичних задач автоматизації.
4. Розвиток практичних навичок проектування систем керування:
 - Практичне застосування теоретичних знань у процесі розробки систем управління, які забезпечують оптимальне функціонування технічних та технологічних об'єктів.
 - Виконання індивідуальних і групових проєктів з моделювання та оптимізації систем керування для реальних інженерних задач.
5. Розвиток критичного мислення та навичок дослідження:
 - Стимулювання студентів до самостійного дослідження та аналізу сучасних підходів і технологій у моделюванні й оптимізації систем управління.

Кількість кредитів 4

Загальна кількість годин 120

Вивчення навчальної дисципліни сприяє здобуттю наступних компетентностей:

ЗК1 Здатність проведення досліджень на відповідному рівні.

ЗК3 Здатність до абстрактного мислення, аналізу та синтезу.

СК3. Здатність застосовувати методи моделювання та оптимізації для дослідження та підвищення ефективності систем і процесів керування складними технологічними та організаційно-технічними об'єктами.

СК6. Здатність застосовувати сучасні методи теорії автоматичного керування для розроблення автоматизованих систем управління технологічними процесами та об'єктами.

СК7. Здатність застосовувати спеціалізоване програмне забезпечення та цифрові технології для розв'язання складних задач і проблем автоматизації та комп'ютерно-інтегрованих технологій.

Заплановані результати навчання

РН03. Застосовувати спеціалізовані концептуальні знання, що включають сучасні наукові здобутки, а також критичне осмислення сучасних проблем у сфері автоматизації та комп'ютерно-інтегрованих технологій для розв'язування складних задач професійної діяльності.

РН04. Застосовувати сучасні підходи і методи моделювання та оптимізації для дослідження та створення ефективних систем автоматизації складними технологічними та організаційно-технічними об'єктами.

РН08. Застосовувати сучасні математичні методи, методи теорії автоматичного керування, теорії надійності та системного аналізу для дослідження та створення систем автоматизації складними технологічними та організаційно-технічними об'єктами, кіберфізичних виробництв.

РН10. Розробляти і використовувати спеціалізоване програмне забезпечення та цифрові технології для створення систем автоматизації складними організаційно-технічними об'єктами, професійно володіти спеціальними програмними засобами.

2 СТИСЛА РОБОЧА ПРОГРАМА ДИСЦИПЛІНИ

2.1 Тематичний план навчальної дисципліни

Розділ 1. Моделювання систем керування

Тема 1. Моделювання як науковий прийом.

Основні поняття і визначення. Класифікація моделей. Математичне моделювання: цілі математичного моделювання; вимоги до математичної моделі; етапи математичного моделювання; класифікація математичних моделей.

Тема 2. Математичні моделі у формі звичайних диференціальних рівнянь

Області застосування. Базові поняття. Приклади формування моделей. Методика складання диференціальних рівнянь системи автоматичного управління. Запис диференціальних рівнянь в операторній формі. Рішення математичних моделей у класі звичайних диференціальних рівнянь. Методи рішення математичних моделей у класі звичайних диференціальних рівнянь. Якісне дослідження динамічних систем методом фазової площини.

Тема 3. Детерміновані і стохастичні математичні моделі

Базові поняття. Два підходи до моделювання фізичних систем. Основні імовірнісні характеристики випадкового процесу. Особливості моделювання випадкового процесу.

Тема 4. Математичні моделі у формі передавальних функцій

Базові поняття. Передавальні функції. Елементарні типові ланки динамічних систем.

Тема 5. Математичні моделі у просторі станів

Основні визначення та поняття. Рівняння стану. Рівняння стану у стандартній формі. Розв'язання рівнянь стану: розв'язання однорідних рівнянь стану; розв'язання неоднорідних рівнянь стану. Визначення перехідної матриці стану стаціонарної лінійної системи.

Тема 6. Математичні моделі систем у часовій та частотній областях

Математичні моделі у часовій області: перехідна функція; імпульсна перехідна функція. Математичні моделі у частотній області.

Тема 7. Математичні моделі систем управління з пружними зв'язками

Багатомасові системи управління механізмів підйому. Багатомасова системи управління механізмом переміщення. Розгалужені розрахункові механічні схеми. Математичні моделі багатомасової системи управління механізмом підйому скипової підіймальної установки.

Розділ 2. Оптимізація систем керування

Тема 1. Загальна характеристика завдань і методів оптимального управління

Основні поняття і визначення. Критерії оптимальності. Обмеження координат та крайові умови. Керованість та спостережливість стаціонарних лінійних систем.

Формулювання задачі оптимального керування. Методи дослідження оптимальних систем.

Тема 2. Методи класичного варіаційного числення

Загальна постановка задачі і основні визначення. Варіація функціонала. Екстремум функціонала. Найпростіша задача варіаційного числення. Рівняння Ейлера. Функціонали, що залежить від старших похідних. Задача на екстремум із рухомими межами. Достатні умови екстремуму. Поле екстремалей. Умова Якобі. Варіаційні задачі на умовний екстремум. Ізопериметричні варіаційні задачі.

Тема 3. Принцип максимуму Л. С. Понтрягіна в теорії оптимального управління

Попередні зауваження. Основні положення принципу максимуму. Принцип максимуму Л.С.Понтрягіна в задачі про швидкодію. Оптимальне за швидкодією керування лінійними об'єктами. Теорема про n -інтервалів. Задача з обмеженням на фазові координати. Принцип максимуму для замкнутих систем, оптимальних за швидкодією.

Тема 4. Метод динамічного програмування

Принцип оптимальності. Оптимальне управління дискретними системами. Оптимальне управління в безперервних системах: задача з фіксованим часом і вільним кінцем траєкторії; задача з закріпленим кінцем траєкторії і вільним часом; задача про максимальну швидкодію. Синтез оптимального регулятора для лінійних системи: синтез оптимального регулятора стану; задача про регулятор виходу.

Тема 5. Синтез оптимальних систем автоматичного управління за інтегральним квадратичним критерієм

Синтез оптимального нестационарного лінійного регулятора стану. Синтез оптимального стаціонарного лінійного регулятора стану. Синтез стохастичних лінійних оптимальних систем при повній інформації про стан. Синтез стохастичних оптимальних систем управління при неповній інформації про стан. Стохастична лінійна оптимальна система управління при неповній інформації. Принцип розділення. Синтез оптимальної лінійної дискретної системи при квадратичному критерії. Стохастична оптимальна лінійна дискретна система за повної інформації про стан. Стохастична лінійна оптимальна дискретна система за неповної інформації про стан.

2.2 Структура навчальної дисципліни

Назви розділів і тем	Кількість годин											
	денна форма						заочна форма					
	усього	у тому числі					усього	у тому числі				
		л	п	лаб.	інд.	с.р.		л	п	лаб.	інд.	с.р.
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Розділ 1. Моделювання систем керування												
Тема 1. Моделювання як науковий прийом	8	2				6	8	0,5				7,5
Тема 2. Математичні моделі у формі звичайних диференціальних рівнянь	9	2				7	9	0,5				8,5
Тема 3. Детерміновані і стохастичні математичні моделі	9	2				7	8	0,5				7,5
Тема 4. Математичні моделі у формі передавальних функцій	8	2				6	8	0,5				7,5
Тема 5. Математичні моделі у просторі станів	9	2				7	9	1				8
Тема 6. Математичні моделі систем у часовій та частотній областях	8	2				6	9	0,5				8,5
Тема 7. Математичні моделі систем управління з пружними зв'язками	9	2	6			1	9	0,5	2			6,5
Разом за розділом 1	60	14	6			40	60	4	2			54
Розділ 2. Оптимізація систем керування												
Тема 1. Оптимізація систем керування	12	2				10	12	0,5				11,5
Тема 2. Методи класичного варі-	12	4				8	12	1				11

аційного числення												
Тема 3. Принцип максимуму Л. С. Понтрягіна в теорії оптимального управління	12	4				8	12	1				11
Тема 4. Метод динамічного програмування	12	2				10	12	1				11
Тема 5. Синтез оптимальних систем автоматичного управління за інтегральним квадратичним критерієм	12	2	6			4	12	0,5	2			9,5
Разом за розділом 2	60	14	6			40	60	4	2			54
Усього годин	120	28	12			80	120	8	4			108

2.3 Теми практичних занять

№ з/п	Назва теми	Кількість годин
1	Моделювання двомасової двоконтурної системи підлеглого регулювання швидкості електроприводу ТП-Д	2
2	Моделювання трьохмасової двоконтурної системи підлеглого регулювання швидкості електроприводу ТП-Д	2
3	Моделювання трьохмасової трьохконтурної системи підлеглого регулювання швидкості електроприводу Г-Д	2
4	Синтез оптимальної системи автоматичного управління по інтегральному квадратичному критерію якості. Синтез оптимального лінійного регулятора	2
5	Синтез оптимальної системи автоматичного управління по інтегральному квадратичному критерію якості. Синтез оптимального спостерігача	2
6	Синтез оптимальної системи автоматичного управління по інтегральному квадратичному критерію якості. Синтез оптимального компенсатора	2
	Разом	12

2.4 Самостійна робота

№ з/п	Види, зміст самостійної роботи	Кількість годин
1	Моделювання як науковий прийом. Робота з конспектом лекцій. Робота з навчальною літературою. Виконання завдань для самостійної роботи на сайті дистанційної освіти.	6
2	Математичні моделі у формі звичайних диференціальних рівнянь. Робота з конспектом лекцій. Робота з навчальною літературою. Виконання завдань для самостійної роботи на сайті дистанційної освіти .	7
3	Детерміновані і стохастичні математичні моделі. Робота з конспектом лекцій. Робота з навчальною літературою. Виконання завдань для самостійної роботи на сайті дистанційної освіти .	8
4	Математичні моделі у формі передавальних функцій. Робота з конспектом лекцій. Робота з навчальною літературою. Виконання завдань для самостійної роботи на сайті дистанційної освіти	9
5	Математичні моделі у просторі станів. Робота з конспектом лекцій. Робота з навчальною літературою. Підготовка до практичних занять. Виконання завдань для самостійної роботи на сайті дистанційної освіти.	7
6	Математичні моделі систем у часовій та частотній областях. Робота з конспектом лекцій. Робота з навчальною літературою. Виконання завдань для самостійної роботи на сайті дистанційної освіти .	6
7	Математичні моделі систем управління з пружними зв'язками Робота з конспектом лекцій. Робота з навчальною літературою. Підготовка до практичних занять. Виконання завдань для самостійної роботи на сайті дистанційної освіти .	1
8	Оптимізація систем керування. Робота з конспектом лекцій. Робота з навчальною літературою. Виконання завдань для самостійної роботи на сайті дистанційної освіти.	10
9	Методи класичного варіаційного числення. Робота з конспектом лекцій. Робота з навчальною літературою. Виконання завдань для самостійної роботи на сайті дистанційної освіти.	8
10	Принцип максимуму Л. С. Понтрягіна в теорії оптимального управління.	8

	Робота з конспектом лекцій. Робота з навчальною літературою. Виконання завдань для самостійної роботи на сайті дистанційної освіти .	
11	Метод динамічного програмування Робота з конспектом лекцій. Робота з навчальною літературою. Виконання завдань для самостійної роботи на сайті дистанційної освіти.	10
12	Синтез оптимальних систем автоматичного управління за інтегральним квадратичним критерієм. Робота з конспектом лекцій. Робота з навчальною літературою. Підготовка до практичних занять. Виконання завдань для самостійної роботи на сайті дистанційної освіти.	4
	Разом	80

2.5 Методи навчання

Методи навчання – це різноманітні способи, які допомагають студентам засвоїти програмний матеріал, сприяють активізації навчального процесу, надають можливість набути нових компетенцій. Під час вивчення дисципліни застосовуються такі методи навчання: пояснювально-ілюстративний, репродуктивний, частково-пошуковий, дослідницький, проблемного викладу; словесні, наочні, практичні; аналіз, синтез, індукція, дедукція; активні методи (дискусії та дебати, метод кейсів), інтерактивні методи (інтерактивні лекції, мозкові штурми, інтерактивні симуляції), проектні методи (проектне навчання, метод проектів); методи дистанційного навчання.

2.6 Методи контролю

Поточний контроль – усне та письмове опитування, експрес-опитування, контрольні роботи, тестування, оцінка практичних навичок, перевірка завдань для самостійної роботи, кейс-метод, комп'ютерні симуляції.

Підсумковий контроль – іспит, курсовий проєкт.

2.7. Схема нарахування балів для підсумкового семестрового контролю

Поточний контроль, самостійна робота, індивідуальні завдання												Екзамен	Сума	
Розділ 1						Розділ 2					Разом			
T1	T2	T3	T4	T5	T6	T7	T1	T2	T3	T4	T5	60	40	100
4	4	4	4	5	4	5	6	6	6	6	6			

T1, T2 ... – теми розділів

Критерії оцінювання навчальних досягнень

Шкала оцінювання

Сума балів за всі види навчальної діяльності протягом семестру	Оцінка	
	для чотирирівневої шкали оцінювання	для дворівневої шкали оцінювання
90 – 100	відмінно	зараховано
70-89	добре	
50-69	задовільно	
1-49	незадовільно	не зараховано

2.8 Питання для самоперевірки

Питання першого модуля

1. Що називається моделюванням?
2. Яка роль моделювання?
3. Наведіть класифікацію моделей за рівнем їхнього абстрагування від оригіналу
4. Дайте визначення поняттям: геометрична модель, фізична модель, аналогова модель ?
5. Дайте визначення поняттям: математична модель, обчислювальна модель, комп'ютерна модель?
6. Що називається математичним моделюванням?
7. Які цілі математичного моделювання?
8. Перечисліть вимоги до математичної моделі.
9. Перечисліть і поясніть етапи математичного моделювання.
10. Наведіть класифікацію математичних моделей за формою уявлення.
11. Наведіть класифікацію математичних моделей за характером моделі.
12. Що таке теоретичні та емпіричні моделі?
13. Яка модель називається динамічною?
14. Які динамічні системи називаються консервативними та дисипативними.?
15. Яка динамічна система називається автономною?
16. Які моделі називаються лінійними?
17. Які диференціальні рівняння називаються лінійними?
18. Що означає стаціонарність моделі?
19. Наведіть приклади формування моделей.
20. Які математичні моделі називаються нелінійними? Наведіть приклад.

21. Наведіть на конкретному прикладі методику складання диференціальних рівнянь системи автоматичного управління.
22. Як записати рівняння динаміки в операторній (символічній) формі?
23. Що називається загальним і приватним рішенням диференціального рівняння?
24. Перечисліть методи рішення звичайних диференціальних рівнянь.
25. Поясніть чисельні методи рішення задачі Коші.
26. Поясніть Метод Рунге-Кутта.
27. Що називається фазовою площиною, фазову траєкторію, фазовим портретом ?
28. Поясніть сутність дослідження динамічних систем методом фазової площини. Наведіть приклади.
29. Які системи називаються детермінованими?
30. Що називається стохастично математичною моделлю?
31. Перечисліть внутрішні і зовнішні фактори, що діють на систему.
32. У яких випадках допустима і неприпустима детермінована модель?
33. Перечисліть і поясніть основні імовірнісні характеристики випадкового процесу.
34. Поясніть особливості моделювання випадкового процесу
35. Запишіть вираз одновимірної щільності розподілу ймовірності нормального (гаусівського) випадкового процесу
36. Зобразіть графік одновимірної щільності розподілу ймовірності нормального (гаусівського) випадкового процесу.
37. Що називається операційним обчисленням?
38. Запишіть співвідношення інтегрального перетворення Лапласа.
39. У яких випадках сходиться інтеграл перетворення Лапласа?
40. Перечисліть основні властивості перетворення Лапласа.
41. Що називається передавальною функцією?
42. Як знайти оригінал функції за її відомим зображенням?
43. Що називається матричною передавальною функцією?
44. Наведіть приклади рішення диференціального рівняння з використанням перетворення Лапласа.
45. Наведіть узагальнену схему розв'язання диференціального рівняння за допомогою математичного апарату перетворення Лапласа
46. Які переваги застосування математичного апарату передавальних функцій?
47. Перечисліть елементарні типові ланки динамічних систем. Наведіть їх рівняння динаміки та передавальні функції.
48. Наведіть приклад визначення математичної моделі системи у вигляді передавальних функцій.
49. Що називається станом системи?
50. Що називається змінними стану, вектором стану, простором стану ?
51. Зобразіть схему багатовимірної системи у змінних стану.

- 52.Зобразіть фазові траєкторії системи, яка описана диференціальним рівнянням першого порядку, другого порядку і третього порядку.
- 53.Що називається рівняннями стану системи?
- 54.Перечисліть переваги математичного опису фізичних систем у просторі станів.
- 55.Наведять опис динамічної системи за допомогою диференціальних рівнянь в нормальній формі Коші.
- 56.Запишіть диференціальних рівнянь в нормальній формі Коші динамічної лінеаризованої системи.
- 57.Запишіть диференціальні рівняння динамічної системи у векторно-матричній формі.
- 58.Яка розмірність і як формуються матриця стану A , матриця керуючих дій B , матриця вихідних координат C і Матриця D , яка характеризує прямий (не динамічний) зв'язок вихідних координат з керованими координатами?
- 59.Наведіть структурну схему багатовимірної лінійної стаціонарної системи.
- 60.Як записати рівняння стану у стандартній формі?
- 61.Зобразіть схему аналогового моделювання одновимірної лінійної стаціонарної системи.
- 62.Наведіть приклад формування рівнянь стану системи.
- 63.Наведіть методику розв'язання однорідних рівнянь стану
- 64.Що називається перехідною матрицею стану?
- 65.Наведіть методику розв'язання неоднорідних рівнянь стану.
- 66.Перечисліть і поясніть методи визначення перехідної матриці стану стаціонарної лінійної системи. наведіть приклади.
- 67.Поясніть динамічну модель системи у вигляді перехідні функції (характеристики).
- 68.Поясніть динамічну модель системи у вигляді імпульсної перехідної функції.
- 69.Поясніть динамічну модель системи у формі частотних характеристик.
- 70.Зобразіть схематично прийоми дослідження динамічних (передаточних) властивостей лінійних динамічних безперервних систем у часовій та частотній областях.
- 71.Які системи називаються багатомасовими?
- 72.Поясніть кінематичну схему багатомасової системи управління механізмів підйому.
- 73.Як визначається жорсткість механічних зв'язків ?
- 74.Наведіть формули приведення моменту інерції елементу системи, рухомого обертально, або маси, що рухається поступально, до розрахункової швидкості.
- 75.Наведіть формули приведення моментів і сил навантаження елементів кінематичного ланцюга.
- 76.Зобразіть розрахункові схемі механічної частини електроприводу для трьохмасової і двомасової систем.

77. Запишіть рівняння, що описують кінематичну схему механічної частини електроприводу механізму підйому, приведену до двомасової системи.
78. Наведіть приклад кінематичної схеми багатомасової системи управління механізмом переміщення.
79. Зобразіть схему розгалуженої розрахункової схеми механічної частини електроприводу. Яким чином вона може бути приведена до двомасової розрахункової схеми?
80. Зобразіть кінематичні схеми механічної частини шахтної підйомної установки.
81. Запишіть рівняння стану двомасової і трьохмасової систем управління електроприводом ТП-Д механізму підйому скипової підйомальної установки
82. Запишіть рівняння стану двомасової і трьохмасової систем управління електроприводом ТП-Д механізму підйому скипової підйомальної установки у векторно-матричній формі. Поясніть структуру матриць A і B .
83. Зобразіть алгоритмічні схеми двомасової і трьохмасової систем управління електроприводом ТП-Д механізму підйому скипової підйомальної установки
84. Як виконується моделювання трьохмасової і двомасової систем за допомогою системи MATLAB.

Питання другого модуля

1. Дайте визначення оптимальної системи управління. Що є задачею синтезу оптимальної системи.
2. Зобразіть функціональну схему оптимального програмного управління
3. Зобразіть функціональну схему оптимального управління зі зворотним зв'язком
4. Що називається критерієм оптимальності або критерієм якості керування?
5. Наведіть основні критерії оптимальності, що застосовуються при синтезі оптимальних систем.
6. Що називається областю допустимих керувань?
7. Як зазвичай записуються обмеження вектора керування та фазових координат?
8. Які крайові умови задаються при вирішенні задач оптимального управління?
9. Поясніть такі і властивості динамічних систем, як керованість і спостережуваність
10. Наведіть критерії, що дозволяють визначити керованість і спостережуваність системам.
11. Сформулюйте задачу оптимального керування.
12. Що вивчає варіаційне числення? Яку функцію називають функціоналом? Яке завдання варіаційного числення? Дайте визначення безперервних та лінійних функціоналів
13. Які умови близькості кривих нульового та першого порядків?
14. Що називається варіацією функціоналу?

15. Дайте визначення екстремуму функціоналу. Що називається сильним або слабким максимумом (мінімумом)?
16. Що називається найпростішою задачею варіаційного числення? Як вона вирішується?
17. Запишіть рівняння Ейлера в звичайному та розгорнутому видах.
18. Наведіть найпростіші випадки інтегрованості рівняння Ейлера
19. Сформулюйте необхідну умову екстремуму в задачі із рухомими межами.
20. Запишіть умови трансверсальності для окремих випадків задачі із рухомими межами.
21. Що називається власним і центральним полем? Наведіть приклади.
22. Що називається полем екстремалей
23. Перечисліть і поясніть достатні умови слабого мінімуму (максимуму)
24. Перечисліть і поясніть достатні умови сильного мінімуму (максимуму)
25. У чому полягає особливість задач на умовний екстремум? Які форми можуть мати рівняння зв'язків? Як формулюється задача на умовний екстремум?
26. У чому полягає метод невизначених множників Лагранжа? Яка методика розв'язання задач при використанні цього методу?
27. Поясніть методику рішення ізопериметричної задачі
28. Які обмеження методу варіаційного числення?
29. Які змінні ввів Понтрягін для розв'язування задач оптимального керування і як формулюється задача оптимального керування, враховуючи їх?
30. Як одержують функцію Гамільтона в принципі максимуму Понтрягіна?
31. Яким чином можна одержати систему спряжених рівнянь? Для чого їх використовують?
32. Сформулюйте основну теорему принципу максимуму, коли як критерій оптимальності вибирається швидкодія.
33. Опишіть методику знаходження оптимальних керувань лінійними об'єктами.
34. Сформулюйте теорему про n інтервалів.
35. Наведіть приклад рішення задачі побудови оптимального за швидкодією управління як функції змінних стану.
36. Які переваги методу динамічного програмування? В яких випадках його доцільно застосовувати?
37. Як визначається оптимальне керування дискретними системами з використанням методу динамічного програмування?
38. Наведіть приклад рішення задачі синтезу оптимального управління дискретною системою.
39. Як вирішується задача синтезу оптимального управління в безперервних системах?
40. Запишіть рівняння Белмана для задачі з фіксованим часом і вільним кінцем траєкторії
41. Запишіть рівняння Белмана для стаціонарної задачі з фіксованими межами.

42. Запишіть рівняння Беллмана для задачі про максимальну швидкодію.
43. Як виконується синтез оптимального регулятора за допомогою рівняння Беллмана. Наведіть приклад
44. Як вирішується задача про регулятор виходу?
45. Сформулюйте задачу синтезу оптимального нестационарного лінійного регулятора стану. Запишіть вираз для оптимального управління
46. Як виконується синтез оптимального стаціонарного лінійного регулятора стану
47. Зобразіть структурну схему САУ з оптимальним регулятором
48. Поясніть методику синтезу стохастичних лінійних оптимальних систем при повній інформації про стан
49. Що називається спостерігачем (оцінювачем, фільтром) Калмана-Б'юсі.
50. Зобразіть структурну схему оптимального спостерігача
51. В чому полягає принцип розподілу або принцип стохастичної еквівалентності?
52. Що називається оптимальним компенсатором.
53. Зобразіть схему стохастичного лінійного оптимального регулятора.
54. Наведіть методику синтезу оптимальної лінійної дискретної системи при квадратичному критерії.
55. Як виконується синтез стохастичної оптимальної лінійної дискретної системи за повної інформації про стан
56. Поясніть методику синтезу стохастичної лінійної оптимальної дискретної системи за неповної інформації.

2.9 Рекомендована література

Основна (базова) література

1. Моделирование та оптимізація систем: підручник / Дубовой В. М., Кветний Р. Н., Михальов О. І., А.В.Усов А. В. – Вінниця : ПП «ТД «Еднльвейс», 2017. – 804 с.
2. Панченко С.В., Медиченко М.П., Лисечко В.П. Методи оптимізації та моделювання: Навч. посібник / – Харків: УкрДАЗТ, 2015. – Ч.1. – 128 с..
3. Томашевський В.М. Моделирование систем: Підручник / В.М. Томашевський. – К.: Видавнича група ВНУ, 2005. – 352 с.
4. Дудар З.В. Моделирование систем: Навч. посібник. – Харків: ХНУРК, 2004. – 112 с.
5. Хусаїнов Д.Я., Харченко І.І., Шатирко А.В. Введення в моделювання динамічних систем: Навч. посібник / К. КПІ, 2010. – 130 с.
6. Оптимізаційні методи та моделі : підручник / В.С. Григорків, М.В. Григорків. – Чернівці : Чернівецький нац. ун-т, 2016. – 400 с.
7. Жалдак М. І., Триус Ю.В. Основи теорії і методів оптимізації: Навчальний посібник. - Черкаси: Брама-Україна, 2005. - 608 с.
8. Обод І.І. Математичне моделювання систем: навчальний посібник. / За редакцією І.І. Обода – Харків : НТУ «ХПІ», Друкарня МАДРИД, 2019. – 268 с.
9. Методи оптимізації та дослідження операцій : навчальний посібник / Укладачі: Я. Б. Сікора,

Додаткова (допоміжна) література

1. Бахрушин В.Є. Математичні основи моделювання систем: Навчальний посібник. – Запоріжжя: Класичний приватний університет, 2009. – 224 с.
2. Моделювання електромеханічних систем: Підручник / Чорний О.П., Луговой А.В., Д.Й.Родькін, Сисюк Г.Ю., Садовой О.В.– Кременчук, 2001. – 410 с.
3. Забара С.С. Моделювання систем у середовищі MATLAB / Забара С.С., Гагарін А.А., Кузьменко І.М., Щербашин Ю.Д. – К.: Видавництво “Університету “Україна”, 2011. – 137 с.
4. Стеценко І.В. Моделювання систем: навч. посіб. [Електронний ресурс, текст] / І.В. Стеценко ; М-во освіти і науки України, Черкас. держ. технол. ун-т. – Черкаси : ЧДТУ, 2010. – 399 с.
5. Гераїмчук М. Д. Моделювання систем у середовищі MATLAB-SIMULINK [Електронний ресурс] : комп’ютерний практикум / М. Д. Гераїмчук, Ю. Ф. Лазарєв, Т. О. Толочко ; НТУУ «КПІ». – Електронні текстові дані (1 файл: 3,57 Мбайт). – Київ : НТУУ «КПІ», 2006. – 175 с.
6. Захарчук В.І. Методи оптимізації та комп’ютерні технології : навч. посіб. для студ. вищ. навч. закладів / В. І. Захарчук. – Луцьк : ІВВ Луцького НТУ, 2017. – 145 с.Павленко П.М. Основи математичного моделювання систем і процесів: навч. посіб. – К.: Книжкове вид-во НАУ, 2013. – 201 с.

2.10 Інформаційні ресурси

1. Сторінка дистанційного навчання URL
<https://moodle.karazin.ua/course/view.php?id=10009>
2. Mathematical Modelling | Control Systems | Simplified. ULR.
<https://griml.com/qz7BQ>
3. Mathematical Model of Control System ULR. <https://griml.com/jM0NZ>
4. Optimization and Optimal Control: an Overview. ULR. <https://griml.com/4kOyR>
5. Constrained Optimal Control. ULR. <https://griml.com/Bc8Kf>

3 ВИДИ ОРГАНІЗАЦІЇ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

За характером організації всі види самостійної роботи можна поділити на дві групи: види самостійної роботи у процесі проведення очних занять і види самостійної роботи, що проводяться у позаурочний час.

3.1 Види організації самостійної роботи у процесі проведення очних занять

3.1.1 Лекційні заняття

- приводячи конкретні приклади, показати необхідність оволодіння знаннями для формування професійних навичок;
- обґрунтувати важливість правильного конспектування та дати методичні поради щодо організації ефективного конспектування;
- з метою активізації розумової діяльності студентів на початку заняття (на протязі 5-7 хвилин) проводиться стисле опитування по раніш вивченому матеріалу, наприклад:

3.1.2 Практичні заняття

- використання методу обговорення навчального матеріалу для закріплення знань, що отримані під час лекційних занять та самостійної роботи;
- використання методу демонстрації для створення наглядного образу предмету чи явища, що розглядається;
- використання методу вправ для отримання найбільш важливих професійно необхідних вмінь;
- використання методу досліджень для формування у студентів навичок щодо самостійного отримання знань та результатів.

3.2. Види організації самостійної роботи , що виконуються студентами у позаурочний час

- Робота з навчальною літературою;
- робота з конспектами ;
- виконання домашніх завдань;
- підготовка до практичних занять;
- підготовка до контрольних заходів;
- робота в системі ДО.

3.3 Приклади відповідей на питання

1. Які моделі називаються лінійними?

У *лінійній моделі* взаємозв'язок між вхідними та вихідними сигналами (параметрами) об'єкта відображається за допомогою лінійних співвідношень.

Лінійна система виду, представленому на рис. 1, звана *однорозв'язною*, може бути описана *лінійним диференціальним рівнянням*

$$\begin{aligned} a_n \frac{y^n(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{dy^{n-1}(t)}{dt^{n-1}} + a_{n-2} \frac{dy^{n-2}(t)}{dt} + \dots + a_0 y(t) = \\ = b_m p \frac{d^m x(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} x(t)}{dt^{m-1}} + b_{m-2} \frac{d^{m-2} x(t)}{dt^{m-2}} + \dots + b_0 x(t). \end{aligned} \quad (1)$$

де $y(t)$ та $x(t)$ – відповідно вихідний та вхідний сигнали; a_i, b_j – сталі коефіцієнти, які визначаються параметрами системи; n та m – цілі додатні числа, причому $m \leq n$, що визначається умовами фізичної реалізованості.



Рис. 1. Лінійна система з одним входом і одним виходом

Для розв'язання рівняння (1) має бути задано n початкових умов (значень)

$$y(t)|_{t=0} = y_0; \dot{y}(t)|_{t=0} = \dot{y}_0; \dots; y^{(n-1)}(t)|_{t=0} = y^{(n-1)}_0. \quad (2)$$

Якщо система в момент $t = 0$ знаходиться у спокої, то у цьому випадку початкові умови (2) є нульовими, тобто

$$y(t)|_{t=0} = 0; \dot{y}(t)|_{t=0} = 0; \dots; y^{(n-1)}(t)|_{t=0} = 0. \quad (3)$$

Якщо коефіцієнти $a_0, a_1, a_2, \dots, b_0, b_1, b_2, \dots$ диференційного рівняння (1) не залежить від часу t , тобто. $a_0, a_1, a_2, \dots, b_0, b_1, b_2, \dots$ – const, то рівняння (1) називається *лінійним із постійними коефіцієнтами*. Якщо зовнішній вплив на досліджувану фізичну систему відсутній, тобто $x(t) = 0$, то модель будують на ос нове однорідного диференціального рівняння

$$a_n \frac{y^n(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{dy^{n-1}(t)}{dt^{n-1}} + a_{n-2} \frac{dy^{n-2}(t)}{dt} + \dots + a_0 y(t) = 0. \quad (4)$$

Лінійним називається диференціальне рівняння, коефіцієнти якого не залежать від шуканої функції $y(t)$ і в яке функція $y(t)$ і її похідні входять лінійно (у першому ступені).

Основною властивістю лінійних систем є застосовність *принципу суперпозиції* (накладання), суть якого: сумі впливів на систему відповідає сума її реакцій на ці дії.

Як приклад лінійної системи можна навести електричний ланцюг з декількома джерелами. Струми від кожного джерела незалежні, тому проводиться розрахунок

струмів окремо для кожного джерела. Результируючі струми виходять підсумовуванням окремих струмів.

Принцип суперпозиції істотно полегшує дослідження лінійних об'єктів, оскільки дозволяє обмежитись дослідженням об'єкта тільки по одному входу. Він дає можливість представити реакцію (відгук) $y(t)$ досліджуваної технічної системи складний сигнал $x(t)$ як суму її реакцій на елементарні сигнали (впливи), на які може бути розкладений сигнал $x(t)$.

2. Що називається рівняннями стану системи?

Рівняння стану системи – динамічна модель (модель динаміки системи) – описує поведінку динамічної системи у часі.

Рішення рівняння стану являє собою математичну модель процесу $\mathbf{X}(t)$, що має місце в даній системі при заданих початкових умовах $\mathbf{X}(t_0) = \mathbf{X}_0$ і вхідному впливі $\mathbf{U}(t)$.

Переваги математичного опису фізичних систем у просторі станів:

- можливість з єдиних позицій розглядати стаціонарні та нестаціонарні, лінійні та нелінійні системи;
- можливість враховувати ненульові початкові умови;
- наявність достатньої кількості чисельних методів розв'язання таких математичних моделей;
- можливість більш різнобічного і глибокого вивчення динамічної системи шляхом формування декількох моделей у різних просторах станів.

Щоб зв'язати послідовні стани системи за часом, припустимо, що похідна

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = \dot{x}_i(t) \quad (i=1,2,\dots,n)$$

залежить тільки від поточного стану системи і не залежить від попередніх станів. Це припущення дозволяє описати динамічну систему за допомогою диференціальних рівнянь:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d x_1(t)}{dt} &= \phi_1[x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t); u_1(t), u_2(t),..., u_m(t); t], \\ \frac{d x_2(t)}{dt} &= \phi_2[x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t); u_1(t), u_2(t),..., u_m(t); t], \\ \\ \frac{d x_n(t)}{dt} &= \phi_n[x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t); u_1(t), u_2(t),..., u_m(t); t]. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Праві частини рівнянь залежать від шуканих функцій і не залежать від їх похідних. Система рівнянь першого порядку (1) називається системою диференціальних рівнянь, які записані у *нормальній формі Коші*.

У рівняннях (3) та (4) $a_{ij} (i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, n)$, $b_{ij} (i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, m)$; $c_{ij} (i = 1, 2, \dots, r; j = 1, 2, \dots, n)$; $d_{ij} (i = 1, 2, \dots, r; j = 1, 2, \dots, n)$ – сталі коефіцієнти, які можна отримати при розкладанні нелінійних функцій ϕ_i та g_j у ряд Тейлора при лінеаризації рівнянь.

3. Наведіть основні критерії оптимальності, що застосовування при синтезі оптимальних систем

При проектуванні оптимальних систем керування важливим питанням є формулювання мети оптимізації, що математично виражається як вимога забезпечення екстремуму (максимуму або мінімуму) деякого показника якості, що називається *критерієм оптимальності* або *критерієм якості керування*.

При синтезі сучасних оптимальних систем керування критерії оптимальності звичайно виражаються у вигляді інтегральних функціоналів, наприклад, такого типу:

$$J(\mathbf{X}, \mathbf{U}) = \int_{t_0}^{t_k} F[\mathbf{X}(t), \mathbf{U}(t)] dt, \quad (1)$$

де $\mathbf{X}(t)$ - вектор фазових координат об'єкта; $\mathbf{U}(t)$ - вектор керування; $[t_0, t_k]$ - розглянутий часовий інтервал керування; $F(***)$ - функція, що відображає показник якості.

Нехай даний певний клас M функцій $y(t)$. Якщо кожній функції $y(t)$ із класу M за деяким законом поставлено у відповідність певне число, то кажуть, що в класі M визначено **функціонал** J , і пишуть $J = J(y)$. Клас M функцій $y(t)$, на якому визначений функціонал $J(y)$, називається **областю завдання функціоналу**. Наприклад, нехай, $M = C_1[0, 1]$ - сукупність безперервних функцій $y(t)$, заданих на відрізку $[0, 1]$

$$J(y) = \int_0^1 y(t) dt. \quad (2)$$

Тоді $J(y)$ є функціонал від $y(t)$: кожній функції класу $M = C_1[0, 1]$ відповідає певне число $J(y)$. Підставивши в (1.2) замість $y(t)$ конкретні функції, отримаємо

відповідні значення $J(y)$. Так, якщо $y(t) = 1$, то $J(y) = \int_0^1 1 \cdot dt = 1$; якщо $y(t) = e^t$, то

$$J(e^t) = \int_0^1 e^t \cdot dt = e - 1, \text{ і т.д.}$$

Залежно від виду підінтегральної функції функціоналу (1) можна отримати різні критерії, що використовуються в практиці проектування оптимальних систем. Наприклад, якщо $F[\mathbf{X}(t)(t), \mathbf{U}(t)] = 1$, то в цьому випадку критерієм оптимальності є час перехідного процесу:

$$J(\mathbf{X}, \mathbf{U}) = \int_{t_0}^{t_k} 1 \cdot dt = t_k - t_0 = T. \quad (3)$$

Одержана при цьому система (об'єкт) є *оптимальною за швидкодією*, якщо досягається мінімум інтеграла (3) при врахуванні реальних обмежень об'єкта, що оптимізується. Принципи побудови таких систем та їх основні властивості розглядаються в наступних главах посібника.

При синтезі оптимальних систем широкого застосування одержали *квадратичні критерії оптимальності*. Одним з таких критеріїв є критерій, що характеризує витрати енергії на керування. Функціонал у цьому випадку має вигляд

$$J(\mathbf{X}, \mathbf{U}) = \int_{t_0}^{t_k} u(t)i(t)dt = \int_{t_0}^{t_k} r u^2(t)dt, \quad (4)$$

де $u(t)$, $i(t)$ - напруга і струм навантаження джерела енергії; $r = \frac{1}{R}$ - коефіцієнт пропорційності; R - опір електричного ланцюга. Отримана в результаті мінімізації функціонала (4) система є *оптимальною за витратою енергії на керування*.

Як критерії оптимальності можуть бути використані *інтегральні оцінки якості перехідного процесу*. Зокрема, квадратична інтегральна оцінка визначається функціоналом такого вигляду:

$$J(z) = \int_{t_0}^{t_k} z^2(t)dt, \quad (5)$$

де $z(t) = y_b(t) - y(t)$ - вільна складова сигналу неузгодженості між вимушеною складовою $y_b(t)$, обумовленою дією вхідного сигналу $x(t)$, та дійсним значенням вихідного сигналу $y(t)$. Одержана в результаті мінімізації функціонала (5) система є *оптимальною за точністю* відпрацювання перехідних режимів. Існують, крім того, поліпшені інтегральні квадратичні оцінки

$$J[V(t)] = \int_{t_0}^{t_k} V(t) dt, \quad (6)$$

де

$$V(t) = x^2(t) + T_1 \dot{x}(t) + \dots + T_{n-1}^2 x^{n-1}(t), \quad (7)$$

$T_1, T_2, \dots, T_{n-1}$ - деякі постійні коефіцієнти.

Перший доданок в (7) забороняє тривале існування відхилення $x(t)$ від заданого значення, а наступні доданки - тривале існування великих похідних $\dot{x}(t), \dots, x^{n-1}(t)$. У функціоналах (5), (6) $t_0 = 0$; $t_k = \infty$.

Найбільш загальним квадратичним функціоналом якості є функціонал виду

$$J(\mathbf{X}, \mathbf{U}) = \int_{t_0}^{t_k} [\mathbf{X}^T(t) \mathbf{R}_1 \mathbf{X}(t) + \mathbf{U}^T(t) \mathbf{R}_2 \mathbf{U}(t)] dt, \quad (8)$$

де $\mathbf{R}_1$ і $\mathbf{R}_2$ - незмінні позитивно визначені симетричні матриці. Величина $\mathbf{X}^T(t) \mathbf{R}_1 \mathbf{X}(t)$ є мірою відхилення стану системи в момент t від заданого стану, наприклад нульового. Вагова матриця $\mathbf{R}_1$ визначає вагу кожної з компонент стану. Наявність члена $\mathbf{U}^T(t) \mathbf{R}_2 \mathbf{U}(t)$ в функціоналі (8) приводить до зниження амплітуди управління $\mathbf{U}(t)$, яка без урахування цього члена виходить нескінченно великою. Роль кожного з двох членів у критерії оптимальності (8) визначається матрицями $\mathbf{R}_1$ і $\mathbf{R}_2$.

Існують й інші критерії оптимальності, наприклад, критерій, обумовлений функціоналом виду

$$J(\mathbf{U}) = \int_{t_0}^{t_k} \sum_{j=1}^m \beta_j |u_j| dt, \quad (9)$$

де $\beta_j \geq 0$, $j = 0, 1, 2, \dots, m$ - вагові коефіцієнти, що враховують витрату палива на керування. Системи, які ґрунтуються на мінімізації функціонала (9), називаються *оптимальними за витратою палива*.

4. Що називається найпростішою задачею варіаційного числення? Як вона вирішується?

Виконаємо дослідження на екстремум функціоналу

$$J(y) = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y') dx \quad (1)$$

причому функція $F(x, y, y')$ є безперервно-диференційована до другого порядку включно по всім аргументам. Екстремум функціонала визначається серед функцій $y(x) \in C_1$ на $[x_1, x_2]$ і таких, що задовольняють умовам

$$y(x_1) = y_1, y(x_2) = y_2. \quad (2)$$

Тобто, всі криві, що розглядаються, проходять через дві фіксовані точки (x_1, y_1) і (x_2, y_2) (рис.1). Така задача називається *задачею з закріпленими межами*. Задача з закріпленими межами для функціонала (1) називається *найпростішою задачею варіаційного числення*.

Функція $y(x)$, що доставляє екстремум функціоналу (2.28) є рішенням диференційного рівняння

$$\frac{\partial F(x, y, y')}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F(x, y, y')}{\partial y'} = F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0. \quad (3)$$

Рівняння (3) називається *рівнянням Ейлера*, воно є необхідною умовою екстремуму функціонала (1) при фіксованих граничних умовах і відсутності обмежень на координати.

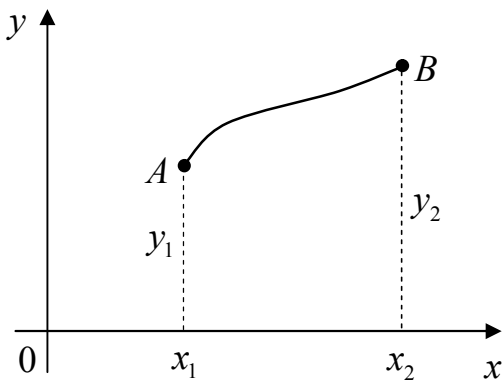


Рис.1. До питання постановки варіаційної задачі з закріпленими кінцями

Інтегральні криві $y = y(x, c_1, c_2)$ рівняння Ейлера називаються *екстремальми*. Довільні постійні c_1, c_2 , що входять в загальне рішення цього рівняння після його інтегрування, визначаються з граничних умов $y(x_1) = y_1, y(x_2) = y_2$. При рішенні рівнянь Ейлера екстремум шукають серед безперервних гладких функцій. Однак для того, щоб встановити, чи реалізується на них насправді екстремум, і до того ж максимум або мінімум, треба скористатися достатніми умовами екстремуму.

У багатьох варіаційних задачах існування рішення очевидно з фізичного чи геометричного сенсу задачі, і якщо рішення рівняння Ейлера, що задовольняє граничним умовам, єдине, то ця єдина екстремаль і буде вирішенням варіаційної задачі, що розглядається.

Запишемо рівняння Ейлера (3) у іншій формі. З цією метою знайдемо повну похідну другого члена рівняння (3), враховуючи, що функція $F(x, y, y')$ є функцією трьох аргументів x, y, y' , де x - незалежна змінна, а y і y' - функції від x тобто $y = y(x), y' = y'(x)$:

$$\frac{d}{dx} F_{y'} = \frac{d}{dx} \frac{\partial F(x, y, y')}{\partial y'} = \frac{\partial F_{y'}(x, y, y')}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dx} + \frac{\partial F_{y'}(x, y, y')}{\partial y(x)} \cdot \frac{dy(x)}{dx} + \frac{\partial F_{y'}(x, y, y')}{\partial y'(x)} \cdot \frac{dy'(x)}{dx}.$$

Враховуючи що

$$\frac{dy(x)}{dx} = y'(x), \quad \frac{d^2 y(x)}{dx^2} = y''(x)$$

і позначивши

$$\frac{\partial F_{y'}(x, y, y')}{\partial x} = F_{y'x}, \quad \frac{\partial F_{y'}(x, y, y')}{\partial y(x)} = F_{y'y}, \quad \frac{\partial F_{y'}(x, y, y')}{\partial y'(x)} = F_{y'y'},$$

запишемо рівняння (3) як

$$F_y - F_{y'x} - F_{y'y'} y' - F_{y'y} y'' = 0,$$

або

$$F_{y'y'} \frac{d^2 y(x)}{dx^2} + F_{yy'} \frac{dy(x)}{dx} + F_{y'x} + F_y = 0 \quad (4)$$

Диференціальне рівняння Ейлера, як випливає з (4), є рівнянням другого порядку, у загальному випадку - нелінійним і нестационарним, оскільки коефіцієнти $F_{y'y'}$, $F_{yy'}$ виражаються через аргумент (нестационарність) і шукану змінну $y(x)$ (нелінійність).

5. Які змінні ввів Понтрягін для розв'язування задач оптимального керування і як формулюється задача оптимального керування, враховуючи їх?

Нехай об'єкт управління описується системою рівнянь

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_r), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (1)$$

або у векторній формі

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}),$$

де $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ - вектор координат стану і $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_r)$ - вектор управління.

Основна задача оптимального управління формулюється наступним чином: *серед всіх допустимих управлінь, що переводять зображуючу точку у фазовому просторі X з початкового положення $\mathbf{x}^0$ в кінцеве $\mathbf{x}^1$ якщо ці управління існують, потрібно знайти таке управління, для якого функціонал*

$$J(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \int_{t_0}^{t_1} f_0(\mathbf{x}, \mathbf{u}) dt \quad (2)$$

досягає мінімуму.

Введемо на розгляд нову координату стану x_0 , яка задовольняє диференціальному рівнянню

$$\frac{dx_0}{dt} = f_0(\mathbf{x}, \mathbf{u}), \quad (3)$$

де $f_0(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ - підінтегральна функція функціоналу (3.2). Приєднавши рівняння (3.3) до системи рівнянь (3.1), отримаємо систему рівнянь

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_r), \quad i = 0, 1, 2, \dots, n. \quad (4)$$

Запишемо систему (4) у векторній формі. Для цього введемо до розгляду $n+1$ -мірний вектор координат стану $\bar{\mathbf{x}} = (x_0, x_1, x_2, \dots, x_n)$. Тоді у векторній формі система рівнянь (4) набуде вигляду

$$\frac{d\bar{\mathbf{x}}}{dt} = \bar{\mathbf{f}}(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{u}). \quad (5)$$

де $\bar{\mathbf{f}}(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{u}) = f_0(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{u}), f_1(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{u}), \dots, f_n(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{u})$ - вектор правих частин системи (4).

Введемо на розгляд допоміжні змінні $\psi_0, \psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n$, що задовольняють системі рівнянь

$$\frac{\partial \psi_i}{\partial t} = - \sum_{j=0}^n \frac{\partial f_j(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{u})}{\partial x_i} \psi_j, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n \quad (6)$$

Система рівнянь (6) називається *сполученою* по відношенню до системи (5).

Якщо вибрати деяке допустиме управління $\mathbf{u}(t)$ на відрізку $[t_0, t_k]$ і знайти відповідне йому рішення $\bar{\mathbf{x}}(t)$ з початковою умовою $\bar{\mathbf{x}}(t_0) = \bar{\mathbf{x}}^0$, то при підстановці в систему рівнянь (6) цього управління $\mathbf{u}(t)$ і рішення $\bar{\mathbf{x}}(t)$ отримаємо лінійну однорідну систему диференціальних рівнянь

$$\frac{\partial \psi_i}{\partial t} = - \sum_{j=0}^n \frac{\partial f_j(\bar{\mathbf{x}}(t), \mathbf{u}(t))}{\partial x_i} \psi_j, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n. \quad (7)$$

Система рівнянь (7) задовольняє умовам теореми існування та єдиності розв'язання.

Системи рівнянь (5) та (6) можна об'єднати однією формою запису. Для цього введемо на розгляд функцію $\tilde{H}$ змінних $x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_r, \psi_0, \psi_1, \dots, \psi_n$:

$$\tilde{H}(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\boldsymbol{\psi}}, \mathbf{u}) = \sum_{i=0}^n \psi_i f_i(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{u}) = (\bar{\boldsymbol{\psi}}, \bar{\mathbf{f}}(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{u})), \quad (8)$$

де $\bar{\boldsymbol{\psi}} = (\psi_0, \psi_1, \dots, \psi_n)$. Тоді системи рівнянь (5) та (6) можна записати у вигляді

$$\frac{\partial x_i}{\partial t} = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \psi_i}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n, \quad (9)$$

$$\frac{\partial \psi_i}{\partial t} = - \frac{\partial \tilde{H}}{\partial x_i}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n. \quad (10)$$

При фіксованих значеннях $\bar{\mathbf{x}}(t)$ і $\bar{\boldsymbol{\psi}}(t)$ функція $\tilde{H}$ стає функцією лише управління $\mathbf{u}(t)$. Позначимо

$$\mu(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\boldsymbol{\psi}}) = \sup_{\mathbf{u} \in U} \tilde{H}(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\boldsymbol{\psi}}, \mathbf{u}).$$

Якщо точна верхня грань досягається, то

$$\mu(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\boldsymbol{\psi}}) = \max_{\mathbf{u} \in U} \tilde{H}(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\boldsymbol{\psi}}, \mathbf{u}).$$

Принцип максимуму Л. С. Понтрягіна. Нехай $\mathbf{u}(t)$, $t_0 \leq t \leq t_1$ - таке допустиме управління, що відповідна йому фазова траєкторія $\bar{\mathbf{x}}(t)$, що виходить в момент t_0 з точки $\bar{\mathbf{x}}(t_0)$, проходить в момент t_1 - через деяку точку $\bar{\mathbf{x}}(t_1)$. Для оптимальності управління $\mathbf{u}(t)$ і траєкторії $\bar{\mathbf{x}}(t)$ необхідно існування такої ненульової безперервної вектор-функції $\bar{\boldsymbol{\psi}}(t) = (\psi_0(t), \psi_1(t), \dots, \psi_n(t))$, що відповідає функціям $\mathbf{u}(t)$ та $\bar{\mathbf{x}}(t)$, що

1. для будь-якого моменту t ($t_0 \leq t \leq t_1$), що є точкою неперервності управління $\mathbf{u}(t)$ функція $H(\bar{\mathbf{x}}(t), \bar{\boldsymbol{\psi}}(t), \mathbf{u}(t))$ досягає по $\mathbf{u}(t)$ максимуму, тобто

$$\tilde{H}(\bar{\mathbf{x}}(t), \bar{\boldsymbol{\psi}}(t), \mathbf{u}(t)) = \mu(\bar{\mathbf{x}}(t), \bar{\boldsymbol{\psi}}(t)); \quad (11)$$

2) у кінцевий момент часу t_1 мають місце співвідношення

$$\varphi_0(t_1) \leq 0, \quad \mu(\bar{\mathbf{x}}(t_1), \bar{\boldsymbol{\psi}}(t_1)) = 0. \quad (12)$$

6. Як вирішується задача синтезу оптимального управління в безперервних системах з використанням методу динамічного програмування ?

Метод динамічного програмування при деяких додаткових припущеннях може бути застосований для визначення оптимального управління в безперервних автоматичних системах. Отримаємо необхідну умову оптимальності управління для керованого об'єкта, що описується системою диференціальних рівнянь

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = f_i(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_r, t), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (1)$$

або у векторній формі

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \quad (2)$$

де $\mathbf{x}$ - n -мірний вектор координат стану; $\mathbf{u}$ - r -мірний вектор управління; $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = [f_1(\mathbf{x}, \mathbf{u}), \dots, f_n(\mathbf{x}, \mathbf{u})]^T$.

Припускаємо, що $\mathbf{u} \in U$, тобто вектор управління приймає значення з деякої області простору управління. Нехай функціонал, що мінімізується, має вид

$$J(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \int_0^T G(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) dt. \quad (3)$$

Кінцевий час T вважаємо фіксованим. Вважаємо, що задано початковий стан $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$, кінцевий стан $\mathbf{x}(T)$ не фіксується.

Припустимо, що знайдено оптимальну траєкторію $\mathbf{x}(t)$, що виходить з початкової точки $\mathbf{x}_0$ і проходить через точку $\mathbf{x}(T)$.

Мінімальне значення критерію $J(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ позначимо через $S(\mathbf{x}_0, 0)$. Візьмемо на траєкторії проміжні точки $\mathbf{x}(t)$ та $\mathbf{x}(t + \Delta t)$, що відповідають моментам часу t і $t + \Delta t$.

Відповідно до принципу оптимальності ділянка траєкторії від точки $\mathbf{x}(t)$ до точки $\mathbf{x}(T)$ також є оптимальною траєкторією. Маємо

$$S(\mathbf{x}(t), t) = \min_{\mathbf{u}(\tau) \in U} \int_t^T G(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \tau) d\tau \quad (4)$$

Представимо інтеграл у вигляді суми двох інтегралів – від t до $t + \Delta t$ і від $t + \Delta t$ до T :

$$S(\mathbf{x}(t), t) = \min_{\mathbf{u}(\tau) \in U} \left[\int_t^{t+\Delta t} G(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \tau) d\tau + \int_{t+\Delta t}^T G(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \tau) d\tau \right].$$

Для першого доданку, враховуючи невелику величину прирощення Δt , згідно теореми про середнє, можна написати

$$\int_t^{t+\Delta t} G(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \tau) d\tau = G(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) \Delta t + o_1(\Delta t) \quad (5)$$

де $o_1(\Delta t)$ – мала, вищого порядку малості, ніж Δt , тобто $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{o_1(\Delta t)}{\Delta t} = 0$.

Враховуючи що

$$\min_{\mathbf{u}(\tau) \in U} \left[\int_{t+\Delta t}^T G(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \tau) \cdot d\tau \right] = S(\mathbf{x}(t + \Delta t), t + \Delta t),$$

отримаємо

$$S(\mathbf{x}(t), t) = \min_{\mathbf{u}(t) \in U} [G(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) \Delta t + S(\mathbf{x}(t + \Delta t), t + \Delta t) + o_1(\Delta t)].$$

Зважаючи на незначність збільшення Δt можемо записати

$$x(t + \Delta t) = x(t) + \frac{dx(t)}{dt} \Delta t + o_2(\Delta t), \quad (6)$$

де $o_2(\Delta t)$ – мала вищого порядку малості, ніж Δt . Будемо вважати тепер, що функція $S(\mathbf{x}, t)$ має безперервні приватні похідні по всіх змінних $x_1, x_2, \dots, x_n, t$. Справедливість всього наступного висновку залежить від того, чи виконується це припущення. Заздалегідь функція $S(\mathbf{x}, t)$ невідома, і перевірити справедливість цього припущення по рівнянням руху неможливо. Якщо в процесі розв'язання оптимальної задачі отримана функція $S(\mathbf{x}, t)$ виявиться безперервно диференційованою, всі

отримані результати будуть справедливими. Але трапляються випадки, коли це припущення не має місця. Тоді всі міркування мають евристичний характер.

Розкладемо функцію $S(\mathbf{x}(t + \Delta t), t + \Delta t)$ в ряд Тейлора в околиці точки $(\mathbf{x}, t)$. Враховуючи рівність (6), отримаємо

$$S(\mathbf{x}(t + \Delta t), t + \Delta t) = S(\mathbf{x}(t), t) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial S}{\partial x_i} f_i[\mathbf{x}, \mathbf{u}, t] \Delta t + \frac{\partial S}{\partial t} \Delta t + o_3(\Delta t). \quad (7)$$

де $o_3(\Delta t)$ – мала, вищого порядку малості, ніж Δt . Введемо на розгляд вектор-рядок

$$\frac{\partial S}{\partial \mathbf{x}} = \left[\frac{\partial S}{\partial x_1} \quad \frac{\partial S}{\partial x_2} \quad \dots \quad \frac{\partial S}{\partial x_n} \right].$$

Тоді формула (7) може бути записана більш компактному вигляді

$$S(\mathbf{x}(t + \Delta t), t + \Delta t) = S(\mathbf{x}(t), t) + \frac{\partial S}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}[\mathbf{x}, \mathbf{u}, t] \Delta t + \frac{\partial S}{\partial t} \Delta t + o_3(\Delta t).$$

Підставимо це значення $S(\mathbf{x}(t + \Delta t), t + \Delta t)$ у формулу (7), поділимо на Δt обидві частини набутої рівності і перейдемо до межі при $\Delta t \rightarrow 0$. Враховуючи, що функції $S(\mathbf{x}, t)$ та $\frac{\partial S(\mathbf{x}, t)}{\partial t}$ від управління $\mathbf{u}(t)$ не залежать, отримаємо

$$-\frac{\partial S}{\partial t} = \min_{\mathbf{u}(t) \in U} \left[G(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) + \frac{\partial S}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \right] \quad (8)$$

або в скалярній формі

$$-\frac{\partial S}{\partial t} = \min_{\mathbf{u}(t) \in U} \left[G(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial S}{\partial x_i} f_i(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \right]. \quad (9)$$

Рівняння (9) носить назву **рівняння Беллмана** і є необхідною умовою екстремуму. Рівняння Беллмана – це рівняння у приватних похідних щодо функції $S(\mathbf{x}, t)$. Внаслідок мінімізації правої частини управління $\mathbf{u}(t)$ зникає, і рівняння містить лише невідому функцію $S(\mathbf{x}, t)$. Рішення рівняння (9) повинно задовольняти граничній умові $S(\mathbf{x}, T) = 0$.

7. Як виконується синтез оптимального стаціонарного лінійного регулятора стану?

Розглянемо задачу синтезу оптимальної системи при інтегральному квадратичному критерії оптимальності, коли матриці $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{Q}$ і $\mathbf{R}$ є постійними, $\mathbf{h}(t) = 0$ і

$t_f \rightarrow \infty$. У цьому випадку $x(\infty) = 0$ і рівняння об'єкта та критерій оптимальності набувають виду

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{B} \mathbf{u}; \quad J = \int_{t_0}^{\infty} [\mathbf{x}^T \mathbf{Q}(t) \mathbf{x} + \mathbf{u}^T \mathbf{R} \mathbf{u}] dt. \quad (1)$$

Тут приймається, що $\mathbf{Q}$ і $\mathbf{R}$ – позитивно-визначені $n \times n$ і $n \times r$; матриці відповідно. Необхідно знайти управління зі зворотним зв'язком, при якому замкнута система асимптотично стійка і критерій оптимального приймає мінімальне значення. Ця задача називається *задачею синтезу оптимального стаціонарного лінійного регулятора стану* або коротко – стаціонарною задачею.

Рішення стаціонарної задачі існує тоді і тільки тоді, коли пара $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ стабілізується. Оптимальне управління є лінійною функцією від фазових координат і має вид

$$\mathbf{u}^* = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{K} \mathbf{x}. \quad (2)$$

де $\mathbf{K}$ – постійна позитивно-визначена матриця, яка визначається з так званого *алгебраїчного рівняння Ріккати*:

$$-\mathbf{K} \mathbf{A} - \mathbf{A}^T \mathbf{K} + \mathbf{K} \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{K} - \mathbf{Q} = 0, \quad (3)$$

Оптимальне управління (2) записують також наступним чином

$$\mathbf{u}^* = -\mathbf{F} \mathbf{x}, \quad (4)$$

де $\mathbf{F}$ – матриця коефіцієнтів підсилення лінійного оптимального регулятора.

$$\mathbf{F} = \mathbf{R}_2^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P}. \quad (5)$$

При оптимальному управлінні для будь якого $t \geq 0$ справедлива рівність

$$\mathbf{x}^T(t) \mathbf{K}(t) \mathbf{x}(t) = \int_t^{\infty} [\mathbf{x}^T(\tau) \mathbf{Q}(\tau) \mathbf{x}(\tau) + \mathbf{u}^{*T}(\tau) \mathbf{R}(\tau) \mathbf{u}^*(\tau)] d\tau, \quad (6)$$

Рівняння (3) має не одне рішення. Але рішення, що задовольняє *критерію Сильвестра* позитивної визначеності матриці $\mathbf{K}$

$$k_{11} > 0, \quad \begin{vmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} k_{11} & \dots & k_{1n} \\ k_{n1} & \dots & k_{nn} \end{vmatrix} > 0 \quad (7)$$

єдине.

Слід мати на увазі, що якщо t_f є кінцевим, то хоча матриці $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{Q}$ і $\mathbf{R}$ є постійними, матриць $\mathbf{K}$ в оптимальному законі управління залежить від часу і знаходиться з диференціального рівняння Ріккати.

Замкнута система автоматичного управління з регулятором по всіх змінних вектора стану $\mathbf{x}(t)$ для загального випадку регулювання, коли до системи прикладена задаюча дія $u_3(t)$ має вид

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = (\mathbf{A} - \mathbf{B} \mathbf{F}) \mathbf{x}(t) + \mathbf{B} u_3(t), \quad (8)$$

або

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A} \mathbf{r} \mathbf{x}(t) + \mathbf{B} u_3(t), \quad (9)$$

де $\mathbf{A} \mathbf{r} = \mathbf{A} - \mathbf{B} \cdot \mathbf{F}$ – матриця стану системи з оптимальним регулятором.

Структурна схема системи з оптимальним регулятором, складена відповідно до рівняння (8) показана на рис. 1. Для спрощення на схемі прийнято $u_3(t) = 0$.

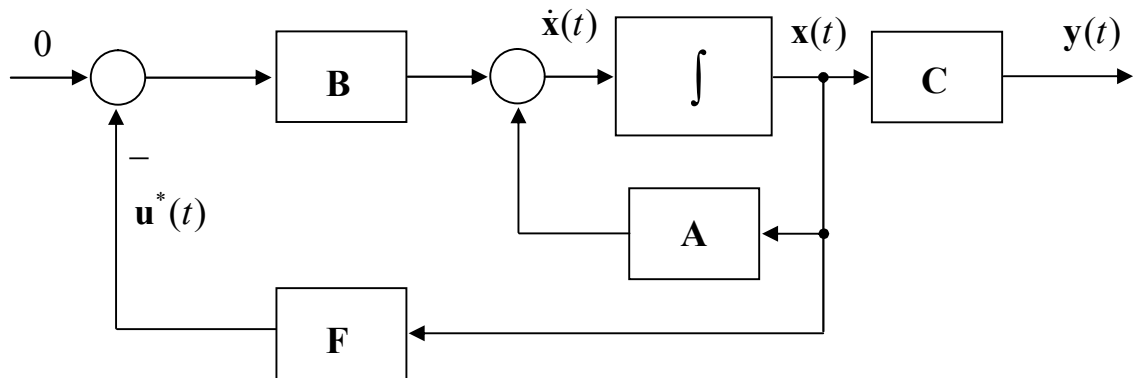


Рис. 1. Структурна схема САУ з оптимальним регулятором

3.4 Приклади рішення задач

Задача 3.1 Модель нелінійної системи другого порядку визначається рівняннями:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = 2(x_1 - x_2); \\ \frac{dx_2}{dt} = -x_2(3 + x_1). \end{cases} \quad (1)$$

Необхідно: Знайти точки спокою системи, для чого прирівняти нулю фазові швидкості: $\frac{dx_1}{dt} = 0$ і $\frac{dx_2}{dt} = 0$. Побудувати схему моделювання системи в Simulink MATLAB. Задаючи різні початкові умови, отримати фазові траєкторії системи.

Рішення. З системи рівнянь

$$\begin{cases} 0 = 2(x_1 - x_2); \\ 0 = -x_2(3 + x_1). \end{cases} \quad (2)$$

визначаємо координати точки спокою: $x_1 = 0$, $x_2 = 0$.

Схема моделі Simulink MATLAB показана на рис. 1.

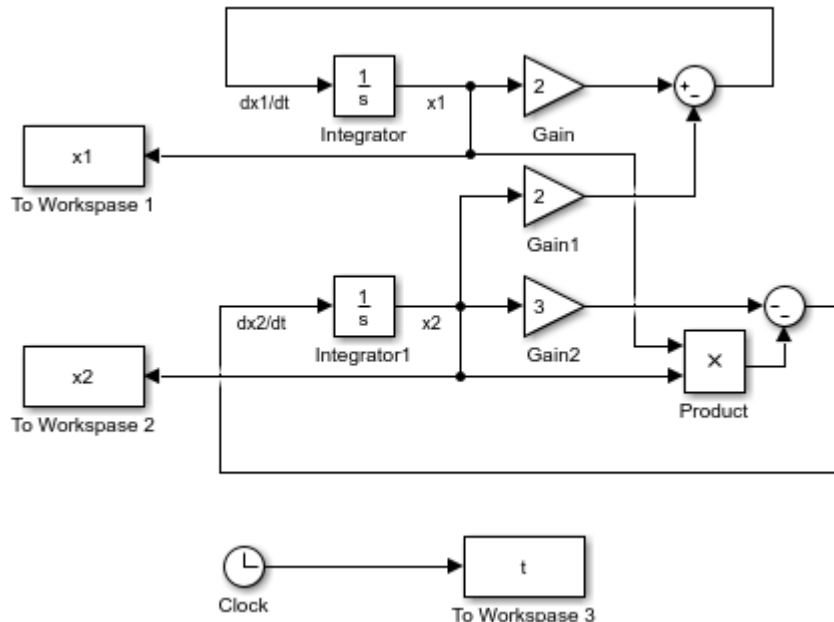


Рис. 1. Схема моделювання в середовищі Simulink для визначення фазових траєкторій і часових характеристик системи, що відповідає рівнянням (1)

Фазові траєкторії системи зображені на рис.2.

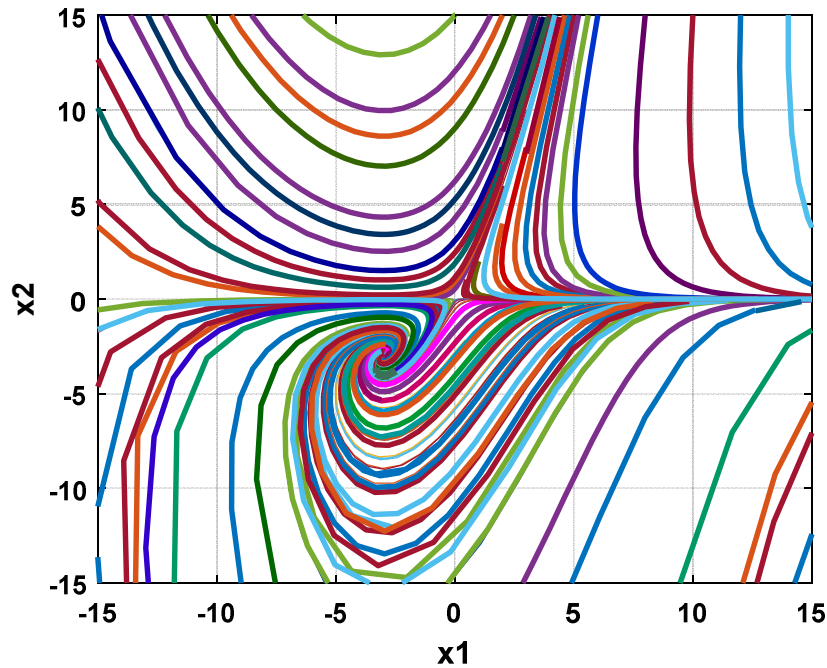


Рис. 2. Фазові траєкторії системи, що відповідає рівнянням (1)

Задача 3.2 Необхідно дослідити керованість об'єкта керування, що використовується для побудови силового слідкуючого електропривода, рівняння стану якого з урахуванням тільки однієї електромеханічної постійної часу $T_m = 0,5c$ має вид

$$\frac{d^2 \beta(t)}{dt^2} + 2 \frac{d\beta(t)}{dt} = U_{\text{тп}}(t)$$

де $\beta(t)$ - кут повороту вала двигуна; $U_{\text{тп}}(t)$ - напруга, що прикладається до входу тиристорного перетворювача.

Рішення. Рівняння стану, які відповідають наведеному диференціальному рівнянню у стандартній формі, мають вигляд

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{X}(t)}{dt} &= A\mathbf{X}(t) + bu(t); \\ y(t) &= C\mathbf{X}(t), \end{aligned}$$

де

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}; \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad c = [1 \quad 0]; \quad \mathbf{X}(t) = [x_1(t), x_2(t)]^T = [\beta(t), \omega(t)]^T,$$

$y(t)$ та $U(t) = U_{\text{тп}}(t)$ - скаляри.

Схема аналогового моделювання об'єкта, що розглядається, показана на рис. 1.

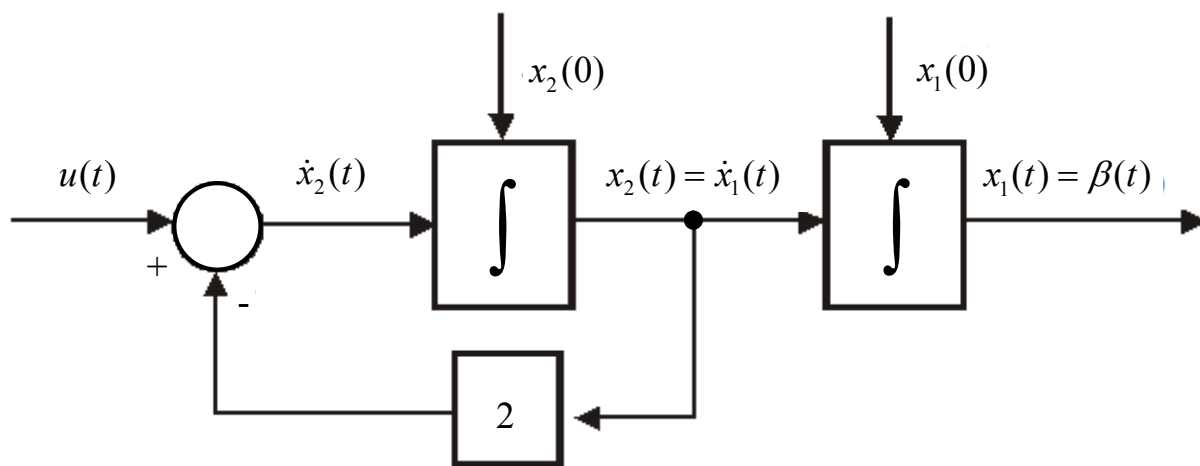


Рис.1. Схема аналогового моделювання слідкуючого приводу

Матриця керованості

$$Q_y = [b \quad Ab] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Оскільки ранг $Q_y = 2$, то система повністю керована.

Задача 3.3 Дослідити на екстремум функціонал $J(y) = \int_1^2 \frac{\sqrt{1+(y')^2}}{y} dx$, що задовольняє граничним умовам $y(0) = 4$, $y(2) = 2$.

Рішення. Рівняння Ейлера має перший інтеграл

$$\frac{\sqrt{1+y'^2}}{y} - \frac{y'^2}{y\sqrt{1+y'^2}} = c_1 \quad \text{або} \quad \frac{1+y'^2 - y'^2}{y\sqrt{1+y'^2}} = c_1$$

звідки

$$y = \frac{c}{\sqrt{1+y'^2}}, \quad \text{де} \quad c = \frac{1}{c_1}.$$

Введемо підстановку $y' = \operatorname{tg} u$, $y = c \cos u$. Знайдемо диференціал dy : $dy = -c \cdot \sin u \, du$, тоді $\operatorname{tgu} \, dx = -c \cdot \sin u \, du$ або $dx = -c \cdot \cos u \, du$, звідки $x = c \cdot \sin u + c_1$. Виключаючи параметр u , отримаємо сімейство екстремалей

$$(y - c_2)^2 + x^2 = c^2.$$

Визначимо постійні c_1 і c_2 з граничних умов

$$c_2^2 + 16 = c^2, \quad (2 - c_2)^2 + 4 = c^2.$$

Отримаємо $c = \sqrt{20}$, $c_2 = -2$. Враховуючи, що $y(2) = 2$, отримаємо екстремаль $y = \sqrt{16 - x^2 - 4x}$.

Задача 3.3 Знайти оптимальне управління, застосовуючи принцип максимуму Л.С.Понтрягіна:

$$x_1' = x_2, \quad x_2' = u, \quad |u| \leq a;$$

$$x_1(0) = x_2(0) = 0, \quad x_1(t_1) = d > 0, \quad x_2(t_1) = 0;$$

$$J = t_1 \rightarrow \min.$$

Рішення. Гамільтоніан, сполучені рівняння і їх рішення мають вид:
 $H = \psi_1 x_2 + \psi_2 u, \quad \psi_1' = 0; \quad \psi_2 = -\psi_1, \quad \psi_1 = c_1; \quad \psi_2 = -c_1 t + c_2.$

З принципу максимуму

$$\max_{|u| \leq a} H = \psi_1 x_2 + \max_{|u| \leq a} \psi_2 u$$

отримуємо $u(t) = a \operatorname{sign} \psi_2(t)$. Оскільки $\psi_2(t)$ - лінійна функція, то на інтервалі $0 \leq t \leq t_1$ функція $\psi_2(t)$ може змінити знак не більше одного разу, причому з умови завдання (див. граничні умови) ясно, що спочатку $u(t) = a$, або на всьому інтервалі $0 \leq t \leq t_1$

$$u(t) = \begin{cases} a & \text{при } 0 \leq t < t_n; \\ -a & \text{при } t_n \leq t < t_1, \end{cases}$$

де t_n - момент переключення.

Підставивши ці значення у рівняння об'єкта та вирішивши їх, отримаємо

$$x_2(t) = \begin{cases} at + c_1 & \text{при } 0 \leq t < t_n; \\ -at + c_2 & \text{при } t_n \leq t < t_1; \end{cases} \quad x_1(t) = \begin{cases} \frac{a}{2}t^2 + c_1 t + c_3 & \text{при } 0 \leq t < t_n; \\ -\frac{a}{2}t^2 + c_2 t + c_4 & \text{при } t_n \leq t < t_1. \end{cases}$$

З крайових умов на лівому кінці впливає $c_1 = 0$ і $c_3 = 0$, на правому кінці $c_2 = at_1$, $c_4 = -\frac{a}{2}t_1^2 + d$. Через безперервність фазової траєкторії в точці $t = t_n$

$$at_n = -at_n + at_1, \quad \frac{a}{2}t_n^2 = -\frac{a}{2}t_n^2 + at_1 t_n + d - \frac{a}{2}t_n^2,$$

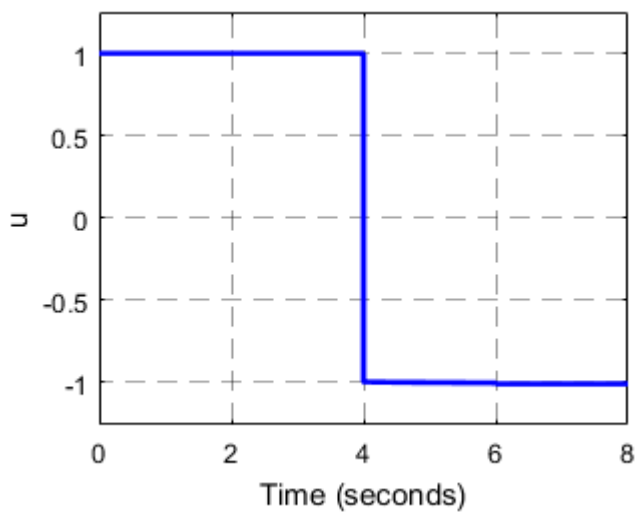
звідки

$$t_n = \frac{t_1}{2}, \quad t_1 = 2\sqrt{\frac{d}{a}}.$$

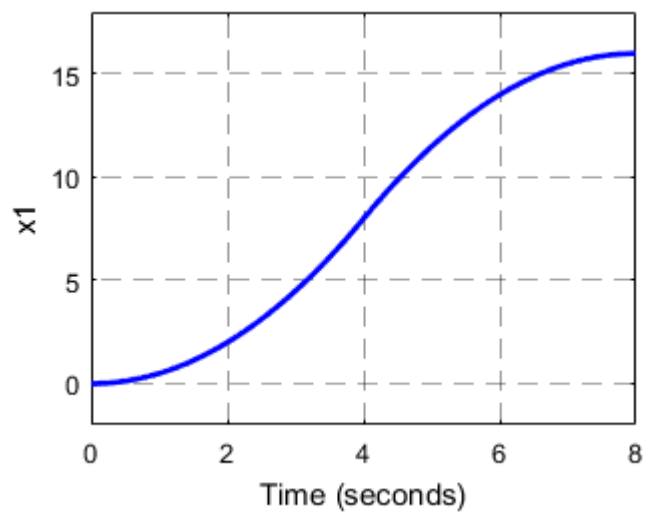
Таким чином, оптимальне управління

$$u(t) = \begin{cases} a & \text{при } 0 \leq t < \sqrt{\frac{d}{a}}; \\ -a & \text{при } \sqrt{\frac{d}{a}} \leq t < 2\sqrt{\frac{d}{a}}. \end{cases}$$

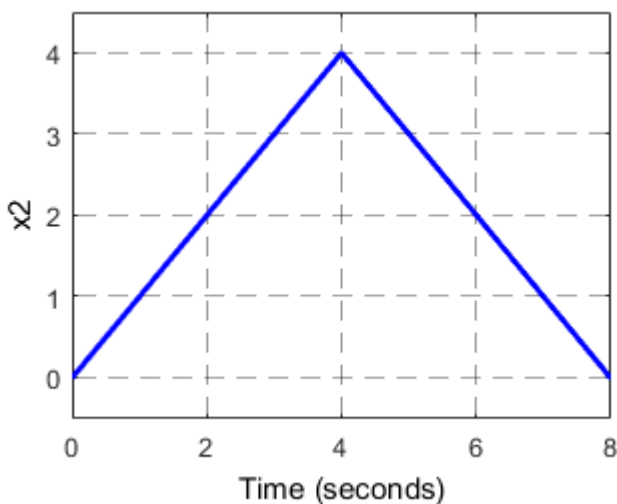
На рис. 1 показані зміни в часі оптимального керуючого впливу $u(t)$ та фазових координат $x_1(t)$ і $x_2(t)$. Графіки побудовані для наступних числових значень $a = 1$, $d = 16$. Для моделювання використовувалась схема, показана на рис. 2.24.



а)



б)



в)

Рис1. Закон зміни керуючого впливу (а), положення (б), кутової швидкості (в) до прикладу 3.2

Задача 3.4 Виконати синтез оптимального регулятора стану для об'єкта управління, математична модель якого описується рівняннями стану

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = x_2(t);$$

$$\frac{dx_2(t)}{dt} = u(t).$$

На управління та фазові координати обмеження не накладаються.
Як критерій оптимальності вибрано квадратичний функціонал

$$J(x_1, x_2, u) = \int_0^{\infty} (q_{11}x_1^2 + q_{22}x_2^2 + r u^2) dt.$$

де чисельні значення коефіцієнтів $q_{11} \geq 0$, $q_{22} \geq 0$, $r > 0$ слід вибрати в процесі вирішення задачі так, щоб забезпечити бажану якість перехідних процесів.

Рішення. Розв'яжемо спочатку цю задачу за допомогою рівняння Беллмана.
Рівняння Беллмана для цієї задачі має вид

$$\min_{u \in U} \left[q_{11}x_1^2 + q_{22}x_2^2 + r u^2 + \frac{\partial S}{\partial x_1} x_2 + \frac{\partial S}{\partial x_2} u \right] = 0. \quad (1)$$

Визначивши похідну по управлінню та від лівої частини виразу (1) та прирівнявши її до нуля, отримаємо

$$2ru + \frac{\partial S}{\partial x_2} = 0. \quad (2)$$

Звідси знаходимо оптимальне управління u^* , що є функцією параметра r і $\frac{\partial S}{\partial x_2}$

$$u^* = -\frac{1}{2r} \frac{\partial S}{\partial x_2}. \quad (3)$$

Підставивши (3) в (1), знайдемо вираз щодо функції $S(x_1, x_2)$

$$q_{11}x_1^2 + q_{22}x_2^2 + \frac{\partial S}{\partial x_1} x_2 - \frac{1}{2r} \left(\frac{\partial S}{\partial x_2} \right)^2 = 0. \quad (4)$$

Для знаходження приватних похідних $\frac{\partial S}{\partial x_1}$, $\frac{\partial S}{\partial x_2}$ задамося рішенням рівняння

(4) як квадратичної форми від змінних стану

$$S(x_1, x_2) = k_{11}x_1^2 + 2k_{12}x_1x_2 + k_{22}x_2^2 = 0.. \quad (5)$$

Для того, щоб квадратична форма $S(x_1, x_2)$ була позитивно визначена, необхідно, щоб коефіцієнти k_{11} , k_{12} , k_{22} , задовольняли умові

$$k_{11} > 0, \quad k_{11}k_{22} - k_{12}^2 > 0, \quad k_{22} > 0. \quad (6)$$

З (5) знаходимо

$$\begin{cases} \frac{\partial S}{\partial x_1} = 2k_{11}x_1 + 2k_{12}x_2; \\ \frac{\partial S}{\partial x_2} = 2k_{12}x_1 + 2k_{22}x_2. \end{cases} \quad (7)$$

Підставивши значення приватних похідних з (7) у вираз (4) і прирівнявши коефіцієнти при x_1^2 , x_1x_2 , x_2^2 , отримаємо систему алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} q_{11} - \frac{1}{r}k_{12}^2 = 0; \\ k_{11} - \frac{1}{r}k_{12}k_{22} = 0; \\ k_{22} + 2k_{12} - \frac{1}{r}k_{22}^2 = 0; \end{cases} \quad (8)$$

З цієї системи з урахуванням умовна (6) знайдемо коефіцієнти k_{11} , k_{12} , k_{22}

$$\begin{aligned} k_{11} &= \sqrt{q_{11}(q_{22} + 2\sqrt{q_{11}r})}; \\ k_{12} &= \sqrt{q_{11}r}; \\ k_{22} &= \sqrt{r(q_{22} + 2\sqrt{q_{11}r})}. \end{aligned} \quad (9)$$

Оптимальне управління у функції фазових координат $x_1(t)$, $x_2(t)$, згідно з (3) та (7), дорівнює

$$u^* = -\frac{1}{r}k_{12}x_1(t) - \frac{1}{r}k_{22}x_2(t) = -\frac{1}{r}\sqrt{q_{11}r}x_1(t) - \frac{1}{r}\sqrt{r(q_{22} + 2\sqrt{q_{11}r})}x_2(t). \quad (4.76)$$

Розв'яжемо тепер задачу використовуючи метод, заснований на використанні матричного рівняння Ріккати.

Рівняння стану об'єкту управління, що розглядається

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{A} \mathbf{x}(t) + \mathbf{B} \mathbf{u}(t) \quad (10)$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = [1 \ 0], \quad \mathbf{x}(t) = [x_1(t), x_2(t)]^T = [\beta(t), \omega(t)]^T,$$

$$\mathbf{R} = r, \quad \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} q_{11} & 0 \\ 0 & q_{22} \end{bmatrix}.$$

Оптимальне управління:

$$u^*(x_1, x_2) = -\frac{1}{r} [0 \ 1] \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = -\frac{1}{r} (k_{21}x_1 + k_{22}x_2), \quad (11)$$

де коефіцієнти k_{11} , k_{12} , k_{21} , k_{22} повинні задовольняти рівнянню (6)

$$-\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} + \frac{1}{r} \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} [0 \ 1] \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} q_{11} & 0 \\ 0 & q_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

або рівносильній йому системі

$$\frac{1}{r} k_{12}^2 - q_{11} = 0; \quad -k_{11} + \frac{1}{r} k_{12} k_{22} = 0; \quad -2k_{12} + \frac{1}{r} k_{22}^2 - k_{22} = 0,$$

яка повністю співпадає з отриманою раніше системою (9).

Структурна схема системи з регулятором стану зображена на рис. 1.

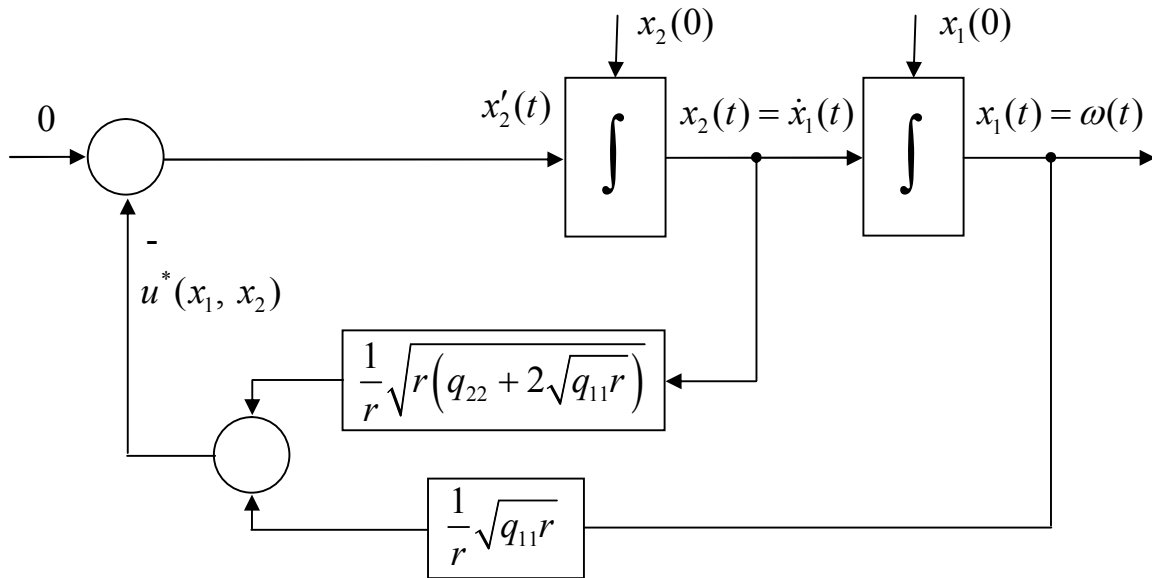


Рис. 1. Оптимальний регулятор стану системи (до прикладу 4.4)

Схема моделювання системи з оптимальним регулятором, розроблена в SIMULINK системи MATLAB показана на рис. 2.

На рис. 3 показані графіки перехідних процесів системи при ступінчатій входній дії при $q_{11} = 1$, $q_{22} = 1$, $r = 1$.

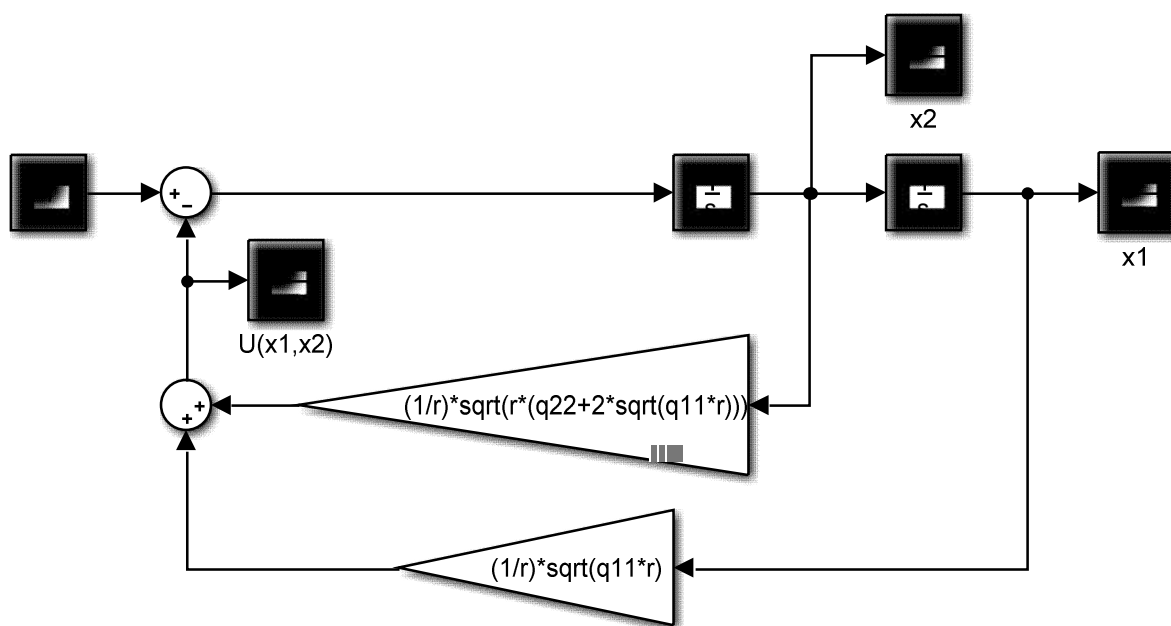


Рис. 2. Схема моделювання системи з оптимальним регулятором (до прикладу 4.3)

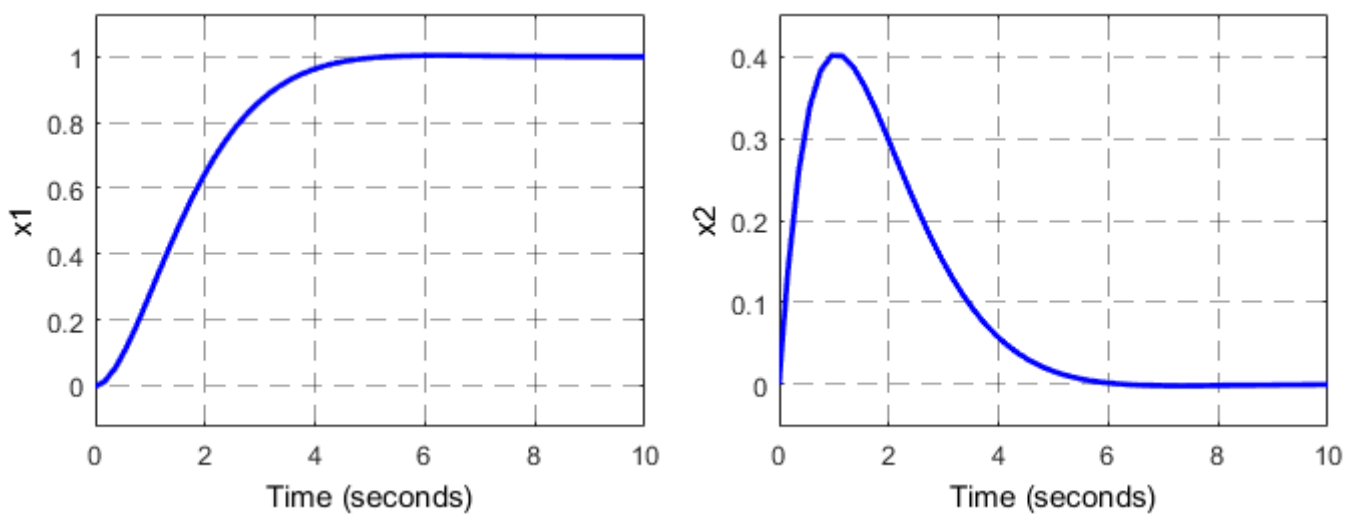


Рис. 3. Графіки перехідних процесів системи (до прикладу 4.3)

Задача 3.5 Потрібно виконати синтезування оптимального регулятора виходу для системи з двома послідовно з'єднаними інтеграторами. Рівняння системи:

$$x_1(t) = y(t) = \alpha(t);$$

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t) = \omega(t);$$

$$\dot{x}_2(t) = u(t).$$

На управління $u(t)$, змінні стану $x_1(t)$, $x_2(t)$ і вихідну координату $y(t)$ обмеження не накладаються.

Як критерій оптимальності вибрано квадратичний функціонал виду

$$J(y, u) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} [y^2(t) + r u^2(t)] dt. \quad (1)$$

Рішення. Виконаємо рішення, що ґрунтується на використанні матричного рівняння Ріккаті. Рівняння стану системи мають вид

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{A} \mathbf{x}(t) + \mathbf{B} \mathbf{u}(t); \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C} \mathbf{x}(t). \end{cases}$$

де

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = [1 \ 0].$$

Позитивно визначені матриці $\mathbf{Q}$ і $\mathbf{R}$, а також симетрична матриця $\mathbf{K}$ рівні відповідно

$$\mathbf{Q} = 1, \quad \mathbf{R} = r, \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix}.$$

Тоді оптимальне управління має вид

$$u^*(t) = -\frac{1}{r} [k_{12} x_1(t) + k_{22} x_2(t)]. \quad (2)$$

Матричне рівняння Ріккаті запишемо у вигляді

$$-\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \frac{1}{r} [0 \ 1] \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} 1 [0 \ 1] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Виконавши відповідні операції у цьому матричному рівнянні, отримаємо систему алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} \frac{1}{r} k_{12}^2 = 1; \\ \frac{1}{r} k_{12} k_{22} = k_{11}; \\ \frac{1}{r} k_{22}^2 = 2k_{12}; \end{cases} \quad (3)$$

Матриця $\mathbf{K}$ має бути позитивно визначеною, тому повинні виконуватися нерівності $k_{11} > 0$, $k_{11}k_{22} - k_{12}^2 > 0$, $k_{22} > 0$. Таким чином, правильними рішеннями для елементів матриці $\mathbf{K}$ є

$$\begin{aligned} k_{11} &= \sqrt{2\sqrt{r}}; \\ k_{12} &= \sqrt{r}; \\ k_{22} &= \sqrt{2r\sqrt{r}}. \end{aligned} \quad (4)$$

Підставивши (4) у рівняння (2), знайдемо, що оптимальне управління

$$u^* = -r^{\frac{1}{2}} x_1(t) - r^{\frac{1}{4}} \sqrt{2} x_2(t) = -r^{\frac{1}{2}} \sqrt{2} \alpha(t) - r^{\frac{1}{4}} \sqrt{2} \omega(t). \quad (5)$$

Схема аналогового моделювання системи з оптимальним регулятором виходу, побудована за рівнянням (5), показано на рис. 1.

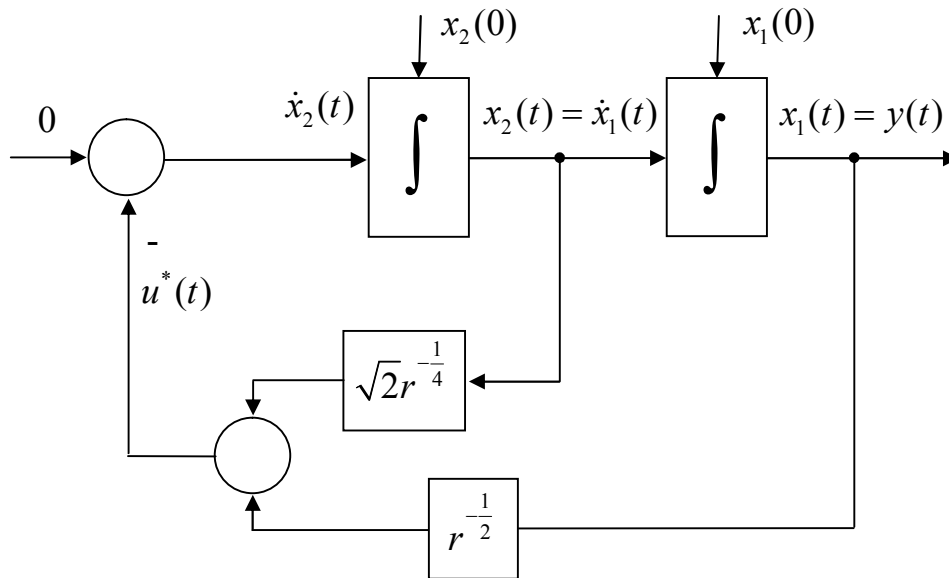


Рис. 1. Оптимальний регулятор виходу

Електронне навчальне видання комбінованого використання
Можна використовувати в локальному та мережному режимі

Канюк Геннадій Іванович
Василець Тетяна Юхимівна
Варфоломієв Олексій Олексійович

МОДЕЛЮВАННЯ ТА ОПТИМІЗАЦІЯ СИСТЕМ КЕРУВАННЯ

Методичні вказівки
до організації та планування самостійної роботи
здобувачів вищої освіти другого (магістерського) рівня
за спеціальністю 174 «Автоматизація, комп'ютерно-інтегровані
технології та робототехніка»

В авторській редакції

Підписано до розміщення 28.03.2025. Гарнітура Times New Roman.
Ум. друк. арк. 1,2. Обсяг 0,557 Кб. Зам. № 109/25.

Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна,
61022, м. Харків, майдан Свободи, 4.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 3367 від 13.01.2009
Видавництво ХНУ імені В. Н. Каразіна