

ЗАМЕЧАНИЕ О ДЕФЕКТАХ МЕРОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ МАЛОГО ПОРЯДКА

И. В. Островский, И. В. Казакова

В этой заметке мы будем пользоваться стандартной для неванлинновской теории терминологией и обозначениями. Буквой S с индексами условимся обозначать положительные абсолютные постоянные.

Из второй основной теоремы Неванлинна следует:

- а) множество дефектных значений мероморфной функции не более, чем счетно;
б) величины дефектов подчинены условию

$$\sum_a \delta(a) \leq 2. \quad (1)$$

А. А. Гольдберг показал [1], [2], что для функций положительного конечного порядка утверждение а) не может быть усилено. Именно, справедлива теорема ([2]): каково бы ни было конечное или счетное множество M точек расширенной комплексной плоскости и каково бы ни было число ρ , $0 < \rho \leq \infty$, существует мероморфная функция порядка ρ , для которой M совпадает с множеством дефектных значений*. Так как функции порядка нуль не могут иметь более одного дефектного значения (Валирон, [4]), то вопрос о структуре множества дефектных значений в настоящее время можно считать полностью решенным.

На вопрос о возможных величинах дефектов окончательный ответ еще не получен. В. Г. Фукс показал [5], что величины дефектов функции конечного порядка должны удовлетворять, кроме б), еще условию

$$\sum_a \sqrt{\delta(a)} \leq C_1 (\rho \ln \rho)^{1/2}, \quad (2)$$

где $\rho = \max(2, \rho)$.

В настоящей работе мы доказываем, что для малых значений ρ оценка (2) может быть существенно улучшена. Имеет место следующая теорема.

Теорема 1. *Если мероморфная функция порядка ρ , $0 < \rho < 1$, обладает по меньшей мере двумя дефектными значениями, то ее дефекты должны удовлетворять условию*

$$\sum_a \sqrt{\delta(a)} \leq C_{2\rho} \sqrt{\cos \pi \rho}, \quad C_2 = \sqrt{35,2\pi} < 10,6. \quad (3)$$

Условие, чтобы дефектных значений было не менее двух, существенно, так как если $f(z)$ имеет только одно дефектное значение** a_0 , то о $\delta(a_0)$ можно утверждать лишь, что

$$0 \leq \delta(a_0) \leq 1.$$

* То, что любое конечное множество может являться множеством дефектных значений для функций любого положительного конечного порядка, было известно еще в 1929 г. (Неванлинна [3]).

** В силу упомянутой выше теоремы Валирона, это всегда имеет место для функций порядка нуль.

В силу очевидного неравенства $\sum_a \delta(a) \leq (\sum_a \sqrt{\delta(a)})^2$ из теоремы 1 вытекает

Следствие. Если мероморфная функция порядка ρ , $0 < \rho < 1$, обладает по меньшей мере двумя дефектными значениями, то ее дефекты должны удовлетворять условию

$$\sum_a \delta(a) \leq C_3 \rho^2 \operatorname{cosec} \pi \rho, \quad C_3 = 35, 2\pi < 110, 6. \quad (4)$$

Это утверждение (с большим значением C_3) было впервые получено Эдреем и Фуксом [6] более сложным методом. Отметим, что при $\rho \leq 0,02$ величина в правой части (4) строго меньше 2, и, следовательно, (4) дает больше информации, чем (1).

1°. Оценка (2) была получена В. Г. Фуксом как следствие двух установленных им теорем, имеющих самостоятельный интерес.

Теорема А. Пусть $f(z)$ — мероморфная функция конечного порядка с дефектными значениями $a_1, a_2, \dots, a_q$ ($q \geq 2$), а $m_k(r)$ ($k = 1, 2, \dots, q$) обозначает радианную меру множества тех точек окружности $|z| = r$, где $|f(z) - a_k| < d$, $0 < 3d < \min_{k \neq j} (|a_k - a_j|, 1)$. Тогда для всех достаточно больших r справедливо неравенство

$$\sum_{k=1}^q \frac{\delta(a_k)}{m_k(r)} \leq \frac{1}{T(r, f)} \cdot \frac{r}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{f''(re^{i\varphi})}{f'(re^{i\varphi})} \right| d\varphi + o(1).$$

Теорема Б. Пусть $g(z)$ — мероморфная функция порядка $\rho < \infty$. Положим $\rho = \max(2, \rho)$, $\chi(g) = \lim_{r \rightarrow \infty} [N(r, g) + N(r, \frac{1}{g})] [T(r, g)]^{-1}$.

Справедливо соотношение

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{T(r, g)} \cdot \frac{r}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{g'(re^{i\varphi})}{g(re^{i\varphi})} \right| d\varphi \leq C_4 \rho + C_5 \chi(g) \rho \ln \rho. \quad (5)$$

Оценку (2) можно вывести (следуя В. Г. Фуксу [5]) из теорем А и Б следующим образом. В силу неравенства Коши мы имеем

$$\left(\sum_{k=1}^q \sqrt{\delta(a_k)} \right)^2 = \left(\sum_{k=1}^q \sqrt{m_k(r)} \sqrt{\frac{\delta(a_k)}{m_k(r)}} \right)^2 \leq \sum_{k=1}^q m_k(r) \sum_{k=1}^q \frac{\delta(a_k)}{m_k(r)} \leq 2\pi \sum_{k=1}^q \frac{\delta(a_k)}{m_k(r)}.$$

Из теоремы А теперь получаем

$$\left(\sum_{k=1}^q \sqrt{\delta(a_k)} \right)^2 \leq 2\pi \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{T(r, f)} \cdot \frac{r}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{f''(re^{i\varphi})}{f'(re^{i\varphi})} \right| d\varphi,$$

откуда

$$\left(\sum_{k=1}^q \sqrt{\delta(a_k)} \right)^2 \leq 2\pi \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{T(r, f')} \cdot \frac{r}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{f''(re^{i\varphi})}{f'(re^{i\varphi})} \right| d\varphi \cdot \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{T(r, f')}{T(r, f)}. \quad (6)$$

Но для функций конечного порядка

$$\begin{aligned} T(r, f') &= N(r, f') + m(r, f') \leq 2N(r, f) + m(r, f) + m\left(r, \frac{f'}{f}\right) \leq \\ &\leq 2T(r, f) + m\left(r, \frac{f'}{f}\right) = 2T(r, f) + O(\ln r), \end{aligned}$$

следовательно, порядок $f'(z)$ не превосходит порядка $f(z)$ и, кроме того,

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{T(r, f')}{T(r, f)} \leq 2.$$

Поэтому, применяя для оценки правой части (6) теорему Б с $g(z) = f'(z)$, получаем оценку

$$\sum_{k=1}^q V \delta(a_k) \leq V 2\pi (C_4 \rho + C_5 \chi(f') \rho \ln \rho)^{1/2} V 2. \quad (7)$$

Так как

$$\chi(f') = \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \left[N(r, f') + N\left(r, \frac{1}{f'}\right) \right] [T(r, f')]^{-1} \leq 2,$$

то из (7) следует (2).

Мы покажем, что при малых ρ оценка (5) в теореме Б может быть улучшена. Нами будет получен следующий результат.

Теорема 2. Пусть $g(z)$ — мероморфная функция порядка ρ , $0 \leq \rho < 1$,

$\chi(g) = \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \left[N(r, g) + N\left(r, \frac{1}{g}\right) \right] [T(r, g)]^{-1}$. Справедливо соотношение

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{T(r, g)} \cdot \frac{r}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{g'(re^{i\varphi})}{g(re^{i\varphi})} \right| d\varphi \leq C_6 \chi(g) \rho^2 \operatorname{cosec} \pi \rho, \quad (8)$$

где $C_6 = 4,4$.

Очевидно, если рассуждать так же, как и при выводе оценки (2), но вместо теоремы Б использовать теорему 2, то придем к соотношению (3), что и означает справедливость теоремы 1. Наша задача, таким образом, сводится к доказательству теоремы 2.

2°. Доказательство теоремы 2. Пусть $g(z)$ — рассматриваемая мероморфная функция, b_k — ее нули, c_l — ее полюсы. Через $\{d_n\}$ обозначим результат объединения последовательностей $\{b_k\}$ и $\{c_l\}$ в одну последовательность. Положим

$$N(r) = N(r, g) + N\left(r, \frac{1}{g}\right).$$

Мы имеем

$$\frac{g'(z)}{g(z)} = \frac{m}{z} + \sum_k \frac{1}{z - b_k} - \sum_l \frac{1}{z - c_l}$$

(m обозначает номер первого отличного от нуля коэффициента в разложении Лорана в окрестности точки $z = 0$). Отсюда получаем неравенство

$$\left| \frac{g'(z)}{g(z)} \right| \leq \sum_n \frac{1}{|z - d_n|} + \frac{|m|}{|z|}.$$

Из этого неравенства вытекает оценка

$$\frac{r}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{g'(re^{i\varphi})}{g(re^{i\varphi})} \right| d\varphi \leq \sum_n \frac{r}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{|re^{i\varphi} - d_n|} + \frac{|m|}{2\pi}.$$

Обозначим сумму $\sum_n$, стоящую в правой части, через $U(r)$. Нам достаточно оценить $U(r)$. Покажем, что имеет место соотношение

$$\int_0^\infty \frac{U(r)}{r^{1+\sigma}} dr = \sigma^2 j(\sigma) \int_0^\infty \frac{N(r)}{r^{1+\sigma}} dr, \quad \rho < \sigma < 1, \quad (9)$$

где

$$j(\sigma) = \frac{\pi^2}{\sin(\pi\sigma) \Gamma^2\left(\frac{3}{4} - \frac{1-2\sigma}{4}\right) \Gamma^2\left(\frac{3}{4} + \frac{1-2\sigma}{4}\right)}. \quad (10)$$

Положим, следуя Эдрию и Фуку [7],

$$\Phi(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{|re^{i\varphi} - 1|}.$$

Тогда $U(r)$ представится в виде

$$U(r) = \sum_n \frac{r}{|d_n|} \Phi\left(\frac{r}{|d_n|}\right). \quad (11)$$

Эдрей и Фукс показали [7], что при $0 < \sigma < 1$

$$\int_0^\infty r^{-\sigma} \Phi(r) dr = j(\sigma);$$

производя замену переменной, получим

$$\int_0^\infty \left[\frac{r}{|d_n|} \Phi\left(\frac{r}{|d_n|}\right) \right] \frac{dr}{r^{1+\sigma}} = j(\sigma) |d_n|^{-\sigma}, \quad 0 < \sigma < 1. \quad (12)$$

Подчиняя σ условию $0 < \sigma < 1$ и складывая соотношения (12) по n приходим в силу (11) к равенству

$$\int_0^\infty \frac{U(r)}{r^{1+\sigma}} dr = j(\sigma) \sum_n \frac{1}{|d_n|^\sigma}.$$

Но нетрудно проверить, что

$$\sum_n \frac{1}{|d_n|^\sigma} = \sigma^2 \int_0^\infty \frac{N(r)}{r^{1+\sigma}} dr.$$

Соотношение (9) тем самым доказано.

Далее мы воспользуемся следующей теоремой, представляющей частный случай одного результата Поля [8].

Теорема В. Пусть на интервале $0 \leq r < \infty$ заданы две функции $\varphi_1(r)$ и $\varphi_2(r)$, причем $\varphi_2(r) \geq 0$. Пусть еще заданы два числа $s \geq 0$ и $\varepsilon > 0$ такие, что

а) оба интеграла

$$\int_0^\infty |\varphi_1(r)| r^{-1-\sigma} dr \quad \text{и} \quad \int_0^\infty \varphi_2(r) r^{-1-\sigma} dr$$

сходятся при $s < \sigma < s + \varepsilon$, а второй из них при $\sigma < s$ расходится;

б) существует функция $\Psi(z)$, голоморфная при $|z - s| < \varepsilon$ и вещественная при вещественных z , такая, что

$$\int_0^\infty \frac{\varphi_1(r)}{r^{1+\sigma}} dr = \Psi(\sigma) \int_0^\infty \frac{\varphi_2(r)}{r^{1+\sigma}} dr, \quad s < \sigma < s + \varepsilon$$

Тогда

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\varphi_1(r)}{\varphi_2(r)} \geq \Psi(s) \geq \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\varphi_1(r)}{\varphi_2(r)}. \quad (13)$$

Мы положим

$$\varphi_1(r) = U(r), \quad \varphi_2(r) = N(r), \quad \Psi(z) = z^2 j(z), \quad s = \rho, \quad \varepsilon = 1 - \rho.$$

Все условия теоремы В, очевидно, будут выполнены (функция $\Psi(z) = z^2 j(z)$ голоморфна, в силу (10), в полосе $|\operatorname{Re} z| < 1$).

Из правой стороны (13) мы получим

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{U(r)}{N(r)} \leq \rho^2 j(\rho).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{T(r, g)} \cdot \frac{r}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{g'(re^{i\varphi})}{g(re^{i\varphi})} \right| d\varphi &\leq \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{U(r)}{T(r, g)} \leq \\ &\leq \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{U(r)}{N(r)} \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{N(r)}{T(r, g)} \leq \rho^2 j(\rho) \chi(g). \end{aligned}$$

Учитывая ([7]), что

$$j(\rho) \leq 4,4 \operatorname{cosec} \pi \rho,$$

получаем соотношение (8). Теорема 2 доказана.

3°. Замечание. Метод, которым мы пользовались при доказательстве теоремы 2, дает возможность получить следующий результат. Пусть $g(z)$ — мероморфная функция нецелого порядка ρ , представляемая в виде

$$g(z) = Cz^m \frac{\prod_k E\left(\frac{z}{\delta_k}, \rho\right)}{\prod_l E\left(\frac{z}{c_l}, \rho\right)}, \quad \rho = [\rho],$$

где $E(u, \rho)$ — канонический множитель Вейерштрасса рода ρ . Имеет место соотношение

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{T(r, g)} \cdot \frac{r}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{g'(re^{i\varphi})}{g(re^{i\varphi})} \right| d\varphi &\leq \chi(g) \rho^2 j(\rho - [\rho]) \leq \\ &\leq 4,4 \chi(g) \rho^2 |\operatorname{cosec} \pi \rho|. \end{aligned}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. А. А. Гольдберг. О дефектах мероморфных функций, «Докл. АН СССР» 98, 893-895, (1954).
2. А. А. Гольдберг. О множестве дефектных значений мероморфных функций конечного порядка. «Укр. матем. ж.», 11, № 4, 438-443 (1959).
3. R. Nevanlinna. Le théorème de Picard-Borel et la théorie des fonctions méromorphes, Paris, 1929.
4. G. Valiron. Sur les valeurs déficientes des fonctions méromorphes d'ordre nul, C. R. Acad. Sci., 230, 40-42 (1950).
5. W. H. J. Fuchs. A theorem on the Nevanlinna deficiencies of meromorphic functions of finite order, Ann. of Math., 68, № 2, 203-209 (1959).
6. A. Edrei, W. H. J. Fuchs. On the deficiencies of meromorphic function of order less than one, Duke Math. J., 27, 233-240 (1960).
7. A. Edrei, W. H. J. Fuchs. On the growth of meromorphic functions with several deficient values, Trans. Amer. Math. Soc., 93, № 2, 292-328 (1959).
8. G. Pólya. On the minimum modulus of integral functions, Journ. Lond. Math. Soc., 1, 78-86 (1926).