ВЕСТНИК ХАРЬКОВСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

СЕРИЯ МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАЯ

Том 32 1966

Записки механико-математического факультета
и Харьковского математического общества

ОБ ОБРАТНОМ УСЛОВИИ ГЕЛЬДЕРА

А. Д. Мышкис

А. И. Перов в устной беседе поставил интересный вопрос о существовании непрерывных векторнозначных функций $f(t)$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$, удовлетворяющих для некоторых $C > 0$, $N > 1$ «обратному условию Гельдера»

$$|f(t_1) - f(t_2)| \geqslant C|t_1 - t_2|^{\frac{1}{N}} \tag{1}$$

при любых $t_1, t_2 \in [0, 1]$. Здесь будет дан положительный ответ на этот вопрос и указана зависимость N от размерности $n \geqslant 1$ пространства R^n значений $f(t)$. Под $|x|$ при $x \in R^n$ мы будем для определенности понимать обычную эвклидову норму.

Теорема. *При $N > n$ функции с указанным свойством нет (даже если не требовать ее непрерывности); при любом $N < n$ такая функция имеется.*

Доказательство. Допустим, что функция $f(t)$ со значениями в R^n удовлетворяет неравенству (1). На основании известной теоремы Бэра существует такое множество T, всюду плотное на некотором отрезке $[a, b]$ $(0 \leqslant a < b \leqslant 1)$, что $\sup\limits_{t \in T} |f(t)| = R < \infty$. Зададимся натуральным M и выделим значения $t_1, \ldots, t_M \in T$ так, чтобы $t_{i+1} - t_i > \frac{b-a}{M}$ $(i = 1, \ldots, M-1)$. Тогда в силу (1) попарные расстояния точек $f(t_i)$ превосходят

$$\rho = C\left(\frac{b-a}{M}\right)^{\frac{1}{N}}.$$

Сумма (n-мерных) объемов шаров радиуса $\frac{\rho}{2}$ с центрами в этих точках равна

$$M\omega_n\left(\frac{\rho}{2}\right)^n = \omega_n\left(\frac{c}{2}\right)^n (b-a)^{\frac{n}{N}} M^{1-\frac{n}{N}},$$

где ω_n — объем единичного n-мерного шара. Но эта сумма не может превосходить $\omega_n\left(R + \frac{\rho}{2}\right)^n$ и мы приходим к неравенству

$$\left(\frac{c}{2}\right)^n (b-a)^{\frac{n}{N}} M^{1-\frac{n}{N}} \leqslant \left[R + \frac{c}{2}\left(\frac{b-a}{M}\right)^{\frac{1}{N}}\right]^n,$$

откуда при $N > n$ и $M \to \infty$ получаем противоречие. Первое утверждение теоремы доказано.

Доказательство второго утверждения будет проведено с помощью непосредственной конструкции, напоминающей кривую Пеано. Зададимся натуральным n и будем под $K[x, y]$ понимать n-мерный куб в R^n с ребрами, параллельными осям координат, и диагональю xy. Выберем некоторое натуральное $q \geqslant 2$ и рассмотрим какую-либо конечную последовательность точек $x_0, \ldots, x_Q \in R^n$, обладающую следующими свойствами:

1) $x_0 = (0; 0; \ldots; 0)$, $x_Q = (1; 1; \ldots; 1)$;

2) координаты каждой из точек $x_1, \ldots, x_{Q-1}$ содержатся среди чисел $\frac{1}{q}, \frac{2}{q}, \ldots, \frac{q-1}{q}$; таким образом, все точки x_i содержатся в кубе $K = K[x_0, x_Q]$;

3) каждая из координат точки x_i $(i = 0, \ldots, Q-1)$ отличается от соответствующей координаты точки x_{i+1} на $\frac{1}{q}$;

4) все точки $x_0, \ldots, x_Q$ попарно различны;

5) все кубы $K_i = K[x_i, x_{i+1}]$ $(i = 0, \ldots, Q-1)$ попарно различны.

Положим

$$f\left(\frac{i}{Q}\right) = x_i \quad (i = 0, \ldots, Q).$$

Дальнейшую конструкцию будем проводить так, чтобы образ каждого отрезка $\left[\frac{i}{Q}, \frac{i+1}{Q}\right]$ содержался в K_i. Чтобы определить $f\left(\frac{i}{Q} + \frac{j}{Q^2}\right)$ $(j = 1, \ldots, Q-1)$, уменьшим подобно куб K с нанесенными на него точками x_i в q раз и совместим его с K_i так, чтобы бывшие точки x_0, x_Q совпали с x_i, x_{i+1}; после этого положим

$$f\left(\frac{i}{Q} + \frac{j}{Q^2}\right) = x_{ij},$$

где x_{ij} — точка, полученная из x_j после указанного совмещения. (Отметим, что это совмещение неоднозначно, однако это для дальнейшего не существенно; впрочем, чтобы избежать применения аксиомы Цермело, нетрудно было бы указать единообразный способ совмещения). В дальнейшем будем следить за тем, чтобы образ отрезка $\left[\frac{i}{Q} + \frac{j}{Q^2}, \frac{i}{Q} + \frac{j+1}{Q^2}\right]$ $(j = 0, \ldots, Q-1)$ целиком содержался в кубе $K_{ij} = K[x_{ij}, x_{i,j+1}]$.

Далее с помощью подобного уменьшения куба K в q^2 раз и совмещения его с K_{ij} определяем точки $f\left(\frac{i}{Q} + \frac{j}{Q^2} + \frac{l}{Q^3}\right)$ и т. д. Тем самым определяются образы всех Q-ично рациональных точек отрезка $[0, 1]$. При этом для любых двух таких точек t_1, t_2, принадлежащих одному отрезку $\left[\frac{k}{Q^r}, \frac{k+1}{Q^r}\right]$ (k, r целые $\geqslant 0$) $f(t_1)$ и $f(t_2)$ принадлежат одному кубу со стороной q^{-r}. Это дает возможность перейти к пределу и определить значения $f(t)$ для Q-ично иррациональных $t \in (0, 1)$, причем получающаяся функция $f(t)$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$ будет непрерывной.

Перейдем к проверке неравенства (1). Пусть Q^r — минимальный знаменатель всех Q-ично рациональных точек отрезка $[t_1, t_2]$ $(t_1 < t_2)$ (сокращение не производится!). Допустим сначала, что на этом отрезке имеется по крайней мере две точки со знаменателем Q^r. Тогда

$$t_2 - t_1 < Q^{-r+1}. \tag{2}$$

Пусть

$$\frac{l}{Q^{r-1}} \leqslant \frac{Ql+m}{Q^r} \leqslant t_1 \leqslant \frac{Ql+m+1}{Q^r} < \frac{Ql+s}{Q^r} \leqslant t_2 \leqslant \leqslant \frac{Ql+s+1}{Q^r} \leqslant \frac{l+1}{Q^{r-1}} \tag{3}$$

(все числа l, m, s целые $\geqslant 0$). Тогда, если t_1 отличается от какой-либо из указанных в (3) его ближайших границ меньше чем на Q^{-r-1} и t_2 обладает тем же свойством, то в силу свойства 4)

$$|f(t_1) - f(t_2)| > \frac{1}{q^r}\left(\sqrt{2} - 2\frac{\sqrt{n}}{q}\right)$$

(так как $\frac{\sqrt{2}}{q}$ — минимально возможное расстояние между различными точками x_i). Если же t_1 или t_2 не обладают указанным свойством, то в силу свойств 5) и 2)

$$|f(t_1) - f(t_2)| \geqslant \frac{1}{q^{r+1}}.$$

Приняв, что $q \geqslant 2\sqrt{2n}$, получаем с помощью (2) в обоих случаях

$$|f(t_1) - f(t_2)| \geqslant C(q)\,|t_1 - t_2|^{\frac{1}{N}}, \quad \text{где } q^N = Q. \tag{4}$$

Допустим теперь, что на отрезке $[t_1, t_2]$ имеется лишь одна точка со знаменателем Q^r, именно,

$$t_1 \leqslant \frac{l}{Q^r} \leqslant t_2.$$

Обозначим через Q^s $(s \geqslant r+1)$ наименьший из знаменателей Q-ично рациональных дробей на $[t_1, \frac{l}{Q^r})$ и $(\frac{l}{Q^r}, t_2]$. Тогда

$$t_2 - t_1 < \frac{2}{Q^{s-1}}, \quad |f(t_1) - f(t_2)| \geqslant \frac{1}{q^s}$$

и мы вновь приходим к неравенству (4), которое, таким образом, доказано во всех случаях.

Остается проверить, что при достаточно большом q можно выбрать последовательность $x_0, \ldots, x_Q$ так, чтобы имели место свойства 1) — 5) и показатель $N = \frac{\ln Q}{\ln q}$ был как угодно близок к n. Мы непосредственно укажем координаты точек последовательности, для простоты записи умножив эти координаты на q. Начальными точками будут (0; 0; ... ; 0), (1; 1; ... ; 1), (2; 2; ... ;2), (1; 1; ... ; 1; 1; 3), (2; 2; ... 2; 2; 4) и т. д. до (2; 2; ... ; 2; r), где $r = q-1$ или $q-2$. Затем следует (1; 1; ... ; 1; 3; $r-1$), (2; 2; ... ; 2; 4; $r-2$), (1; 1; ... ; 1; 3; $r-3$) и т. д. вплоть до (2; 2; ... ; 2; 4; 2). Далее следует (1; 1; ... ; 1; 5; 1), (2; 2; ... ; 2; 6; 2), (1; 1; ... ; 1; 5; 3) и т. д. Так мы доходим до (2; 2; ... ; 2; r; r) либо (2; 2; ... ; 2; r; 2), после чего следуют (1; 1; ... ; 1; 3; $r-1$; $r-1$), (2; 2; ... ; 2; 4; r; $r-2$), (1; 1; ... ; 1; 3; $r-1$; $r-3$) и т. д. (соответственно (1; 1;...; 1; 3; $r-1$; 1), (2; 2; ... ; 2; 4; r; 2), (1; 1; ... ; 1; 3; $r-1$; 3) и т. д.). С помощью такого видоизмененного алфавитного принципа мы продолжаем построение последовательности, в конце которой находятся точки ($q-2$; ... ; $q-2$), ($q-1$; ... ; $q-1$) и (q; ... ; q). Хотя подсчет точного числа членов этой последовательности может вызвать затруднение, но очевидно, что при большом q это число имеет порядок q^n, например, превосходит $\frac{1}{2}q^n$. Отсюда вытекает наше утверждение о значении N. Теорема полностью доказана.

ЗАМЕЧАНИЯ

1. Естественно ожидать, что при $N = n$ функция с требуемым свойством также существует, однако этот вопрос остается открытым. Тем более не ясны точные условия, при которых подобная функция существует, если (1) заменить на

$$|f(t_1) - f(t_2)| \geqslant \varphi(|t_1 - t_2|), \tag{5}$$

где $\varphi(t)$ ($t \geqslant 0$) заданная неубывающая функция ($\varphi(0) = 0$).

2. Аналогичный вопрос можно поставить для отображений отрезка [0, 1] в произвольное метрическое пространство R; тогда вместо (1) и (5) надо рассматривать неравенства

$$\rho_R(f(t_1), f(t_2)) \geqslant C|t_1 - t_2|^{\frac{1}{N}} \text{ и } \rho_R(f(t_1), f(t_2)) \geqslant$$
$$\geqslant \varphi(|t_1 - t_2|) \quad (0 \leqslant t_1, t_2 \leqslant 1), \tag{6}$$

причем можно дополнительно потребовать непрерывность отображения f. Из доказанной теоремы видно, что получающееся сечение в множестве N является характеристикой размерности R. Эту характеристику, инвариантную относительно преобразований, удовлетворяющих в обе стороны условию Липшица, можно добавить к ряду уже имеющихся (см., например, [1]). Весьма возможно, что для любого (не обязательно целого) $n > 1$ существует пространство «размерности» n в смысле данного замечания (и даже «размерности» n во всех своих точках); однако соответствующие примеры могут оказаться довольно сложными.

Естественно рассматривать также отображения произвольного метрического пространства S в метрическое пространство R; тогда вместо (5) ставится условие

$$\rho_R(f(s_1), f(s_2)) \geqslant \varphi(\rho_S(s_1, s_2)) \quad (s_1, s_2 \in S).$$

В частности, представляет интерес случай, когда S и R — кубы в эвклидовых пространствах.

3. Рассмотренная в замечании 2 характеристика размерности связана с понятиями ε-энтропии и ε-емкости множеств (см., например, [2]). Так, Б. С. Митягин обратил мое внимание на то, что из второго неравенства (6) сразу следует оценка для ε-емкости $C_\varepsilon(R)$

$$C_{\varphi(m^{-1})-h}(R) \geqslant \log_2(m+1)$$

при любых натуральном m и положительном h. Отсюда в силу хорошо известной оценки для ε-емкости множества в n-мерном пространстве вытекает первое утверждение доказанной теоремы.

ЛИТЕРАТУРА

1. И. М. Яглом. Приложение II в книге Л. Тот. Расположения на плоскости, на сфере и в пространстве. Физматгиз, 1958, стр. 337—340.

2. А. Н. Колмогоров и В. М. Тихомиров. ε-энтропия и ε-емкость множеств в функциональных пространствах. «Усп. матем. наук», XIV : 2 (86), 1959, 3—86.