

О некоторой нелинейной системе уравнений типа  
Бюргерса

А. С. Сохин

Харьковский национальный университет, Украина

Статья содержит постановку и метод решения нелинейной двухкомпонентной системы уравнений типа Бюргерса.

2000 *Mathematics Subject Classification* 35Q53.

При решении задачи идентификации для обыкновенного дифференциального уравнения произвольного порядка [1] в частном случае второго порядка возникает для вектор-функции  $y(x) = (y_1(x), y_2(x))^*$  дифференциальное уравнение

$$y'' = u_1(x)y - u_2(x)y', \quad 0 < x < \infty, \quad (1)$$

с финальным условием

$$y(x) = e(-x) + o(1), \quad x \rightarrow \infty, \quad (2)$$

где  $e(x) = (1, x)^*$ , связывающее наблюдаемую вектор-функцию  $f(x) = y(x) - e(-x)$  и искомую вектор-функцию  $u(x) = (u_1(x), u_2(x))^*$ . Предполагая, что наблюдаемая вектор-функция зависит от параметра  $t \geq 0$  и удовлетворяет векторному уравнению теплопроводности, получаем, что искомая вектор-функция  $u(x, t)$  удовлетворяет некоторому нелинейному эволюционному уравнению, которое получается из условия совместимости уравнения теплопроводности и уравнения (1) при  $t \geq 0$ . Это нелинейное уравнение естественно назвать векторным уравнением Бюргерса, так как оно обобщает скалярное уравнение Бюргерса  $\dot{u} + 2uu' = u''$ , которое подстановкой Коула-Хопфа [2, 3] вида  $u = -y'/y$  приводится к уравнению теплопроводности  $\dot{y} = y''$ . Эта задача подробно изучается в [4]. Здесь и в дальнейшем точка означает дифференцирование по  $t$ , штрих - дифференцирование по  $x$ .

Введем обозначения:  $E(-x) = (e(-x), -e'(-x))$ ,  $F(x) = (f, -f')$ ,  $Y(x) = (y, -y')$ . Дифференциальное уравнение (1) можно записать в виде

$$y'' = Y u(x), \quad 0 < x < \infty, \quad (3)$$

или в таком эквивалентном матричном виде:

$$Y' = -YU(x), \quad 0 < x < \infty, \quad Y(x) = E(-x)[I + o(I)], \quad x \rightarrow \infty, \quad (4)$$

где  $U(x) = (i^2, u)^*$ ,  $i^2 = (0, 1)^*$ . Дифференциальное уравнение (2) эквивалентно интегральному уравнению

$$Y(x) = E(-x) + \int_x^\infty Y(s)((s-x)u(s), u(s))ds. \quad (5)$$

Вектор-функция  $y(x)$  выражается через матрицу-функцию  $Y(x)$  по формуле

$$y(x) = e(-x) + \int_x^\infty Y(s)(s-x)u(s)ds. \quad (6)$$

На непрерывную вектор-функцию  $u(x)$ , равную нулю при  $x \leq 0$ , наложим условие

$$\int_0^\infty (x+x^3)|u(x)|dx < \infty, \quad (7)$$

где норма  $|u(x)|$  вектора  $u(x)$  определяется как сумма модулей компонент. Заметим, что из равенства (3) следует, что матрица  $Y(x)$  невырождена, так как [5] по теореме Лиувилля  $\det Y(x) = \Delta(x)$  удовлетворяет уравнению  $-\Delta' = \text{spur} U(x)\Delta$ ,  $\Delta(\infty) = 1$  и, следовательно,  $\Delta(x) = \exp\left(\int_x^\infty u_2(s)ds\right)$ .

Пусть вектор-функция  $y(x, y)$  удовлетворяет линейному эволюционному уравнению

$$\dot{y} = y'', \quad 0 < x < \infty, \quad t > 0 \quad (8)$$

начальному условию

$$y(x, 0) = y^0(x) \quad (9)$$

и граничным условиям при  $t > 0$

$$y(0, t) = (1, 0)^*, \quad y(x, t) = e(-x) + o(1), \quad x \rightarrow \infty. \quad (10)$$

Здесь  $y^0(x)$  — решение задачи (1-2) при  $t = 0$ . Из уравнения (5) следует, что матрица-функция  $Y(x, t) = (y, -y')$  удовлетворяет матричному линейному эволюционному уравнению

$$\dot{Y} = Y'', \quad 0 < x < \infty, \quad t > 0, \quad (11)$$

начальному условию

$$Y(x, 0) = Y^0(x) \quad (12)$$

и граничным условиям при  $t > 0$

$$Y(0, t) = I, \quad Y(x, t) = E(-x)[I + o(I)], \quad x \rightarrow \infty. \quad (13)$$

Здесь  $Y^0(x) = (y^0, -\frac{dy^0}{dx})$ . Из уравнения (3), в предположении справедливого для  $t \geq 0$ , и уравнения (6) дифференцированием, соответственно, по  $t$  и по  $x$  и сравнением правых частей получаем матричное уравнение  $\dot{U} + 2UU' = U''$ , которое эквивалентно векторному нелинейному эволюционному уравнению

$$\dot{U} + 2Uu' = u'', \quad 0 < x < \infty, \quad t > 0. \quad (14)$$

Присоединим еще начальное условие

$$u(x, 0) = u^0(x) \quad (15)$$

и граничные условия

$$u(0, t) = 0, \quad u(\cdot, t) \in L_1(0, \infty), \quad t > 0. \quad (16)$$

Уравнение (7) назовем векторным уравнением Бюргера. В покомпонентном виде оно выглядит так:

$$\dot{u}_1 + 2u_1u'_2 = u''_1,$$

$$\dot{u}_2 + 2u'_1 + 2u_2u'_2 = u''_2.$$

Найдем условия, при которых нелинейная эволюционная задача (7)–(16) имеет решение.

**Теорема 1.** *Для того чтобы задача (7)–(16) имела решение, необходимо и достаточно, чтобы решение задачи (6)–(13) являлось невырожденной матрицей.*

**Необходимость.** Пусть задача (7)–(16) имеет решение  $u(x, t)$ . Обозначим  $U(x, t) = (i^2, u(x, t))$ . Пусть  $y(x, t)$  – решение задачи (5)–(10), а  $Y(x, t) = (y, -y')$  – решение задачи (6)–(13). Обозначим  $r(x, t) = y'' - Yu$ , то есть, имеем равенство

$$y'' = Yu + r, \quad 0 \leq x < \infty, \quad t \geq 0. \quad (17)$$

Из условия совместности уравнений (8) и (5) при  $t > 0$  и уравнения (7) для вектор-функции  $r(x, t)$  находим уравнение

$$\dot{r} = r'', \quad 0 < x < \infty, \quad t > 0. \quad (18)$$

Из уравнений (7) и (2) при  $x = 0$  и  $t = 0$  находим граничные условия

$$r(0, t) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} r(x, t) = 0, \quad t > 0 \quad (19)$$

и начальное условие

$$r(x, 0) = 0, \quad 0 < x < \infty. \quad (20)$$

Из равенств (9)–(20) следует, что  $r(x, t) \equiv 0$ . Таким образом, решение задачи (5) – (9) удовлетворяет равенству  $y'' = Yu$  и, тем самым, равенству  $Y' =$

$-YU$  и граничному условию  $Y(x, t) = E(-x) + o(1)$ ,  $x \rightarrow \infty$  при  $t > 0$ . Следовательно,  $\det Y = \exp\left(\int_x^\infty u_2(s, t) ds\right) \neq 0$ ,

**Достаточность.** Пусть решение задачи (6) и (13) является невырожденной матрицей-функцией. Обозначим  $u(x, t) = Y^{-1}(x, t)y''(x, t)$  при  $t \geq 0$ , где  $y(x, t)$  – решение задачи (5) и (10), тогда имеем равенство

$$y'' = Y u(x, t), \quad 0 < x < \infty, \quad t \geq 0. \quad (21)$$

Дифференцируя равенство (5) дважды по  $x$  и равенство (10) один раз по  $t$  и сравнивая правые части, получим равенство  $(Yu) = (Yu)''$ , из которого следует уравнение (7) для вектор-функции  $u(x, t)$ . Проверим выполнимость граничных условий. Из граничного условия (10) следует, что  $\dot{y} = y'' = 0$  при  $x = 0$  и  $t > 0$ , значит,  $u(0, t) = 0$ ,  $t > 0$ . Из интегрального уравнения (5) следует [1], что матрица-функция  $E(x)Y(x, 0) - I = E(x)F^0(x)$  имеет оценку нормы  $|E(x)F^0(x)| \leq e^{\dot{y}_\mu^0(x)} - 1$ ,  $x \geq 0$ , где  $\dot{y}_\mu^0(x) = \int_x^\infty u_\mu^0(s) ds$ ,  $u_\mu^0(s) = m(s)p(s)|u^0(s)|$ ,  $m(s) = \max(1, s)$ ,  $p(s) = 1 + s$ ,  $s \geq 0$ . В качестве нормы матрицы рассматривается максимум из норм ее столбцов. Обозначим  $F_-^0(x)$  – нечетное продолжение матрицы-функции  $F^0(x)$  на отрицательную полуось. Тогда решение  $Y(x, t)$  уравнения (6) при начальном условии  $Y^0(x) = E(-x) + F_-^0(x)$  и граничном условии (13) определяется интегралом Пуассона  $Y(x, t) = p_t * Y^0(x) = E(-x) + p_t * F_-^0(x)$ , где  $p_t(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right)$  – фундаментальное решение уравнения теплопроводности  $\dot{z} = z''$ , а символ " \* " означает свертку. Функции 1 и  $x$  являются неподвижными функциями оператора свертки. Решение  $y(x, t)$  задачи (5)–(10) также определяется равенством  $y(x, t) = e(-x) + p_t * f_-^0(x)$ . Функции  $F(x, t) = p_t * F_-^0$  и  $f(x, t) = p_t * f_-^0$  равны нулю при  $x = 0$  и  $t > 0$ . Замечая, что  $y'' = f''(x, t)$ ,  $E(x)E(-x) = I$ , после умножения равенства (10) на  $E(x)$  получим

$$E(x)f''(x, t) = (I + E(x)F(x, t))u(x, t). \quad (22)$$

Отметим несколько известных или легко проверяемых свойств встречающихся здесь функций, используемых в дальнейшем:

- (а) матрица-функция  $E(x) = \exp(I_0 x)$ , где  $I_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ , поэтому справедливо групповое свойство  $E(x + s) = E(x)E(s)$  при  $x, s \in (-\infty, \infty)$ ;
- (в) пусть  $L_1$  – пространство абсолютно суммируемых на  $(-\infty, \infty)$  функций с нормой  $\|\cdot\|_1$ ,  $L_\infty$  – пространство существенно ограниченных на  $(-\infty, \infty)$  функций с нормой  $\|\cdot\|_\infty$ ,  $f$  и  $g$  – а функции из  $L_1$ , тогда свертка  $f * g = \int_{-\infty}^\infty f(x-s)g(s)ds$  также из  $L_1$  и  $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \cdot \|g\|_1$ ;
- (с) пусть  $f \in L_1$ ,  $g \in L_\infty$ , тогда свертка  $f * g \in L_\infty$  и  $\|f * g\|_\infty \leq \|f\|_1 \cdot \|g\|_\infty$ ;
- (д) функция  $p_t(x)$  при  $t > 0$  принадлежит пространству Шварца функций, убывающих при  $|x| \rightarrow \infty$  быстрее, чем любая степень  $\frac{1}{|x|}$ ;

(е) производная  $p_t^{(s)} = m_s(x)p_t(x)$ , где  $m_s(x)$  — многочлен степени  $s$  с коэффициентами, зависящими от  $t > 0$ ;

(f)  $x^m p_t^{(s)}(x) \in L_1 \cap L_\infty$  при любых целых положительных числах  $m$  и  $s$  при  $t > 0$ ;

(g) пусть  $\hat{x}$  — оператор умножения на независимую переменную  $x$ , тогда  $\hat{x}(p_t * f) = (\hat{x}p_t) * f + p_t * (\hat{x}f)$ ;

(h) пусть  $\hat{E}$  — оператор умножения на матрицу-функцию  $E(x)$ , тогда  $\hat{E}(p_t * F_-^0) = \hat{E}p_t * \hat{E}F_-^0$ ;

(к)  $\hat{x}p_t \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi e}}$  при  $x \geq 0$ ,  $\|p_t\|_1 = 1$  при  $t > 0$ .

Вернемся к равенству (11). Согласно свойству (h) имеем равенство  $\hat{E}f''(t) = \hat{E}p_t'' * \hat{E}f_-^0$ , в котором  $|E p_t''| \in L_1$  при  $t > 0$ . Далее, при  $x > 0$  из неравенства  $|E f^0(x)| \leq \exp(\check{u}_\mu^0(x)) - 1$ , получаемого из равенства (6), и неравенства  $\exp(\check{u}_\mu^0(x)) - 1 = \int_x^\infty u_\mu^0(s) e^{\check{u}_\mu^0(s)} ds \leq e^{\check{u}_\mu^0(0)} \check{u}_\mu^0(x)$  следует  $\|\hat{E}f_-^0\|_1 \leq$

$2 \exp(\check{u}_\mu^0(0)) \int_0^\infty \check{u}_\mu^0(x) dx = 2 \exp(\check{u}_\mu^0(0)) \check{u}_\nu^0(0)$ , где  $\check{u}_\nu^0(x) = \int_x^\infty s u_\mu(s) ds$ . Ко-

нечность  $\check{u}_\nu^0(x)$  обеспечивается условием (4). Из свойства (e) следует, что  $|\hat{E}f''(t)| \in L_1$  при  $t > 0$ . Далее, согласно свойствам (g) и (h) имеем

$\hat{x}\hat{E}F(t) = (\hat{x}\hat{E}p_t) * \hat{E}F_-^0 + (\hat{E}p_t) * \hat{x}\hat{E}F_-^0$ . Таким образом, согласно свойству (c) имеем неравенство  $\|\hat{x}\hat{E}F(t)\|_\infty \leq (2\|\hat{x}\hat{E}p_t\|_\infty + \|\hat{E}p_t\|_1) \exp(\check{u}_\mu^0(0)) \check{u}_\nu^0(0)$ ,

из которого получаем, что  $|\hat{E}F(t)| = O\left(\frac{1}{|x|}\right)$ ,  $|x| \rightarrow +\infty$ ,  $t > 0$ . Очевидно, второе граничное условие достаточно проверить в окрестности  $x = \infty$ . Из равенства (11) имеем  $u(x, t) = \hat{E}f''(t) - \hat{E}F(t)u(x, t)$ .

Пусть  $N = N(t) > 0$  такое, что  $\max_{x \geq N} |\hat{E}F(t)| \leq \frac{1}{2}$ . Тогда из неравенств

$\int_N^\infty |u(x, t)| dx \leq \int_N^\infty |\hat{E}F(t)| |u(x, t)| dx \leq \exp(\check{u}_\mu^0(0)) \check{u}_\nu^0(0) + \frac{1}{2} \int_N^\infty |u(x, t)| dx$  следует

$\int_N^\infty |u(x, t)| dx \leq \exp(\check{u}_\mu^0(0)) \check{u}_\nu^0(0) < \infty$ . Теорема доказана.

Приведем теперь достаточное условие невырожденности матрицы-функции  $E(-x) + F(x, t)$ .

**Теорема 2.** Если

$$\check{u}_\mu^0(0) < \ln \left( 1 + \frac{\sqrt{\pi e/2}}{1 + \sqrt{\pi e/2}} \right), \quad (23)$$

то матрица  $Y(x, t) = E(-x) + F(x, t)$  невырождена при всех  $x$  и  $t \geq 0$ .

**Доказательство.** Рассмотрим  $E(x)F(x, t) = I + E(x)F(x, t)$ . Нетрудно убедиться, что  $\hat{E}F(t) = (\hat{x}p_t) * I_0 F_-^0 + p_t * \hat{E}F_-^0$ . Оценим по норме  $\|\cdot\|_\infty$  каждое слагаемое. Ранее было отмечено, что  $\hat{E}F^0(x) \leq \exp(\check{u}_\mu^0(x)) - 1$ ,  $x \geq 0$ . Из интегрального уравнения (5) можно получить  $|I_0 F^0(x)| \leq \exp(\check{u}_p^0(x)) - 1$ ,  $x \geq$

0, где  $\check{u}_p^0(x) = \int_x^\infty p(s) |u^0(s)| ds$ . Из свойства (к) получим неравенство

$\|\widehat{E}F(t)\|_\infty \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi e}} \|I_0 F^0\|_1 + \|\widehat{E}F^0\|_\infty$ , из которого с учетом свойства (с), оценок для  $\widehat{E}F^0(x)$  и  $I_0 F^0(x)$  и неравенств  $\int_x^\infty (\exp(\dot{y}_p^0(u)) - 1) dx \leq \exp(\dot{y}_\mu^0(0)) - 1$ ,  $x p(x) \leq \mu(x)$ ,  $u_p(x) \leq u_\mu(x)$  вытекает  $\|\widehat{E}F(t)\|_\infty \leq (1 + \sqrt{\frac{2}{\pi e}}) (\exp(\dot{y}_\mu^0(0)) - 1) = c_\infty$ . Легко убедиться в силу условия (12), что  $c_\infty < 1$ . Значит, матрица  $I + \widehat{E}F(t) = \widehat{E}Y(t)$  обратима при всех  $x$  и  $t \geq 0$ , то есть матрица  $Y(x, t)$  также обратима и справедливо неравенство  $|u(x, t)| \leq \frac{1}{1-c_\infty} |\widehat{E}f''(x, t)|$ ,  $x \geq 0$ ,  $t \geq 0$ .

Из теорем 1 и 2 вытекает метод решения задачи (7)–(16) для векторного уравнения Бюргерса.

**Следствие.** Если начальное значение  $u^0(x)$  удовлетворяет условию  $\dot{y}_\mu^0(0) = \int_0^\infty \max(x, 1) |u^0(x)| dx < \ln \left( 1 + \frac{\sqrt{\pi e/2}}{1 + \sqrt{\pi e/2}} \right)$ , то нелинейное векторное уравнение Бюргерса (7) имеет решение  $u(x, t)$ , удовлетворяющее начальному условию (15) и граничным условиям (16) и это решение находится последовательным решением следующих задач:

1. По вектор-функции  $u^0(x)$  находим решение  $y^0(x)$  дифференциального уравнения (1) с финальным условием (2).

2. По вектор-функции  $y^0(x)$  находим решение  $y(x)$  линейной эволюционной задачи (5) – (10). Составляем матрицу  $Y(x, t) = (y(x, t), -y'(x, t))$ .

3. Решение  $u(x)$  векторного уравнения Бюргерса находим, решая алгебраическую задачу  $Y(x, t)u(x, t) = y''(x, t)$  при  $0 < x < \infty$  и  $t > 0$ .

Таким образом, подстановка  $u = (y, -y)^{-1}y''$  позволяет заменить решение эволюционного нелинейного векторного уравнения Бюргерса решением линейного векторного уравнения теплопроводности.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Сохин А.С. Идентификация математической модели линейной одномерной управляемой системы. // Вісник ХНУ, Серія "Математика, прикладна математика і механіка". – 2001. – 514. – С. 63-72.
2. Cole I.D. On a quasi-linear parabolic equation occurring in aerodynamics. Quart. Math., 9, 1951, С. 225-236.
3. Hopf E. The partial differential equation  $\dot{u} + uu_x = u_{xx}$ . Comm. Pure Appl. Math., 3, 1950, С. 201 -230.
4. Габов С.А. Введение в теорию нелинейных волн. – М.: Изд-во МГУ. – 1988. – 176 с.
5. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Наука, 1974. – 332 с.

## Міцність ослаблених тріщинами анізотропних пластин з несиметрично підкріпленим краєм

В. В. Божидарник

Луцький державний технічний університет, Україна

Розвинуто метод наближеного визначення гранично-рівноважного стану анізотропних пластин із несиметрично підкріпленим краєм і ослаблених тріщинами, коли вони піддані дії згину та розтягу згинальними моментами, перерізувальними силами й напруженнями з нормальною та дотичною складовими у площині пластинки. Розглянуті приклади підкріплення стрижнем прямокутного профілю круглого та еліптичного отвору у необмеженій ортотропній пластинці і круглого та еліптичного ортотропного диску.

2000 Mathematics Subject Classification 74K20, 74E10.

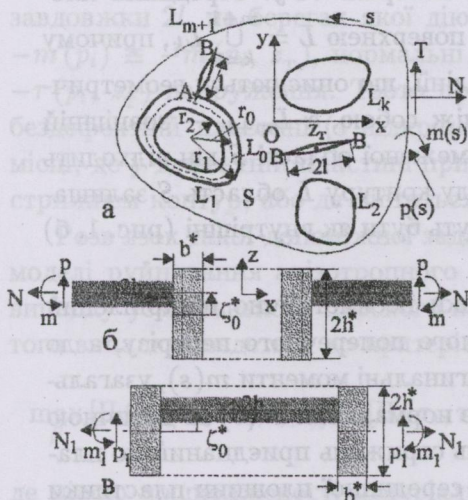


Рис. 1. Загальна схема задачі

пружними елементами, найчастіше кільцями, з іншого або й того ж самого матеріалу. З тих чи інших міркувань таке підкріплювальне кільце може або й мусить бути розташованим несиметрично стосовно серединної площини пластини. Таке підкріплення називають несиметричним. За таких обставин незалежно від способу навантажування пластини у ній виникають одночасно

У багатьох випадках складовими елементами сучасних технічних споруд та інженерних конструкцій є тонкі композитні (анізотропні, переважно ортотропні) пластини, що працюють на розтяг та згин зі своєї площини. Такі пластини переважно мають конструктивні чи технологічні отвори, що зумовлює високу концентрацію напружень. Внаслідок цього зменшується міцність — передусім саме біля отворів розпочинаються процеси пластичного деформування, тріщиноутворення та руйнування. Тому в інженерній практиці вже досить давно застосовують підсилювання країв отворів

платий та згинальний напружені стани. Така ситуація істотно ускладнює розрахунок пластин з несиметрично підкріпленням краєм порівняно з такими ж пластинами, які мають лише симетричні підкріплення. Головним чином вивчалася підкріплення ізотропних пластин. З цього приводу згадаємо визначальні праці у цьому напрямі Г. М. Савіна, М. П. Шереметьєва, Н. П. Флейшмана, Т. Л. Мартиновича, В. І. Тульчія, В. Є. Юринця [1-5] та низки інших дослідників.

Додаткове врахування анізотропії матеріалу істотно ускладнює математичний бік проблеми, проте дає змогу виявити низку важливих механічних ефектів, які в конструкторській практиці слід обов'язково брати до уваги, оскільки широке застосування композиційних матеріалів неможливе без глибокого розуміння впливу анізотропії на механічну поведінку виготовлених конструкцій [6] та на особливості їхнього крихкого та в'язкого руйнування.

Ця праця стосується важливої для інженерної практики проблеми визначення залишкової міцності анізотропних пластин з несиметрично підкріпленням краєм і ослаблених тріщинами. Тут розвинуто метод наближеного визначення гранично-рівноважного стану таких конструкцій, коли вони піддані дії згину та розтягу згинальними моментами, перерізувальними силами й напруженнями з нормальною та дотичною складовими у площині пластинки. Суть цього методу полягає у такому.

**1. Постановка задачі.** Розглянемо тонку фізично і геометрично лінійну пружну анізотропну пластинку завтовшки  $2h$ , що має у кожній точці площину пружної симетрії, паралельну до серединної поверхні  $xOy$ . Серединна площина пластинки займає область  $S$ , обмежену поверхнею  $L = \bigcup_{k=1}^{m+1} L_k$ , причому контури  $L_k$  ( $k = 1 \dots m$ ) — замкнуті гладкі лінії, що описуються геометричними параметрами  $a^{(i)}$  і не перетинаються між собою, а  $L_{m+1}$  — зовнішній контур, що охоплює всі інші. У випадку необмеженої області  $S$  він відходить у нескінченність. За додатного напрямку обходу контуру  $L$  область  $S$  залишається ліворуч (рис. 1, а). Підкріпленнями можуть бути як внутрішні (рис. 1, б) так і зовнішні (рис. 1, в) контури.

Нехай для визначеності край  $L_1$  пластинки несиметрично підкріплений пружним стрижнем (фактично кільцем) сталого поперечного перерізу, а до решти краю  $L' = L - L_1$  прикладені зовнішні згинальні моменти  $m(s)$ , узагальнені перерізувальні сили  $p(s)$  та напруження з нормальною  $N(s)$  та дотичною  $T(s)$  складовими. До часу прикладання зусиль стрижень приєднаний до пластинки так, що площина його осі зміщена від серединної площини пластинки на величину  $\zeta_0^*$ . Стрижень перебуває під впливом зовнішніх згинальних моментів  $m_1(s)$ , узагальнених перерізувальних сил  $p_1(s)$  і напружень зі складовими  $N_1, T_1$ , прикладених у його серединній площині ( $\zeta_0 = 0$ ).

Вважається також, що у пластині уздовж відрізка  $L'$  розташована прямолінійна тріщина завдовжки або  $l$  (якщо вона виходить нормально на підкріплений стрижнем отвір), або  $2l$  (якщо вона віддалена від підкріплення). Величина  $l$  примежевої тріщини мала порівняно з усіма іншими геометричними

параметрами задачі  $l \ll a^{(i)}$ ,  $h$ ; для внутрішньої тріщини геометричні параметри підкріплення можуть бути того ж порядку, або й менші від  $l$ . Координати примежевого вістря  $A$ , а для внутрішньої тріщини координати її центру позначимо  $z_T$ . Загалом може бути і декілька невеликих тріщин. Для визначеності вважатимемо, що береги тріщин вільні від зовнішніх навантажень, хоча їх врахування принципово задачу визначення граничного значення зовнішнього навантаження  $p_i = p_{i*}$ , після досягнення якого тріщина почне збільшуватися, не ускладнює. Тут  $p_i = \{m(s); p(s); N(s); T(s); m_1(s); p_1(s); N_1(s); T_1(s)\}$ .

З огляду на принцип суперпозиції відповідну задачу теорії пружності можна розбити на дві. Перша (однорідна) — визначення напруженого стану у бездефектній пластині: пластині без тріщин з тими ж підкріпленими отворами та заданими тими ж зовнішніми навантаженнями. Розв'язок цієї задачі (однорідний розв'язок) має допоміжне значення. Друга (збурена) задача — задача теорії тріщин про напружений стан пластинки з підкріпленими отворами та тріщинами, коли до їх берегів прикладено моменти  $-m(p_i, z)$ , нормальні  $-\sigma(p_i, z)$  і дотичні  $-\tau(p_i, z)$  ( $z \in L'$ ) напруження, протилежні за знаком тим  $m(p_i, z)$ ,  $\sigma(p_i, z)$ ,  $\tau(p_i, z)$ , що виникають у бездефектній пластині (з підкріпленими отворами але без тріщини) у тому місці, де у дефектній пластині розташована тріщина. Розв'язок другої задачі є сингулярним і саме він визначає у механіці руйнування граничний стан конструкції.

Оскільки  $l \ll a^{(i)}$ ,  $h$ , то розв'язування поставленої задачі зводиться до набагато простішої задачі про граничну рівновагу нескінченної пластинки з прямолінійною примежевою тріщиною завдовжки  $l$  чи внутрішньою тріщиною завдовжки  $2l$ , на берегах якої діють рівномірно розподілені (сталі) моменти  $-m(p_i) \equiv -m(p_i, z_T)$ , нормальні  $-\sigma(p_i) \equiv -\sigma(p_i, z_T)$  і дотичні  $-\tau(p_i) \equiv -\tau(p_i, z_T)$  напруження. Тобто протилежні за знаком тим, що виникають у бездефектній пластині (з підкріпленими отворами але без тріщини) у тому місці, де у дефектній пластині примежева тріщина виходить на підкріплений стрижнем контур, або де міститься центр внутрішньої тріщини.

Розв'язок такої допоміжної задачі отримуємо за допомогою розрахункової моделі руйнування анізотропного матеріалу, запропонованої у праці [7] для випадку узагальненого плоского напруженого стану, яка стосовно розглянутого випадку зведеться до критеріального рівняння

$$\max_{\beta} [\Pi(\sigma_*, \tau_*, m_*, l, \beta)] = [\Pi(\sigma_*, \tau_*, m_*, l, \beta)] \Big|_{\beta=\beta_*}, \quad \Pi(\sigma_*, \tau_*, m_*, l, \beta) = 1, \quad (1)$$

де мірою пошкодженості матеріалу у зоні передруйнування вважається безрозмірна величина

$$\Pi(\sigma, \tau, m, l, \beta) \equiv K_{\beta}(\sigma, \tau, m, l, \beta) K_{Ic}^{-1}(\beta). \quad (2)$$

Це коефіцієнт інтенсивності  $K_{\beta} = \lim_{r \rightarrow 0} (\sqrt{2\pi r} \sigma_{\beta\beta})$  окружних напружень  $\sigma_{\beta\beta}$ , нормований тріщиновитримністю  $K_{Ic}(\beta)$  — отриманим експериментально критичним значенням коефіцієнта інтенсивності  $K_{\beta}$ , з досягненням якого за

критерієм Ірвіна [8-11] розпочинається зростання тріщини, і який для анізотропних матеріалів залежить від напрямку  $\beta + \gamma$  стосовно головних осей анізотропії матеріалу [12]. Тут  $\beta$  — кутова координата локальної полярної системи координат із початком у розглядуваному вістрі тріщини і полярною віссю, спрямованою уздовж продовження осі тріщини;  $\gamma$  — кут між віссю тріщини та головною віссю ортотропії.

Для примежевої тріщини можливі чотири варіанти її просування: примежеве вістря  $A$  рухається уздовж лінії розмежування матеріалів (відбувається розшарування пластинки й підкріплення); вістря  $A$  руйнує підкріплення; вістря  $A$  руйнує матрицю; вістря  $B$  поширюється углиб підкріпленої пластинки. Внутрішня тріщина збільшується лише за останнім варіантом. Оскільки у випадку виходу тріщини безпосередньо на межу поділу матеріалів особливості напружень не є класично кореневою і за таких обставин питання руйнування ще не усталилися, то вважатимемо, що вістря  $A$  тріщини лежить не безпосередньо на межі поділу матеріалів, а на дуже невеликій відстані від неї всередині пластинки. Тоді на обох кінцях примежевої тріщини розв'язок матиме кореневу особливість і до визначення коефіцієнтів інтенсивності напружень (КІН) та вирішення питань руйнування можна застосовувати добре апробовані методи лінійної механіки руйнування та похідні від них. Вважатимемо, що граничне значення КІН при зменшенні до нуля відстані вістря до підкріплення та породжене ним асимптотичне поле напружень визначають поле напружень в околі вістря у тому випадку, коли це вістря впирається у підкріплення.

Обидва вістря внутрішньої тріщини є типу  $B$ . Зрозуміло, що якщо цікавитися руйнуванням лише пластинки від внутрішнього вістря, то запропоноване умовне переведення примежевої тріщини у розряд внутрішньої гарантовано не приведе до втрати інженерної точності. Якщо підкріплення має більшу жорсткість від підкріплюваної пластини, то та примежевому вістрі КІН менший, тож руйнування у будь-якому випадку розпочнеться з вістря усередині матриці. З істотно внутрішніми тріщинами ніяких ускладнень не виникає.

**2. Визначення КІН.** Величини КІН  $K_I, K_{II}$ , які входять у критеріальні рівняння (1), для спрощеного варіанту збуреної задачі означаємо залежно від того, чи розглядуване вістря  $A, B$  тріщини лежить відповідно на підкріпленому контурі (на дуже малій відстані від неї) чи углибині пластинки:

$$K_i^M = K_i^{\sigma\tau M} + K_i^{mM} \quad (M = A, B; k = 1, 2),$$

$$K_1^{\sigma\tau M} = \sigma(p_i) \varphi_{11}^M(E_k, \nu_k) \sqrt{\pi l}, \quad K_1^{mM} = m(p_i) \varphi_{12}^M(E_k, \nu_k) \sqrt{\pi l}, \quad (3)$$

$$K_2^{\sigma\tau M} = \tau(p_i) \varphi_{21}^M(E_k, \nu_k) \sqrt{\pi l}, \quad K_2^{mM} = m(p_i) \varphi_{22}^M(E_k, \nu_k) \sqrt{\pi l}.$$

Тут  $E_k, \nu_k$  — пружні сталі матеріалів пластинки і стрижня;  $\varphi_{ij}^M(E_k, \nu_k)$  ( $i, j = 1, 2; M = A, B$ ) — коригувальні функції, які дає розв'язок задачі теорії пружності для необмеженої пластинки, спаяної із двох різних півплощин, коли а) з одної анізотропної півплощини (матеріал досліджуваної підкріпленої пла-

стинки) перпендикулярно на межу поділу з іншою ізотропною чи анізотропною півплощиною (матеріал підкріплювального стрижня) виходить прямолінійна тріщина завдовжки  $l$ ; б) примежеве вістря тріщини завдовжки  $l$  лежить на дуже малій відстані від межі поділу; в) внутрішня тріщина завдовжки  $2l$  лежить на скінченій не дуже великій відстані від межі поділу; г) внутрішня тріщина завдовжки  $2l$  лежить на великій відстані від межі поділу. Ця задача розв'язується методами, запропонованими у працях

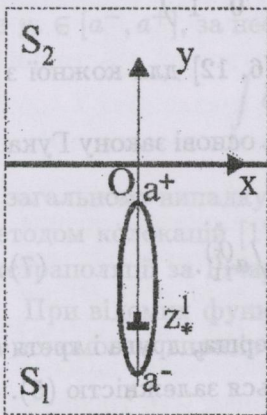


Рис. 2. Тріщина у кусково-однорідній пластинці

[13–15], де використовується апарат теорії комплексної змінної [13, 14] та формалізм Стро [15].

Для прикладу розглянемо плоску задачу теорії пружності і вважатимемо, що тріщина розташована у нижній півплощині  $S_1$  уздовж лінії  $L' = \{(x, y) | x = 0; y \in [a^-; a^+]\}$  (рис. 2). Розглянемо у точках  $z_*^{(k)}$  півплощин  $S_k$  ( $k = 1, 2$ ) із пружними сталими  $a_{ij}^{(k)}$  [6, 12] крайові дислокації з векторами Бюргерса  $b^{(k)} = b_1^{(k)} + ib_2^{(k)}$  [9, 16]. Тоді на основі результатів праць [13, 14] можна записати, що тріщина породжує у довільній точці  $z$  тіла поле напружень і переміщень, яке характеризується чотиривимірним вектором

$$\sigma^0(z) = [\sigma_{yy}^0(z), \sigma_{xy}^0(z), \partial u_x^0(z)/\partial x, \partial u_y^0(z)/\partial x], \quad (4)$$

який для  $z \in S_k$ ,  $k = 1; 2$ ,  $l = 3 - k$  можна подати у вигляді

$$\sigma^0(z) = \frac{1}{2} \left[ G_{lk}^* (z^{(k)}) \mathbf{KM}^{lk} (\mathbf{R}^{kl} + \mathbf{E}) + G_{kl}^* (z^{(k)}) (\mathbf{E} + \mathbf{K}) \mathbf{M}^{kl} + G_{kl}^* (\bar{z}^{(k)}) \mathbf{KM}^{kl} (\mathbf{R}^{lk} - \mathbf{E}) + G_{lk}^* (\bar{z}^{(k)}) (\mathbf{E} - \mathbf{K}) \mathbf{M}^{lk} \right], \quad (5)$$

де

$$G_{kj}^* (z^{(k)}) = [G_{1k} (z_1^{(l)}), G_{2k} (z_2^{(l)}), \overline{G_{1j}} (z_1^{(l)}), \overline{G_{2j}} (z_2^{(l)})],$$

$$G_{mj} (z_m^{(k)}) = -\frac{A_m^j}{z_{*m}^{(k)} - z_m^{(k)}}, \quad A_m^j = \frac{\mathbf{f}^{(j)} \mathbf{M}_{jj}^m}{2\pi i}, \quad \mathbf{f}^{(j)} = [0, 0, b_1^{(j)}, b_2^{(j)}],$$

$$z_m^{(k)} = x + \mu_m^{(k)} y, \quad z_{*m}^{(k)} = x_* + \mu_m^{(k)} y_*, \quad \mathbf{R}^{kl} = [\mathbf{M}^{kl}]^{-1} \mathbf{KM}^{kl},$$

$$p_m^{(k)} = a_{11}^{(k)} (\mu_m^{(k)})^2 - a_{16}^{(k)} \mu_m^{(k)} + a_{12}^{(k)}, \quad q_m^{(k)} = a_{12}^{(k)} \mu_m^{(k)} - a_{26}^{(k)} + a_{22}^{(k)} / \mu_m^{(k)},$$

$$M^{kj} = \begin{pmatrix} 1 & -\mu_1^{(k)} & p_1^{(k)} & q_1^{(k)} \\ 1 & -\mu_2^{(k)} & p_2^{(k)} & q_2^{(k)} \\ 1 & -\mu_1^{(j)} & p_1^{(j)} & q_1^{(j)} \\ 1 & -\mu_2^{(j)} & p_2^{(j)} & q_2^{(j)} \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (6)$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$\mu_m^{(k)}$  ( $m, k = 1; 2$ ) — корені характеристичних рівнянь [6, 12] для кожної з півплощин.

Беручи до уваги те, що у виразі (4)  $\partial u_x^0(z)/\partial x \equiv \varepsilon_{xx}^0$  на основі закону Гука  $\varepsilon_{xx}^{(k)} = a_{11}^{(k)} \sigma_{xx}^{(k)} + a_{12}^{(k)} \sigma_{yy}^{(k)} + a_{16}^{(k)} \sigma_{xy}^{(k)}$  запишеться

$$\sigma_{xx}^0 = [\partial u_x^0(z)/\partial x - a_{12}^{(k)} \sigma_{yy}^0(z) - a_{16}^{(k)} \sigma_{xy}^0(z)] / a_{11}^{(k)}. \quad (7)$$

Тут  $\sigma_{yy}^0(z)$ ,  $\sigma_{xy}^0(z)$ ,  $\partial u_x^0(z)/\partial x$  — згідно з (4) відповідно перша, друга і третя компоненти чотиривимірного вектора  $\sigma^0(z)$ , що визначається залежністю (5). Отже на основі залежностей (5), (7) отримаємо

$$\begin{aligned} \sigma_{yy}^0(z) &= \sum_{k=1,2} [b_1^{(k)} f_{11}(z, z_*^{(k)}) + b_2^{(k)} f_{21}(z, z_*^{(k)})], \\ \sigma_{xy}^0(z) &= \sum_{k=1,2} [b_1^{(k)} f_{12}(z, z_*^{(k)}) + b_2^{(k)} f_{22}(z, z_*^{(k)})], \\ \sigma_{xx}^0(z) &= \sum_{k=1,2} [b_1^{(k)} f_{13}(z, z_*^{(k)}) + b_2^{(k)} f_{23}(z, z_*^{(k)})], \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \partial u_x^0(z)/\partial x &= \sum_{k=1,2} [b_1^{(k)} f_{14}(z, z_*^{(k)}) + b_2^{(k)} f_{24}(z, z_*^{(k)})], \\ \partial u_y^0(z)/\partial x &= \sum_{k=1,2} [b_1^{(k)} f_{15}(z, z_*^{(k)}) + b_2^{(k)} f_{25}(z, z_*^{(k)})]; \end{aligned}$$

$f_{ij}(z, z_*^{(k)})$  ( $i = 1; 2; j = 1; 5$ ) — певні відомі функції, що визначаються співвідношеннями (5), (6). Повертаючись до задачі теорії тріщин, коли на берегах тріщини  $L'$  задані рівномірно розподілені (сталі) нормальні  $-\sigma(p_i)$  і дотичні  $-\tau(p_i)$  напруження, вважатимемо, що у кожній точці  $z_* = iy_*$  ( $x_* = 0$ ) перебуває дислокація з вектором Бюргерса невідомою наперед інтенсивністю  $\mathbf{b}^{(1)}(y_*) = b_1^{(1)}(y_*) + ib_2^{(1)}(y_*)$  ( $\mathbf{b}^{(2)}(y_*) \equiv 0$ ). Тоді на основі співвідношень (8) отримаємо

$$\begin{aligned} \sigma_{xy}^0(z) &= \int_{L'} [b_1^{(1)}(y_*) f_{12}(z, iy_*) + b_2^{(1)}(y_*) f_{22}(z, iy_*)] dy_*, \\ \sigma_{xx}^0(z) &= \int_{L'} [b_1^{(1)}(y_*) f_{13}(z, iy_*) + b_2^{(1)}(y_*) f_{23}(z, iy_*)] dy_*, \end{aligned} \quad (9)$$

Із використанням інтегралів згортки (8) невідомі густини розподілів дислокацій знайдемо з системи двох сингулярних інтегральних рівнянь

$$\int_{L'} [b_1^{(1)}(y_*)f_{12}(iy, iy_*) + b_2^{(1)}(y_*)f_{22}(iy, iy_*)] dy_* = -\tau(p_i),$$

$$\int_{L'} [b_1^{(1)}(y_*)f_{13}(iy, iy_*) + b_2^{(1)}(y_*)f_{23}(iy, iy_*)] dy_* = -\sigma(p_i),$$
(10)

де  $y_* \in [a^-, a^+]$ , за необхідності виконання двох додаткових умов

$$\int_{L'} b_1^{(1)}(y_*) dy_* = 0, \quad \int_{L'} b_2^{(1)}(y_*) dy_* = 0.$$
(11)

У загальному випадку значень параметрів розв'язок рівняння (11) знаходиться методом колокацій [17] та при потребі ефективно уточнюється за допомогою екстраполяції за Річардсоном [18].

При відомих функціях  $b_1^{(1)}(y_*)$ ,  $b_2^{(1)}(y_*)$  знаходимо КІН біля вістря  $(0; a^\pm)$  за допомогою виразів

$$K_1^\pm + iK_2^\pm = \pm \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=1}^2 [p_{n+2}^\pm (R_{n+2;1}^0 + iR_{n+2;2}^0)],$$

$$p_{n+2}^\pm = \lim_{y_* \rightarrow a^\pm} \left( \sqrt{|y_* - a^\pm| b_n^{(1)}(y_*)} \right) \quad (n = 1; 2),$$
(12)

де  $R_{n+2;1}^0$  — елемент матриці  $\text{Im } \mathbf{R}^{\alpha 11}$ ;  $\mathbf{R}^{\alpha 11}$  — відповідник матриці  $\mathbf{R}^{11}$ , отриманий на основі пружних сталей  $a'_{ij}^{(1)}$ , породжених з  $a_{ij}^{(1)}$  поворотами базової системи координат  $xOy$  на кут  $\alpha = \pi/2$  (див. напр. (8.32) [6]).

Легко побачити, що процедура побудови коригуючих функцій  $\varphi_{ij}^M(E_k, \nu_k)$  ( $i, j = 1, 2; M = A, B$ ) не є цілком простою, однак вона зводиться до розв'язування добре вивчених систем сингулярних інтегральних рівнянь (10), (11). Елементарною вона є лише в останньому варіанті г), коли достатньо аналізувати випадок тріщини в однорідній необмеженій пластинці. Тоді, наприклад,  $\varphi_{11}^B(E_k, \nu_k) \equiv 1$ ,  $\varphi_{21}^B(E_k, \nu_k) \equiv 1$ . Оскільки КІН для внутрішнього вістря при межевій тріщини не дуже значно відрізняється від КІН внутрішньої тріщини, то для оціночних розрахунків можна скористатися і цими елементарними значеннями або побудувати для них певну інтерполяційну формулу [19].

**3. Визначення граничного навантаження.** Повертаючись до чотирьох варіантів руйнування конструкції, зазначимо, що у першому випадку міжфазного поширення тріщини для визначення граничного значення зусиль  $\sigma(p_i) = \sigma_{1*}$ ,  $m(p_i) = m_{1*}$ ,  $\tau(p_i) = \tau_{1*}$  розв'язуємо друге рівняння (1) за умови (3) у припущенні, що  $M = A$ ,  $\beta_* = \pi/2$ , причому  $K_{Ic}$  означає тріщиновитримність межі фаз. У другому випадку граничне значення зусиль  $\sigma(p_i) = \sigma_{2*}$ ,  $m(p_i) = m_{2*}$ ,  $\tau(p_i) = \tau_{2*}$  визначаємо на основі рівнянь (1) за умови (3), припустивши, що  $M = A$ , і вважаючи, що  $K_{Ic} = K_{Ic}^A$  для  $|\beta_*| < \pi/2$  та  $K_{Ic} = K_{Ic}^B$  для

$\pi/2 < |\beta_*| < \pi$ . Для третього і четвертого випадків граничне значення зусиль  $\sigma(p_i) = \sigma_{3*}$ ,  $m(p_i) = m_{3*}$ ,  $\tau(p_i) = \tau_{3*}$  знаходять із рівняння (1) за умови (3) та  $M = A, B, K_{Ic} = K_{Ic}^B$ . Тоді розрахункові критичні значення прикладених до берегів тріщини зусиль  $\sigma(p_i) = \sigma_*$ ,  $m(p_i) = m_*$ ,  $\tau(p_i) = \tau_*$ , які впливають з поєднання усіх можливих способів руйнування конструкції, дадуть рівняння

$$\sigma_* = \min\{\sigma_{1*}, \sigma_{2*}, \sigma_{3*}\}, \quad m_* = \min\{m_{1*}, m_{2*}, m_{3*}\}, \quad \tau_* = \min\{\tau_{1*}, \tau_{2*}, \tau_{3*}\}. \quad (13)$$

У свою чергу граничне значення зовнішніх навантажень  $p_i = p_{i*}$ , після досягнення якого розпочнеться руйнування підкріпленої анізотропної пластинки з тріщиною, визначатиметься з рівнянь

$$\sigma(p_i) = \sigma_*, \quad m(p_i) = m_*, \quad \tau(p_i) = \tau_*. \quad (14)$$

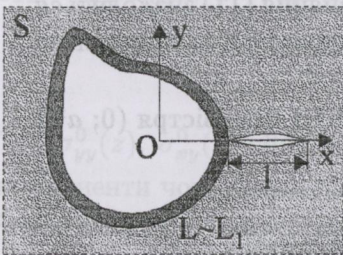


Рис. 3. Підкріплена пластинка з одним отвором і примежевою тріщиною

одним отвором ( $m = 1$ ) з контуром  $L_1$  (рис. 3). На підкріпленій стрижнем контур нормально до нього виходить тріщина завдовжки  $l$ . Підкріплювальний стрижень сталого поперечного перерізу навантажений розподіленими моментами інтенсивністю  $M_1$  і напруженнями  $N_1, T_1$ . Контур  $L_2$  відійшов на нескінченність і до нього прикладені скінчені напруження та згинальні моменти. У цьому випадку відповідні граничні умови (II.1.11) та (II.1.12) [6] (у яких з огляду на те, що  $r_1 > r_0$ , вибрано верхній знак) спрощуються до вигляду (II.2.3) [6]. Розглянуті конкретні випадки обчислення КІН для примежевих тріщин з огляду на їхню найбільшу ймовірність утворення.

**4. Анізотропна пластинка з несиметрично підкріпленням коловим отвором та радіальною тріщиною.** Вважаємо, що серединна площина тонкої анізотропної пластинки, ослаблена одним коловим отвором ( $m = 1$ ;  $L_1$  — коло радіусом  $r_1$ ), займає область  $S$  (рис. 4). Підкріплювальний стрижень сталого поперечного перерізу площею  $F$  вільний від зовнішніх навантажень; контур  $L_2$  відійшов на нескінченність і до нього прикладені скінчені напруження та згинальні моменти

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}^\infty &= p_1, & \sigma_{yy}^\infty &= p, & \sigma_{xy}^\infty &= \tau, \\ M_x^\infty &= M_x, & M_y^\infty &= M_y, & H_{xy}^\infty &= M_{xy}. \end{aligned} \quad (15)$$

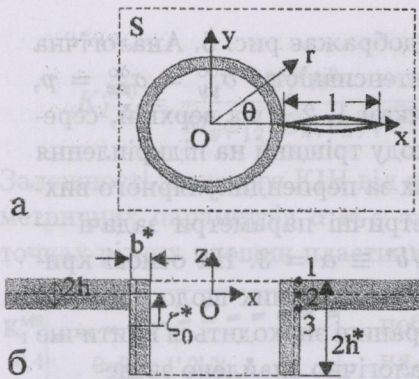


Рис. 4. Схема задачі для підкріпленого колового отвору

Записуючи для цього конкретного випадку крайові умови в інтегральній формі, а також застосовуючи відомий метод подання розв'язку задачі через комплексні потенціали і розвинення їх у ряди у математичній області  $S_1$  поза одиничним колом, на яку конформно відображається область  $S$  [6], знаходимо напружено-деформований стан пластинки без тріщини, тобто однорідний розв'язок  $\sigma(p_i)$ ,  $t(p_i)$ ,  $\tau(p_i)$ . Розглянуто шість основних способів навантаження:

1.  $\sigma_{xx}^\infty = p_1$ ,  $\sigma_{yy}^\infty = 0$ ,  $\sigma_{xy}^\infty = 0$ ,  $M_x^\infty = 0$ ,  $M_y^\infty = 0$ ,  $H_{xy}^\infty = 0$ ;
2.  $\sigma_{xx}^\infty = 0$ ,  $\sigma_{yy}^\infty = p$ ,  $\sigma_{xy}^\infty = 0$ ,  $M_x^\infty = 0$ ,  $M_y^\infty = 0$ ,  $H_{xy}^\infty = 0$ ;
3.  $\sigma_{xx}^\infty = p$ ,  $\sigma_{yy}^\infty = p$ ,  $\sigma_{xy}^\infty = 0$ ,  $M_x^\infty = 0$ ,  $M_y^\infty = 0$ ,  $H_{xy}^\infty = 0$ ;
4.  $\sigma_{xx}^\infty = 0$ ,  $\sigma_{yy}^\infty = 0$ ,  $\sigma_{xy}^\infty = 0$ ,  $M_x^\infty = M_x$ ,  $M_y^\infty = 0$ ,  $H_{xy}^\infty = 0$ ;
5.  $\sigma_{xx}^\infty = 0$ ,  $\sigma_{yy}^\infty = 0$ ,  $\sigma_{xy}^\infty = 0$ ,  $M_x^\infty = 0$ ,  $M_y^\infty = M_y$ ,  $H_{xy}^\infty = 0$ ;
6.  $\sigma_{xx}^\infty = 0$ ,  $\sigma_{yy}^\infty = 0$ ,  $\sigma_{xy}^\infty = 0$ ,  $M_x^\infty = M_y$ ,  $M_y^\infty = M_y$ ,  $H_{xy}^\infty = 0$ .

Обчислення виконані для ортотропної пластинки зі склопластику КАСТ-В та кільця прямокутного перерізу із дюралюмінію:

$$E_x = 1,93 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2, \quad E_y = 1,33 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2, \quad G_{xy} = 0,32 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2, \\ \nu_{xy} = 0,174, \quad \nu_{yx} = 0,12, \quad E^* = 7,1 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2, \quad \nu^* = 0,32.$$

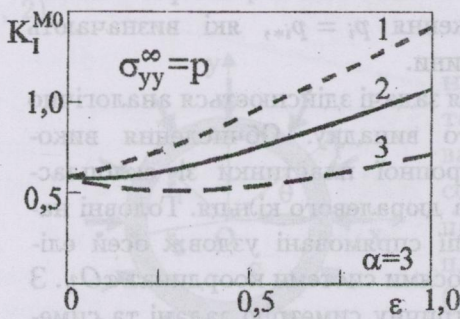


Рис. 5. Залежність зведеного КІН  $K_I^{M0}$  від ексцентриситету  $\epsilon$  під час одноосного розтягу

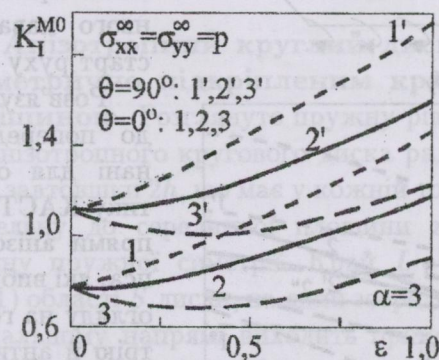


Рис. 6. Залежність зведеного КІН  $K_I^{M0}$  від ексцентриситету  $\epsilon$  під час усебічного розтягу

Під час одноосного розтягу пластинки у напрямку осі  $Oy$  напруженнями на нескінченності інтенсивністю  $\sigma_{yy}^\infty = p$  залежність зведених безрозмірних КІН

$$K_I^{M0} = \frac{K_I^M}{p\varphi_{11}^M(E_k, \nu_k)\sqrt{\pi l}}, \quad K_{II}^{M0} \equiv \frac{K_{II}^M}{\tau\varphi_{21}^M(E_k, \nu_k)\sqrt{\pi l}} = 0 \quad (17)$$

від ексцентриситету підкріплення  $\varepsilon = 0,5\zeta_0^*/h$  відображає рис. 5. Аналогічна залежність, що відповідає всебічному розтягу інтенсивністю  $\sigma_{yy}^\infty = \sigma_{xx}^\infty = p$ , подана на рис. 6. Номери ліній відповідають точкам 1, 2, 3 на верхній, середній і нижній поверхнях пластинки у місці виходу тріщини на підкріплення (штрихом позначені лінії, отримані у розрахунках за перпендикулярного виходу на підкріплення у точці з  $\theta = \pi/2$ ); геометричні параметри задачі —  $b^*/r_1 = 2\varepsilon_*/r_1 \equiv \delta = 0,1$ ;  $h^*/h \equiv \gamma = 3$ ;  $2h^*/b^* \equiv \alpha = 3$ . На основі критеріальних рівнянь (1), (13), (14) і експериментальних даних щодо в'язкості руйнування матеріалів складових та міжфазної границі знаходиться критичне значення зовнішнього навантаження  $p = p_*$ . Аналогічно знайдено зведе-

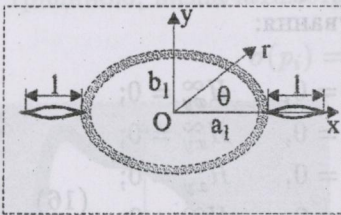


Рис. 7. Схема задачі для пластинки з підкріпленням еліптичним отвором і двома тріщинами

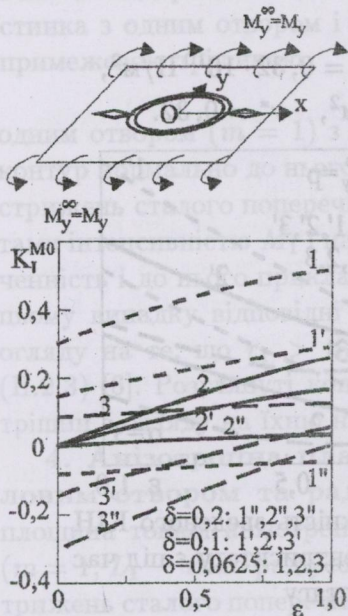


Рис. 8. Залежність зведеного КІН  $K_I^{M0}$  від ексцентриситету  $\varepsilon$  під час одноосного згину моментами  $M_y$

ні безрозмірні значення КІН для інших способів навантаження.

**5. Анізотропна пластинка з несиметрично підкріпленням еліптичним отвором та двома діаметральними тріщинами.** Вважаємо, що безмежна анізотропна пластинка ослаблена еліптичним отвором (контур  $L_1$  — еліпс із півосями  $a_1, b_1$ ), на який нормально і співосно з піввіссю  $a$  виходять дві ідентичні тріщини завдовжки  $l$  (рис. 7). Отвір несиметрично підкріплений кільцем прямокутного перерізу. Аналогічно до попереднього випадку було розглянуто шість способів навантажування (16). Задача полягає у визначенні критичного значення параметрів зовнішнього навантаження  $p_i = p_{i*}$ , які визначають старт руху тріщини.

Розв'язування задачі здійснюється аналогічно до попереднього випадку. Обчислення виконані для ортотропної пластинки зі склопластику КАСТ-В та дюралевого кільця. Головні напрямки анізотропії спрямовані уздовж осей еліпса, які вибрані осями системи координат  $xOy$ . З огляду на геометричну симетрію задачі та симетрію й антисиметрію розглянутого навантаження (16) КІН  $K_I^M$  і  $K_{II}^M$  для лівої та правої тріщин однакові й оскільки їх взаємним впливом з огляду на малість можна знехтувати, то й у цьому випадку їх можна обчислювати за формулами (3) для одної з тріщин. Для п'ятого способу (16) навантаження пластинки згинальними моментами на нескінченності  $M_y^\infty = M_y$  залежність безрозмірного зведеного значення КІН  $K_I^{M0}$  визначає формула

$$K_I^{M0} = \frac{K_I^M h^2}{M_y \varphi_{12}^M(E_k, \nu_k) \sqrt{\pi l}}, \quad K_{II}^{M0} \equiv \frac{K_{II}^M h^2}{M_y \varphi_{22}^M(E_k, \nu_k) \sqrt{\pi l}} = 0. \quad (18)$$

Залежності зведеного КІН від експетриситету підкріплення для згаданих геометричних параметрів  $\alpha = \gamma = 3$  для  $m \equiv (a_1 - b_1)/(a_1 + b_1) = 0,2$  у трьох точках різних площин пластинки для різних значень  $\delta \in \{0,625; 0,1; 0,2\}$

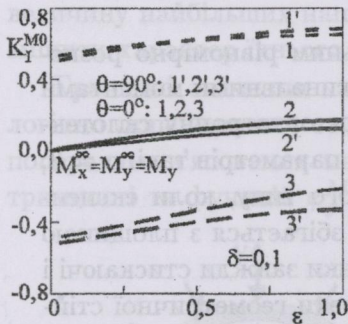


Рис. 9. Залежність зведеного КІН  $K_I^{M0}$  від експетриситету  $\epsilon$  за усебічного згину моментами  $M_y$

зображено на рис. 8. Такі ж залежності також побудовані і для інших способів навантаження (16). Наприклад, графіки, наведені на рис. 9 характеризують  $K_I^{M0}$  у випадку рівномірного всебічного згину, причому як у випадку орієнтації тріщин уздовж лінії максимального модуля пружності ( $\theta = 0$ ), так і уздовж напрямку мінімального модуля пружності ( $\theta = \pi/2$ ). Зауважмо, що відзначені на рис. 8, 9 від'ємні значення КІН позбавлені фізичного сенсу і не є коректними. Вони лише свідчать, що за відповідного значення геометричних та механічних параметрів і зовнішнього навантаження у вістрі тріщини виникають напруження стиску.

Граничні значення параметрів зовнішнього навантаження шукаємо аналогічно попередньому за допомогою співвідношень (1), (13), (14) і (17) або (18) (чи подібних до двох останніх) для попередньо з'ясованих механічних характеристик матеріалів, їх тріщиновитримності та функцій  $\varphi_{ij}^M(E_k, \nu_k)$  ( $i, j = 1, 2$ ).

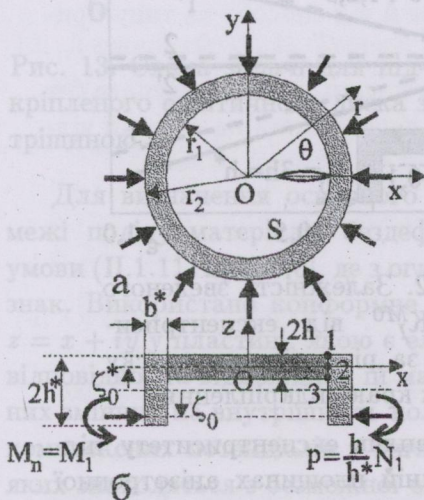


Рис. 10. Схема задачі для підкріпленого кругового диска з тріщиною

6. Анізотропний круглий диск з несиметрично підкріпленим краєм та тріщиною. Розглянуто пружну рівновагу анізотропного кругового диска радіусом  $r_1$  завтовшки  $2h$ , що має у кожній точці паралельну до серединної площини  $xOy$  площину пружної симетрії. Край  $L \sim L_1$  ( $m = 1$ ) області  $S$  диска, на який зсередини у радіальному напрямі виходить прямолінійна тріщина завдовжки  $l$ , несиметрично з екцентриситетом  $\zeta_0^*$  підкріплений ізотропним кільцем сталого поперечного перерізу (рис. 10). Пластинка вільна від впливу зовнішніх зусиль; на край підкріплювального кільця діють згинальні моменти  $M_n = M_1$  та розподілені зусилля з нормальною й дотичною складовими  $N_1, T_1$ , що прикладені з екцентриситетом  $\zeta_0$ .

Для визначення однорідного напружено-деформованого стану пластинки без тріщини, тобто значень напружень поблизу межі поділу матеріалів  $\sigma(p_i)$ ,  $m(p_i)$ ,  $\tau(p_i)$  використовуються крайові умови в інтегральній формі (П.1.11) праці [6], у яких з огляду на те, що  $r_1 < r_0$ , вибрано нижній знак. Їх конкретизують для  $m = 1$  та застосовують відомий метод подання розв'язку задачі через комплексні потенціали і розвинення їх у ряди за поліномами Фабера у математичній області  $S_1$  всередині одиничного кола, на яке конформно відображається область  $S$ .

Розглянуто два способи навантажування: нормальним рівномірно розподіленим по периметру тиском  $p = Nh/h^* = const$  та згинальними моментами  $M_n = M_1 = const$  дюралюмінієвого кільця, що охоплює ортотропну склотекстолітову (КАСТ-В) пластину. Значення геометричних параметрів такі:  $\alpha = 3$ ;  $\gamma = 3$ ;  $\delta = 0,1$ ;  $\varepsilon = 0 \dots 1$ . За навантаження першого типу, коли ексцентриситет підкріплення нульовий і площина дії зусиль збігається з площиною осі стрижня, нормальні напруження всередині пластинки завжди стискаючі і руйнування не відбуватиметься (хіба що внаслідок втрати геометричної стійкості або пластичного течіння). Однак, якщо підкріплення несиметричне або (і) площина дії навантаження зсувається до краю підкріплення, то у певних площинах пластинки можуть виникнути розтягувальні напруження. Залежність безрозмірного зведеного КІН  $K_I^{M_0}$  (17) від ексцентриситету  $\varepsilon$  для несиметрично підкріпленої пластинки ( $\varepsilon = 1$ ,  $\zeta_0 = -3h = -h^*$ ), коли площина дії зусиль збігається з площиною осі стрижня зображено на рис. 11, а коли зусилля максимально зсунуті до краю і діють у площині нижнього торця стрижня — на рис. 12.

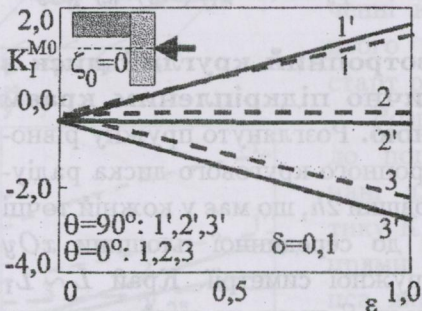


Рис. 11. Залежність зведеного КІН  $K_I^{M_0}$  від ексцентриситету  $\varepsilon$  за рівномірного стиску у серединній площині підкріплення

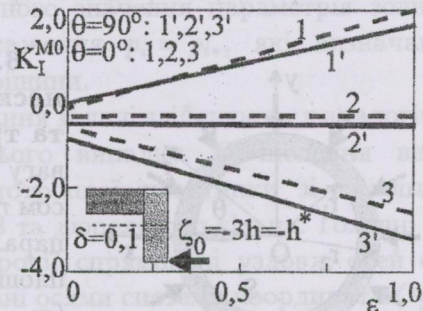


Рис. 12. Залежність зведеного КІН  $K_I^{M_0}$  від ексцентриситету  $\varepsilon$  за рівномірного стиску уздовж краю підкріплення

Виконані обчислення підтвердили істотний вплив ексцентриситету підкріплення на величину КІН на верхній та нижній площинах анізотропної пластинки за дії стискувальних зусиль. Зокрема, якщо ексцентриситет підкріплення найбільший ( $\varepsilon = 1$ ), то нормальні напруження у бездефектній пластинці та відповідно КІН  $K_I^{M_0}$  у точці виходу на підкріплення  $\theta = \pi/2$  нижньої площини пластинки є від'ємними і більшими за модулем у 4,7 рази

(див. рис. 11) порівняно із симетричним підкріпленням. Тобто у цьому місці несиметричність підкріплення ще більше забезпечує конструкцію від крихкого руйнування. А ось у відповідній точці верхньої площини напруження і КІН змінюють знак, стаючи додатними. Цим, навіть за умов стиску, створюються передумови крихкого руйнування конструкції. Розрахунки підтвердили сподівання, що під час згину пластинки прикладеними до кільця рівномірно розподіленими моментами несиметричність підкріплення майже не впливає на величину найбільших напружень та КІН на периферії пластинки, хоча може змінити характер їхнього розподілу в області контакту з підкріпленням.

Граничні значення параметрів зовнішнього навантаження шукаємо аналогічно попередньому за допомогою співвідношень (1), (13), (14) і (17) для попередньо з'ясованих механічних характеристик матеріалів, їх тріщиновитримності та функцій  $\varphi_j^M(E_k, \nu_k)$  ( $j = 1, 2, 3$ ).

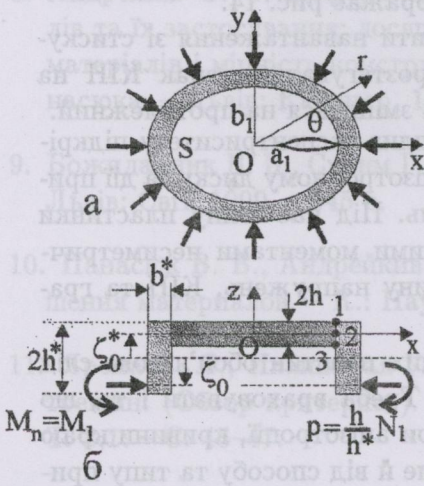


Рис. 13. Схема задачі для підкріпленого еліптичного диска з тріщиною

**7. Анізотропний еліптичний диск з тріщиною та несиметрично підкріпленням краєм.** Розглянуто пружну рівновагу анізотропної еліптичної пластинки завтовшки  $2h$ , що має у кожній точці площини пружної симетрії паралельну до серединної площини  $xOy$ . Край  $L \sim L_1$  ( $m = 1$ ) області  $S$  диска несиметрично підкріплений з ексцентриситетом  $\zeta_0^*$  ізотропним кільцем сталого поперечного перерізу (рис. 13). Пластинка вільна від впливу зовнішніх зусиль, а до краю підкріплювального кільця прикладені згинальні моменти  $M_n = M_1$  та розподілені зусилля з нормальною та дотичною складовими  $N_1, T_1$ . На край підкріплення з боку пластинки перпендикулярно до нього при  $\theta = 0$  виходить прямолінійна тріщина завдовжки  $l$ .

Для визначення основного поля напружень  $\sigma(p_i), m(p_i), \tau(p_i)$  поблизу межі поділу матеріалів бездефектної конструкції за основу взято крайові умови (II.1.11) праці [6], де з огляду на те, що завжди  $r_1 < r_0$ , вибрано нижній знак. Використано конформне відображення області  $S$  комплексної змінної  $z = x + iy$  у пластині, якою є еліпс з півосями  $a_1, b_1$  у напрямках осей  $x$  та  $y$  відповідно, та відповідних їй математичних областей узагальнених комплексних змінних на внутрішність кола одиничним радіусом, і подання відповідних комплексних потенціалів у вигляді рядів за поліномами Фабера, коефіцієнти яких знаходяться з безмежної системи лінійних алгебричних рівнянь.

Розглянуто навантажування: нормальним рівномірним уздовж периметра тиском  $p = Nh/h^* = const$  дюралюмінієвого кільця, що охоплює ортотропну склотекстолітову (КАСТ-В) пластину. Геометричні параметри такі:  $\alpha = 3; \gamma = 3; \delta = 0,1; m = 0,2; \varepsilon = 0 \dots 1$ . Як і у попередньому випадку, якщо

ексцентриситет підкріплення нульовий і площина дії зусиль

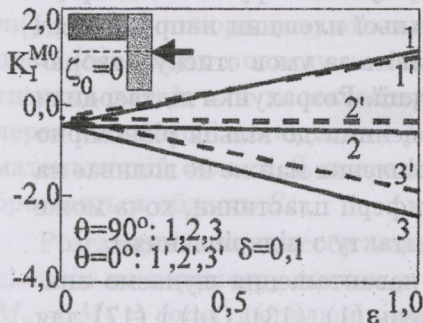


Рис. 14. Залежність зведеного КІН  $K_I^{M0}$  від ексцентриситету  $\varepsilon$  за рівномірного стиску у серединній площині підкріплення

збігається з площиною осі стрижня, то нормальні напруження всередині пластинки завжди стискаючі і руйнування не відбуватиметься. Однак, якщо підкріплення несиметричне або (і) площина дії навантаження зсувається до краю підкріплення, то у певних площинах пластинки можуть виникнути розтягувальні напруження. Залежність безрозмірного зведеного КІН  $K_I^{M0}$  (17) для несиметрично підкріпленої пластинки ( $\varepsilon = 1$ ,  $\zeta_0 = -3h = -h^*$ ), коли площина дії зусиль збігається з площиною осі стрижня відображає рис. 14.

Якщо змінити навантаження зі стискувального на розтягувальне, знак КІН на рис. 11, 12, 14 зміниться на протилежний.

Отримані результати засвідчують істотний вплив ексцентриситету підкріплення на величину напружень в еліптичному анізотропному диску за дії прикладених до підкріплення стискувальних зусиль. Під час згину пластинки прикладеними до кільця рівномірно розподіленими моментами несиметричність підкріплення майже не впливає на величину напружень, КІН та граничного навантаження у пластині.

Отже, у розрахунках на міцність підкріплених пластин обов'язково слід брати до уваги несиметричність підкріплення. Треба враховувати і те, що вплив несиметричності залежить не лише від міри анізотропії, кривини краю пластинки, інших параметрів геометрії задачі, але й від способу та типу прикладуваного навантаження.

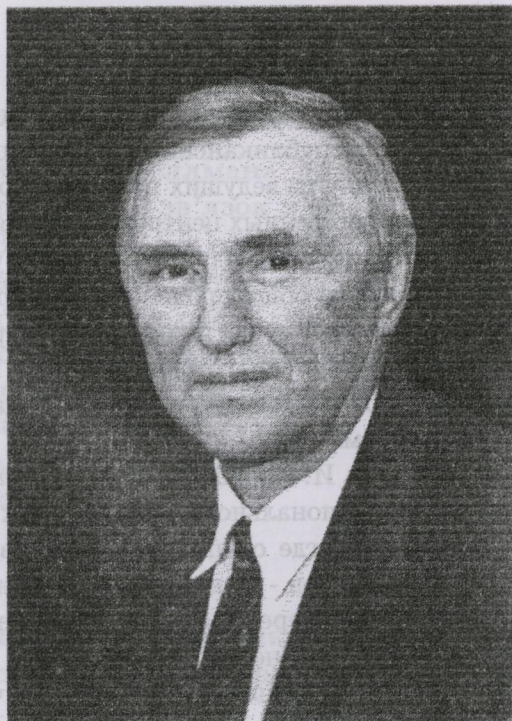
Зазначимо, що запропонований метод можна успішно використовувати без змін у випадку сукупностей і систем тріщин, що перебувають на великій відносній відстані та у випадку тріщин всередині підкріплюваної області.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Савин Г. Н. Распределение напряжений около отверстий. — К.: Наук. думка, 1968. — 888 с.
2. Савин Г. М., Тульчій В. І. Довідник з концентрації напружень. — К.: Вища школа, 1976. — 412 с.
3. Савин Г. Н., Флейшман Н. П. Пластинки и оболочки с ребрами жесткости. — К.: Наук. думка, 1964. — 384 с.

4. Шереметьев М. П. Пластинки с подкрепленным краем. – Львов: Изд-во Львов. ун-та, 1960. – 258 с.
5. Мартынович Т. Л., Юринец В. Е. Контактные взаимодействия пластин с упругими элементами. – Львов: Вища школа. Изд-во при Львов. ун-те, 1984. – 160 с.
6. Божидарник В. В. Двовимірні задачі теорії пружності й термопружності структурно-неоднорідних тіл. – Львів: Світ, 1998. – 352 с.
7. Божидарник В. В., Сулим Г. Т. Критерій руйнування анізотропних пластин. // Вісник Тернопільського державного технічного університету, 2000. – Т. 5,3. – С. 12–19.
8. Андрейків О. Є. Деформаційні критерії в механіці руйнування матеріалів та їх застосування: досягнення і перспективи. // Механіка руйнування матеріалів і міцність конструкцій (вип. 2): У 3-х т. / За заг. ред. В. В. Панасюка. – Львів: Каменяр, 1999. – Т. 2. – С. 11–34.
9. Божидарник В. В., Сулим Г. Т. Елементи теорії пластичності та міцності. – Львів: Світ, 1999. – 945 с.
10. Панасюк В. В., Андрейків А. Е., Партон В. З. Основы механики разрушения материалов. – К.: Наук. думка, 1988. – 488 с.
11. Ярема С. Я., Иваницкая Г. С. Предельное равновесие и развитие косых трещин: (Обзор критериев). // Физ.-хим. механика материалов. – 1986. – Т. 2,1. – С. 45–47.
12. Лехницкий С. Г. Теория упругости анизотропного тела. – М.: Наука, 1977. – 416 с.
13. Павлычко В. М., Сулим Г. Т. Плоская задача для линейных включений на границе раздела анизотропных материалов. Львов, 1987. 11 с. – Ред. журн. “Физ.-хим. механика материалов”. Деп. в ВИНТИ 15 янв. 1987 г., N 330-B87.
14. Сулим Г. Т., Шевчук С. П. Плоская задача для кусково-однородного анизотропного тела зі стрічковим пружним включенням. // Физ.-хим. механика материалов. – 1999. – Т. 35,6. – С. 7–16.
15. Kasano H., Watanabe T., Matsumo H., Nakahara I. Plane elastostatic analysis of a crack passing through a bi-material interface. // JSME, 1987. – 30. – No 267. – P. 1375–1382.
16. Божидарник В. В., Сулим Г. Т. Елементи теорії пружності. – Львів: Світ, 1994. – 560 с.

17. Божидарник В. В., Сулим Г. Т. Метод колокацій розв'язання системи сингулярних інтегральних рівнянь. // Вісн. Львів. політехн. ін-ту. – 1990. – Вип. 242. – С. 8–13.
18. Божидарник В. В., Сулим Г. Т. Использование экстраполяции по Ричардсону при решении сингулярных интегральных уравнений. // Вестн. Львов. политехн. ин-та. Львов: Вища школа. Изд-во при Львов. ун-те, 1988. – Вип. 224. – С. 98–102.
19. Андрейкив А. Е. Разрушение квазихрупких тел с трещинами при сложном напряженном состоянии. – К.: Наук. думка, 1979. – 144 с.



## ВАЛЕРИЙ ИВАНОВИЧ КОРОБОВ

*К шестидесятилетию со дня рождения*

Не так давно исполнилось 60 лет одному из замечательных украинских математиков, профессору Харьковского национального университета Валерию Ивановичу Коробову.

Валерий Иванович родился 27 сентября 1941 г. в селе Сторожевое Давыдовского района Воронежской области в семье служащих.

В 1957 г., в возрасте 15 лет, поступил на математическое отделение физико-математического факультета Харьковского государственного университета. По окончании университета Валерий Иванович был оставлен на кафедре высшей математики ХГУ в должности ассистента. В 1964 г. поступает в аспирантуру при механико-математическом факультете Московского университета. В 1969 г. на Ученом совете ВЦ АН СССР защищает кандидатскую, а в 1983 г. на Ученом совете института математики и механики Уральского научного центра АН СССР (г. Свердловск) докторскую диссертацию на тему "Методы решения задач синтеза, управляемости". В 1967 г., после окончания аспирантуры, Валерий Иванович возвращается в Харьковский университет и становится вначале ассистентом, затем доцентом кафедры вычислительной математики. С момента открытия 1 сентября 1971 г. кафедры дифференциальных уравнений и управления ее бессменно возглавляет Валерий Иванович Коробов. Кафедра сразу же заявила о себе глубокими исследованиями по проблемам

оптимального управления и дифференциальных уравнений, результаты которых публиковались в ведущих математических изданиях, докладывались на международных, всесоюзных и республиканских конференциях. В короткие сроки кафедра превратилась в одну из ведущих на механико-математическом факультете и стала одним из отечественных центров развития математической теории управления. С 1972 года при кафедре функционирует под руководством Валерия Ивановича Коробова общегородской семинар по теории оптимального управления. С первых дней существования кафедры значительную часть времени В. И. Коробов уделяет подготовке молодых научных кадров. Еще, не будучи доктором наук, он подготовил шесть кандидатов наук, из них трое впоследствии стали докторами наук.

Основные научные интересы В. И. Коробова сосредоточены в теории дифференциальных уравнений, функционального анализа и их приложениям к задачам оптимального управления, где он получил ряд результатов фундаментального характера. В.И. Коробов - признанный авторитет по проблеме синтеза решений управляемых дифференциальных уравнений, лежащей на стыке теории дифференциальных уравнений, управления и теории устойчивости. В. И. Коробовым построена общая теория аналитического решения проблемы позиционного синтеза, основанная на введенной им функции управляемости, являющаяся дальнейшим развитием прямого метода А. М. Ляпунова. Валерий Иванович Коробов создал конструктивные методы построения допустимого управления для различных классов управляемых систем дифференциальных уравнений. В проблеме моментов, вместе со своим учеником Г. М. Скляром дал ряд принципиально новых постановок задач и методов их решения, что позволило, в частности, решить проблему о линейном быстродействии. В. И. Коробов провел фундаментальные исследования по теории управляемых дифференциальных уравнений в бесконечномерных пространствах. Широкой известностью пользуются результаты В. И. Коробова по точной и приближенной управляемости, стабилизации, по обоснованию метода допустимого и оптимального синтеза.

Всего В. И. Коробовым опубликовано 110 научных работ. Научные труды и научно-педагогическая деятельность Валерия Ивановича завоевали ему широкое признание.

Ученики, сотрудники и редколлегия журнала желают Валерию Ивановичу новых успехов в его творческой деятельности.

## АНОТАЦІЇ

УДК 517.977

**Розв'язок рівняння Беллмана для задачі швидкодії для канонічної системи та його зв'язок з проблемою моментів.**

К о р о б о в В. І., С м о р ц о в а Т. І. – Вісн. Харк. нац. ун-ту., 2002, № 542. Математика, прикладна математика і механіка, с. 3–12.

У статті пропонується природний підхід до розв'язання рівняння Беллмана як рівняння з частинними похідними першого порядку. Подано конструктивне розв'язання вказаного рівняння для задачі швидкодії для канонічної системи  $n$ -го порядку. Отримано зв'язок способу, що пропонується для розв'язання рівняння Беллмана, з проблемою моментів.

Бібліогр.: 3 найм.

УДК 532.542:612.133

**Застосування методу інтегральних співвідношень для дослідження руху в'язкої рідини по трубах, що деформуються.**

Б о й ч у к І. П., Т а р а п о в І. Є. – Вісн. Харк. нац. ун-ту., 2002, № 542. Математика, прикладна математика і механіка, с. 13–18.

Розглянуто застосування методу інтегральних співвідношень для дослідження нестационарного руху в'язкої рідини по трубах змінного перетину, для яких характерний розмір поперечного перетину значно менше довжини труби. Показано, що цей прийом можна в ряді випадків ефективно використати для вивчення руху крові по тонких судинах.

Бібліогр.: 6 найм.

УДК 517.968+517.956

**Граничні рівняння в задачах динаміки кусково-однорідних пластин.**

Г а с с а н Ю. С. – Вісн. Харк. нац. ун-ту., 2002, № 542. Математика, прикладна математика і механіка, с. 19–27.

В роботі розглянуто контактну задачу динаміки тонких пружних пластин. За допомогою теорії потенціалів ця задача зводиться до систем граничних рівнянь, однозначна розв'язність яких доводиться у однопараметричній шкалі просторів соболевського типу.

Бібліогр.: 7 найм.

УДК 517.15

**Інтеграл з ядрами, що містять логарифми.**

Г р и ш и н А. П., П о є д и н ц е в а І. В. – Вісн. Харк. нац. ун-ту., 2002, № 542. Математика, прикладна математика і механіка, с. 28–34.

В цій роботі одержано асимптотичний розклад для інтегралів двох різних типів. Інтеграли першого типу вміщують ядра, які є дробово-лінійними функціями від  $r^{\pi\alpha}$  за змінною  $r$ . Ми отримуємо асимптотичний розклад за степенями  $\frac{1}{r}$ , що вміщує  $n$  членів ( $n$  залежить від  $\alpha$ ). Асимптотичну формулу для інтегралів другого типу отримано за допомогою нестандартного інтегрування частинами.

Бібліогр.: 4 найм.

УДК 517.5

### Принцип максимума для стільтьєсівських пар аналітичних матриць-функцій.

Д ю к а р е в Ю. М. – Вісн. Харк. нац. ун-ту., 2002, № 542. Математика, прикладна математика і механіка, с. 35–41.

Розв'язки багатьох інтерполяційних задач для стільтьєсівських матриць-функцій можуть бути описаними за допомогою дробово-лінійних перетворень над стільтьєсівськими парами. Основним результатом цієї статті є принцип максимума для стільтьєсівських пар. Цей принцип максимума може застосовуватися для вивчення канонічних,  $N$ -екстремальних та головних розв'язків інтерполяційних задач для стільтьєсівських матриць-функцій.

Бібліогр.: 5 найм.

УДК 517.956.225

### Задача Діріхле для рівняння Лапласа у напівпросторі з циліндричною порожниною.

П р о ц е н к о В. С., П о п о в а Н. А. – Вісн. Харк. нац. ун-ту., 2002, № 542. Математика, прикладна математика і механіка, с. 42–51.

За допомогою узагальненого методу Фур'є розв'язано задача Діріхле для рівняння Лапласа у напівпросторі з циліндричною порожниною. Використання теорем складання для розв'язків рівняння Лапласа в декартовій та циліндричній системах координат дозволило звести задачу до нескінченної системи лінійних алгебраїчних рівнянь з цілком неперервним оператором. Система розв'язано за допомогою методу редукції. Проведено розрахунки для конкретних значень параметрів та заданих на межі функцій.

Мал.: 1. Бібліогр.: 5 найм.

УДК 517.5

### Про деякі класи нестационарних кривих, які породжуються нелінійними операторними рівняннями у гільбертових просторах.

Ш а х а д е А с а д і – Вісн. Харк. нац. ун-ту., 2002, № 542. Математика,

прикладна математика і механіка, с. 52–58 .

У статті в термінах  $K(t, s) = \langle z_t, z_s \rangle$  вивчаються криві в гільбертовому просторі, які породжуються задачею Коші  $\frac{dz_t}{dt} = A(t)z_t$ ,  $z_t|_{t=0} = z_0$ , де  $A(t)$  – сукупність обмежених самоспряжених операторів, розвинення одиниці яких не залежить від  $t$ . За допомогою додаткових умов на  $K(t, s)$  одержано нелінійні операторні рівняння для  $A(t)$ , які дозволяють побудувати розв’язок задачі Коші в уявній формі.

Бібліогр.: 5 найм.

УДК 517.9:535.4

**Регуляризація задачі електростатики на нескінченному конусі і двох сферичних сегментах.**

В а р я н и ц а Л. А., Р е з у н е н к о В. А. . – Вісн. Харк. нац. ун-ту., 2002, № 542. Математика, прикладна математика і механіка, с. 59–68 .

Одержано регулярний розв’язок задачі електростатики. Виділена і методом контурного інтегрування знайдена головна частина оператора задачі, потім обернена за допомогою інтегрального перетворення типу Абеля. Одержана система двох незв’язаних інтегральних рівнянь Фредгольма II роду, виявлена ефективна розв’язуваність цих рівнянь.

Бібліогр.: 17 найм.

УДК 517.5

**До питання про ефективне обернення позитивно-визначених матриць Ганкеля-Адамара.**

Л и с е н к о Ю. В., О в ч а р е н к о І. Е., У г р и н о в с к и й Р. А. – Вісн. Харк. нац. ун-ту., 2002, № 542. Математика, прикладна математика і механіка, с. 69–72 .

В роботі запропонований алгоритм обернення позитивно-визначених матриць Ганкеля-Адамара заснований на методах проблеми моментів.

Бібліогр.: 1 найм.

УДК 517.518.6

**Мероморфні майже періодичні функції та їх неперервне продовження на Боровський компакт.**

П а р ф ь о н о в а Н. Д. – Вісн. Харк. нац. ун-ту., 2002, № 542. Математика, прикладна математика і механіка, с. 73–84 .

Вводиться поняття модуля для мероморфних майже періодичних функцій в смузі, вивчаються його властивості та зв’язок з модулями дивізорів нулів та полюсів. Доведено, що мероморфна майже періодична функція дозволяє неперервне продовження на Боровську компактифікацію смуги, що відповідає її модулю.

Бібліогр.: 11 найм.

УДК 517.934

**Про аналітичне зображення класів керувань, що розв'язують задачі керованості та стабілізації.**

Луценко А. В., Скляр Е. В. – Вісн. Харк. нац. ун-ту., 2002, № 542. Математика, прикладна математика і механіка, с. 85–95.

Досліджується можливість побудови класів керувань, що розв'язують задачі керованості та стабілізації для лінійних систем. Одержано в явній формі класи підсумованих керувань, що розв'язують вказані задачі.

Бібліогр.: 12 найм.

УДК 517.518.6

**Голоморфні майже періодичні функції у трубчатій області.**

Додова І. Л. – Вісн. Харк. нац. ун-ту., 2002, № 542. Математика, прикладна математика і механіка, с. 96–105.

Існує ряд теорем, стверджуючих, що з голоморфності функції у смузі та майже періодичності на одній прямій при деяких умовах виходить майже періодичність у всій смузі голоморфності. В роботі ці теореми переносяться на голоморфні функції в трубчатій області; при цьому, крім рівномірної метрики, розглянута метрика Степанова.

Бібліогр.: 10 найм.

УДК 517.968+517.956

**Граничні рівняння задачі динаміки термопружних середовищ з крайовими умовами змішаного типу.**

Думіна О. О. – Вісн. Харк. нац. ун-ту., 2002, № 542. Математика, прикладна математика і механіка, с. 106–117.

Розглянуто задачу динаміки термопружних середовищ з крайовими умовами змішаного типу. Її розв'язок представлено сумою динамічних аналогів термопружних потенціалів простого та подвійного шарів. Таке представлення приводить до системи парних нестационарних граничних рівнянь. Доведено однозначну розв'язуваність цієї системи в однопараметричній шкалі функціональних просторів соболевського типу.

Бібліогр.: 6 найм.

УДК 517.574

**Канонічний інтеграл Вейерштрасса для субгармонійних функцій нескінченного порядку.**

Васильків Я. В., Процик Ю. С.

– Вісн. Харк. нац. ун-ту., 2002, № 542. Математика, прикладна математика і механіка, с. 118–130.

Для довільних невід’ємних борелівських в  $\mathbf{R}^m$  ( $m \geq 2$ ) мір  $\mu$  таких, що  $\mu(\{y \in \mathbf{R}^m : |y| \leq r\})r^{2-m} \leq \nu(r)$ ,  $r > 0$ , де  $\nu$  — функція зростання нескінченного порядку, побудовано канонічні інтеграли Вейерштрасса (субгармонійні в  $\mathbf{R}^m$  функції  $u$  з мірами Ріса  $\mu_u = \mu$ ) і знайдено мажоранти зростання  $\lambda(r)$  функцій  $B(r, u) = \max\{u(y) : |y| \leq r\}$ , природним чином пов’язані з функціями  $\nu(r)$ . Як наслідок, встановлено аналог одного результату Г. Скоди для цілих в  $\mathbf{C}^n$  функцій нескінченного порядку і наведено явні зображення субгармонійних в  $\mathbf{R}^m$  ( $m \geq 2$ ) функцій  $u$  нескінченного порядку з мінімальним, у певному сенсі, зростанням функції  $B(r, u)$ .

Бібліогр.: 22 найм.

УДК 539:30

**Динаміка пластини, що взаємодіє із в’язкою нестискувасною рідиною.**

Іє в лє в І. І. – Вісн. Харк. нац. ун-ту., 2002, № 542. Математика, прикладна математика і механіка, с. 131–135.

У роботі розглядається динаміка круглої пластини, що закриває циліндричну судину, повністю заповнену в’язкою нестискувасною рідиною. Задача вирішується приблизно із залученням методу Галеркіна і перетворення Лапласа по часу. Отримано вираження для логарифмічного декременту затухання малих коливань.

Мал.: 1. Бібліогр.: 3 найм.

УДК 517.977+512.64.643.8

**Про одне питання Петренка для цілих функцій двох комплексних змінних.**

М а р ч е н к о І. – Вісн. Харк. нац. ун-ту., 2002, № 542. Математика, прикладна математика і механіка, с. 136–138.

Будується ціла функція двох комплексних змінних, помалу зростаюча по одній з них, для якої множина дефектних значень збігається зі всією комплексною площиною. Цей приклад дає відповідь на питання В.П. Петренка.

Бібліогр.: 4 найм.

УДК 517.522

**Про стійкість системи двох зв’язаних стохастичних осциляторів.**

Ж е л е з н я к о в а Е. Ю.

– Вісн. Харк. нац. ун-ту., 2002, № 542. Математика, прикладна математика і механіка, с. 139–144.

У роботі розглядається система двох лінійних зв'язаних осциляторів з випадковими марківськими скінченнозначними коефіцієнтами. Отримані точні рівняння для моментів першого та другого порядку рішення, що засновані на переході до відповідної системи інтегральних рівнянь Вольтерра та усередненні ітерацій цих рівнянь. При тому аналіз стійкості у середньому або середньоквадратичному зводиться до дослідження корнів відповідного характеристического полінома.

Бібліогр.: 8 найм.

УДК 517.977.1

### **Чисельне розв'язання нерівних рівнянь в задачі швидкодії.**

Г а в р и л я к о В. М., С о к о л о в А. В. – Вісн. Харк. нац. ун-ту., 2002, № 542. Математика, прикладна математика і механіка, с. 145–148.

Метою цієї роботи є визначення доцільності застосування генетичних алгоритмів при чисельному розв'язанні задач оптимізації, в яких градієнт функціонала має розрив першого роду на множині, що має заделегідь відому структуру.

Бібліогр.: 3 найм.

УДК 517.958+536.71

### **Про деякі нелінійні систему рівнянь типу Бюргерса.**

С о х і н А. С. – Вісн. Харк. нац. ун-ту., 2002, № 542. Математика, прикладна математика і механіка, с. 149–154.

Стаття містить постановку і метод розв'язання нелінійної двокомпонентної системи рівнянь типу Бюргерса.

Бібліогр.: 5 найм.

УДК 539.3; 624.04

### **Міцність ослаблених тріщинами анізотропних пластин.**

Б о ж и д а р н и к В. В. – Вісн. Харк. нац. ун-ту., 2002, № 542. Математика, прикладна математика і механіка, с. 155–170.

Розвинуто метод наближеного визначення гранично-рівноважного стану анізотропних пластин із несиметрично підкріпленим краєм і ослаблених тріщинами, коли вони піддані дії згину та розтягу згинальними моментами, перерізувальними силами й напруженнями з нормальною та дотичною складовими у площині пластинки. Розглянуті приклади підкріплення стрижнем прямокутного профілю круглого та еліптичного отвору у необмеженій ортотропній пластинці і круглого та еліптичного ортотропного диску.

Мал.: 14. Бібліогр.: 19 найм.

## ЗМІСТ

- Коробов В. И., Сморцова Т. И.** Решение уравнения Беллмана для задачи быстрогодействия для канонической системы и его связь с проблемой моментов 3
- Бойчук И. П., Тарапов И. Е.** Применение метода интегральных соотношений для изучения движения вязкой жидкости по деформирующимся трубам 13
- Гассан Ю. С.** Граничные уравнения в задачах динамики кусочно-однородных пластин 19
- Grishin A. F., Poedintseva I. V.** The integrals with kernels including logarithms 28
- Дюкарев Ю. М.** Принцип максимума для стилтьесовских пар аналитических матриц-функций 35
- Проценко В. С., Попова Н. А.** Задача Дирихле для уравнения Лапласа в полупространстве с цилиндрической полостью 42
- Шахаде Асади О** некоторых классах нестационарных кривых, порождаемых нелинейными операторными уравнениями в гильбертовых пространствах 52
- Варяница Л. А., Резуненко В. А.** Регуляризация задачи электростатики на бесконечном конусе и двух сферических сегментах 59
- Лысенко Ю. В., Овчаренко И. Е., Угриновский Р. А.** К вопросу об эффективном обращении положительно-определенных матриц Ганкеля-Адамара 69
- Парфёнова Н. Д.** Мероморфные почти периодические функции и их непрерывное продолжение на Боровский компакт 73
- Луценко А. В., Скляр Е. В.** Об аналитическом представлении классов управлений, решающих задачи управляемости и стабилизации 85
- Удодова О. И.** Голоморфные почти периодические функции в трубчатой области 96

- Думина О. А.** Граничные уравнения в задаче динамики термоупругих сред с краевыми условиями смешанного типа 106
- Васильків Я. В., Процик Ю. С.** Канонічний інтеграл Вейєрштрасса для субгармонійних функцій нескінченного порядку 118
- Иевлев И. И.** Динамика пластины, взаимодействующей с вязкой несжимаемой жидкостью 131
- Марченко И. И.** Об одном вопросе Петренко для целых функций двух комплексных переменных 136
- Железнякова Э. Ю.** Об устойчивости системы двух связанных стохастических осцилляторов 139
- Гавриляко В. М., Соколов А. В.** Численное решение негладких уравнений в задаче быстрогодействия 145
- Сохин А. С.** О некоторой нелинейной системе уравнений типа Бюргера 149
- Божидарник В. В.** Міцність ослаблених тріщинами анізотропних пластин з несиметрично підкріпленням краєм 155
- Валерий Иванович Коробов.** К шестидесятилетию со дня рождения 171
- АНОТАЦІЇ** 173

## CONTENTS

- Korobov V. I., Smortsova T. I.** The solution of the Bellmann equation for the steering problem and its connection with the moment problem 3
- Boichuk I. P., Tarapov I. E.** Application of a momentum integral model to studying viscous liquid motion through deforming tubes 13
- Gassan Y. S.** Boundary Equations in Dynamic Problems for Thin the Piecwise Homogeneous Plates 19
- Grishin A. F., Poedintseva I. V.** The integrals with kernels including logarithms 28
- Dyukarev Yu. M.** The principle of maximum for Stieltjes pairs of analytical matrix-valued functions 35
- Protchenko V. S., Popova N. A.** The Dirichlet problem for the Laplace equation in the semispace with the cylindrical cavity 42
- Shahadeh Assadi** About some classes of non-stationary curves generated by nonlinear operator equations in Hilbert spaces 52
- Varyanitzha L. A., Rezunenکو V. A.** Regularization of the electrostatic problem on the infinite cone and two spherical segments 59
- Lysenko Y. V., Ovcharenko I. E., Ugrinovskiy R.** To the Problem of Effective Inversion of Positive-Definite Hankel-Hadamard 69
- Parfyonova N. D.** Meromorphic almost periodic functions and their continuous extension to the Bohr's compactification of the strip 73
- Lutsenko A. V., Sklyar E. V.** On analytical representation of classes of controls solving the problems of controllability and stabilization 85
- Udodova O. I.** Holomorphic functions in a tube domain, which are almost periodic 96
- Dumina O. A.** Boundary equations in the dynamic problem for thermoelastic media with mixed boundary conditions 106

<b>Vasyl'kiv Ya. V., Protsyk Yu. S.</b> Canonical Weierstrass integral for subharmonic functions of infinite order	118
<b>Ievlev I. I.</b> The dynamics of the plate which is interacting with the viscid incompressible liquid	131
<b>Marchenko I. I.</b> On a question of Petrenko for entire functions of two complex variables	136
<b>Zheleznyakova E. Yu.</b> The stability of system of two couple stochastic oscillators	139
<b>Gavrylyako V. M., Sokolov A. V.</b> Numerical Solution of Nonsmooth Equations in Optimal Speed Problem	145
<b>Sokhin A. S.</b> On some nonlinear system of equations of Burger type	149
<b>Bozhydarnyk V. V.</b> The strength of loosed by cracks anisotropic plates with antisym-metric strengthened boundary	155
<b>Valery Ivanovich Korobov.</b> On his 60th birthday	171
<b>SUMMARY</b>	173
<b>Shahadeh Asadi</b> About some classes of non-stationary curves generated by nonlinear operator equations in Hilbert spaces	
<b>Varvintsa I. A., Reznunenko V. A.</b> Regularization of the electrostatic problem on the infinite cone and two spherical segments	59
<b>Iyenko Y. V., Ovcharenko I. E., Ugrinovsky R.</b> To the Problem of Effective Inversion of Positive-Definite Hankel-Hadamard	69
<b>Parfionova N. D.</b> Meromorphic almost periodic functions and their continuous extension to the Bohr's compactification of the strip	73
<b>Iatsenko A. V., Sklyar E. V.</b> On analytical representation of classes of controls solving the problems of controllability and stabilization	85
<b>Udobova O. I.</b> Holomorphic functions in a tube domain, which are almost periodic	99
<b>Dumina O. A.</b> Boundary equations in the dynamic problem for thermoelastic media with mixed boundary conditions	109

## Visit our Web-page

<http://www-mechmath.univer.kharkov.ua/vestnik/>

to find

- Information for Manuscript Preparation
- Abstracts
- Editorial Board

*Збірник наукових праць*

Вісник Харківського національного університету

№ 542

Серія "Математика, прикладна математика і механіка"

Підписано до друку 20.02.2002 р.

Формат 70 × 108/16. Папір офсетний.

Умовн.- друк. арк. – 10,2

Обл.- вид. арк. – 12,7

Наклад 400 прим.

Ціна договірна

5.70

61077, Харків, м. Свободи, 4, Харківський національний університет

Видавничий центр ХНУ.

Надруковано ПП "Азамаєв".

- Vasylykiv Ya. V., Protsyk V. I. Integral for subharmonic functions of infinite order 118
- Ievlev I. I. The dynamics of the plate which is interacting with the viscid incompressible liquid 131
- Marchenko I. I. complex variables 136
- Zheleznyakova E. Yu. The stability of systems of two couple stochastic oscillators 140
- Gavrylyako V. M., Sokolov A. V. Numerical Solution of Nonlinear Equations in Optimal Speed Problem 145
- Sokhin A. S. On some nonlinear system of equations of Burger type 149
- Bozhydarnyk V. V. The strength of loosened by cracks anisotropic plates with antisymmetric strengthened boundary 155
- Valery Ivanovich Korobov. On his 10th birthday 171

## SUMMARY

Відбито в друку 20.02.2002 р.  
 Формат 70 × 108/16. Папір офсетний.  
 Умовн.-друк. зб. - 10,2  
 Обл.-вкл. друк. - 12,7  
 Наклад 400 прим.  
 Ціна доручення 2,40

Надруковано в ПП "Азія" в м. Львів, вул. Шевченка, 4.  
 Видавничий центр ХНУ.  
 61077, Львів, м. Євродол, 4, Харківський національний університет

