МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ
ХАРЬКОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ В.Н. КАРАЗИНА

ТЕРМОДИНАМИКА

УПРУГО ДЕФОРМИРУЕМОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА

Методическое пособие
для студентов специальности "механика"

2009

УДК 531 : 539.3

ТЕРМОДИНАМІКА ПРУЖНЬО ДЕФОРМУЄМОГО ТВЕРДОГО ТІЛА. Методичний посібник для студентів III-IV курсів спеціальності “Механіка”
/ Укладач І.І. Ієвлев – Харків: ХНУ, 2009. – 25 с.

Методичний посібник містить опис термодинаміки пружньо деформуємого твердого тіла в приближенні лінійной теорії пружності, коли враховуються внутрішній момент кількості руху та розподілені момени пар сил. Сформульовані головні співвідношення, рівняння рівноваги та крайові умови на поверхні тіла. Наведен приклад розв’язання задачі рівноваги пружнього цилиндру в полі лінійного електричного струму.

Рекомендовано студентам 3-4 курсів університету, що вивчають теорію пружності.

Рецензент: кандидат фіз.мат.наук, доцент С.О. Пославський

Рекомендовано до друку кафедрою теоретичної механіки Харківського національного університету ім. В. Н. Каразіна (протокол №3 від 07.05. 2009.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Уравнения импульсов и кинетического момента

Рассматривается движение деформируемого твердого тела V, ограниченного поверхностью Σ (рис.1). Будем полагать, как это принято в линейной теории упругости, что перемещения точек тела $\vec{u}(t,\vec{r})$ и деформации малы. В этом случае лагранжевы и эйлеровы координаты точек тела совпадают, объем и форма тела при нагружении не меняются, скорости и перемещения точек связаны соотношением $\vec{\mathrm{v}}(t,\vec{r}) = \partial\vec{u}(t,\vec{r}) / \partial t$.

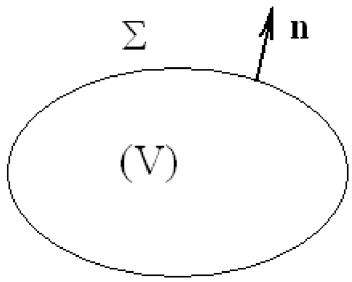

Рис.1

Уравнения изменения импульсов и кинетического момента выражают собой второй и третий законы механики сплошной среды, и в интегральной форме имеют вид [1-3]

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho\vec{\mathrm{v}}\,dV = \oint_\Sigma \vec{p}d\Sigma + \int_V \vec{X}dV \tag{1}$$

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho\left(\vec{r}\times\vec{\mathrm{v}} + \vec{s}\right)dV = \oint_\Sigma\left(\vec{r}\times\vec{p} + \vec{q}\right)d\Sigma + \int_V\left(\vec{r}\times\vec{X} + \vec{m}\right)dV \tag{2}$$

где

$\vec{p}$ - плотность поверхностных сил,

$\vec{X}$ - внешние объемные силы,

$\vec{q}$ - моменты пар сил, распределенных по поверхности Σ,

$\vec{m}$ - моменты пар сил, распределенных по объему,

$\vec{s}$ - внутренний кинетический момент, обусловленный вращением частиц среды относительно своего центра масс. Его можно связать с вектором мгновенной угловой скорости $\vec{\omega}$ вращающейся частицы посредством соотношения $\vec{s} = J\vec{\omega}$, где J фактически представляет собой скалярную величину, согласующую физические размерности $\vec{s}$ и $\vec{\omega}$. Подынтегральное выражение в левой части соотношения (2) соответствует теореме об относительном кинетическом моменте для систем [4]. Действительно, относительный кинетический момент $\vec{L}_c$ твердого тела представляется в виде произведения тензора инерции $\hat{J}$ на вектор мгновенной угловой скорости $\vec{\omega}$: $\vec{L}_c = \hat{J} \cdot \vec{\omega}$, и, если тело обладает сферической симметрией, то тензор инерции становится шаровым и правая часть последнего соотношения принимает вид $\vec{L}_c = J\vec{\omega}$.

Как известно, поверхностные силы $\vec{p}$ могут быть заменены эквивалентными объемными силами $\vec{F}$, определяемыми через тензор напряжений $\hat{\sigma}$:
$\vec{f} = div\,\hat{\sigma}$ [1]

$$\oint_{\Sigma} \vec{p}d\Sigma = \int_{V} div\,\hat{\sigma}dV \tag{3}$$

Совершенно аналогично, можно получить соотношения, выражающие главный момент поверхностных пар сил $\vec{q}$ через некоторые распределенные моменты $\vec{Q}$ пар сил по объему в виде $\vec{Q} = div\,\hat{q}$

$$\oint_{\Sigma} \vec{q}d\Sigma = \int_{V} div\,\hat{q}dV \tag{4}$$

где $\hat{q}$ - тензор второго ранга [5].

Следует заметить, что формулы (3),(4) являются следствием известных соотношений, выполняющихся для элементарных площадок, ориентированных единичной нормалью $\vec{n}$ [1,2]

$$\vec{p} = \vec{n} \cdot \hat{\sigma}, \quad \vec{q} = \vec{n} \cdot \hat{q} \tag{5}$$

Как известно, соотношение (1) дает дифференциальное уравнение движения [1-3]

$$\rho \frac{d\vec{\mathrm{v}}}{dt} = div\,\hat{\sigma} + \vec{X} \tag{6}$$

Далее, используя формулу Гаусса-Остроградского, преобразуем первое слагаемое в правой части уравнения (2) следующим образом

$$\begin{aligned} &\oint_{\Sigma} (\vec{r} \times \vec{p} + \vec{q})\, d\Sigma = \oint_{\Sigma} (\vec{r} \times \vec{n} \cdot \hat{\sigma} + \vec{n} \cdot \hat{q})\, d\Sigma = \\ &= \int_V \left(\vec{r} \times div\,\hat{\sigma} + \hat{\hat{\varepsilon}} : \hat{\sigma}^T + div\,\hat{q} \right) dV \end{aligned} \tag{7}$$

где векторное слагаемое $\hat{\hat{\varepsilon}} : \hat{\sigma}^T$, представляющее собой двойное внутренне произведение тензора третьего ранга $\hat{\hat{\varepsilon}}$ - тензора Леви-Чивита и транспонированного тензора напряжений $\hat{\sigma}^T$, в декартовой системе координат имеет компоненты $\left(\hat{\hat{\varepsilon}} : \hat{\sigma}^T \right)_i = \varepsilon_{ijk} \sigma_{jk}$ (по повторяющимся индексам суммирование от 1 до 3!).

А для преобразования левой части соотношения (2) воспользуемся теоремой переноса [2]

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho (\vec{r} \times \vec{\mathrm{v}} + \vec{s})\, dV = \int_V \rho \frac{d}{dt} (\vec{r} \times \vec{\mathrm{v}} + \vec{s})\, dV = \int_V \left(\vec{r} \times \rho \frac{d\vec{\mathrm{v}}}{dt} + \rho \frac{d\vec{s}}{dt} \right) dV$$

Здесь в последнем интеграле сомножитель $\rho d\vec{\mathrm{v}}/dt$ заменим на соответствующее выражение правой части уравнения движения (6), получим

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho\left(\vec{r}\times\vec{\mathrm{v}}+\vec{s}\right)dV=\int_V\left(\vec{r}\times div\,\hat{\sigma}+\vec{r}\times\vec{X}+\rho\frac{d\vec{s}}{dt}\right)dV \tag{8}$$

Тогда после очевидных преобразований уравнение (2) можно представить в интегральной форме

$$\int_V \rho\frac{d\vec{s}}{dt}dV=\int_V\left(div\,\hat{q}+\hat{\hat{\varepsilon}}:\hat{\sigma}^T+\vec{m}\right)dV$$

или в дифференциальной форме

$$\rho\frac{d\vec{s}}{dt}=div\,\hat{q}+\hat{\hat{\varepsilon}}:\hat{\sigma}^T+\vec{m} \tag{9}$$

Элементарная работа квазистатического деформирования тела

Пусть тело V, ограниченное поверхностью Σ, находится в равновесии под действием внешних объемных сил $\vec{X}$, поверхностных сил $\vec{p}$, моментов пар сил $\vec{m}$, распределенных по объему, и моментов пар сил $\vec{q}$, распределенных по поверхности Σ. В этом случае левые части уравнений (6), (9) обращаются в нуль

$$0=div\,\hat{\sigma}+\vec{X}\,,\quad 0=div\,\hat{q}+\hat{\hat{\varepsilon}}:\hat{\sigma}^T+\vec{m} \tag{10}$$

Сообщим точкам тела виртуальные перемещения $\delta\vec{u}$ и повороты $\delta\vec{\varphi}$. Определим работу указанных выше сил на этих деформациях тела

$$\delta A^e = \int_V \left(\vec{X} \cdot \delta\vec{u} + \vec{m} \cdot \delta\vec{\varphi} \right) dV + \oint_\Sigma \left(\vec{p} \cdot \delta\vec{u} + \vec{q} \cdot \delta\vec{\varphi} \right) d\Sigma \tag{11}$$

Воспользуемся уравнениями (10) и преобразуем (11) следующим образом

$$\begin{gathered} \delta A^e = -\int_V \left[div\,\hat{\sigma} \cdot \delta\vec{u} + \left(div\,\hat{q} + \hat{\hat{\varepsilon}} : \hat{\sigma}^T \right) \cdot \delta\vec{\varphi} \right] dV + \\ + \oint_\Sigma \left(\vec{p} \cdot \delta\vec{u} + \vec{q} \cdot \delta\vec{\varphi} \right) d\Sigma = \int_V \left[\hat{\sigma}^T : \nabla\delta\vec{u} + \hat{q} : \nabla\delta\vec{\varphi} - \delta\vec{\varphi} \cdot \hat{\hat{\varepsilon}} : \hat{\sigma}^T \right] dV \end{gathered} \tag{12}$$

Выражение, стоящее под знаком интеграла в правой части (12), будем рассматривать как работу внутренних сил деформируемого тела на виртуальных перемещениях, приходящуюся на единицу объема тела

$$\delta a^e = \hat{\sigma}^T : \nabla\delta\vec{u} + \hat{q} : \nabla\delta\vec{\varphi} - \delta\vec{\varphi} \cdot \hat{\hat{\varepsilon}} : \hat{\sigma}^T \tag{13}$$

Данное выражение играет основную роль при построении термодинамики деформируемого тела. Рассмотрим каждое из слагаемых, входящих в правую часть (13), производя все выкладки в декартовой системе координат.

Тензор второго ранга $\hat{\sigma}$ можно представить в виде суммы трех тензоров второго ранга: шарового $\sigma\hat{\delta}$, девиатора $\hat{\sigma}^{so}$ симметричной части исходного тензора $\hat{\sigma}$ и антисимметричной части $\hat{\sigma}^a$ тензора $\hat{\sigma}$

$$\hat{\sigma} = \frac{1}{3}\sigma\hat{\delta} + \hat{\sigma}^{so} + \hat{\sigma}^a \tag{14}$$

где $\sigma = \sigma_{mm}$ - след тензора $\hat{\sigma}$, $\hat{\delta}$ - единичный тензор.

Аналогичные представления можно указать и для всех остальных тензоров, входящих в выражение (13)

$$\hat{q}=\frac{1}{3}q\hat{\delta}+\hat{q}^{so}+\hat{q}^{a}$$
$$\nabla\delta\vec{u}=\delta\nabla\vec{u}=\frac{1}{3}\delta\vartheta\,\hat{\delta}+\left(\delta\nabla\vec{u}\right)^{so}+\left(\delta\nabla\vec{u}\right)^{a} \tag{15}$$
$$\nabla\delta\vec{\varphi}=\delta\nabla\vec{\varphi}=\frac{1}{3}\delta\Phi\,\hat{\delta}+\left(\delta\nabla\vec{\varphi}\right)^{so}+\left(\delta\nabla\vec{\varphi}\right)^{a}$$

где $\vartheta=\left(\nabla\vec{u}\right)_{mm}=div\,\vec{u}$ - дилатация, равная следу тензора градиента вектора перемещений, Φ - след тензора второго ранга $\nabla\vec{\varphi}$: $\Phi=\left(\nabla\vec{\varphi}\right)_{mm}=div\,\vec{\varphi}$.

Учитывая то, что двойное внутреннее произведение между парами тензоров (шаровой, девиатор, антисимметричный) равняется нулю, запишем соотношение (13) в виде

$$\delta a^{e}=\frac{1}{3}\sigma\,\delta\vartheta+\frac{1}{3}q\,\delta\Phi+\hat{\sigma}^{so}:\left(\delta\nabla\vec{u}\right)^{so}+$$
$$+\hat{\sigma}^{aT}:\left[\left(\delta\nabla\vec{u}\right)^{a}-\hat{\hat{\varepsilon}}\cdot\delta\vec{\varphi}\right]+\hat{q}^{so}:\left(\nabla\delta\vec{\varphi}\right)^{so}+\hat{q}^{aT}:\left(\nabla\delta\vec{\varphi}\right)^{a} \tag{16}$$

Введем обозначения

$$\hat{\varepsilon}^{o}=\varepsilon_{ij}^{o}\,\vec{e}_i\vec{e}_j=\frac{1}{2}\left[\nabla\vec{u}+\left(\nabla\vec{u}\right)^{T}\right]-\frac{1}{3}\vartheta\hat{\delta}=\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i}+\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)-\frac{1}{3}\vartheta\delta_{ij}\right]\vec{e}_i\vec{e}_j$$
$$\hat{\gamma}=\gamma_{ij}\,\vec{e}_i\vec{e}_j=\left(\nabla\vec{u}\right)^{a}-\hat{\hat{\varepsilon}}\cdot\vec{\varphi}=\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i}-\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)-\varepsilon_{ijk}\varphi_k\right]\vec{e}_i\vec{e}_j$$
$$\hat{\Phi}=\Phi_{ij}\,\vec{e}_i\vec{e}_j=\frac{1}{2}\left[\nabla\vec{\varphi}+\left(\nabla\vec{\varphi}\right)^{T}\right]=\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}+\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_j}\right)\right]\vec{e}_i\vec{e}_j \tag{17}$$
$$\hat{\Phi}^{o}=\Phi_{ij}^{o}\,\vec{e}_i\vec{e}_j=\hat{\Phi}-\frac{1}{3}\Phi\hat{\delta}==\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}+\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_j}\right)-\frac{1}{3}\Phi\,\delta_{ij}\right]\vec{e}_i\vec{e}_j$$
$$\hat{\Phi}^{a}=\Phi_{ij}^{a}\,\vec{e}_i\vec{e}_j=\frac{1}{2}\left[\nabla\vec{\varphi}-\left(\nabla\vec{\varphi}\right)^{T}\right]=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}-\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_j}\right)\vec{e}_i\vec{e}_j$$

Тогда

$$\delta a^e = \frac{1}{3}\sigma\,\delta\vartheta + \frac{1}{3}q\,\delta\Phi + \hat{\sigma}^{so} : \delta\hat{\varepsilon}^{o} + \hat{\sigma}^{aT} : \delta\hat{\gamma} + \hat{q}^{so} : \delta\hat{\Phi}^{o} + \hat{q}^{aT} : \delta\hat{\Phi}^{a} \quad (18)$$

Основное термодинамическое равенство

Для равновесных процессов в макросистемах имеет место основное термодинамическое равенство, являющееся следствием первого и второго законов термодинамики [6]. Если выполняется закон сохранения массы, то в терминах удельных величин это равенство можно записать в виде

$$du = Tds + \frac{1}{\rho}\delta a^e$$

Здесь u, s, ρ - удельные величины внутренней энергии, энтропии и плотности материала. В рассматриваемом случае элементарная работа δa^e определяется соотношением (18), и основное термодинамическое равенство принимает вид

$$\begin{gathered} du = Tds + \frac{1}{3\rho}\sigma\,\delta\vartheta + \frac{1}{3\rho}q\,\delta\Phi + \\ + \frac{\hat{\sigma}^{so}}{\rho} : \delta\hat{\varepsilon}^{o} + \frac{\hat{\sigma}^{aT}}{\rho} : \delta\hat{\gamma} + \frac{\hat{q}^{so}}{\rho} : \delta\hat{\Phi}^{o} + \frac{\hat{q}^{aT}}{\rho} : \delta\hat{\Phi}^{a} \end{gathered} \quad (19)$$

в инвариантной форме, или

$$\begin{gathered} du = Tds + \frac{1}{3\rho}\sigma\,\delta\vartheta + \frac{1}{3\rho}q\,\delta\Phi + \\ + \frac{\sigma_{ik}^{so}}{\rho} : \delta\varepsilon_{ik}^{o} + \frac{\sigma_{ik}^{a}}{\rho} : \delta\gamma_{ik} + \frac{q_{ik}^{so}}{\rho} : \delta\Phi_{ik}^{o} + \frac{q_{ik}^{a}}{\rho} : \delta\Phi_{ik}^{a} \end{gathered} \quad (20)$$

в координатной форме (декартова система координат!).

Внутренняя энергия u как термодинамический потенциал является функцией обобщенных термодинамических координат $s, \vartheta, \Phi, \hat{\varepsilon}^o = \left\{\varepsilon_{ik}^o\right\}_{i,k=1}^3$, $\hat{\gamma} = \left\{\gamma_{ik}\right\}_{i,k=1}^3$, $\hat{\Phi}^{so} = \left\{\Phi_{ik}^o\right\}_{i,k=1}^3, \hat{\Phi}^a = \left\{\Phi_{ik}^a\right\}_{i,k=1}^3$. Другой потенциал представляет свободная энергия f, зависящая от переменных $T, \vartheta, \Phi, \hat{\varepsilon}^o = \left\{\varepsilon_{ik}^o\right\}_{i,k=1}^3, \hat{\gamma} = \left\{\gamma_{ik}\right\}_{i,k=1}^3$, $\hat{\Phi}^o = \left\{\Phi_{ik}^o\right\}_{i,k=1}^3, \hat{\Phi}^a = \left\{\Phi_{ik}^a\right\}_{i,k=1}^3$ и удовлетворяющая равенству

$$\begin{gathered} df = -s dT + \frac{1}{3\rho}\sigma\,\delta\vartheta + \frac{1}{3\rho} q\,\delta\Phi + \\ + \frac{\sigma_{ik}^{so}}{\rho} : \delta\varepsilon_{ik}^o + \frac{\sigma_{ik}^a}{\rho} : \delta\gamma_{ik} + \frac{q_{ik}^{so}}{\rho} : \delta\Phi_{ik}^o + \frac{q_{ik}^a}{\rho} : \delta\Phi_{ik}^a \end{gathered} \tag{21}$$

Так как, правая часть этого соотношения представляет собой полный дифференциал, то отсюда вытекает ряд равенств – термических уравнений состояний

$$\begin{gathered} \sigma = 3\rho\left(\frac{\partial f}{\partial\vartheta}\right)_{T,\Phi,\hat{\varepsilon}^o,\hat{\gamma},\hat{\Phi}^o,\hat{\Phi}^a}, \quad q = 3\rho\left(\frac{\partial f}{\partial\Phi}\right)_{T,\vartheta,\hat{\varepsilon}^o,\hat{\gamma},\hat{\Phi}^o,\hat{\Phi}^a}, \\ \sigma_{ik}^{so} = \rho\left(\frac{\partial f}{\partial\varepsilon_{ik}^o}\right)_{T,\vartheta,\Phi,\hat{\gamma},\hat{\Phi}^o,\hat{\Phi}^a}, \quad \sigma_{ik}^a = \rho\left(\frac{\partial f}{\partial\gamma_{ik}}\right)_{T,\vartheta,\Phi,\hat{\varepsilon}^o,\hat{\Phi}^o,\hat{\Phi}^a}, \\ q_{ik}^{so} = \rho\left(\frac{\partial f}{\partial\Phi_{ik}^o}\right)_{T,\vartheta,\Phi,\hat{\varepsilon}^o,\hat{\gamma},\hat{\Phi}^a}, \quad q_{ik}^a = \rho\left(\frac{\partial f}{\partial\Phi_{ik}^a}\right)_{T,\vartheta,\Phi,\hat{\varepsilon}^o,\hat{\gamma},\hat{\Phi}^o} \end{gathered} \tag{22}$$

и калорическое уравнение

$$s = -\left(\frac{\partial f}{\partial T}\right)_{\vartheta,\Phi,\hat{\varepsilon}^o,\hat{\gamma},\hat{\Phi}^o,\hat{\Phi}^a} \tag{23}$$

Пусть система имеет некоторое состояние термодинамического равновесия, характеризуемого набором значений обобщенных термодинамических координат

$$T = T_0, \quad \vartheta = \Phi = 0, \quad \hat{\varepsilon}^o = \hat{\gamma} = \hat{\Phi}^o = \hat{\Phi}^a = 0 \tag{24}$$

и представляющее собой естественное ненапряженное состояние в однородном температурном поле, энтропию которого положим равной нулю,

$$s = \sigma = q = 0, \quad \sigma_{ik}^{so} = \sigma_{ik}^{a} = q_{ik}^{so} = q_{ik}^{a} = 0 \tag{25}$$

Раскладывая в ряд Тейлора свободную энергию в окрестности указанного термодинамического равновесия, вводя обозначение $\theta = T - T_0$ и отбрасывая члены степени выше второй вместе с постоянным нулевым членом разложения, получим

$$f(\theta, \vartheta, \Phi, \varepsilon_{ik}^o, \gamma_{ik}, \Phi_{ik}^o, \Phi_{ik}^a) =$$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial T}\right)^r \theta + \left(\frac{\partial f}{\partial \vartheta}\right)^r \vartheta + \left(\frac{\partial f}{\partial \Phi}\right)^r \Phi + \left(\frac{\partial f}{\partial \varepsilon_{ik}^o}\right)^r \varepsilon_{ik}^o + \left(\frac{\partial f}{\partial \gamma_{ik}}\right)^r \gamma_{ik} +$$

$$+ \left(\frac{\partial f}{\partial \Phi_{ik}^o}\right)^r \Phi_{ik}^o + \left(\frac{\partial f}{\partial \Phi_{ik}^a}\right)^r \Phi_{ik}^a + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial T^2}\right)^r \theta^2 + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial T \partial \vartheta}\right)^r \theta\vartheta +$$

$$+ \left(\frac{\partial^2 f}{\partial T \partial \Phi}\right)^r \theta\Phi + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial T \partial \varepsilon_{ik}^o}\right)^r \theta\varepsilon_{ik}^o + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial T \partial \gamma_{ik}}\right)^r \theta\gamma_{ik} +$$

$$+ \left(\frac{\partial^2 f}{\partial T \partial \Phi_{ik}^o}\right)^r \theta\Phi_{ik}^o + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial T \partial \Phi_{ik}^a}\right)^r \theta\Phi_{ik}^a + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial \vartheta^2}\right)^r \vartheta^2 +$$

$$+ \left(\frac{\partial^2 f}{\partial \vartheta \partial \Phi}\right)^r \vartheta\Phi + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial \vartheta \partial \varepsilon_{ik}^o}\right)^r \vartheta\varepsilon_{ik}^o + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial \vartheta \partial \gamma_{ik}}\right)^r \vartheta\gamma_{ik} +$$

$$
\begin{aligned}
&+\left(\frac{\partial^2 f}{\partial\vartheta\partial\Phi_{ik}^o}\right)^r \vartheta\Phi_{ik}^o+\left(\frac{\partial^2 f}{\partial\vartheta\partial\Phi_{ik}^a}\right)^r \vartheta\Phi_{ik}^a+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial\Phi^2}\right)^r \Phi^2+\\
&+\left(\frac{\partial^2 f}{\partial\Phi\partial\varepsilon_{ik}^o}\right)^r \Phi\varepsilon_{ik}^o+\left(\frac{\partial^2 f}{\partial\Phi\partial\gamma_{ik}}\right)^r \Phi\gamma_{ik}+\left(\frac{\partial^2 f}{\partial\Phi\partial\Phi_{ik}^o}\right)^r \Phi\Phi_{ik}^o+\\
&+\left(\frac{\partial^2 f}{\partial\Phi\partial\Phi_{ik}^a}\right)^r \Phi\Phi_{ik}^a+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial\varepsilon_{ik}^o\partial\varepsilon_{mn}^o}\right)^r \varepsilon_{ik}^o\varepsilon_{mn}^o+\left(\frac{\partial^2 f}{\partial\varepsilon_{ik}^o\partial\gamma_{mn}}\right)^r \varepsilon_{ik}^o\gamma_{mn}+\\
&+\left(\frac{\partial^2 f}{\partial\varepsilon_{ik}^o\partial\Phi_{mn}^o}\right)^r \varepsilon_{ik}^o\Phi_{mn}^o+\left(\frac{\partial^2 f}{\partial\varepsilon_{ik}^o\partial\Phi_{mn}^a}\right)^r \varepsilon_{ik}^o\Phi_{mn}^a+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial\gamma_{ik}\partial\gamma_{mn}}\right)^r \gamma_{ik}\gamma_{mn}\\
&+\left(\frac{\partial^2 f}{\partial\gamma_{ik}\partial\Phi_{mn}^o}\right)^r \gamma_{ik}\Phi_{mn}^o+\left(\frac{\partial^2 f}{\partial\gamma_{ik}\partial\Phi_{mn}^a}\right)^r \gamma_{ik}\Phi_{mn}^a+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial\Phi_{ik}^a\partial\Phi_{mn}^a}\right)^r \Phi_{ik}^a\Phi_{mn}^a
\end{aligned}
\qquad (26)
$$

Здесь верхний индекс «r» вверху круглой скобки означает, что соответствующая функция вычисляется для термодинамического равновесия (24), а, в силу соотношений (22), (25), слагаемые, содержащие первые производные функции f, обращаются в нуль. Введем следующие обозначения

$$
c^{\theta\theta}=-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial T^2}\right)^r,\quad c^{\theta\vartheta}=-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial T\partial\vartheta}\right)^r,\qquad c^{\theta\Phi}=-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial T\partial\Phi}\right)^r,
$$

$$
c_{ik}^{\theta\varepsilon}=-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial T\partial\varepsilon_{ik}^o}\right)^r,\quad a_{ik}^{\theta\gamma}=-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial T\partial\gamma_{ik}}\right)^r,\quad c_{ik}^{\theta\Phi}=-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial T\partial\Phi_{ik}^o}\right)^r,
$$

$$
a_{ik}^{\theta\varphi}=-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial T\partial\Phi_{ik}^a}\right)^r,\quad c^{\vartheta\vartheta}=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial\vartheta^2}\right)^r,\qquad c^{\vartheta\Phi}=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial\vartheta\partial\Phi}\right)^r,
$$

$$
c_{ik}^{\vartheta\varepsilon}=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial\vartheta\partial\varepsilon_{ik}^o}\right)^r,\quad a_{ik}^{\vartheta\gamma}=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial\vartheta\partial\gamma_{ik}}\right)^r,\quad c_{ik}^{\vartheta\Phi}=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial\vartheta\partial\Phi_{ik}^o}\right)^r,
$$

$$
\begin{gathered}
a_{ik}^{\vartheta\varphi}=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial\vartheta\partial\Phi_{ik}^a}\right)^r, \quad c^{\Phi\Phi}=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial\Phi^2}\right)^r, \qquad c_{ik}^{\Phi\varepsilon}=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial\Phi\partial\varepsilon_{ik}^o}\right)^r, \\
a_{ik}^{\Phi\gamma}=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial\Phi\partial\gamma_{ik}}\right)^r, \quad c_{ik}^{\Phi\Phi}=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial\Phi\partial\Phi_{ik}^o}\right)^r, \quad a_{ik}^{\Phi\varphi}=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial\Phi\partial\Phi_{ik}^a}\right)^r, \\
c_{ikmn}^{\varepsilon\varepsilon}=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial\varepsilon_{ik}^o\partial\varepsilon_{mn}^o}\right)^r, \quad c_{ikmn}^{\varepsilon\gamma}=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial\varepsilon_{ik}^o\partial\gamma_{mn}}\right)^r, \quad c_{ikmn}^{\varepsilon\Phi}=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial\varepsilon_{ik}^o\partial\Phi_{mn}^o}\right)^r \\
a_{ikmn}^{\varepsilon\Phi}=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial\varepsilon_{ik}^o\partial\Phi_{mn}^a}\right)^r, \quad a_{ikmn}^{\gamma\gamma}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial\gamma_{ik}\partial\gamma_{mn}}\right)^r, \quad a_{ikmn}^{\gamma\Phi}=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial\gamma_{ik}\partial\Phi_{mn}^o}\right)^r, \\
a_{ikmn}^{\gamma\varphi}=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial\gamma_{ik}\partial\Phi_{mn}^a}\right)^r, \quad c_{ikmn}^{\Phi\Phi}=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial\Phi_{ik}^o\partial\Phi_{mn}^o}\right)^r, \quad a_{ikmn}^{\Phi\varphi}=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial\Phi_{ik}^o\partial\Phi_{mn}^a}\right)^r, \\
a_{ikmn}^{\varphi\varphi}=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial\Phi_{ik}^a\partial\Phi_{mn}^a}\right)^r
\end{gathered}
\tag{27}
$$

Тогда свободная энергия принимает вид

$$
\begin{gathered}
f(\theta,\vartheta,\Phi,\varepsilon_{ik}^o,\gamma_{ik},\Phi_{ik}^o,\Phi_{ik}^a)= \\
=-\frac{1}{2}c^{\theta\theta}\,\theta^2-c^{\theta\vartheta}\,\theta\vartheta-c^{\theta\Phi}\,\theta\,\Phi-c_{ik}^{\theta\varepsilon}\theta\,\varepsilon_{ik}^o-a_{ik}^{\theta\gamma}\theta\,\gamma_{ik}-c_{ik}^{\theta\Phi}\theta\,\Phi_{ik}^o- \\
-a_{ik}^{\theta\varphi}\theta\,\Phi_{ik}^a+\frac{1}{2}c^{\vartheta\vartheta}\,\vartheta^2+c^{\vartheta\Phi}\vartheta\,\Phi+c_{ik}^{\vartheta\varepsilon}\vartheta\,\varepsilon_{ik}^o+a_{ik}^{\vartheta\gamma}\vartheta\,\gamma_{ik}+ \\
+c_{ik}^{\vartheta\Phi}\vartheta\,\Phi_{ik}^o+a_{ik}^{\vartheta\varphi}\vartheta\,\Phi_{ik}^a+\frac{1}{2}c^{\Phi\Phi}\,\Phi^2+c_{ik}^{\Phi\varepsilon}\Phi\,\varepsilon_{ik}^o+a_{ik}^{\Phi\gamma}\Phi\,\gamma_{ik}+ \\
+c_{ik}^{\Phi\Phi}\Phi\,\Phi_{ik}^o+a_{ik}^{\Phi\varphi}\Phi\,\Phi_{ik}^a+\frac{1}{2}c_{ikmn}^{\varepsilon\varepsilon}\,\varepsilon_{ik}^o\varepsilon_{mn}^o+a_{ikmn}^{\varepsilon\gamma}\varepsilon_{ik}^o\gamma_{mn}+ \\
+c_{ikmn}^{\varepsilon\Phi}\,\varepsilon_{ik}^o\Phi_{mn}^o+c_{ikmn}^{\varepsilon\varphi}\,\varepsilon_{ik}^o\Phi_{mn}^a+\frac{1}{2}a_{ikmn}^{\gamma\gamma}\,\gamma_{ik}\gamma_{mn}+a_{ikmn}^{\gamma\Phi}\gamma_{ik}\Phi_{mn}^o \\
+a_{ikmn}^{\gamma\varphi}\gamma_{ik}\Phi_{mn}^a+c_{ikmn}^{\Phi\Phi}\,\Phi_{ik}^o\Phi_{mn}^o+a_{ikmn}^{\Phi\varphi}\,\Phi_{ik}^o\Phi_{mn}^a+\frac{1}{2}a_{ikmn}^{\varphi\varphi}\,\Phi_{ik}^a\Phi_{mn}^a
\end{gathered}
\tag{28}
$$

Термические уравнения состояния (22) тогда, согласно выражению (28), будут записаны следующим образом

$$
\begin{aligned}
&\sigma = 3\rho\left(c^{\vartheta\vartheta}\,\vartheta + c^{\vartheta\Phi}\,\Phi + c_{ik}^{\vartheta\varepsilon}\,\varepsilon_{ik}^{o} + a_{ik}^{\vartheta\gamma}\,\gamma_{ik} + c_{ik}^{\vartheta\Phi}\,\Phi_{ik}^{o} + a_{ik}^{\vartheta\varphi}\,\Phi_{ik}^{a} - c^{\theta\vartheta}\,\theta\right)\\
&q = 3\rho\left(c^{\Phi\Phi}\,\Phi + c_{ik}^{\Phi\varepsilon}\varepsilon_{ik}^{o} + a_{ik}^{\Phi\gamma}\,\gamma_{ik} + c_{ik}^{\Phi\Phi}\,\Phi_{ik}^{o} + a_{ik}^{\Phi\varphi}\,\Phi_{ik}^{a} + c^{\vartheta\Phi}\vartheta - c^{\theta\Phi}\,\theta\;\right)\\
&\sigma_{ik}^{so} = \rho\left(c_{ikmn}^{\varepsilon\varepsilon}\,\varepsilon_{mn}^{o} + a_{ikmn}^{\varepsilon\gamma}\,\gamma_{mn} + c_{ikmn}^{\varepsilon\Phi}\,\Phi_{mn}^{o} + c_{ikmn}^{\varepsilon\varphi}\,\Phi_{mn}^{a} - c_{ik}^{\theta\varepsilon}\theta + c_{ik}^{\vartheta\varepsilon}\vartheta + c_{ik}^{\Phi\varepsilon}\Phi\right)\\
&\sigma_{ik}^{a} = \rho\left(a_{ikmn}^{\gamma\gamma}\,\gamma_{mn} + a_{ikmn}^{\gamma\Phi}\Phi_{mn}^{o} + a_{ikmn}^{\gamma\varphi}\Phi_{mn}^{a} - a_{ik}^{\theta\gamma}\theta + a_{ik}^{\vartheta\gamma}\vartheta + a_{ik}^{\Phi\gamma}\Phi + a_{ikmn}^{\varepsilon\gamma}\varepsilon_{ik}^{o}\right)\\
&q_{ik}^{so} = \rho\left(c_{ikmn}^{\Phi\Phi}\,\Phi_{mn}^{o} + a_{ikmn}^{\Phi\varphi}\,\Phi_{mn}^{a} - c_{ik}^{\theta\Phi}\theta + c_{ik}^{\vartheta\Phi}\vartheta + c_{ik}^{\Phi\Phi}\Phi + c_{ikmn}^{\varepsilon\Phi}\,\varepsilon_{ik}^{o} + a_{ikmn}^{\gamma\Phi}\gamma_{ik}\right)\\
&q_{ik}^{a} = \rho\left(a_{ikmn}^{\varphi\varphi}\,\Phi_{mn}^{a} - a_{ik}^{\theta\varphi}\theta + a_{ik}^{\vartheta\varphi}\vartheta + a_{ik}^{\Phi\varphi}\Phi + c_{ikmn}^{\varepsilon\varphi}\,\varepsilon_{ik}^{o} + a_{ikmn}^{\gamma\varphi}\gamma_{ik} + a_{ikmn}^{\Phi\varphi}\,\Phi_{mn}^{a}\right)
\end{aligned}
\qquad (29)
$$

Калорическое уравнение состояния (23) принимает вид

$$
s = c^{\theta\theta}\theta + c^{\theta\vartheta}\vartheta + c^{\theta\Phi}\Phi + c_{ik}^{\theta\varepsilon}\varepsilon_{ik}^{o} + a_{ik}^{\theta\gamma}\gamma_{ik} + c_{ik}^{\theta\Phi}\Phi_{ik}^{o} + a_{ik}^{\theta\varphi}\Phi_{ik}^{a} \qquad (30)
$$

Соотношение $T\left(ds/dT\right)_{\vartheta,\Phi,\hat{\varepsilon}^{o},\gamma,\hat{\Phi}^{o},\hat{\Phi}^{a}} = T\left(\partial s/\partial\theta\right) = c_{\varepsilon}$ представляет собой теплоемкость при неизменных деформациях. Это позволяет выразить коэффициент $c^{\theta\theta}$ через c_{ε} и записать формулу для определения энтропии в виде

(31)

$$
s = \frac{c_{\varepsilon}}{T_0}\theta + c^{\theta\vartheta}\vartheta + c^{\theta\Phi}\Phi + c_{ik}^{\theta\varepsilon}\varepsilon_{ik}^{o} + a_{ik}^{\theta\gamma}\gamma_{ik} + c_{ik}^{\theta\Phi}\Phi_{ik}^{o} + a_{ik}^{\theta\varphi}\Phi_{ik}^{a} \qquad (32)
$$

Изотропные среды

В случае изотропных сред термодинамические соотношения значительно упрощаются. В этом случае физические свойства материала не зависят от выбранного пространственного направления, поэтому свободная энергия $f(\theta,\vartheta,\Phi,\varepsilon_{ik}^{o},\gamma_{ik},\Phi_{ik}^{o},\Phi_{ik}^{a})$ может зависеть только от инвариантов независимых переменных тензорного типа. Если в разложениях функции f по своим аргументам ограничиться членами степени, не выше второго порядка, то среди инвариантов аргументов этой функции достаточно выбрать вторые инварианты

$$I_2\left(\hat{\varepsilon}^o\right)=\frac{1}{2}\varepsilon^o_{ik}\,\varepsilon^o_{ik},\quad I_2\left(\hat{\gamma}\right)=\frac{1}{2}\gamma_{ik}\,\gamma_{ik},\quad I_2\left(\hat{\Phi}^o\right)=\frac{1}{2}\Phi^o_{ik}\,\Phi^o_{ik},$$
$$I_2\left(\hat{\Phi}^a\right)=\frac{1}{2}\Phi^a_{ik}\Phi^a_{ik},\quad I_2^{\varepsilon\Phi}=\varepsilon^o_{ik}\Phi^o_{ik},\qquad I_2^{\gamma\varphi}=\gamma_{ik}\Phi^a_{ik}$$

т.к. первые инварианты для этих тензоров равны нулю. Выражение для свободной энергии принимает вид

$$\begin{aligned}
&f\left(\theta,\vartheta,\Phi,I_2\left(\hat{\varepsilon}^o\right),I_2\left(\hat{\gamma}\right),I_2\left(\hat{\Phi}^o\right),I_2\left(\hat{\Phi}^a\right)\right)=\\
&=-\frac{c_\varepsilon}{2T_0}\theta^2-\frac{\beta}{\rho}\theta\vartheta-\frac{\alpha}{\rho}\theta\Phi+\frac{1}{2\rho}\left(\lambda+\frac{2}{3}\mu\right)\vartheta^2+\frac{1}{\rho}\left(\eta+\frac{2}{3}\zeta\right)\vartheta\Phi+\\
&+\frac{1}{2\rho}\left(\xi+\frac{2}{3}\chi\right)\Phi^2+\frac{\mu}{\rho}\varepsilon^o_{ik}\varepsilon^o_{ik}+\frac{2\zeta}{\rho}\varepsilon^o_{ik}\Phi^o_{ik}+\frac{\chi}{\rho}\Phi^o_{ik}\Phi^o_{ik}+\\
&+\frac{\lambda_1}{2\rho}\gamma_{ik}\gamma_{ik}+\frac{\mu_1}{\rho}\gamma_{ik}\Phi^a_{ik}+\frac{\kappa}{2\rho}\Phi^a_{ik}\Phi^a_{ik}
\end{aligned}\tag{33}$$

а определяющие уравнения (29), (30) приобретают форму

$$\begin{aligned}
\sigma&=3\left(\left(\lambda+\frac{2}{3}\mu\right)\vartheta+\left(\eta+\frac{2}{3}\zeta\right)\Phi-\beta\,\theta\right)\\
q&=3\left(\left(\xi+\frac{2}{3}\chi\right)\Phi+\left(\eta+\frac{2}{3}\zeta\right)\vartheta-\alpha\,\theta\right)\\
\sigma^{so}_{ik}&=2\mu\varepsilon^o_{ik}+2\zeta\,\Phi^o_{ik},\quad \sigma^a_{ik}=\left(\lambda_1\,\gamma_{ik}+\mu_1\,\Phi^a_{ik}\right)\\
q^{so}_{ik}&=2\chi\Phi^o_{ik}+2\zeta\,\varepsilon^o_{ik},\quad q^a_{ik}=\kappa\Phi^a_{ik}+\mu_1\,\gamma_{ik}
\end{aligned}\tag{34}$$

$$s = \frac{c_\varepsilon}{T_0}\theta + \frac{\beta}{\rho}\vartheta + \frac{\alpha}{\rho}\Phi$$

Здесь введены новые обозначения феноменологических коэффициентов $\alpha, \beta, \zeta, \eta, \kappa, \lambda, \lambda_1, \mu, \mu_1, \chi$. Используя разбиение тензоров второго ранга (14), запишем выражение для тензоров $\hat{\sigma}, \hat{q}$

$$\begin{gathered}\sigma_{ik} = \lambda\,\vartheta\,\delta_{ik} + 2\mu\varepsilon_{ik} + \lambda_1\,\gamma_{ik} + \mu_1\,\Phi^a_{ik} + \left(\eta + \frac{2}{3}\zeta\right)\Phi\,\delta_{ik} - \beta\,\theta\,\delta_{ik} \\ q_{ik} = \xi\,\Phi\,\delta_{ik} + 2\chi\Phi_{ik} + \eta\vartheta\,\delta_{ik} + 2\zeta\,\varepsilon_{ik} + \kappa\Phi^a_{ik} + \mu_1\,\gamma_{ik} - \alpha\,\theta\,\delta_{ik}\end{gathered} \tag{35}$$

Выпишем основные соотношения в инвариантной форме, пригодной для любой системы координат

$$\begin{gathered}\hat{\sigma} = \lambda\, div\,\vec{u}\,\hat{g} + 2\mu\hat{\varepsilon} + \lambda_1\,\hat{\gamma} + \mu_1\,\hat{\Phi}^a + \left(\eta + \frac{2}{3}\zeta\right)\Phi\,\hat{g} - \beta\,\theta\,\hat{g} \\ \hat{q} = \xi\,\Phi\,\hat{g} + 2\chi\hat{\Phi} + \eta\, div\,\vec{u}\,\hat{g} + 2\zeta\,\hat{\varepsilon} + \kappa\hat{\Phi}^a + \mu_1\,\hat{\gamma} - \alpha\,\theta\,\hat{g} \\ \hat{\varepsilon} = \frac{1}{2}\left[\nabla\vec{u} + \left(\nabla\vec{u}\right)^T\right], \quad \hat{\gamma} = \frac{1}{2}\left[\nabla\vec{u} - \left(\nabla\vec{u}\right)^T\right] - \hat{\hat{\varepsilon}}\cdot\vec{\varphi} \\ \hat{\Phi} = \frac{1}{2}\left[\nabla\vec{\varphi} + \left(\nabla\vec{\varphi}\right)^T\right], \quad \hat{\Phi}^a = \frac{1}{2}\left[\nabla\vec{\varphi} - \left(\nabla\vec{\varphi}\right)^T\right] \\ \hat{g} - \text{метрический тензор}\end{gathered} \tag{36}$$

Уравнения статики деформируемого упругого тела при наличии распределенных пар сил и внутренних поворотов частиц тела

Уравнения равновесия в инвариантной форме имеют вид (10) и содержат дивергентные слагаемые в правых частях. Подставляя соотношения (35) в (10) и считая феноменологические коэффициенты постоянными, после простых преобразований получим уравнения

$$\left(\lambda+\mu-\frac{\lambda_1}{2}\right)\nabla\, div\,\vec{u}+\left(\mu+\frac{\lambda_1}{2}\right)\Delta\vec{u}-\beta\nabla\theta+$$
$$+\left(\eta+\frac{2}{3}\zeta-\frac{\mu_1}{2}\right)\nabla\, div\,\vec{\varphi}+\frac{\mu_1}{2}\Delta\vec{\varphi}+\lambda_1\, rot\,\vec{\varphi}+\vec{X}=0 \quad (37)$$

$$\left(\xi+\chi-\frac{\kappa}{2}\right)\nabla\, div\,\vec{\varphi}+\left(\chi+\frac{\kappa}{2}\right)\Delta\vec{\varphi}-\alpha\nabla\theta+\left(\eta+\zeta-\frac{\mu_1}{2}\right)\nabla\, div\,\vec{u}+$$
$$+\left(\zeta+\frac{\mu_1}{2}\right)\Delta\vec{u}+2\mu_1\, rot\,\vec{\varphi}+\lambda_1\left(rot\,\vec{u}-2\vec{\varphi}\right)+\vec{m}=0 \quad (38)$$

На границе Σ деформируемого тела могут быть заданы граничные условия первого рода

$$\vec{u}\big|_\Sigma=\vec{u}^o,\quad \vec{\varphi}\big|_\Sigma=\vec{\varphi}^o \quad (39)$$

второго рода

$$\vec{n}\cdot\hat{\sigma}\big|_\Sigma=\vec{p}^o,\quad \vec{n}\cdot\hat{q}\big|_\Sigma=\vec{q}^o \quad (40)$$

либо смешанные граничные условия. Здесь $\vec{u}^o,\vec{\varphi}^o,\vec{p}^o,\vec{q}^o$ заданные функции – перемещения, повороты частиц, напряжения и распределенные по поверхности моменты пар сил, соответственно.

Равновесие бесконечного пустотелого цилиндрического постоянного магнита в поле линейного тока

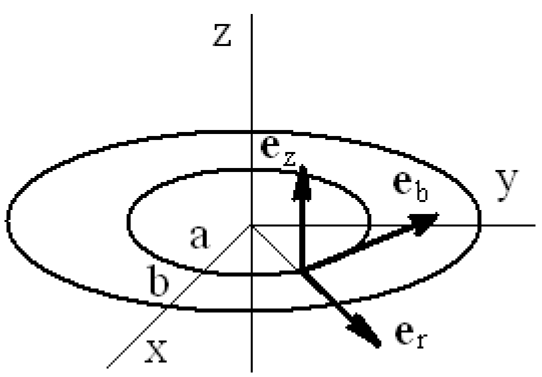

Рис.2

Рассмотрим в качестве упругого тела постоянный магнит, имеющий вид бесконечного пустотелого цилиндра с внутренней цилиндрической поверхностью радиуса a и внешней – радиуса b (рис.2). Вдоль оси цилиндра протекает линейный ток силы J , который создает магнитное поле с вектором напряженности $\vec{H}$, равной [8]

$$\vec{H} = \frac{2J}{c\,r}\vec{e}_{\beta} \tag{41}$$

где c - скорость света в пустоте, r - радиус цилиндрической системы координат с ортами $\vec{e}_r, \vec{e}_b, \vec{e}_z$, ось Oz которой совпадает с осью цилиндра. Обозначим через $\vec{M}$ намагниченность постоянного магнита $\left(\left|\vec{M}\right| = const\right)$. Тогда объемная сила и момент пары сил единицы объема, действующие на постоянный магнит, равны

$$\vec{X} = \nabla\left(\vec{M}\cdot\vec{H}\right), \quad \vec{m} = \vec{M}\times\vec{H} \tag{42}$$

Пусть в отсутствии тока вектор намагниченности направлен вдоль оси Oz $\vec{M} = M\,\vec{e}_z$ ($\vec{e}_z$ - орт цилиндрической системы координат). При протекании тока J по оси цилиндра вектор $\vec{M}$ поворачивается на малый угол $\vec{\varphi} = \varphi_r\vec{e}_r + \varphi_b\vec{e}_b + \varphi_z\vec{e}_z$ ($\vec{e}_r$ - орт оси Or) и принимает значения

$$\vec{M} = M\left(\vec{e}_z + \vec{\varphi}\times\vec{e}_z\right) = M\left(\varphi_b\vec{e}_r - \varphi_r\vec{e}_b + \vec{e}_z\right) \tag{43}$$

Тогда согласно формулам (42), (41) получим следующее выражение для объемных силы и пар сил

$$\vec{X} = \frac{A\varphi_r}{r}\vec{e}_r, \quad \vec{m} = -\frac{A}{r}\vec{e}_r \quad \left(A = \frac{2JM}{c}\right) \tag{44}$$

Пусть граничные условия соответствуют отсутствию перемещений и поверхностных пар сил на внутренней и внешней поверхностях цилиндра

$$\vec{u}\,|_{r=a,b}=0, \quad \vec{n}\cdot\hat{q}\,|_{r=a,b}=0 \tag{45}$$

В силу линейности уравнений и однородности граничных условий следует, что разыскиваемое решение пропорционально величине A. Поэтому в дальнейшем примем значение $A=1$. Будем разыскивать частное решение задачи, полагая $u_r=u_r(r), \quad \varphi_r=\varphi_r(r), \quad u_b=u_z=\varphi_b=\varphi_z=0$. Как можно показать (см.[9]), дважды ковариантные тензоры $\hat{\varepsilon},\hat{\gamma},\hat{\Phi},\hat{\Phi}^a$ имеют следующий вид

$$\hat{\varepsilon}=\begin{pmatrix} \dfrac{du_r}{dr} & 0 & 0 \\ 0 & ru_r & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\gamma}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r\varphi_r \\ 0 & r\varphi_r & 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{\Phi}=\begin{pmatrix} \dfrac{d\varphi_r}{dr} & 0 & 0 \\ 0 & r\varphi_r & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\Phi}^a=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{46}$$

Уравнения равновесия в этом случае сводятся к двум следующим обыкновенным дифференциальным уравнениям второго порядка относительно неизвестных $u_r(r),\varphi_r(r)$

$$\begin{gathered}(\lambda+2\mu)\left(\frac{d^2u_r}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{du_r}{dr}-\frac{u_r}{r^2}\right)+ \\ +\left(\eta+\frac{2}{3}\zeta\right)\left(\frac{d^2\varphi_r}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d\varphi_r}{dr}-\frac{1}{r^2}\varphi_r\right)-\frac{1}{r}\varphi_r=0\end{gathered} \tag{47}$$

$$\begin{gathered}(\xi+2\chi)\left(\frac{d^2\varphi_r}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d\varphi_r}{dr}-\frac{\varphi_r}{r^2}\right)-2\lambda_1\varphi_r+\\+(\eta+2\zeta)\left(\frac{d^2u_r}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{du_r}{dr}-\frac{u_r}{r^2}\right)-\frac{1}{r}=0\end{gathered}\tag{48}$$

Физические компоненты тензоров $\hat{\sigma},\hat{q}$ имеют вид

$$\hat{\sigma}=$$

$$=\begin{pmatrix}\begin{gathered}(\lambda+2\mu)\frac{du_r}{dr}+\frac{\lambda u_r}{r}+\\+\left(\eta+\frac{2}{3}\zeta\right)\left(\frac{d\varphi_r}{dr}+\frac{\varphi_r}{r}\right)\end{gathered} & 0 & 0\\ 0 & \begin{gathered}\lambda\frac{du_r}{dr}+(\lambda+2\mu)\frac{u_r}{r}+\\+\left(\eta+\frac{2}{3}\zeta\right)\left(\frac{d\varphi_r}{dr}+\frac{\varphi_r}{r}\right)\end{gathered} & -\lambda_1\varphi_r\\ 0 & \lambda_1\varphi_r & \begin{gathered}\lambda\left(\frac{du_r}{dr}+\frac{u_r}{r}\right)+\\+\left(\eta+\frac{2}{3}\zeta\right)\left(\frac{d\varphi_r}{dr}+\frac{\varphi_r}{r}\right)\end{gathered}\end{pmatrix}\tag{49}$$

$$\hat{q}=$$

$$=\begin{pmatrix}\begin{gathered}(\xi+2\chi)\frac{d\varphi_r}{dr}+\xi\frac{\varphi_r}{r}+\\+(\eta+2\zeta)\frac{du_r}{dr}+\eta\frac{u_r}{r}\end{gathered} & 0 & 0\\ 0 & \begin{gathered}\xi\frac{d\varphi_r}{dr}+(\xi+2\chi)\frac{\varphi_r}{r}+\\+\eta\frac{du_r}{dr}+(\eta+2\zeta)\frac{u_r}{r}\end{gathered} & -\mu_1\varphi_r\\ 0 & \mu_1\varphi_r & \begin{gathered}\xi\left(\frac{d\varphi_r}{dr}+\frac{\varphi_r}{r}\right)+\\+\eta\left(\frac{du_r}{dr}+\frac{u_r}{r}\right)\end{gathered}\end{pmatrix}\tag{50}$$

Т.о. система дифференциальных уравнений (47), (48) сопровождается краевыми условиями (45), которые имеют вид

$$
\begin{aligned}
&u_r(a) = u_r(b) = 0 \\
&(\xi + 2\chi)\frac{d\varphi_r}{dr}(a) + \xi\frac{\varphi_r(a)}{r} + (\eta + 2\zeta)\frac{du_r}{dr}(a) + \eta\frac{u_r(a)}{a} = 0 \\
&(\xi + 2\chi)\frac{d\varphi_r}{dr}(b) + \xi\frac{\varphi_r(b)}{r} + (\eta + 2\zeta)\frac{du_r}{dr}(b) + \eta\frac{u_r(b)}{b} = 0
\end{aligned}
\qquad (51)
$$

Решение краевой задачи (47), (48), (51) можно получит в замкнутом виде через специальные функции. В силу громоздкости вида этого решения удобнее ввоспользоваться численным методом решения указанной задачи, воспользовавшись стандартными программами прикладного пакета Maple. Для частного случая $\eta = \zeta = \xi = \chi = 0$ можно указать частное решение

$$
\varphi_r(r) = -\frac{1}{2\lambda_1 r}, \quad u_r(r) = -\frac{1}{2\lambda_1 r}\frac{(b-r)(r-a)}{(\lambda+2\mu)(a+b)}
$$

что легко проверяется подстановкой решения в уравнения (47), (48).

Результаты расчетов проводились для числовых параметров задачи: $a = 0.1, \quad b = 0.3$ и значениий феноменологических коэфффициентов, приведенных в таблице 1, отражены на рис.3-7.

Таблица 1

№	λ	μ	η	ζ	ξ	χ	λ_1	μ_1
1	10^5	10^5	0	10^{-2}	10^{-2}	1	10^3	10^4
2	10^5	10^5	10^4	10^{-2}	10^{-2}	10	10^3	10^4
3	10^5	10^5	10^4	10^2	10^2	100	10^3	10^4

Результаты вычислений представлены на рис.3-8 в виде графиков функций $u(r) = u_r(r), \varphi(r) = \varphi_r(r)$.

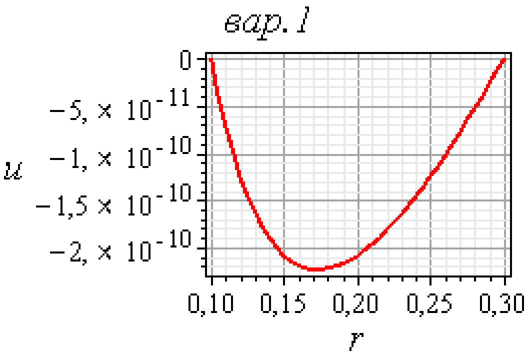

Рис.3

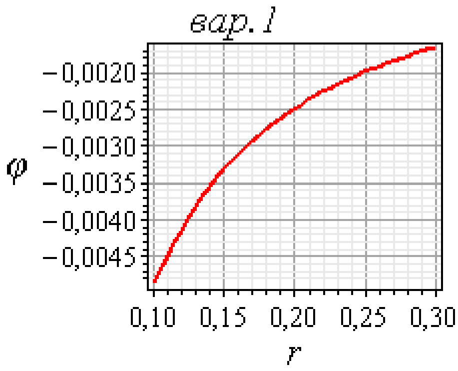

Рис.4

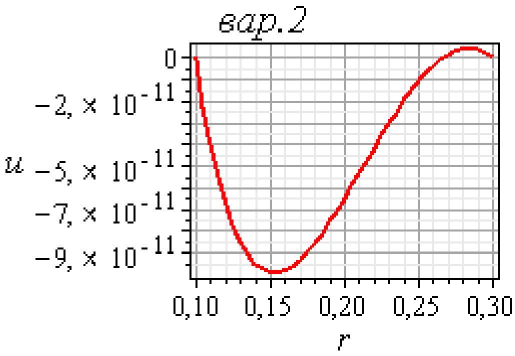

Рис.5

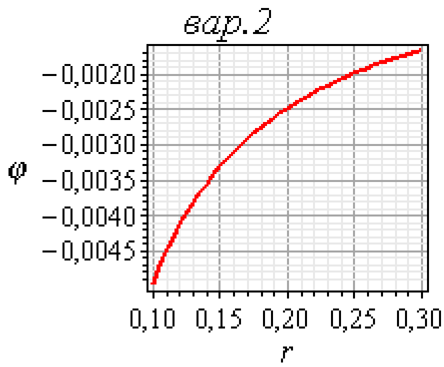

Рис.6

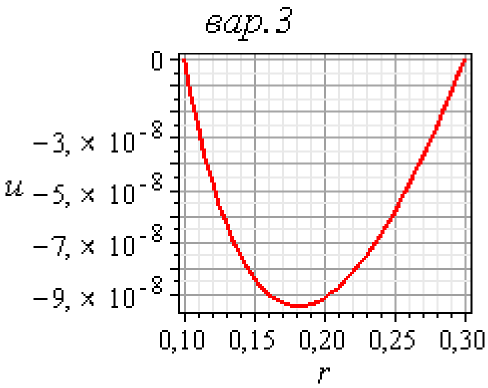

Рис.7

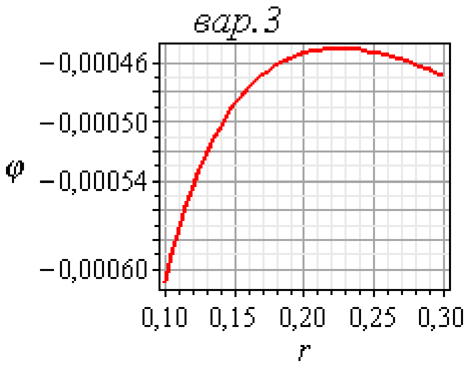

Рис.8

Учет коэффициентов $\eta \neq 0, \zeta \neq 0$ приводит к изменению характера зависимости $u(r)$ (рис.5). Угол поворота частиц $\varphi(r)$ слабо зависит от величины η, ζ, но существенно меняется с изменением χ, ξ (рис.8).

Литература

1. Седов Л.И. Механика сплошных сред. Т.1. М.: Наука.-1976.-536 с.
2. Тарапов И.Е. Механика сплошной среды. В 3 ч. Ч.2: Общие законы кинематики и динамики. Харьков: Золотые страницы, 2002.-516 с.
3. Дьярмати И. Неравновесная термодинамика. Теория поля и вариационные принципы. М.: Мир. 1974.-304 с.
4. Кильчевский Н.А. Курс теоретической механики. Т.1. М.: Наука.-1972. -530 с.
5. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир.-1975.-872 с.
6. Воронин Г.Ф. Основы термодинамики. М.: Изд-во МГУ, 1987.-192 с.
7. Гленсдорф П., Пригожин И. Термодинамическая теория структуры, устойчивости и флуктуаций. М.: Мир, 1973.-280 с.
8. Тамм И.Е. Основы теории электричества. М.: Наука. - 1976. - 616 с.
9. Борисенко А.И., Тарапов И.Е. Механика сплошной среды. В 3 ч. Ч.1: Векторный анализ и начала тензорного исчисления. Харьков: Золотые страницы, 2003. - 320 с.

Навчальне видання

ТЕРМОДИНАМІКА ПРУЖНЬО ДЕФОРМУЄМОГО ТВЕРДОГО ТІЛА

Методичний посібник
для студентів III-IV курсів
спеціальності "Механіка"

Укладач ІЄВЛЕВ Іван Іванович

Відповідальний за випуск І. І. Ієвлев