

Міністерство освіти і науки України
Харківський національний університет імені В.Н.Каразіна
Фізичний факультет
Кафедра теоретичної фізики імені академіка І.М.Ліфшиця

«Допущено до захисту»
Зав. кафедри теоретичної фізики
імені академіка І. М. Ліфшиця
_____ Рашба Г. І.
_____ 202__ р.

Оцінка «_____»
Голова ЕК

_____ 202__ р.

Жидков Олександр Володимирович

Вплив шумів на динаміку двох кубітів у сплутаному стані

Кваліфікаційна робота на здобуття
освітньо-кваліфікаційного рівня «Магістр»
спеціальність 104-«фізика та астрономія»
освітньо-наукова програма «фізика»

(підпис студента)

Науковий керівник – професор кафедри
теоретичної фізики імені академіка
І.М.Ліфшиця, д-р фіз.-мат.н., доц. З.Майзеліс

(підпис керівника)

Харків 2025

Анотація

Жидков О.В. Вплив шумів на динаміку двох кубітів у сплутаному стані. – Рукопис.

Дипломна робота на здобуття освітньо-кваліфікаційного рівня магістр за спеціальністю 104 – фізика та астрономія. Харків: ХНУ імені В.Н.Каразіна, 2025.- 41 с.- Іл.5

У роботі досліджено динаміку двокубітної квантової системи, яка перебуває у заплутаному стані, взаємодіє з термостатом та піддається дії частотного шуму. Для опису еволюції розв'язується квантово-кінетичне рівняння Ліндблада з додатковим стохастичним гамільтоніаном, що моделює вплив мультиплікативного гауссівського шуму. Отримані аналітичні вирази та чисельні результати демонструють, як інтенсивність шуму, його дисперсія та температура середовища впливають на збереження когерентності та заплутаності. Показано, що локалізований шум, який діє лише на один з кубітів, може призводити до значного руйнування квантових кореляцій. Застосовано протокол повторюваних вимірювань з поствідбором у парному базисі. Показано, що навіть при скінченній частоті вимірювань такий підхід дозволяє сповільнити втрату когерентності. Цей ефект узгоджується з проявами квантового ефекту Зенона й може бути корисним при розробці стійких квантових протоколів.

Ключові слова: квантова заплутаність, двокубітна система, декогеренція квантових систем, рівняння Ліндблада, стохастичний гамільтоніан, мультиплікативний шум, матриця густини стану, квантове усереднення, жорстке вимірювання, рівняння Ліувілля.

Abstract

Zhydkov O. Dynamics of two qubits in the entangled state under the influence of noises. – Manuscript.

The thesis is for getting Master of Science degree, speciality 104 – «Physics and Astronomy». Kharkiv: – V.N.Karazin Kharkiv National University, 2025. - 41p. - Fig.5.

This work investigates the dynamics of a two-qubit quantum system initially prepared in an entangled state, interacting with a thermal reservoir and subjected to multiplicative noise. A quantum kinetic Lindblad equation is solved to describe the evolution, with an additional stochastic Hamiltonian term modelling the influence of frequency Gaussian noise. Analytical expressions and numerical results demonstrate how the noise intensity, its variance, and the environment's temperature affect the preservation of coherence and entanglement. It is shown that localized noise acting only on one of the qubits can lead to significant degradation of quantum correlations. A repeated post-selected measurement protocol in the Bell basis is applied. The results indicate that even at finite measurement frequency, such an approach can slow down the loss of coherence. This effect is consistent with the manifestations of the quantum Zeno effect and may be useful for designing robust quantum protocols.

Keywords: Quantum entanglement, two-qubit system, decoherence of quantum systems, Lindblad equation, stochastic Hamiltonian, frequency noise, state density matrix, quantum averaging, projective measurement, Liouville equation.

ЗМІСТ

ВСТУП	5
1 Огляд літератури	7
1.1 Теоретичні засади квантових обчислень	7
1.2 Взаємодія системи з шумовим середовищем. Декогеренція у квантових комп'ютерах	10
1.3 Квантові вимірювання та негамільтонова еволюція	11
2 Динаміка заплутаних двокубітних систем	13
2.1 Взаємодія підсистем та квантова заплутаність	13
2.2 Моделі шумів у квантовій теорії	16
2.3 Декогеренція внаслідок впливу шуму в двокубітних системах	17
2.4 Еволюція двокубітних квантових систем	20
2.4.1 Рівняння Ліндблада	20
2.4.2 Модель двох кубітів	23
3 Пригнічення декогеренції двокубітних квантових систем	28
3.1 Усереднення за шумом	28
3.2 Проективні вимірювання у заплутаній системі	30
3.3 Аналіз залежності від параметрів шуму	32
4 ВИСНОВКИ	37
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ	38

ВСТУП

Упродовж останніх десятиліть квантові обчислення стали однією з найдинамічніших галузей сучасної науки. Очікується, що квантові комп'ютери зможуть розв'язувати задачі, які наразі є надто складними або взагалі недоступними для класичних систем. До таких задач належать, наприклад, факторизація великих чисел, моделювання квантових і багаточастинкових процесів. Переваги використання квантових обчислень випливають із фундаментальних властивостей квантових систем – когерентності та заплутаності. Завдяки цим властивостям можна обробляти інформацію принципово інакше, у порівнянні з класичними.

Втім, реалізація квантових обчислень у практичних умовах зіштовхується з серйозним викликом – явищем декогеренції. Воно виникає через невідворотну взаємодію квантової системи з навколишнім середовищем. Це призводить до поступової втрати когерентності та знищення квантових кореляцій. Однією з основних причин декогеренції є дія шумів – випадкові флуктуації зовнішніх параметрів. Для твердотільних реалізацій кубітів (як-от надпровідні кола чи квантові точки) типовими прикладами шуму є низькочастотний шум, телеграфні флуктуації та гауссівські шумові процеси з експоненційною кореляційною функцією [1–3].

Для зменшення впливу цих процесів вже існує декілька підходів: квантова корекція помилок, методи динамічної розв'язки, топологічні обчислення тощо. Окрему увагу привертає стратегія багаторазових вимірювань, яка дозволяє контролювати еволюцію квантової системи. При достатньо високій частоті таких вимірювань реалізується так званий квантовий ефект Зенона – явище, за якого перехід системи між станами може бути значно уповільнений або навіть заблокований. Якщо для ізольованих систем ефект Зенона вже добре вивчений, то в умовах реальних відкритих систем при наявності шуму, його вплив усе ще потребує подальших досліджень і залишається актуальним напрямом у квантовій фізиці.

Актуальність цієї роботи полягає в необхідності розробки підходу до пригнічення декогеренції в заплутаних квантових системах, які функціо-

нують у присутності частотного шуму.

Об'єкт дослідження: двокубітна квантова система, що перебуває в заплутаному стані й взаємодіє з термостатом і джерелом шуму.

Предмет дослідження: динаміка стану двокубітної заплутаної системи під впливом дисипативного середовища, шуму та повторюваних вимірювань.

Мета дослідження: Дослідити, як наявність шумів та багаторазові вимірювання впливають на динаміку заплутаності та когерентності в двокубітній системі. Для досягнення цієї мети було поставлено ряд задач:

- 1) Отримати квантово-кінетичне рівняння для двокубітної системи з урахуванням дії шуму;
- 2) Отримати аналітичний розв'язок для еволюції матриці густини заплутаного стану та провести усереднення по шуму;
- 3) Проаналізувати вплив повторюваних вимірювань з поствідбором на динаміку когерентності системи;
- 4) Проаналізувати вплив наявності шуму на динаміку системи.

Гіпотеза дослідження стверджує, що попри втрати когерентності внаслідок впливу термостата і шуму, повторювані вимірювання можуть сповільнювати ці процеси, зберігаючи квантові кореляції між кубітами.

Методом дослідження є теоретичний аналіз, формулювання та розв'язання квантового кінетичного рівняння, яке враховує ефекти дисипації та декогеренції з урахуванням повторюваних вимірювань системи у шумовому середовищі.

Наукова новизна дослідження полягає в аналізі динаміки двокубітної системи в заплутаному стані за наявності дисипативного середовища та додаткового шумового впливу, з урахуванням ефектів багатократних вимірювань з поствідбором.

Практичне значення Отримані результати можуть бути використані при розробці протоколів захисту квантових станів від шуму в експериментальних реалізаціях квантових обчислювальних систем у квантовій криптографії, симуляціях і обробці даних.

1 Огляд літератури

1.1 Теоретичні засади квантових обчислень

Завдяки квантовим обчисленням продовжується розвиток інформаційних технологій. Вони дозволяють розв'язувати задачі, які є непосильними для класичних комп'ютерів. Теоретичні основи цієї галузі добре сформульовані. Такі моделі, як квантова машина Тюрінга та квантові схеми, забезпечують строгий математичний апарат для побудови алгоритмів і аналізу їх обчислювальної складності [4, 5]. І хоча квантові алгоритми активно розробляються, побудова масштабованих квантових комп'ютерів ускладнюється декогеренцією, помилками та обмеженнями у масштабуванні [6, 7].

Основою квантових обчислень є принцип суперпозиції, згідно з яким квантова система може одночасно перебувати в кількох базових станах. Завдяки цьому квантовий комп'ютер здатен паралельно опрацьовувати експоненційну кількість обчислювальних варіантів – що й відрізняє його від класичних систем. У моделі квантової схеми стан системи на кожному кроці описується як суперпозиція базисних станів із відповідними комплексними амплітудами. Еволюція відбувається через унітарні перетворення, які зберігають норму хвильової функції та забезпечують зворотність еволюції необхідну для реалізації детермінованих квантових обчислень [8].

Типовим прикладом квантового паралелізму є перетворення Уолша-Адамара, яке з одного вхідного стану створює рівномірну суперпозицію двох можливих базисних станів. Ця операція, яка представлена матрицею

$$M = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad (1.1)$$

є ключовим елементом багатьох квантових алгоритмів, включаючи алгоритми Дойча-Йози та Гровера [9, 10]. Керування фазовими амплітудами за допомогою спеціальних обертань та використання квантової інтерференції дають змогу збільшувати ймовірність правильного результату й водночас зменшувати ймовірність помилкових. Саме це лежить в основі обчислю-

вальної переваги квантових алгоритмів.

Більш складні унітарні операції, зокрема квантове перетворення Фур'є (QFT), лежать в основі багатьох важливих алгоритмів. Зокрема, QFT є центральним компонентом алгоритму факторизації Шора, що забезпечує експоненціальну перевагу порівняно з найкращими класичними методами [11]. Це перетворення реалізується як послідовність базових унітарних операцій і може бути особливо ефективним для певних класів чисел, наприклад, чисел із малими простими множниками [12]. Якщо унітарне перетворення можна реалізувати ефективно на підсистемах, його також можна масштабувати на всю систему без експоненціального зростання обчислювальних витрат за умови, що перетворення має блочну структуру. Такий підхід особливо важливий для алгоритмів, які працюють з великими просторами станів.

Проте реалізація таких алгоритмів у фізичних пристроях стикається з низкою викликів. Одним із головних є декогеренція – втрата когерентності внаслідок взаємодії квантової системи з навколишнім середовищем. Метод пригнічення, такий як використання холодних іонів, що утримуються у лінійних пастках, наразі є достатньо ефективним. Він дозволяє реалізувати базові квантові операції з низьким рівнем шуму та високою точністю зчитування [7]. Експериментальна реалізація алгоритму Шора на основі ядерного магнітного резонансу (ЯМР) підтвердила можливість реалізації квантових обчислень у фізичних системах, хоча наразі лише в обмежених масштабах [13]. Масштабування квантових обчислювальних систем до великих конфігурацій кубітів досі залишається нерозв'язаним завданням.

У цьому контексті важливою є не лише стабільність, а й керованість часової еволюції. Наприклад, науковці з Інституту квантової оптики та квантової інформації (IQOQI) запропонували універсальний протокол для інверсії еволюції кубіта з високою точністю [14]. Його застосування дає змогу повернути систему до попереднього стану, який вона мала б у разі зворотної еволюції. Протокол є універсальним, тобто може бути застосований до будь-якого кубіта, незалежно від його динаміки чи початкового стану. Як і всі універсальні протоколи, він є ймовірнісним: не гарантує успіху в кожному конкретному випадку, але забезпечує ненульову ймовірність відновлення.

Крім того, квантові обчислення мають великий потенціал у таких галузях, як штучний інтелект (ШІ). Сучасні ШІ-системи покладаються на обробку великих обсягів даних, класифікацію та розпізнавання образів. Класичні обчислювальні ресурси часто не справляються з великими обсягами даних, тоді як квантові комп'ютери можуть значно прискорити ці процеси. Однак при розробці квантових систем для ШІ необхідно враховувати складну динаміку багатокубітних систем. У присутності термостату вони можуть втрачати когерентність і знижувати точність результатів. Тому дослідження динаміки відкритих квантових систем є важливим етапом у створенні стабільних обчислювальних архітектур.

Значення квантових обчислень не обмежується прискоренням окремих алгоритмів. Дослідження в цій галузі поглиблюють розуміння складності моделювання квантової механіки класичними комп'ютерами. Якщо б ефективно класичне моделювання квантових процесів стало можливим, це б означало можливість розв'язання задач, що нині вважаються обчислювально складними, таких як факторизація цілих чисел [15].

Крім моделі квантових схем, досліджуються й альтернативні підходи до квантових обчислень, зокрема гамільтоніанні моделі та квантові клітинні автомати (quantum cellular automata) [4]. Вони пропонують інші формалізми еволюції та допомагають краще зрозуміти обчислювальні можливості та обмеження квантових систем.

У підсумку, квантові обчислення становлять революційний підхід до розв'язання задач, які й до нині залишаються недосяжними для класичних комп'ютерів. Теоретична база вже є досить розвиненою, з чітко означеними моделями та алгоритмами, що використовують суперпозицію, інтерференцію й квантову нелокальність. Попри наявні технічні виклики, інтенсивні теоретичні й експериментальні дослідження активно розвивають цю галузь.

1.2 Взаємодія системи з шумовим середовищем. Декогеренція у квантових комп'ютерах

Однією з основних проблем на шляху до створення працездатних квантових комп'ютерів, як вже було зазначено вище, залишається явище декогеренції – руйнування когерентних квантових станів внаслідок неконтрольованої взаємодії системи з навколишнім середовищем [16]. Квантові обчислення є надзвичайно чутливими до збурень, і навіть слабка взаємодія з середовищем може призвести до втрати квантової інформації [2]. Щоб квантові технології розвивалися, необхідно глибоко розуміти процеси декогеренції.

Серед основних типів шумів, які зумовлюють декогеренцію у фізичних реалізаціях кубітів, виділяють низькочастотний шум типу $1/f$, телеграфний шум, гауссівський шум, а також шум від двохрівневих систем (TLS). Такий шум пов'язаний із колективною дією багатьох кубітних флуктуаційних дефектів, розподілених у широких часових інтервалах [1]. Подібний шум є переважно негауссівським і немарковським, що створює додаткові труднощі при побудові моделей [1, 17].

Особливу увагу також привертає телеграфний шум – результат випадкового перемикання між двома станами. Було показано, що навіть один телеграфний флуктуатор може істотно порушувати когерентність, особливо в резонансному режимі або за сильної взаємодії [18].

Гауссівський шум часто використовується для моделювання дії некорельованих або слабо корельованих флуктуацій навколишнього середовища. Як показано у [19], для трикубітних систем навіть при дії класичного гауссівського шуму когерентність зазвичай демонструє монотонне згасання без реверсій, але підбір параметрів дозволяє оптимізувати тривалість збереження квантової інформації. Крім того, у моделях типу центрального спіну виявлено, що гауссівський шум із коротким або довгим часом кореляції по-різному впливає на характер згасання когерентності: від експоненційного до степеневого [20].

У багатьох сучасних підходах середовище моделюється ефективним

шумовим гамільтоніаном. Наприклад, у [21], вивчено еволюцію двохкубітної системи під дією стохастичного гамільтоніана з білим шумом, де знайдено як аналітичне розв'язання для густини ймовірності, так і його опис у вигляді рівняння Ліндблада. Окремо аналізується ефект Зенона, який проявляється при частих вимірюваннях і також пригнічує перехід між станами.

Методи спектроскопії шуму, на основі електродинаміки порожнин, дозволяють експериментально реконструювати спектр шуму через спостереження за передавальною функцією кавітації. У [2] запропоновано нову схему, за якої трансієнтна передача сигналу відображає характеристики шуму кубіта через наявність низькочастотної компоненти або сильної негауссівської складової.

Детальне порівняння поведінки кубітів за дії гауссівського, $1/f$ - і TLS-пов'язаного шуму демонструє, що реальні системи часто характеризуються змішаними шумовими впливами, і для повноцінного опису необхідно залучати вищі кореляційні моменти флуктуацій та переходити до часових кореляторів, які дозволяють точніше змодельовати ефекти декогеренції при повторних вимірюваннях [17].

1.3 Квантові вимірювання та негамільтонова еволюція

Квантові вимірювання визначають спосіб отримання даних зі стану системи та впливають на її подальшу еволюцію. Основи квантової теорії вимірювань були закладені ще в роботах Бора, Гайзенберга і фон Неймана [22–24], і з того часу залишаються активною сферою як теоретичних, так і експериментальних досліджень.

Розрізняють декілька типів квантових вимірювань, зокрема проєктивні (жорсткі) вимірювання, слабкі вимірювання та квантову томографію. Проєктивні вимірювання є стандартною процедурою в квантовій механіці: вони згортають стан системи до одного з власних станів спостережуваної проєкції. Стан після вимірювання визначається отриманим результатом. Наприклад, у роботі [3] досліджено вплив таких вимірювань на когерентність твердотільних кубітів, викликане зворотною дією вимірювального

пристрою.

Слабкі вимірювання, навпаки, дозволяють отримати часткову інформацію про систему без повного колапсу хвильової функції. Вони характеризуються слабкою взаємодією з вимірювальним пристроєм і дозволяють вивчати динаміку систем без суттєвого її збурення. У статті [25] показано використання слабких вимірювань для дослідження спіну в умовах декогеренції. Робота [26] демонструє, як за допомогою слабких вимірювань можна реконструювати середні траєкторії фотонів у двоцілінному експерименті.

Квантова динаміка не обмежується лише унітарною (гамільтоновою) еволюцією. У багатьох реальних ситуаціях стан системи змінюється внаслідок взаємодії з навколишнім середовищем, впливу шуму або зовнішнього керування. Такі процеси описуються як негамільтонові. Вони можуть призводити до декогеренції, релаксації та інших незворотних ефектів.

Наприклад, у роботі [27] розглянуто негамільтонову еволюцію екситонів у напівпровідникових квантових точках під впливом фононів і інших частинок. Встановлено, що взаємодія з фононним середовищем значно впливає на час когерентності та динаміку релаксації.

Крім еволюційних процесів, у квантовій інформатиці важливу роль відіграють негамільтонові перетворення – такі, що не відповідають унітарним операціям. Вони є неоціненними для моделювання відкритих систем, реалізації квантової корекції помилок і оптимізації обчислень. У статті [28] представлено алгоритми для симуляції розріджених гамільтоніанів, у яких використано спеціальну структуру негамільтонових перетворень для підвищення обчислювальної ефективності.

2 Динаміка заплутаних двокубітних систем

2.1 Взаємодія підсистем та квантова заплутаність

Поняття заплутаності у квантовій теорії має доволі просте формальне визначення. Чистий стан системи, що складається з кількох підсистем, називають заплутаним, якщо він не може бути представлений у вигляді тензорного добутку станів окремих підсистем [29]. Розглянемо ситуацію, коли повний простір Гільберта має структуру:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B.$$

Тоді, якщо існують такі $|\psi_A\rangle \in \mathcal{H}_A$ і $|\psi_B\rangle \in \mathcal{H}_B$, що

$$|\psi\rangle = |\psi_A\rangle \otimes |\psi_B\rangle, \quad (2.1)$$

стан $|\psi\rangle$ є незаплутаним. Але ж у випадку, коли

$$|\psi\rangle \neq |\psi_A\rangle \otimes |\psi_B\rangle, \quad \forall (|\psi_A\rangle \in \mathcal{H}_A, |\psi_B\rangle \in \mathcal{H}_B),$$

то ми вже маємо справу із заплутаним станом. Еквівалентне формулювання можна сформулювати наступним чином: $|\psi\rangle$ є заплутаним тільки тоді, коли

$$|\psi\rangle\langle\psi| \neq tr_A|\psi\rangle\langle\psi| \otimes tr_B|\psi\rangle\langle\psi|.$$

З рівняння (2.1) випливає, що стан двокубітної системи буде незаплутаним, якщо його можна представити як тензорний добуток двох окремих станів.

Якщо ж ми маємо n частинок, кожна з яких описується у власному гільбертовому просторі \mathcal{H}_i , де $i = 1, \dots, n$, то тоді стан $|\psi\rangle$ вважається незаплутаним, якщо його можна записати у вигляді:

$$|\psi\rangle = \bigotimes_{i=1}^n |\psi_i\rangle, \quad |\psi_i\rangle \in \mathcal{H}_i.$$

Це є узагальненням виразу (2.1). Якщо такий запис неможливий система

заплутана.

У випадку змішаних станів, для біпартитної системи стан ρ вважається сепарабельним (тобто таким, що не містить заплутаності), якщо він може бути представлений як лінійна комбінація добутків станів підсистем із додатними коефіцієнтами, що сумуються в одиницю, тобто:

$$\rho = \sum_i \rho_i \rho_i^A \otimes \rho_i^B \quad (2.2)$$

де кожне $\rho_i > 0$, а ρ^A та ρ^B - матриці густини відповідних підсистем А і В.

Якщо у цьому визначенні перейти до формулювання через чисті стани, використовуючи проектування, то вираз набуває вигляду:

$$\rho = \sum_i \rho_i |\psi_i^A\rangle \langle \psi_i^A| \otimes |\psi_i^B\rangle \langle \psi_i^B|,$$

де $|\psi^A\rangle \in \mathcal{H}_A$, $|\psi^B\rangle \in \mathcal{H}_B$, а коефіцієнти ρ_i додатні та такі, що їхня сума дорівнює одиниці.

У випадку систем з більшою кількістю частинок, сепарабельність вже виражається як:

$$\rho = \sum_i \rho_i \otimes_{k=1}^n \rho_i^k,$$

де кожна ρ_i^k - густина ймовірності на просторі \mathcal{H}_k , а загальний стан є статистичною сумішшю добутків часткових станів.

Заплутані стани можна побудувати навіть у найпростішій конфігурації, коли розміри обох підсистем однакові та рівні 2. У такому випадку кожна підсистема є кубітом. Візьмемо ортонормований базис $|0\rangle, |1\rangle$ для кожного з них. Тоді:

$$|\text{Bell}\rangle = \frac{|0\rangle \otimes |0\rangle + |1\rangle \otimes |1\rangle}{\sqrt{2}} \in \mathcal{H}$$

є класичним прикладом заплутаного стану. Якби цей стан можна було подати у вигляді добутку двох незалежних векторів, тобто

$$|\text{Bell}\rangle = (\alpha_A |0\rangle + \beta_A |1\rangle) \otimes (\alpha_B |0\rangle + \beta_B |1\rangle),$$

це призвело б до суперечності. Отже, стан не є роздільним. У випадку багатокубітних систем заплутаність визначається аналогічно – через неможливість подання стану як добутку часткових.

Для аналізу структури чистих заплутаних станів у двокубітних системах широко застосовується так званий розклад Шмідта [30]. Його суть полягає в тому, що для будь-якого стану $|\psi\rangle$ у тензорному просторі $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ завжди можна знайти ортонормовані базиси $\{|i_A\rangle\}$ і $\{|i_B\rangle\}$ в підпросторах \mathcal{H}_A та \mathcal{H}_B відповідно, в яких стан набуває вигляду:

$$|\psi\rangle = \sum_{i=1}^{\min(\dim(\mathcal{H}_A), \dim(\mathcal{H}_B))} \lambda_i |i_A\rangle \otimes |i_B\rangle, \quad (2.3)$$

де $\lambda_i \in [0, 1]$, а також $\sum_i \lambda_i^2 = 1$.

Ці коефіцієнти λ_i називають коефіцієнтами Шмідта - вони відображають розподіл амплітуд між базисними станами і дозволяють оцінити ступінь квантової кореляції. Щоб здійснити цей розклад, зазвичай розглядають зведену матрицю густини підсистеми, наприклад, $\rho_A = \text{tr}_B(|\phi\rangle\langle\phi|)$, та переходять до її власного базису, у якому матриця набуває діагональної форми. В такому базисі стан $|\phi\rangle$ можна переписати у вигляді

$$|\phi\rangle = \sum_i |i_A\rangle \otimes |\tilde{i}_B\rangle,$$

що, по суті, еквівалентне представленню у формі (2.3). Коефіцієнти λ_i у цьому випадку визначаються як квадратні корені з власних значень зведеної матриці густини, що дає змогу кількісно охарактеризувати рівень заплутаності системи.

2.2 Моделі шумів у квантовій теорії

У реальних квантових системах повна ізоляція кубітів від навколишнього середовища є недосяжною, що призводить до неминучого впливу шумів. Ці флуктуації викликають втрату квантової когерентності, що критично впливає на ефективність квантових обчислень. Для адекватного опису динаміки таких відкритих систем необхідно використовувати математичні моделі, що враховують як структуру середовища, так і його статистичні властивості.

Одним з поширених підходів є включення шуму безпосередньо до гамільтоніану у вигляді стохастичного доданку:

$$H(t) = H_0 + \eta(t)H_1,$$

де $\eta(t)$ - випадковий процес, а H_1 - оператор збурення. Така модель дозволяє врахувати часозалежні флуктуації, які впливають на систему через визначений механізм взаємодії. При усередненні по реалізаціях шуму динаміка густини ймовірності часто приводить до рівнянь типу Ліндблада, які описують неунітарну еволюцію у відкритих системах [21].

Рівняння Ліндблада має загальний вигляд:

$$\dot{\rho} = -i[H, \rho] + \sum_k \left(L_k \rho L_k^\dagger - \frac{1}{2} \{L_k^\dagger L_k, \rho\} \right), \quad (2.4)$$

де L_k - оператори Ліндблада, які описують відповідні канали взаємодії із середовищем (дефазинг, релаксацію тощо), а $\{\cdot, \cdot\}$ - антикомутатор [16]. Цей підхід охоплює як марковські, так і частково немарковські випадки - зокрема, через введення нелокальної у часі залежності або інтегральних термів пам'яті.

У багатьох фізичних реалізаціях середовище моделюється як ансамбль двоурівневих флуктуаційних систем (TLS), що випадково перемикаються між станами. За умови широкого спектра часових масштабів ці флуктуації породжують шум із спектральною густиною типу $1/f$, типовий для надпровідникових і напівпровідникових кубітів [1, 18]. Такий спін-флуктуаторний

підхід дозволяє враховувати як низькочастотні, так і високочастотні компоненти шуму, залежно від розподілу параметрів TLS.

Частковим випадком таких моделей є телеграфний шум, коли параметр середовища стрибає між двома фіксованими значеннями з певною ймовірністю. Відповідна динаміка здатна описувати як повільні зміни типу $1/f$, так і швидке згасання когерентності залежно від часу кореляції [18].

Гауссівські шуми також відіграють важливу роль у моделюванні відкритих систем. Вони визначаються своїм кореляційним функціоналом:

$$\langle \eta(t)\eta(t') \rangle = C(t - t'), \quad (2.5)$$

де $C(\tau)$ – кореляційна функція шуму у загальному випадку. Прикладом є орнштейнівський шум або флуктуації з фракційною кореляцією, що дозволяють моделювати повільне згасання когерентності та чистоти стану у багатокубітних системах [19].

Поряд із цими підходами активно розвиваються методи експериментальної реконструкції характеристик шуму. Повторні квантові вимірювання дають змогу отримати вищі спектральні моменти шуму. Це дозволяє відрізнити природу флуктуацій - зокрема, гауссівських і TLS-типу - за їхніми високими статистичними моментами [17].

2.3 Декогеренція внаслідок впливу шуму в двокубітних системах

Як ми вже зазначали, у відкритих квантових системах взаємодія з навколишнім середовищем неминуче призводить до втрати когерентності. Це особливо критично для багатокубітних систем, де ключову роль відіграє квантова заплутаність. У двокубітних системах декогеренція впливає не лише на локальні стани кожного з кубітів, а й на міжкубітні кореляції, які необхідні для реалізації більшості квантових алгоритмів.

Початковий стан двокубітної системи у суперпозиції може бути запи-

саний як:

$$|\psi(0)\rangle = \sum_{i,j=0}^1 \alpha_{ij} |i\rangle \otimes |j\rangle \otimes |\phi\rangle,$$

де $|\phi\rangle$ – стан середовища, а коефіцієнти α_{ij} задають заплутаний стан двох кубітів.

Після еволюції у шумовому оточенні, залежно від взаємодії між системою та середовищем, стан набуває вигляду:

$$|\psi(t)\rangle = \sum_{i,j=0}^1 \alpha_{ij} |i\rangle \otimes |j\rangle \otimes |\phi_{ij}(t)\rangle,$$

де $|\phi_{ij}(t)\rangle$ – стан середовища, асоційований із відповідною парою базисних станів. Якщо внутрішні скалярні добутки $\langle \phi_{kl}(t) | \phi_{ij}(t) \rangle$ зменшуються, спостерігається поступова втрата когерентності. Зокрема, якщо $|\phi_{ij}\rangle$ стають ортогональними, зникають інтерференційні члени в зведеній матриці стану.

Рівень когерентності системи можна кількісно оцінити за допомогою показника чистоти:

$$P(t) = \text{tr}[\rho^2(t)],$$

де $\rho(t) = \text{tr}_e(|\psi(t)\rangle\langle\psi(t)|)$ – зведена матриця стану двокубітної системи після часткового простежування по ступенях вільності середовища. Зменшення $P(t)$ свідчить про наближення до змішаного стану та втрату квантової інформації.

У випадку чистого фазового шуму, який діє на систему через оператори $\sigma_z \otimes \mathbb{1}$, $\mathbb{1} \otimes \sigma_z$ або корельовані комбінації типу $\sigma_z \otimes \sigma_z$, зникають недіагональні елементи матриці густини. Нехай початковий стан системи:

$$|\psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle), \quad (2.6)$$

що відповідає Беллівському заплутаному стану. Його матриця густини:

$$\rho(0) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (2.7)$$

містить недіагональні елементи, що відповідають квантовій когерентності. У присутності дефазуючого гауссівського шуму ці елементи згасають експоненційно:

$$\rho(t) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & e^{-\Gamma(t)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ e^{-\Gamma(t)} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

де $\Gamma(t)$ залежить від спектральної густини шуму.

У моделі гауссівського шуму зручно описувати втрату когерентності за допомогою характеристичного функціоналу випадкового процесу. Нехай шум $\eta(t)$ – це стаціонарний гауссівський процес із нульовим середнім. Тоді фаза, що накопичується в часі, задається виразом:

$$\phi(t) = \int_0^t \eta(t') dt'. \quad (2.8)$$

Середній ефект такого шуму на квантову еволюцію визначається через характеристичний функціонал:

$$\Phi[k(t)] = \left\langle \exp \left(i \int dt k(t) \eta(t) \right) \right\rangle = \exp \left(- \int dt \mu(k(t)) \right), \quad (2.9)$$

де функція $\mu(k(t))$ містить інформацію про статистику шуму. Ми будемо розглядати гауссівський шум й для нього маємо:

$$\mu_G(k) = Dk^2, \quad (2.10)$$

де D – інтенсивність шуму. Підставивши $k(t) \equiv 1$, отримаємо:

$$\langle e^{i\phi(t)} \rangle = \exp(-Dt), \quad (2.11)$$

що описує експоненціальне згасання когерентності.

Такий підхід дозволяє враховувати флуктуаційний внесок у фазу та моделювати декогеренцію у квантовій системі без необхідності явного розрахунку кореляційних функцій [1]. У випадку більш складних типів шуму, функція $\mu(k(t))$ матиме інший вигляд, що відобразить відповідну кореляційну структуру процесу.

У двокубітних системах особливу увагу слід приділяти структурі шуму: корельовані флуктуації можуть як поглиблювати втрату когерентності, так і сприяти її частковому відновленню. Наприклад, у моделі, де обидва кубіти взаємодіють з одним і тим самим шумовим джерелом, сильна кореляція може зберегти когерентні елементи у певній підпросторовій структурі [20]. Натомість у разі незалежних шумів декогеренція відбувається швидше та монотонно.

Тож, у двокубітних квантових системах декогеренція не лише зменшує локальну чистоту, але й руйнує міжкубітну запутаність. Саме характер шумових флуктуацій – їхня інтенсивність, кореляційна структура та часова динаміка – визначає, якою мірою квантові ресурси можуть бути збережені або втрачені.

2.4 Еволюція двокубітних квантових систем

2.4.1 Рівняння Ліндблада

У квантовій механіці еволюція чистого стану $|\psi(t)\rangle$ визначається рівнянням Шредінгера:

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = \hat{H} |\psi(t)\rangle, \quad (2.12)$$

де \hat{H} – гамільтоніан системи, а \hbar – зведена стала Планка. У цій роботі для зручності покладаємо $\hbar = 1$, що дає спрощений вигляд:

$$\frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle = -i\hat{H}|\psi(t)\rangle.$$

Це рівняння описує часову еволюцію чистого стану в ізольованій квантовій системі. Однак для опису загальніших ситуацій, коли система перебуває не в чистому, а в змішаному стані (тобто є статистичною сумішшю кількох чистих станів з певними ймовірностями), використовують формалізм матриці густини ρ . У такому випадку динаміка описується рівнянням Ліувілля:

$$\dot{\rho} = -i[H, \rho], \quad (2.13)$$

де H – гамільтоніан системи. Матриця густини для чистого стану має вигляд $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$, а для змішаного:

$$\rho = \sum_i p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i|,$$

де $p_i \geq 0$ та $\sum_i p_i = 1$.

Рівняння Ліувілля дозволяє коректно описувати еволюцію як чистих, так і змішаних станів у межах ізольованої системи. Втім, воно не враховує взаємодії з навколишнім середовищем. У реальних фізичних умовах така взаємодія призводить до декогеренції, втрати інформації, релаксації та переходу від чистих до змішаних станів.

Теоретично можна було б розглядати всю сукупну систему, включаючи всі ступені свободи навколишнього середовища, але на практиці такий підхід є надзвичайно складним. Тому для ефективного опису відкритих квантових систем використовують рівняння Ліндблада.

У повному вигляді це рівняння, як вже було зазначено у (2.4), має форму:

$$\dot{\rho} = -i[H, \rho] + \sum_k \left(L_k \rho L_k^\dagger - \frac{1}{2} \{L_k^\dagger L_k, \rho\} \right)$$

Для деяких аналітичних моделей і зручності подальших перетворень

це рівняння часто записують у скороченій формі:

$$\dot{\rho} = -i[H, \rho] - \widehat{\Gamma}\rho, \quad (2.14)$$

де H – ефективний гамільтоніан системи, а $\widehat{\Gamma}$ – супероператор, що формалізує негамільтонову динаміку.

Взаємодія з середовищем задається гамільтоніаном вигляду:

$$H_{\text{int}} = - \sum (\alpha_i S_+ b_i + \alpha_i^* S_- b_i^\dagger),$$

де b_i, b_i^\dagger – оператори термостатичних осциляторів, а $S_\pm = S_x \pm iS_y$, де $S_x = \frac{1}{2}\sigma_x$, $S_y = \frac{1}{2}\sigma_y$, і σ_x, σ_y – матриці Паулі.

Оператор $\widehat{\Gamma}$ при цьому набуває вигляду:

$$\begin{aligned} \widehat{\Gamma}\rho = & \Gamma(\bar{n} + 1) (\rho S_+ S_- - 2S_- \rho S_+ + S_+ S_- \rho) \\ & + \Gamma\bar{n} (\rho S_- S_+ - 2S_+ \rho S_- + S_- S_+ \rho), \end{aligned} \quad (2.15)$$

де $\bar{n} = \frac{e^{-\beta\varepsilon}}{1 - e^{-\beta\varepsilon}}$ – середнє число збуджених осциляторів, β – обернена температура, а ε – енергія кубіта.

Коефіцієнт затухання задається як:

$$\Gamma = \pi \sum_k |\alpha_k|^2 \delta(\omega_k - \varepsilon).$$

Для моделювання впливу шуму на квантову систему ми безпосередньо додаємо стохастичний член $\eta(t)S_z$ до гамільтоніана. Такий підхід дозволяє описувати неконтрольовані флуктуації зовнішнього середовища у вигляді випадкового класичного поля, що діє вздовж осі z :

$$H_{\text{total}} = H + H_{\text{int}} + \eta(t)S_z,$$

де H – детермінована частина системного гамільтоніана, H_{int} – термостатичний внесок, а S_z – оператор спіну по z -компоненті (або узагальнений оператор взаємодії з шумом). Функція $\eta(t)$ моделює шумовий процес із

заданими статистичними властивостями.

У такій моделі еволюція матриці густини описується рівнянням:

$$\frac{d\rho}{dt} = -i[H + \eta(t)S_z, \rho] - \hat{\Gamma}\rho, \quad (2.16)$$

де $\hat{\Gamma}$ – дисипативний оператор, що враховує взаємодію з термостатом.

Таким чином, стохастичний вплив середовища реалізовано на рівні гамільтоніана, що дозволяє досліджувати декогеренцію, викликану шумами з різною кореляційною структурою, без явного моделювання повного середовища.

2.4.2 Модель двох кубітів

У двокубітних системах, де кожна з підсистем перебуває у взаємодії з навколишнім середовищем, загальний квантовий стан, як правило, не є простим тензорним добутком станів окремих кубітів. Як вже зазначалось у розділі (2.1), це означає, що матриця густини системи ρ не може бути подана у вигляді:

$$\rho = \rho_1 \otimes \rho_2. \quad (2.17)$$

Натомість виконується:

$$\rho \neq \rho_1 \otimes \rho_2,$$

що свідчить про наявність квантових кореляцій між підсистемами. Подібна ситуація виникає як у випадку початково заплутаних станів, так і внаслідок динаміки, коли заплутаність генерується під час еволюції незалежно від того, чи взаємодіють кубіти між собою безпосередньо, чи ні.

Гамільтоніан двокубітної системи з урахуванням взаємодії з середовищем має вигляд:

$$H = H_1 + H_2 + H_{\text{int } 1} + H_{\text{int } 2},$$

де $H_1 = \varepsilon_1 S_{z1} \otimes \mathbb{1}$ – гамільтоніан першого кубіта в зовнішньому полі, $H_2 = \varepsilon_2 \mathbb{1} \otimes S_{z2}$ – гамільтоніан другого кубіта, а $H_{\text{int } 1}$ і $H_{\text{int } 2}$ – гамільтоніани

взаємодії кожного кубіта з термостатом.

Для врахування дії шуму, який моделюється стохастичною функцією часу $\eta(t)$, ми модифікуємо гамільтоніан першого кубіта, додавши до нього шумовий внесок. Таким чином, гамільтоніан набуває вигляду:

$$H_1 = (\varepsilon_1 + \eta(t)) S_{z1} \otimes \mathbb{1}.$$

Це означає, що шум безпосередньо впливає лише на перший кубіт, тоді як другий залишається під впливом лише зовнішнього поля та власного термостатичного оточення. Такий підхід дозволяє моделювати ситуацію з локальним шумовим впливом, коли флуктуації середовища зосереджені лише на одній підсистемі.

Для спрощення виводу системи зробимо заміну й позначимо

$$\omega_1 = \varepsilon_1 + \eta(t), \quad \omega_2 = \varepsilon_2. \quad (2.18)$$

Тоді, повний Гамільтоніан системи має вигляд:

$$H_{full} = \omega_1 S_{z1} \otimes \mathbb{1} + \omega_2 \mathbb{1} \otimes S_{z2} + H_{int1} + H_{int2},$$

де

$$S_{z1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad S_{z2} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Після підстановки наведених операторів до виразу для гамільтоніана, можна записати його повну матричну форму, яка використовуватиметься в подальших обчисленнях:

$$H = \begin{pmatrix} \omega_1 + \omega_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \omega_1 - \omega_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\omega_1 + \omega_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\omega_1 - \omega_2 \end{pmatrix} + H_{int1} + H_{int2}. \quad (2.19)$$

Еволюція стану двокубітної системи в присутності взаємодії з оточен-

ням описується кінетичним рівнянням для повної матриці густини, яка була наведена (2.14). У цьому наближенні враховуються як гамільтонова динаміка, так і дисипативні процеси, що діють незалежно на кожен із кубітів. Відповідне рівняння має вигляд:

$$\dot{\rho} = -i[H_1 + H_2, \rho] - \widehat{\Gamma}_1 \rho - \widehat{\Gamma}_2 \rho, \quad (2.20)$$

де ρ – матриця густини системи розмірності 4×4 , яка має наступну структуру:

$$\rho = \begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} & \rho_{13} & \rho_{14} \\ \rho_{21} & \rho_{22} & \rho_{23} & \rho_{24} \\ \rho_{31} & \rho_{32} & \rho_{33} & \rho_{34} \\ \rho_{41} & \rho_{42} & \rho_{43} & \rho_{44} \end{pmatrix}.$$

Оператори $\widehat{\Gamma}_1$ та $\widehat{\Gamma}_2$ описують дисипативну динаміку, яка виникає внаслідок взаємодії кожного з кубітів із навколишнім середовищем. Вони відповідають за релаксацію та втрату когерентності, що зумовлені контактами з термостатом. При цьому параметри, що входять до $\widehat{\Gamma}_1$ і $\widehat{\Gamma}_2$, можуть бути різними для кожного з кубітів залежно від умов реалізації або фізичної природи системи.

Шумові збурення $\eta(t)$, які безпосередньо впливають на гамільтоніан, моделюють флуктуації середовища з часовою структурою. Вони діють через гамільтонів комутатор і виступають окремим джерелом декогеренції. Хоча $\eta(t)$ не входить явно у вирази $\widehat{\Gamma}_i$, його присутність істотно впливає на загальну еволюцію системи.

Для нашого випадку, враховуючи (2.15), отримуємо наступне:

$$\begin{aligned} \widehat{\Gamma}_1 \rho = & \Gamma_1 (\bar{n}+1) (\rho S_+ S_- \otimes \mathbb{1} - 2S_- \otimes \mathbb{1} \rho S_+ \otimes \mathbb{1} + S_+ S_- \otimes \mathbb{1} \rho) + \\ & + \Gamma_1 \bar{n} (\rho S_- S_+ \otimes \mathbb{1} - 2S_+ \otimes \mathbb{1} \rho S_- \otimes \mathbb{1} + S_- S_+ \otimes \mathbb{1} \rho), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \widehat{\Gamma}_2 \rho = & \Gamma_2 (\bar{n}+1) (\rho \mathbb{1} \otimes S_+ S_- - 2\mathbb{1} \otimes S_- \rho \mathbb{1} \otimes S_+ + \mathbb{1} \otimes S_+ S_- \rho) + \\ & + \Gamma_2 \bar{n} (\rho \mathbb{1} \otimes S_- S_+ - 2\mathbb{1} \otimes S_+ \rho \mathbb{1} \otimes S_- + \mathbb{1} \otimes S_- S_+ \rho). \end{aligned}$$

Для подальших обчислень ці оператори доцільно подати у матричній

формі, використовуюючи тензорні добутки. Незважаючи на громіздкість відповідних обчислень, матричні вирази дозволяють безпосередньо аналізувати вплив кожного члена на динаміку матриці густини.

В матричній формі:

$$\widehat{\Gamma}_1 \rho = \Gamma_1 (\bar{n} + 1) \begin{pmatrix} 2\rho_{11} & 2\rho_{12} & \rho_{13} & \rho_{14} \\ 2\rho_{21} & 2\rho_{22} & \rho_{23} & \rho_{24} \\ \rho_{31} & \rho_{32} & -2\rho_{11} & -2\rho_{12} \\ \rho_{41} & \rho_{42} & -2\rho_{21} & -2\rho_{22} \end{pmatrix} + \Gamma_1 \bar{n} \begin{pmatrix} -2\rho_{33} & -2\rho_{34} & \rho_{13} & \rho_{14} \\ -2\rho_{43} & -2\rho_{44} & \rho_{23} & \rho_{24} \\ \rho_{31} & \rho_{32} & 2\rho_{33} & 2\rho_{34} \\ \rho_{41} & \rho_{42} & 2\rho_{43} & 2\rho_{44} \end{pmatrix}, \quad (2.21)$$

$$\widehat{\Gamma}_2 \rho = \Gamma_2 (\bar{n} + 1) \begin{pmatrix} 2\rho_{11} & \rho_{12} & 2\rho_{13} & \rho_{14} \\ \rho_{21} & -2\rho_{11} & \rho_{23} & -2\rho_{13} \\ 2\rho_{31} & \rho_{32} & 2\rho_{33} & \rho_{34} \\ \rho_{41} & -2\rho_{31} & \rho_{43} & -2\rho_{33} \end{pmatrix} + \Gamma_2 \bar{n} \begin{pmatrix} -2\rho_{22} & \rho_{12} & -2\rho_{24} & \rho_{14} \\ \rho_{21} & 2\rho_{22} & \rho_{23} & 2\rho_{24} \\ -2\rho_{42} & \rho_{32} & -2\rho_{44} & \rho_{34} \\ \rho_{41} & 2\rho_{42} & \rho_{43} & 2\rho_{44} \end{pmatrix}. \quad (2.22)$$

У квантово-кінетичному рівнянні комутатор $[H_{total}, \rho]$ можна подати у явному матричному вигляді. Для двокубітної системи з гамільтоніаном $H = H_1 + H_2$ він має наступну форму:

$$[H_{total}, \rho] = \begin{pmatrix} 0 & -i\omega_2 \rho_{12} & -i\omega_1 \rho_{13} & -i(\omega_1 + \omega_2) \rho_{14} \\ i\omega_2 \rho_{21} & 0 & -i(\omega_1 - \omega_2) \rho_{23} & -i\omega_1 \rho_{24} \\ i\omega_1 \rho_{31} & i(\omega_1 - \omega_2) \rho_{32} & 0 & -i\omega_2 \rho_{34} \\ i(\omega_1 + \omega_2) \rho_{41} & i\omega_1 \rho_{42} & i\omega_2 \rho_{43} & 0 \end{pmatrix}.$$

Варто зазначити, що параметри ε_1 та ε_2 , які входять у ω_1 та ω_2 , можуть також інтерпретуватися як зміщення енергетичних рівнів кубітів відносно частоти деякої обраної системи відліку. Такий підхід є корисним у випадках, коли система досліджується в сильному зовнішньому полі: тоді швидкі осциляції усуваються за допомогою переходу до обертової системи координат, і розглядається ефективна повільна динаміка. Зазначимо, що наведений вираз для комутатора залишається справедливим і в такому випадку.

Використовуючи вирази (2.21, 2.22) для операторів $\widehat{\Gamma}_1$ та $\widehat{\Gamma}_2$, які описують релаксаційні й декогеренційні процеси в обох кубітах, можемо сформулювати повну систему рівнянь для матриці густини ρ . Оскільки ці оператори мають явні матричні представлення, а комутатор $[H_1 + H_2, \rho]$ також легко

записується у матричній формі, підставлення всіх відповідних доданків до кінетичного рівняння (2.20) дозволяє отримати систему рівнянь для кожного з 16 елементів матриці густини. Перепишемо у вигляді розгорнутої системи диференціальних рівнянь, виконуючи заміну (2.18) - $\omega_1 = \varepsilon_1 + \eta(t)$ та $\omega_2 = \varepsilon_2$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\rho}_{11} = -2\rho_{11}(\bar{n} + 1)(\Gamma_1 + \Gamma_2) + 2\bar{n}(\Gamma_1\rho_{33} + \Gamma_2\rho_{22}); \\ \dot{\rho}_{12} = -i2\varepsilon_2\rho_{12} - \rho_{12}(2\Gamma_1(\bar{n} + 1) + \Gamma_2(\bar{n} + 1) + \Gamma_2\bar{n}) + 2\Gamma_1\bar{n}\rho_{34}; \\ \dot{\rho}_{13} = -i2(\varepsilon_1 + \eta(t))\rho_{13} - \rho_{13}(\Gamma_1(\bar{n} + 1) + \Gamma_1\bar{n} + 2\Gamma_2(\bar{n} + 1)) + 2\Gamma_2\bar{n}\rho_{24}; \\ \dot{\rho}_{14} = -i(2((\varepsilon_1 + \eta(t)) + \varepsilon_2)\rho_{14}) - \rho_{14}(\Gamma_1 + \Gamma_2)(2\bar{n} + 1); \\ \dot{\rho}_{21} = i2\varepsilon_2\rho_{21} - \rho_{21}(\Gamma_1(\bar{n} + 1) + \Gamma_2(\bar{n} + 1) + \Gamma_2\bar{n}) + 2\Gamma_1\bar{n}\rho_{43}; \\ \dot{\rho}_{22} = -2\rho_{22}(\Gamma_1(\bar{n} + 1) + \Gamma_2\bar{n}) + 2\Gamma_1\bar{n}\rho_{44} + 2\Gamma_2(\bar{n} + 1)\rho_{11}; \\ \dot{\rho}_{23} = -2i((\varepsilon_1 + \eta(t)) - \varepsilon_2)\rho_{23} - \rho_{23}(\Gamma_1(\bar{n} + 1) + \Gamma_1\bar{n} + \Gamma_2(\bar{n} + 1) + \Gamma_2\bar{n}); \\ \dot{\rho}_{24} = -i2(\varepsilon_1 + \eta(t))\rho_{24} - \rho_{24}(\Gamma_1(\bar{n} + 1) + \Gamma_1\bar{n} + 2\Gamma_2\bar{n}) + 2\Gamma_2(\bar{n} + 1)\rho_{13}; \\ \dot{\rho}_{31} = i2(\varepsilon_1 + \eta(t))\rho_{31} - \rho_{31}(\Gamma_1(\bar{n} + 1) + 2\Gamma_2(\bar{n} + 1) + \Gamma_1\bar{n}) + 2\Gamma_2\bar{n}\rho_{42}; \\ \dot{\rho}_{32} = 2i((\varepsilon_1 + \eta(t)) - \varepsilon_2)\rho_{32} - \rho_{32}(\Gamma_1(\bar{n} + 1) + \Gamma_1\bar{n} + \Gamma_2(\bar{n} + 1) + \Gamma_2\bar{n}); \\ \dot{\rho}_{33} = -2\rho_{33}(\Gamma_1\bar{n} + \Gamma_2(\bar{n} + 1)) + 2\Gamma_1(\bar{n} + 1)\rho_{11} + 2\Gamma_2\bar{n}\rho_{44}; \\ \dot{\rho}_{34} = -i2\varepsilon_2\rho_{34} - \rho_{34}(2\Gamma_1\bar{n} + \Gamma_2(\bar{n} + 1) + \Gamma_2\bar{n}) + 2\Gamma_1(\bar{n} + 1)\rho_{12}; \\ \dot{\rho}_{41} = i(2((\varepsilon_1 + \eta(t)) + \varepsilon_2)\rho_{41}) - \rho_{41}(\Gamma_1 + \Gamma_2)(2\bar{n} + 1); \\ \dot{\rho}_{42} = i2(\varepsilon_1 + \eta(t))\rho_{42} - \rho_{42}(\Gamma_1(\bar{n} + 1) + \Gamma_1\bar{n} + 2\Gamma_2\bar{n}) + 2\Gamma_2(\bar{n} + 1)\rho_{31}; \\ \dot{\rho}_{43} = i2\varepsilon_2\rho_{43} - \rho_{43}(2\Gamma_1\bar{n} + \Gamma_2(\bar{n} + 1) + \Gamma_2\bar{n}) + 2\Gamma_1(\bar{n} + 1)\rho_{21}; \\ \dot{\rho}_{44} = -2\rho_{44}\bar{n}(\Gamma_1 + \Gamma_2) + 2(\bar{n} + 1)(\Gamma_1\rho_{22} + \Gamma_2\rho_{33}). \end{array} \right. \quad (2.23)$$

Ця система рівнянь описує еволюцію кожного елемента матриці густини двокубітної системи, що перебуває під дією як гамільтонової динаміки, так і шумових збурень та дисипативних процесів. Шумові флуктуації моделюються стохастичними доданками в гамільтоніані, тоді як затухання і декогеренція враховуються через оператори $\hat{\Gamma}_1$ та $\hat{\Gamma}_2$. Отримане рівняння є основою для подальшого чисельного аналізу еволюції системи, зокрема для дослідження ефектів повторюваних вимірювань у відкритому квантовому середовищі.

3 Пригнічення декогеренції двокубітних квантових систем

3.1 Усереднення за шумом

Для пригнічення декогеренції пропонується робити повторювані проєктивні вимірювання стану системи за допомогою глобальних вимірювань, які характеризуються одночасною дією на всі кубіти, що знаходяться у системі.

Нехай початковий стан буде вже розглянутий у (2.6) тобто

$$|\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|00\rangle + |11\rangle),$$

Його матриця густини з (2.7) у момент часу $t = 0$:

$$\rho(0) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.1)$$

Задля спрощення виводу аналітичних вимірювань, покладемо, що $\bar{n} = 0$; $\varepsilon_1 = 0$; $\varepsilon_2 = 0$. У такому випадку ми можемо проінтегрувати нашу систему (2.23), враховуючи, початковий стан системи (3.1). Вкажемо ненульові елементи системи дифференційних рівнянь:

$$\begin{cases} \rho_{11}(t) &= \frac{1}{2} e^{2(-\Gamma_1 - \Gamma_2)t}; \\ \rho_{14}(t) &= \frac{1}{2} e^{(\Gamma_1 + \Gamma_2)t} e^{\int_0^t (i\eta(t)) dt}; \\ \rho_{22}(t) &= \frac{1}{2} e^{-2(\Gamma_1 + \Gamma_2)t} (-1 + e^{2\Gamma_2 t}); \\ \rho_{33}(t) &= \frac{1}{2} e^{-2(\Gamma_1 + \Gamma_2)t} (-1 + e^{2\Gamma_1 t}); \\ \rho_{41}(t) &= \frac{1}{2} e^{-(\Gamma_1 + \Gamma_2)t} e^{\int_0^t (i\eta(t)) dt}; \\ \rho_{44}(t) &= \frac{1}{2} (2 - e^{-2\Gamma_1 t} - e^{-2\Gamma_2 t} + e^{-2(\Gamma_1 + \Gamma_2)t}). \end{cases}$$

І можемо записати матрицю густини в явному вигляді:

$$\rho(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}e^{-2(\Gamma_1+\Gamma_2)t} & 0 & 0 & \frac{1}{2}e^{-(\Gamma_1+\Gamma_2)t}e^{i\int_0^t\eta(t')dt'} \\ 0 & \frac{1}{2}e^{-2(\Gamma_1+\Gamma_2)t}(-1+e^{2\Gamma_2t}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}e^{-2(\Gamma_1+\Gamma_2)t}(-1+e^{2\Gamma_1t}) & 0 \\ \frac{1}{2}e^{-(\Gamma_1+\Gamma_2)t}e^{i\int_0^t\eta(t')dt'} & 0 & 0 & \frac{1}{2}(2-e^{-2\Gamma_1t}-e^{-2\Gamma_2t}+e^{-2(\Gamma_1+\Gamma_2)t}) \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

Недіагональні елементи $\rho_{14}(t)$ та $\rho_{41}(t)$ зберігаються від початкового стану, однак зазнають впливу флуктуаційної фази $\phi(t) = \int_0^t \eta(t')dt'$. Саме ці елементи чутливі до дії шуму, що відображається у вигляді фазового множника $e^{i\phi(t)}$.

Щоб оцінити середній ефект дії шуму на ці елементи, використовуємо усереднення по реалізаціях процесу $\eta(t)$, тобто обчислюємо характеристичну функцію:

$$\langle e^{i\phi(t)} \rangle = \exp\left(-\frac{1}{2}\langle\phi^2(t)\rangle\right), \quad (3.3)$$

де дисперсія фазового зсуву визначається через кореляційний функціонал (2.5).

У випадку гауссівського шуму з $C(\tau) = 2D\delta(\tau)$, як вже було отримано у (2.11):

$$\langle\phi^2(t)\rangle = 2Dt, \quad \Rightarrow \quad \langle e^{i\phi(t)} \rangle = e^{-Dt},$$

що відповідає експоненційному згасанню когерентності у недіагональних елементах матриці густини.

Таким чином, ми можемо представити ці елементи у вигляді:

$$\rho_{14}(t) = \rho_{41}^*(t) = \frac{1}{2}e^{-(\Gamma_1+\Gamma_2)t}e^{-Dt}, \quad (3.4)$$

що наочно демонструє спільну дію дисипативного середовища та фазового шуму на динаміку заплутаності.

Таким чином, враховуючи експоненціальне згасання когерентності внаслідок шуму (2.11), матриця густини (3.2) набуває вигляду:

$$\rho(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}e^{-2(\Gamma_1+\Gamma_2)t} & 0 & 0 & \frac{1}{2}e^{-(\Gamma_1+\Gamma_2+D)t} \\ 0 & \frac{1}{2}e^{-2(\Gamma_1+\Gamma_2)t}(-1 + e^{2\Gamma_2t}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}e^{-2(\Gamma_1+\Gamma_2)t}(-1 + e^{2\Gamma_1t}) & 0 \\ \frac{1}{2}e^{-(\Gamma_1+\Gamma_2+D)t} & 0 & 0 & \frac{1}{2}(2 - e^{-2\Gamma_1t} - e^{-2\Gamma_2t} + e^{-2(\Gamma_1+\Gamma_2)t}) \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

Для багатьох застосувань, де алгоритми розраховані на незначний ефект декогеренції, важливою є поведінка при малих часах $\tau = t$, коли система ще не встигла суттєво декогерувати. Тому доцільно провести розклад матриці густини у ряд Тейлора за $\tau \rightarrow 0$. Для цього скористаємося розв'язком (3.5).

Враховуючи, що $e^{-x} \approx 1 - x$ при $x \ll 1$, отримаємо для кожного з елементів матриці густини таку апроксимацію:

$$\rho(\tau) \approx \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - (\Gamma_1 + \Gamma_2)\tau & 0 & 0 & \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(\Gamma_1 + \Gamma_2 + D)\tau \\ 0 & \Gamma_2\tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Gamma_1\tau & 0 \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(\Gamma_1 + \Gamma_2 + D)\tau & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

Цей розклад дозволяє дослідити поведінку системи в короткочасній динаміці та оцінити ефект фазового шуму D на недіагональні елементи вже на початкових етапах еволюції.

3.2 Проективні вимірювання у заплутаній системі

Розглянемо вплив проективних вимірювань на динаміку заплутаної двокубітної системи. Для опису цього процесу скористаємося формалізмом операторів Крауса, який дозволяє математично моделювати еволюцію стану системи під час вимірювання. У разі вимірювань із поствідбором результат описується співвідношенням:

$$\rho' = \text{Norm}(A^\dagger \rho A + B^\dagger \rho B), \quad (3.7)$$

де Norm – нормувальний множник, що гарантує збереження одиничної слідової норми, а A та B – оператори проєкцій, які задають базис вимірювання.

У нашому аналізі ми розглядаємо квантові вимірювання, що виконуються з поствідбором (post-selection). Такий тип вимірювання передбачає фіксацію результату лише за умови відповідності кінцевого стану до певного обраного стану після вимірювання. Це означає, що фактичне оновлення стану системи відбувається не лише внаслідок самого процесу вимірювання, а й залежить від результату, який залишено (або ж обрано) після здійснення проєкції.

З фізичної точки зору поствідбір відображає сценарій, коли як початковий, так і кінцевий стани системи заздалегідь визначені, але не обов'язково є власними станами оператора системи, що розглядається. У такому разі результати вимірювання можуть бути несумісними з очікуваними власними значеннями, особливо у ситуації, коли початковий стан є суперпозицією з великою невизначеністю. Це веде до появи так званих слабких значень – ефекту, характерного для випадків, коли взаємодія між системою та вимірювальним пристроєм є слабкою.

Оскільки початковий стан системи – беллівський стан $|\Phi^+\rangle$, вибираємо проєктивне вимірювання в базисі:

$$A = |\Phi^+\rangle \langle \Phi^+|, \quad \text{де} \quad |\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|00\rangle + |11\rangle),$$

$$B = I - |\Phi^+\rangle \langle \Phi^+|.$$

Явні матричні форми операторів A і B у базисі $\{|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle\}$:

$$A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Для кращої наочності проаналізуємо проєкцію на стани $|00\rangle$ та $|11\rangle$,

яка математично задається виразом:

$$\rho' = |00\rangle\langle 00| \rho |00\rangle\langle 00| + |11\rangle\langle 11| \rho |11\rangle\langle 11|. \quad (3.8)$$

Ця операція зберігає лише ті компоненти матриці густини, які пов'язані зі станами $|00\rangle$ та $|11\rangle$, тобто проектує систему на підпростір, релевантний до початкової заплутаності.

Застосуємо цю операцію до апроксимованої матриці густини (3.6). У результаті отримаємо:

$$\rho'(\tau) \approx \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(1 - \frac{3}{2}(\Gamma_1 + \Gamma_2)\tau) & 0 & 0 & \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{2}(\Gamma_1 + \Gamma_2 + 2D)\tau) \\ 0 & \frac{1}{2}\Gamma_2 t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}\Gamma_1 t & 0 \\ \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{2}(\Gamma_1 + \Gamma_2 + 2D)\tau) & 0 & 0 & \frac{1}{2}(1 + \frac{3}{2}(\Gamma_1 + \Gamma_2)) \end{pmatrix}. \quad (3.9)$$

Проекція, виконана в беллівському базисі, дозволяє зберегти квантову когерентність між станами $|00\rangle$ і $|11\rangle$ навіть у присутності шуму, адже недіагональні елементи ρ_{14} та ρ_{41} не зануляються. Це вказує на збереження частини квантової кореляції, яка може бути підсилена шляхом повторюваних вимірювань.

3.3 Аналіз залежності від параметрів шуму

Для перевірки аналітичних результатів та дослідження поведінки системи в широкому діапазоні параметрів, нами було розроблено програму в середовищі *Wolfram Mathematica*. Вона реалізує весь аналітичний ланцюг: від побудови системи рівнянь еволюції матриці густини до моделювання дії шуму та повторюваних вимірювань. За допомогою цієї програми побудовано чисельні графіки, що демонструють зміну когерентності у системі залежно від параметрів, шуму D та кількості вимірювань N .

На рисунку 3.1 подано порівняння еволюції матричних елементів системи (2.23) у присутності та відсутності фазового шуму D . Графік було

побудовано при таких параметрах:

$$\bar{n} = 0, 1; \Gamma_1 = 0, 2; \Gamma_2 = 0, 3; \varepsilon_1 = 0,3; \varepsilon_2 = 0,4; D = 0, 5.$$

Оскільки елементи ρ_{14} та ρ_{41} збігаються, вони представлені однією лінією. Штрихові лінії відповідають випадку з шумом, суцільні – без нього. При $D = 0,5$ чітко видно, що шум призводить до швидкого згасання когерентних компонентів, у той час як діагональні елементи залишаються практично незмінними. Центральні елементи ρ_{22} і ρ_{33} (жовтий та помаранчевий кольори) не зазнають впливу шуму, однак змінюються зі зміною дисипативних параметрів Γ_1 і Γ_2 .

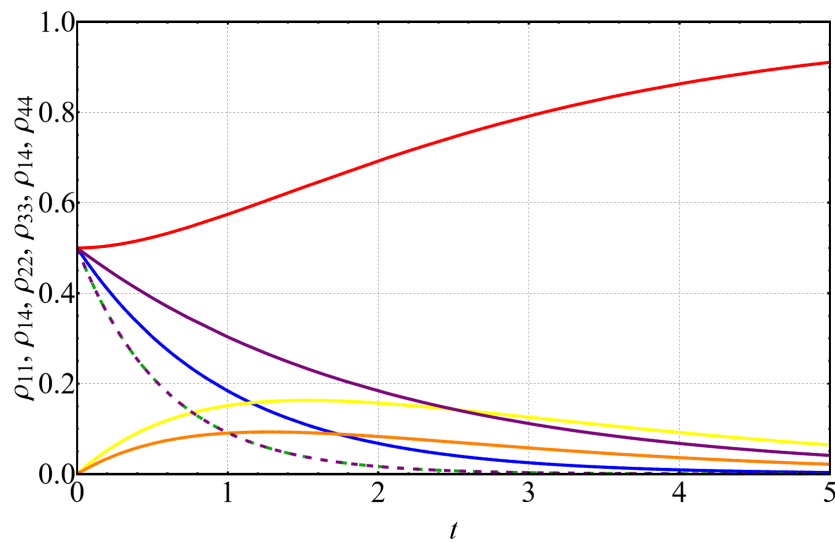


Рис. 3.1: Порівняння еволюції матричних елементів без шуму (суцільні лінії) та з шумом ($D = 0,5$, штрихова лінія)

На рисунку 3.2 розглянуто вплив 10 вимірювань ($N = 10$). Графік було побудовано при таких параметрах:

$$\bar{n} = 0, 1; \Gamma_1 = 0, 2; \Gamma_2 = 0, 3; \varepsilon_1 = 0,3; \varepsilon_2 = 0,4; D = 0, 5, N = 10.$$

Видно, що навіть при невеликій кількості вимірювань ефект проєкції вже частково проявляється – когерентність підтримується краще, ніж без вимірювання, однак ще не досягає значного рівня стабілізації.

Зі збільшенням кількості вимірювань до $N = 200$ (рисунок 3.3) спостерігається помітне уповільнення декогеренції: недіагональні елементи ρ_{14} та

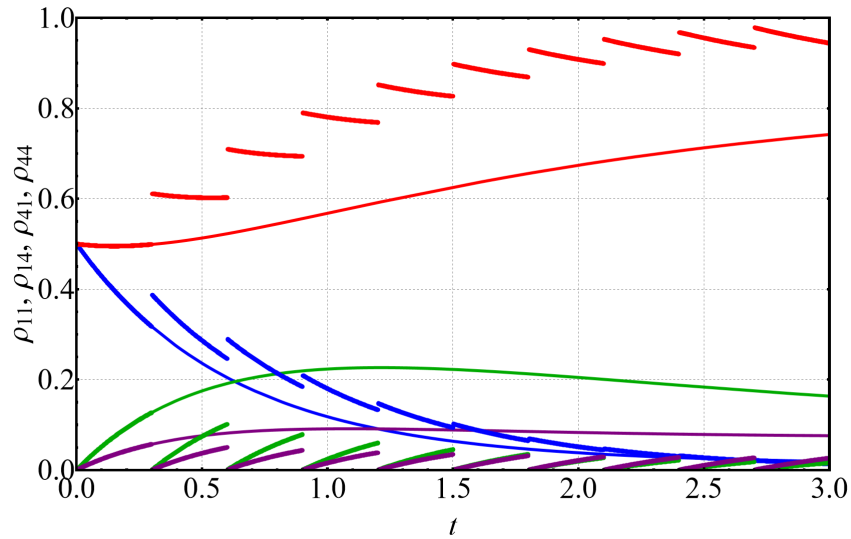


Рис. 3.2: Еволюція матричних елементів при $N = 10$ проєктивних вимірюваннях

ρ_{41} зменшуються значно повільніше. Це вказує на наближення до зенонівського режиму, в якому часті вимірювання гальмують еволюцію системи. Графік було побудовано при таких параметрах:

$$\bar{n} = 0, 1; \Gamma_1 = 0, 2; \Gamma_2 = 0, 3; \varepsilon_1 = 0,3; \varepsilon_2 = 0,4; D = 0,5, N = 200.$$

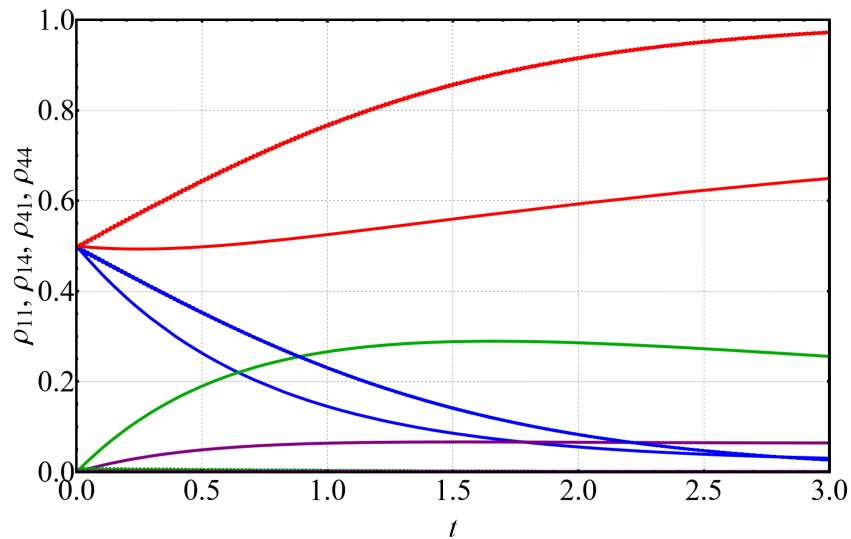


Рис. 3.3: Уповільнення декогеренції при $N = 200$ вимірюваннях

Вплив дисперсії шуму проілюстровано на рисунку 3.4, де $D = 1$. Недіагональні елементи демонструють ще швидше згасання, в той час як діагональні залишаються стабільними. Це підтверджує, що фазовий шум

впливає переважно на когерентність, не змінюючи ймовірності перебування системи у базисних станах. Графік було побудовано при таких параметрах:

$$\bar{n} = 0, 1; \Gamma_1 = 0, 2; \Gamma_2 = 0, 3; \varepsilon_1 = 0, 3; \varepsilon_2 = 0, 4; D = 1, N = 200.$$

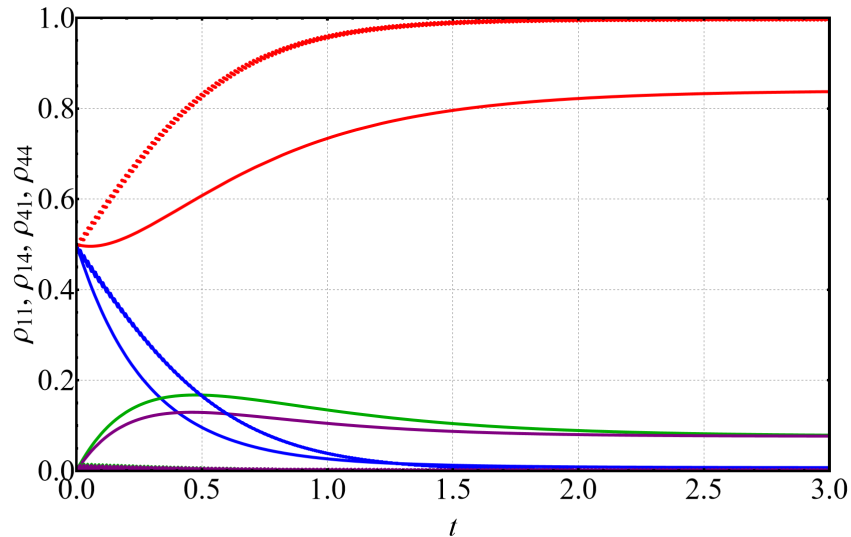


Рис. 3.4: Швидке згасання когерентності при $D = 1$, $N = 200$

Цікавий результат подано на рисунку 3.5: при $N = 500$ та $D = 1.5$ навіть сильний шум компенсується частими проєктивними вимірюваннями. Недіагональні елементи залишаються поблизу $\rho_{14} \approx \rho_{41} \approx 1/2$, тобто система зберігає високий рівень запутаності. Це підтверджує дію квантового ефекту Зенона: якщо проєкції відбуваються часто, система не встигає втратити когерентність між вимірюваннями. Графік було побудовано при таких параметрах:

$$\bar{n} = 0, 1; \Gamma_1 = 0, 2; \Gamma_2 = 0, 3; \varepsilon_1 = 0, 3; \varepsilon_2 = 0, 4; D = 1.5, N = 500.$$

Проведений аналіз показує, що фазовий шум справляє критичний вплив на недіагональні елементи матриці густини, відповідальні за когерентність і запутаність. При цьому діагональні компоненти, які відповідають за ймовірності базисних станів, залишаються практично незмінними. Проте часті проєктивні вимірювання в парному базисі дозволяють істотно при-

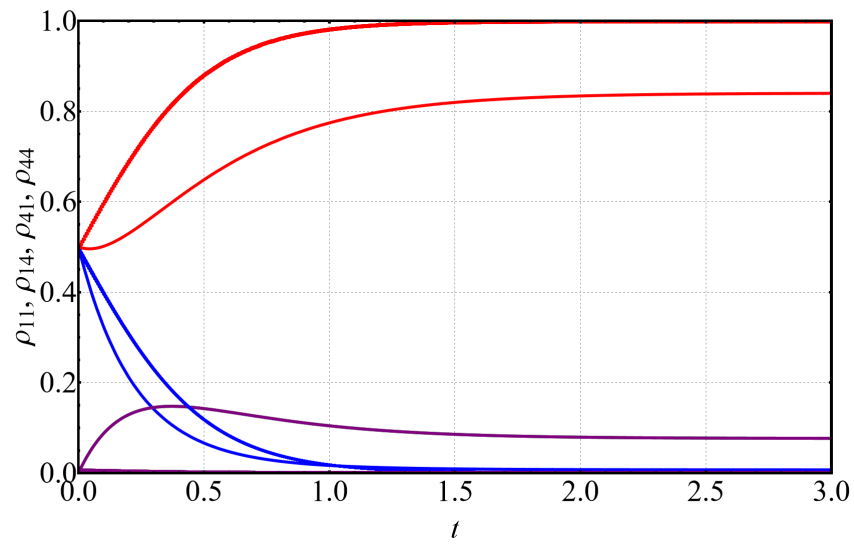


Рис. 3.5: Стабілізація когерентності при $D = 1$, $N = 500$ – прояв квантового ефекту Зенона

гальмувати втрату когерентності – навіть за значної інтенсивності шуму. Це демонструє ефективність повторюваних вимірювань як одного з методів протидії декогеренції у відкритих квантових системах.

4 ВИСНОВКИ

У даній роботі було досліджено еволюцію двокубітної квантової системи, яка перебуває у заплутаному стані, під впливом термостату та шумового середовища. Особливу увагу приділено впливу повторюваних вимірювань із поствідбором на збереження когерентності системи в умовах дії частотного шуму. Головною метою дослідження було з'ясувати, яким чином шумові збурення та багаторазові проєктивні вимірювання впливають на динаміку заплутаності у квантовій системі. Поставлену мету досягнуто шляхом побудови відповідної моделі, аналітичного розв'язку рівнянь та чисельного моделювання.

Під час дослідження було виконано низку задач, а саме:

- 1) Отримано квантово-кінетичне рівняння Ліндблада за наявності фазового шуму з довільними властивостями, який діє на один з кубітів у заплутаній двокубітній системі;
- 2) отримана система для часової еволюції матричних елементів матриці густини двокубітної системи й проведено усереднення за фазовими шумами за допомогою характеристичного функціоналу шуму;
- 3) показано, що повторювані вимірювання у відповідному базисі дозволяють зменшити швидкість декогеренції навіть за наявності шуму й отримані відповідні рівняння перетворення матриці густини аналітично, а також розроблена програма розрахунку їх чисельними методами;
- 4) Проаналізовано вплив фазового шуму на динаміку системи та встановлено, що шум викликає згасання недіагональних елементів матриці густини, відповідальних за когерентність, однак повторювані проєктивні вимірювання дозволяють частково компенсувати цей ефект.

Практичне значення отриманих результатів полягає в можливості їх застосування для створення більш стійких квантових протоколів, зокрема в умовах реалістичного середовища, де діють зовнішні флуктуації. Модель і методика можуть бути використані при проєктуванні експериментальних схем у квантовій криптографії, симуляціях багатокубітних систем та системах з обмеженим ресурсом частоти вимірювань.

Літэратура

- [1] Paladino E., Galperin Y. M., Falci G., Altshuler B. L. 1/f noise: implications for solid-state quantum information. 2013. URL: <https://arxiv.org/abs/1304.7925>.
- [2] Mutter P. M., Burkard G. Fingerprints of qubit noise in transient cavity transmission. *Physical Review Letters*. 2022. Jun. Vol. 128, No. 23. URL: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.128.236801>.
- [3] Cai W., Han J., Mei F., Xu Y., Ma Y., Li X. et al. Observation of topological magnon insulator states in a superconducting circuit. *Physical Review Letters*. 2019. Aug. Vol. 123, No. 8. URL: <https://doi.org/10.1103/physrevlett.123.080501>.
- [4] Bernstein E., Vazirani U. [Quantum complexity theory](#). Proceedings of the twenty-fifth annual ACM symposium on Theory of computing - STOC '93. STOC '93. ACM Press, 1993. P. 11–20. URL: <http://dx.doi.org/10.1145/167088.167097>.
- [5] Quantum theory, the church–turing principle and the universal quantum computer. *Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences*. 1985. Jul. Vol. 400, No. 1818. P. 97–117. URL: <https://doi.org/10.1098/rspa.1985.0070>.
- [6] Landauer R. Is quantum mechanics useful?. *Philosophical Transactions: Physical Sciences and Engineering*. 1995. Vol. 353, No. 1703. P. 367–376. URL: <http://www.jstor.org/stable/54534> (online; accessed: 2025-05-14).
- [7] Cirac J. I., Zoller P. Quantum computations with cold trapped ions. *Physical Review Letters*. 1995. May. Vol. 74, No. 20. P. 4091–4094. URL: <https://doi.org/10.1103/physrevlett.74.4091>.
- [8] Bennett C. H. Logical reversibility of computation. *IBM Journal of Research and Development*. 1973. Vol. 17, No. 6. P. 525–532.

- [9] Grover L. K. Quantum mechanics helps in searching for a needle in a haystack. 1997. URL: <https://arxiv.org/abs/quant-ph/9706033>.
- [10] *Proceedings of the Royal Society of London. Series A: Mathematical and Physical Sciences*. 1992. Dec. Vol. 439, No. 1907. P. 553–558. URL: <http://dx.doi.org/10.1098/rspa.1992.0167>.
- [11] Shor P. *Algorithms for quantum computation: discrete logarithms and factoring*. Proceedings 35th Annual Symposium on Foundations of Computer Science. IEEE Comput. Soc. Press. URL: <https://doi.org/10.1109/sfcs.1994.365700>.
- [12] Coppersmith D. An approximate fourier transform useful in quantum factoring. 2002. URL: <https://arxiv.org/abs/quant-ph/0201067>.
- [13] Vandersypen L. M. K., Steffen M., Breyta G., Yannoni C. S., Sherwood M. H., Chuang I. L. Experimental realization of shor's quantum factoring algorithm using nuclear magnetic resonance. *Nature*. 2001. Dec. Vol. 414, No. 6866. P. 883–887. URL: <https://doi.org/10.1038/414883a>.
- [14] Trillo D., Dive B., Navascués M. Universal quantum rewinding protocol with an arbitrarily high probability of success. *Physical Review Letters*. 2023. Mar. Vol. 130, No. 11. URL: <https://doi.org/10.1103/physrevlett.130.110201>.
- [15] Fey S., Kapfer S. C., Schmidt K. P. Quantum criticality of two-dimensional quantum magnets with long-range interactions. *Physical Review Letters*. 2019. Jan. Vol. 122, No. 1. URL: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.122.017203>.
- [16] Deshmukh A. The role of quantum decoherence in quantum computing systems. *Journal of Quantum Science and Technology*. 2024. Jul. Vol. 1, No. 2. P. 37–43. URL: <http://dx.doi.org/10.36676/jqst.v1.i2.14>.
- [17] Wudarski F., Zhang Y., Korotkov A. N., Petukhov A., Dykman M. Characterizing low-frequency qubit noise. *Physical Review Applied*. 2023.

- Jun. Vol. 19, No. 6. URL: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevApplied.19.064066>.
- [18] Shnirman A., Schön G., Martin I., Makhlin Y. Low- and high-frequency noise from coherent two-level systems. *Physical Review Letters*. 2005. Apr. Vol. 94, No. 12. URL: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.94.127002>.
- [19] Zangi S. M., ur Rahman A., Ji Z.-X., Ali H., Zhang H.-G. Decoherence effects in a three-level system under gaussian process. *Symmetry*. 2022. Nov. Vol. 14, No. 12. P. 2480. URL: <http://dx.doi.org/10.3390/sym14122480>.
- [20] Jafari R., Asadian A., Abdi M., Akbari A. Dynamics of decoherence in a noisy driven environment. *Scientific Reports*. 2025. May. Vol. 15, No. 1. URL: <http://dx.doi.org/10.1038/s41598-025-00815-8>.
- [21] Nakazato H., Pascazio S.. *Journal of Superconductivity*. 1999. Vol. 12, No. 6. P. 843–849. URL: <http://dx.doi.org/10.1023/A:1007709831927>.
- [22] von Neumann J., Rose M. E. imathematical foundations of quantum mechanics (investigations in physics no. 2)/i. *Physics Today*. 1955. Oct. Vol. 8, No. 10. P. 21–21. URL: <https://doi.org/10.1063/1.3061789>.
- [23] BOHR N. The quantum postulate and the recent development of atomic theory1. *Nature*. 1928. Apr. Vol. 121, No. 3050. P. 580–590. URL: <https://doi.org/10.1038/121580a0>.
- [24] Heisenberg W. ber den anschaulichen inhalt der quantentheoretischen kinematik und mechanik. *Zeitschrift fr Physik*. 1927. Mar. Vol. 43, No. 3-4. P. 172–198. URL: <https://doi.org/10.1007/bf01397280>.
- [25] Briegel H. J., Browne D. E., Dür W., Raussendorf R., den Nest M. V. Measurement-based quantum computation. *Nature Physics*. 2009. Jan. Vol. 5, No. 1. P. 19–26. URL: <https://doi.org/10.1038/nphys1157>.
- [26] Kocsis S., Braverman B., Ravets S., Stevens M. J., Mirin R. P., Shalm L. K., Steinberg A. M. Observing the average trajectories of single photons in a two-slit interferometer. *Science*. 2011. Jun. Vol. 332, No. 6034. P. 1170–1173. URL: <https://doi.org/10.1126/science.1202218>.

- [27] Wang Q. Q., Muller A., Bianucci P., Rossi E., Xue Q. K., Takagahara T. et al. Decoherence processes during optical manipulation of excitonic qubits in semiconductor quantum dots. *Physical Review B*. 2005. Jul. Vol. 72, No. 3. URL: <https://doi.org/10.1103/physrevb.72.035306>.
- [28] Berry D. W., Ahokas G., Cleve R., Sanders B. C. Efficient quantum algorithms for simulating sparse hamiltonians. 2005. URL: <https://arxiv.org/abs/quant-ph/0508139>.
- [29] Pineda C. One, two, and n qubit decoherence. 2007. URL: <https://arxiv.org/abs/0711.4642>.
- [30] Nielsen M. A., Chuang I. Quantum computation and quantum information. 2002.