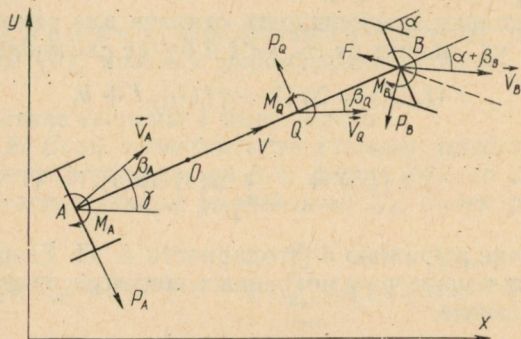


### ОБОСНОВАНИЕ КИНЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ АВТОМАТА ВОЖДЕНИЯ

В работах [1, 2] была построена математическая модель автомата вождения самоходной машины. Существенным элементом построенной теории были уравнения движения системы, основанные на кинематических предположениях: а) скорость точки  $A$  — середины оси задних колес — направлена вдоль оси машины  $AB$ ; б) скорость точки  $B$  — середины оси передних (управляемых) колес — направлена под углом  $\alpha$  к оси  $AB$ , равным углу поворота передних колес; в) скорость точки  $A$  постоянна по модулю.

В реальной самоходной машине указанные предположения выполняются весьма приближенно: скорость точки  $A$  направлена не по оси, а под некоторым углом  $\beta_A$  к оси (называемым углом увода задних колес), а скорость точки  $B$  направлена не под углом  $\alpha$  к оси  $AB$ , а под углом  $\alpha + \beta_B$  (угол  $\beta_B$  называется углом



увода передних колес). Построим математическую модель самоходной машины с учетом увода. Для случая, когда движение агрегата осуществляется так, что точка  $B$  движется по заданной траектории  $y = f(x)$ , такая модель была построена Н. Т. Куценко, В. В. Стеценко [3]. При этом оказалось, что для  $f(x)$ , мало отличающейся от прямой, движение агрегата в первом приближении совпадает с движением некоторого эквивалентного агрегата по «кинематическому» закону.

В настоящей работе исследуется общий случай произвольного управляемого движения, близкого к прямолинейному. Дадим обоснование кинематического подхода в следующих предположениях, выполняющихся на практике:

1) движение мало отклоняется от оси  $x$ ; точнее, будем пренебрегать величинами третьего порядка малости относительно

углов  $\gamma, \alpha$  и углов между скоростями точек оси агрегата и осью  $x$ , а также их производных по времени; более того, так как движение носит колебательный характер вокруг оси  $x$ , будем считать интегралы по времени от малых величин малыми того же порядка;

2) силы сопротивления почвы, действующие на колесо или орудие, сводятся к продольной (лежащей в плоскости колеса или орудия) силе трения, обусловленной только вертикальной нагрузкой, поперечной силе и восстанавливающему моменту, зависящим при данной вертикальной нагрузке только от угла увода, т. е. угла между скоростью центра колеса или орудия и его плоскостью; сила тяги является продольной и компенсирует продольные силы сопротивления в том смысле, что продольная составляющая центра масс  $O$  является малой величиной не ниже второго порядка малости;

3) характер движения и сил сопротивления, а также параметры агрегата таковы, что силы инерции малы по сравнению с силами сопротивления почвы.

Мы требуем, чтобы продольная составляющая ускорения  $\vec{W}_O$  была не нуль, а лишь  $O$  (квадр.), так как уже в простейшем случае равномерного вращения агрегата вокруг постоянной вертикальной оси, проходящей через некоторую далекую точку  $S$ , центростремительное ускорение должно быть ортогонально скорости  $\vec{V}_O$  и так как  $\vec{V}_O$  в общем случае не направлено вдоль оси, продольная составляющая  $\vec{W}_O$  не равна нулю, а как легко проверить, является величиной второго порядка малости.

Примем на оси машины за начало отсчета точку  $O$  — центр масс, а направление отсчета — от точки  $O$  к точке  $B$ . Тогда точки  $A, Q, B$  будут заданы своими координатами  $\xi_A, \xi_Q, \xi_B$ .

В соответствии с предложением 2 динамические уравнения движения системы записываются следующим образом:

$$I_0 \ddot{\gamma} = M_A + M_Q + M_B + \xi_A P_A + \xi_Q P_Q + \xi_B P_B \cdot \cos \alpha - \xi_B F \sin \alpha; \quad (1)$$

$$m(\vec{W}_O, \vec{n}) = P_A + P_Q + P_B \cos \alpha - F \sin \alpha; \quad (2)$$

$$(\vec{W}_O, \vec{\tau}) = O \text{ (квадр.)}, \quad (3)$$

где  $I_0$  — момент инерции машины относительно вертикальной оси, проходящей через центр масс  $O$ ; точка  $Q$  — точка контакта орудия (например, копача корнеуборочной машины) с почвой;

$\vec{\tau}$  — единичный вектор, направленный по оси машины,  $\vec{n}$  — единичный вектор, направленный по нормали к оси;  $P_A, P_Q, P_B$  — поперечные силы сопротивления;  $F$  — продольная сила сопротивления передних колес;  $M_A, M_Q, M_B$  — восстанавливающие

моменты;  $m$  — масса машины;  $O$  (квадр.) — величина второго порядка малости относительно углов и их производных.

По предположению 2 сила сопротивления  $P_A$  зависит только от  $\beta_A$  (очевидно, является нечетной функцией):  $P_A = P_A(\beta_A)$ . Разлагая по формуле Тейлора и отбрасывая кубические члены, имеем  $P_A = -\mu_A \beta_A$  ( $\mu_A > 0$ ). Знак минус отражает реальное направление силы сопротивления, противоположной уводу.

Аналогично этому получим  $M_A = -\nu_A \beta_A$ ,  $P_Q = -\mu_Q \beta_Q$ ,  $M_Q = -\nu_Q \beta_Q$ ,  $P_B = -\mu_B \beta_B$ ,  $M_B = -\nu_B \beta_B$  (все коэффициенты  $\mu$  и  $\nu$  положительны).

Покажем, что продольная составляющая скорости точки  $O$  (а значит, и любой другой точки оси) мало отличается от постоянной, которую мы обозначим  $V$ . Действительно,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\vec{V}_O, \vec{\tau}) &= (\vec{W}_O, \vec{\tau}) + (\vec{V}_O, \frac{d\vec{\tau}}{dt}) = O(\text{квадр.}) + (\vec{V}_O, \vec{n}\dot{\gamma}) = \\ &= O(\text{квадр.}) + |\vec{V}_O| \sin \beta_O \dot{\gamma} = O(\text{квадр.}). \quad \text{Отсюда } (\vec{V}_O, \vec{\tau}) = \\ &= V + O(\text{квадр.}). \end{aligned}$$

Модуль скорости любой точки оси также равен  $V$  с квадратичной точностью, например ( $\beta_O$  — угол между  $\vec{V}_O$  и  $\vec{\tau}$ ):

$$\begin{aligned} (\vec{V}_O, \vec{\tau}) &= |\vec{V}_O| \cos \beta_O = |\vec{V}_O| + O(\text{квадр.}) = V + O(\text{квадр.}), \quad \text{т. е.} \\ |\vec{V}_O| &= V + O(\text{квадр.}). \end{aligned}$$

Все неизвестные, входящие в уравнения (1), (2), можно выразить двумя неизвестными. Примем за основные неизвестные  $\beta_O \equiv \beta$  и  $\dot{\gamma} \equiv VZ$ . Тогда, отбрасывая кубические члены,

$$\begin{aligned} \text{имеем } \ddot{\gamma} &= V\dot{Z}; \quad \left( \vec{W}_O, \vec{n} \right) = \frac{d}{dt}(\vec{V}_O, \vec{n}) - \left( \vec{V}_O, \frac{d\vec{n}}{dt} \right) = V\dot{\beta}_O + \\ &+ V\dot{\gamma} = V\dot{\beta} + V^2Z. \end{aligned}$$

С этой же квадратичной точностью уравнения (1), (2) можно записать в виде

$$\begin{aligned} I_O V\dot{Z} &= -(\nu_A + \mu_A \xi_A) \beta_A - (\nu_Q + \mu_Q \xi_Q) \beta_Q - (\nu_B + \mu_B \xi_B) \beta_B - \\ &- F \xi_B \alpha m V \dot{\beta} + m V^2 z = -\mu_A \beta_A - \mu_Q \beta_Q - \mu_B \beta_B - F \alpha. \end{aligned}$$

Остается выразить через  $\beta$  и  $z$  углы  $\beta_A$ ,  $\beta_Q$ ,  $\beta_B$ .

Из формулы для скоростей твердого тела получим  $\vec{V}_A - \vec{V}_O = [\vec{\omega}, \vec{r}_{OA}]$ , или с квадратичной точностью  $V\beta_A - V\beta = \dot{\gamma} \xi_A$ , откуда  $\beta_A = \beta + \xi_A z$ . Аналогично этому  $\beta_Q = \beta + \xi_Q z$ ;  $\beta_B + \alpha = \beta + \xi_B z$ .

Таким образом, имеем следующую систему дифференциальных уравнений второго порядка:

$$\varepsilon \begin{pmatrix} \dot{\beta} \\ z \end{pmatrix} = -N \begin{pmatrix} \beta \\ z \end{pmatrix} + D\alpha, \quad (4)$$

где  $\varepsilon = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & I_0 V \end{pmatrix}$ ;  $D = \begin{pmatrix} \mu_B - F \\ \nu_B + (\mu_B - F)\xi_A \end{pmatrix}$ ;  $n_1 = \mu_A + \mu_Q + \mu_B$ ,  $n_2 = \mu_A \xi_A + \mu_Q \xi_Q + \mu_B \xi_B + mV^2$ ;  $n_3 = \nu_A + \mu_A \xi_A + \nu_Q + \mu_Q \xi_Q + \nu_B + \mu_B \xi_B$ ;  $n_4 = (\nu_A + \mu_A \xi_A) \xi_A + (\nu_Q + \mu_Q \xi_Q) \xi_Q + (\nu_B + \mu_B \xi_B) \xi_B$ ;  $N = \begin{pmatrix} n_1 & n_2 \\ n_3 & n_4 \end{pmatrix}$ .

Обозначая  $R = \varepsilon^{-1}N$ , можем записать решение в виде

$$\begin{pmatrix} \beta(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = e^{-Rt} \begin{pmatrix} \beta(0) \\ z(0) \end{pmatrix} + \int_0^t e^{-R(t-\tau)} \varepsilon^{-1} D\alpha(\tau) d\tau.$$

По предположению 3 силы инерции малы по сравнению с силами сопротивления, что конкретно выражается в больших положительных собственных значениях матрицы  $R$ . Поэтому возможно асимптотическое представление решения при  $t > 0$ . Применяя интегрирование по частям и отбрасывая везде члены, содержащие  $\exp(-Rt)$ , запишем решение системы в следующей форме:

$$\begin{pmatrix} \beta(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = N^{-1}D\alpha(t) - R^{-1}N^{-1}D\dot{\alpha}(t) + R^{-2}N^{-1}D\ddot{\alpha}(t) - \dots + (-1)^k R^{-k} N^{-1} D\alpha^{(k)}(t) + O(\|R^{-1}\|^{k+1}), \quad (5)$$

которая справедлива при условии ограниченности  $(k+1)$ -й производной управления  $\alpha(t)$ . Заметим, что этот результат можно получить обычным методом малого параметра, разлагая решение по степеням малой матрицы  $N^{-1}\varepsilon$ .

Первый член разложения (5) соответствует решению системы (4), если формально положить  $\varepsilon = 0$ . Покажем, что описываемое этим членом движение совпадает (с точностью до кубических членов) с «кинематическим» (в смысле, указанном в начале работы) движением эквивалентного агрегата со специально подобранными размерами и управлением.

Имеем  $\begin{pmatrix} \beta \\ z \end{pmatrix} = N^{-1}D\alpha$ , откуда  $\beta_A = -\rho_1\alpha$ ,  $z = \rho_2\alpha$ ,  $\beta_B = -\rho_3\alpha$ ,

где  $\rho_1, \rho_2, \rho_3$  — положительные константы.

Найдем на оси  $AB$  точку  $\Phi$ , для которой  $\beta_\Phi = 0$ , т. е. скорость направлена вдоль оси машины. Имеем  $0 = \beta_\Phi = \beta_A + L_{A\Phi}z$ , откуда  $L_{A\Phi} = \rho_1/\rho_2$ , т. е. положение точки  $\Phi$  не зависит от времени и от управления. Таким образом, если заднюю ось эквивалент-

ного агрегата поставить в точку  $\Phi$ , для нее будет выполняться кинематическое предположение а. С другой стороны, скорость точки  $B$  направлена под углом к оси машины, равным  $\alpha + \beta_B = (1 - \rho_3)\alpha$ . Значит, для эквивалентного агрегата выполняется кинематическое предположение б, если заменить реальное управление  $\alpha$  на управление  $\alpha_\phi = (1 - \rho_3)\alpha$ .

В применении к агрегату, управляемому автоматом вождения (см. [1, 2]), по закону  $\alpha(t) = -k\varphi(t)$ . Это означает, что эквивалентный агрегат управляется по закону  $\alpha_\phi(t) = -k_\phi\varphi(t)$ , где  $k_\phi = k(1 - \rho_3)$ .

Следует отметить, что в этом приближении мы не получили постоянного модуля скорости точки  $\Phi$ . Как и для любой другой точки,  $|\vec{V}_\phi| = V + O$  (квадр.).

Если записать теперь, как в [1], кинематические уравнения

$$\dot{y}_\phi = |\vec{V}_\phi| \sin \gamma; \quad \dot{\gamma} = \frac{|\vec{V}_\phi|}{L_{A\phi}} \operatorname{tg} \alpha_\phi; \quad \dot{x}_\phi = |\vec{V}_\phi| \cos \gamma,$$

то, отбрасывая в первых двух уравнениях кубические члены, получим  $\dot{y}_\phi = V\gamma$ ;  $\dot{\gamma} = V/L_{A\phi}\alpha_\phi$ , т. е. те же уравнения, которые получились бы с той же точностью, если бы  $|\vec{V}_\phi|$  точно равнялся  $V$ . В этом смысле обосновывается кинематическое предположение  $B$ .

Третье уравнение можно записать в виде  $\dot{x}_\phi = V + O$  (квадр.), откуда  $x_\phi = x_\phi(0) + Vt + O$  (квадр.).

Мы обычно интересуемся функциями  $y_\phi$  и  $\gamma$  как функциями не времени, а  $x_\phi$ , поэтому, например, функцию  $y_\phi = f(t)$  можно легко преобразовать в функцию от  $x_\phi$  с принятой квадратичной точностью (зная зависимость  $x_\phi$  от  $t$ ):

$$y_\phi = f\left(\frac{x_\phi - x_\phi(0)}{V} + O(\text{квадр.})\right) = f\left(\frac{x_\phi - x_\phi(0)}{V}\right) + f' O(\text{квадр.}) = f\left(\frac{x_\phi - x_\phi(0)}{V}\right) + O(\text{куб.}).$$

Следовательно, во всех таких случаях результат получается тот же, что и при использовании выражения  $x_\phi(t) = x_\phi(0) + Vt$  или дифференциального уравнения  $\dot{x}_\phi = V$ .

Таким образом, мы можем, не теряя квадратичной точности, не только заменить в уравнениях (6)  $|\vec{V}_\phi|$  на постоянную  $V$ , но и пользоваться вместо (6) линеаризованными уравнениями

$$\dot{y}_\phi = V\gamma; \quad \dot{\gamma} = \frac{V}{L_{A\phi}} \alpha_\phi; \quad \dot{x}_\phi = V.$$

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Математическая модель автомата вождения самоходной машины, отслеживающего кривую с помощью копира. — «Вестн. Харьк. ун-та», 1976, № 134. Математика и механика, вып. 41, с. 3—11. Авт.: А. С. Кашурко, В. И. Коробов, Е. Н. Подольский, В. А. Синяков.
2. Влияние зон нечувствительности, люфтов и запаздывания на работу автомата вождения самоходной машины. — «Вестн. Харьк. ун-та», 1977, № 148. Прикл. математика и механика, вып. 42, с. 27—36. Авт.: С. И. Вовна, А. С. Кашурко, Е. Н. Подольский, В. А. Синяков.
3. Стеценко В. В., Куценко Н. Т. Исследование движения свекловичного агрегата и горизонтальной плоскости. — Тезисы докл. на Всесоюз. науч.-техн. конф. по итогам и перспективам развития конструкций машин для производства сахарной свеклы и кукурузы на зерно, Харьков, 1976, с. 74—75.

Поступила 15.III 1977 г.

УДК 519.1:61—539.2

А. Г. ЧЕРНЯВСКИЙ

### СВЯЗЬ ГЕОМЕТРИИ И УСТОЙЧИВОСТИ ДИСКРЕТНЫХ СТРУКТУР

Рассмотрим влияние геометрии на свойства многомерных решеток, в том числе неперiodических и с нецентральными взаимодействиями.

1. Уравнения движения кристалла в гармоническом приближении имеют вид [3]

$$M \ddot{Z} = -\Phi Z + F, \quad (1)$$

где  $Z$  — вектор смещений атомов решетки;  $\Phi$  — матрица силовых постоянных;  $M$  — диагональная матрица масс всех атомов;  $F$  — вектор внешних сил, приложенных к каждому атому.

В  $N$ -мерной решетке ( $N \leq 3$ ) изучаются смещения масс  $m_i$  ( $i \geq 0$ ) по  $p$ -координатным осям ( $p \leq 3$ ). В гармоническом приближении векторная сила  $F_{st}$  взаимодействия между массами  $m_s$  и  $m_t$  линейно выражается через разность векторов их смещений  $Z_s$  и  $Z_t$  от положений равновесия

$$\vec{F}_{st} = K_{st} (\vec{Z}_s - \vec{Z}_t), \quad (2)$$

где  $K_{st}$  — симметричная вещественная матрица порядка  $p$ . Для фиксирования системы в пространстве предполагается, что масса  $m_0$  неподвижно закреплена.

Через  $G = (X, Y)$  обозначим граф связей решетки, каждая вершина которого  $x_i \in X$  отвечает массе  $m_i$ , а ребро  $y_{st} \in Y$  соответствует взаимодействию между массами  $m_s$  и  $m_t$ . Предполагается, что граф  $G$  связан. У реальных упругих структур все матричные коэффициенты упругости  $K_{st}$  знакоопределены [2]. Каждому ребру  $y_{st}$  графа связей  $G$  естественно присвоить знак  $\text{sgn} y_{st} = \text{sgn} K_{st}$  и полученный «взвешенный» граф  $G^\pm$  назвать знаковым графом связей. Таким образом, граф  $G^\pm$  характеризует структуру взаимодействий и позволяет делать качественные

выводы без использования интенсивностей взаимодействий  $K_{st}$ . Подобным расчленением информации о периодической структуре пользуется М. Борн [2] при изучении ее устойчивости относительно однородных деформаций.

Рассмотрим  $p$  экземпляров графа  $G: G^r = (X^r, Y^r)$ , у которых отвечающие массе  $m_0$  вершины отождествляются в одну вершину  $x_{01}$  (она является единственной общей вершиной графов  $G^r$ ). Полученный граф обозначим  $G_0 = \cup G^r = (X_0, Y_0)$ . Согласованная с подграфами  $G^r$  нумерация всех ребер и вершин имеет вид  $X_0 = \{x_{01}, x_{ir}\}$ ,  $Y_0 = \{y_{str}\}$ ,  $i \geq 1$ ,  $1 \leq r \leq p$ ,  $s \geq 0$ ,  $t \geq 0$ . Граф  $G_0$  связан вместе с  $G$ , и выбор в графе  $G$  дерева  $T = (X, Y_T)$  выделяет в подграфах  $G^r \subset G_0$  деревья  $T^r$ , объединение которых образует дерево  $T_0$  в  $G_0$ . Граф  $G_0$  расширим до графа  $G_1 = (X_0, Y_0 \cup Y')$  добавлением ребер  $Y' = \{y'_s\}_{s=1, r=1}^{\infty p}$ , соединяющих  $x_{01}$  с каждой из вершин  $x_{sr}$ ,  $s \geq 1$ . В  $G_1$  выбирается некоторая ориентация. Очевидно,  $T_0, T' = (X_0, Y')$  — деревья в графе  $G_1$ . Обозначим через  $S_{T'}$  матрицу сечений дуг  $Y_0$  по дереву  $T$ , через  $Q_{T_0}$  — матрицу циклов графа  $G_0$  по дереву  $T_0$  [4]:

$$S_{T'} = Y' [S_1, S_2]; \quad (3)$$

$$Q_{T_0} = Y_1 [q, E]. \quad (4)$$

Здесь и далее против строк и столбцов указаны соответствующие им дуги, а  $Y_1 = Y_0 / Y_{T_0}$ .

Пусть  $K$  — блочно-диагональная матрица из матричных коэффициентов упругости  $K_{st}$  (см. (2)) размера  $p \times p$ , занумерованных одним индексом. В соответствии с разбиением дуг  $Y_0$  на подмножества  $Y_{T_0} \cup Y_1 = Y_0$  и слоистой структурой дерева  $T_0$  матрица распадается на ортогональные блоки  $K = K_0 \oplus K_1$ .

**Теорема 1.** При любом графе связей  $G$  решетки матрица  $\Phi$  силовых постоянных (1) представляется в виде

$$\Phi = S_{T'} K S_{T'}^*. \quad (5)$$

Если матрица циклов (6) является конечностолбцовой, то  $\Phi$  допускает представление

$$\Phi = S_1 (K_0 + q^* K_1 q) S_1^*. \quad (6)$$

**Доказательство.** Воспользуемся системой электромеханических аналогий [1, 5]. Через  $\tilde{G} = (\tilde{X}, \tilde{Y})$  обозначим орграф, на котором реализуется модельная цепь. С точностью до изоморфного вложения можно считать, что  $G \subset G_0 \subset G_1 \subset \tilde{G}$ . При этом в модели на дугах  $y'_s \in Y'$  реализуются емкости  $C'_s = m_s$ ,  $1 \leq r \leq p$ ,  $s \geq 1$ , на множестве дуг  $\{y_{str}\}_{r=1}^p$  реализуется взаимная индуктивность  $L_{st} = K_{st}^{-1}$ , а параллельно каждой емкостной дуге  $y'_s$  присоединяется активная ветвь  $y'_s+$ ,

ток в которой  $I_s^+$  задается равным  $r$ -й компоненте внешней силы, приложенной к массе  $m_s$  моделируемой решетки. Таким образом, в модели матрицы емкостей  $C$  и индуктивностей  $L$ , векторы  $I^+$ ,  $U^+$  внешних токов и напряжений (на дугах  $y_s^+$ ) имеют следующие значения:

$$C = M, L = K^{-1}, I^+ = F, -U^+ = \dot{Z}. \quad (7)$$

Все дуги модельного графа  $\tilde{G}$  разбиваются на множества  $Y^+ = \{y_s^+\}$ ,  $Y_L = \{y_{str}\}$ ,  $Y_c = \{y_s^c\}$ . В соответствии с этим векторы токов  $I$ , напряжений  $U$ , матрицы сечений  $\tilde{S}$  и циклов  $\tilde{Q}$  графа  $\tilde{G}$  по дереву  $T_1 = Y_c$  разбиваются на блоки

$$I = \begin{Bmatrix} I^+ \\ I_L \\ I_c \end{Bmatrix}; \quad U = \begin{Bmatrix} U^+ \\ U_L \\ U_c \end{Bmatrix}; \quad \tilde{S} = [E S_{T'} E]; \\ \tilde{Q} = \begin{bmatrix} E & 0 & -E \\ 0 & E & -S_{T'} \end{bmatrix}.$$

Уравнения законов Кирхгофа модельной цепи  $\tilde{S}I = 0$ ,  $\tilde{Q}U = 0$  при разбиении на блоки переписываются в виде  $I^+ = -S_{T'} I_L - I_c$ ;  $U^+ = -U_c$ ;  $U_L = S_{T'}^* U_c$ . Из уравнений колебаний

$$U_L = L \dot{I}_L, \quad U_c = C^{-1} \int I_c(\tau) d\tau \quad \text{получается} \quad I^+ = C \frac{d^2}{dt^2} \left( \int_0^t U^+(\tau) d\tau \right) + \\ + S_{T'} L^{-1} S_{T'}^* \int_0^t U^+(\tau) d\tau.$$

Возвращаясь от модели к исходной механической системе, с использованием (7) получаем первое утверждение теоремы.

Матрица  $S_1$  из (5) невырождена, и матрица сечений  $S_{T_0}$  графа  $G$  по дереву  $T_0$  равна  $S_1^{-1} S_{T'}$  [4].

С другой стороны,  $S_{T_0} = [E, S_1^{-1} S_2]$ .

Подставляя в (8) выражения (5), (7) и пользуясь конечно-стochasticностью матрицы  $S_1^{-1} S_2$ , получаем формулу (6).

2. Разобьем матрицу  $S_{T'}$  на блоки  $S_{01}, \dots, S_{st}, \dots$ , где  $S_{st}$  отвечает дугам  $\{y_{str}\}_{r=1}^p$ . Потенциальная энергия взаимодействия пары частиц  $m_s$  и  $m_t$  равна  $1/2 (S_{st} K_{st} S_{st}^* Z, Z)$ , а сумма

$$\frac{1}{2} (\Phi Z, Z) = \frac{1}{2} (S_{T'} K S_{T'}^* Z, Z) = \frac{1}{2} \sum_{s,t} (S_{st} K_{st} S_{st}^* Z, Z) \quad (8)$$

дает потенциальную энергию всей решетки. Область определения  $D(k)$  энергетической квадратичной формы  $1/2 (\Phi Z, Z)$  находим здесь как множество смещений  $Z$ , при которых ряд (8) схо-

дится к конечной или бесконечной сумме независимо от порядка слагаемых. Благодаря условию закрепления  $t_0$  в решетке невозможны трансляции на постоянный вектор, которые не меняют ее энергию (в отличие от случая незакрепленной решетки).

**О п р е д е л е н и е 1.** Упругая структура называется устойчивой, если  $(\Phi Z, Z) > 0$ ,  $Z \in D(K)$ ,  $Z \neq 0$ . Это определение, принятое в механике, отличается от Борновского определения устойчивости периодической структуры (см. ниже примеры).

Отказываясь в общем случае от условия периодичности структуры, мы предполагаем все же ее ячеечное строение: в косоугольной системе координат  $x = (x_1, \dots, x_N)$ ,  $N \leq 3$  пространство разбито на параллелепипедные ячейки  $A(m_1, \dots, m_N)$ , где  $m_i$  — номер ячейки по  $i$ -й координатной оси, а вершины графа связей  $G$  геометрически размещены по ячейкам  $A(m_1, \dots, m_N)$ . При этом числа атомов в ячейках и дальности взаимодействий равномерно ограничены, через  $b$  обозначена максимальная дальность взаимодействий.

Подграф  $G'$  (графа связей  $G$ ) назовем параллелепипедным (П. графом), если он отвечает всем частицам и их взаимодействиям из некоторого параллелепипеда, состоящего из целого числа ячеек. Через  $\Phi G'$  обозначим матрицу силовых постоянных соответствующих  $G'$  атомов.

**О п р е д е л е н и е 2.** Упругая структура называется устойчивой по частям, если для любой последовательности  $\Pi$  подграфов  $G'_i \subset G$ , для которой

$$G'_1 \subset G'_2 \subset \dots, \bigcup_i G'_i = G, \quad (9)$$

существует  $N$  такое, что  $\Phi_{G'_i} > 0$  при всех  $i \geq N$ .

3. Если структура одномерна ( $N=p=1$ ), то для дерева  $T = T_0 = \{y_{s,s+1}\}$  матрица  $q^*$  конечнострочна (в каждой строке не более  $b$  элементов), и в диагональной матрице  $K$   $K_0 > 0$ ,  $K_1 < 0$  (неравенства вытекают из [2]). Из (9) следует, что для устойчивости конечной срезки такой структуры с графом связей  $G'$  необходимо и достаточно, чтобы

$$\|A_{G'}\| = \|K_0^{-1/2} q^* K_1 q K_0^{-1/2}\| < 1.$$

Если структура к тому же периодическая и элементарная ячейка ее содержит  $R$  атомов, то проверку ее устойчивости по частям можно свести к вычислению максимального по модулю собственного значения некоторой матрицы  $B$  размера  $R \times R$  с неотрицательными элементами (см. (11)).

Рассмотрим конечную срезку, имеющую  $\nu$  атомов,  $\nu = MR + \Delta$ ,  $0 \leq \Delta \leq R$ , с графом связей  $G' = (\{v_s\}, \{y_{st}\})$ ; предполагается, что  $\nu \geq 2(b-1) + R$ . Элементы симметричной матрицы  $A_{G'} = (a_{ij})$  неотрицательны:

$$a_{ij} = \frac{1}{\sqrt{p_i p_j}} \sum_{d,m,n} p_{dmn} W_{dmn} > 0, 2 \leq d \leq b, i \leq m, n \leq R, \quad (10)$$

где  $w_{dmn}$  есть число ребер длины  $d \geq 2$  в графе  $G'$  между всевозможными парами вершин  $v_s, v_t, s \equiv m \pmod{R}, t \equiv n \pmod{R}$ , такими, что  $1 \leq s \leq i \leq j+1 \leq t \leq v$ , с коэффициентами упругости  $P_{dmn}$ ,  $P_i$  — коэффициент упругости между соседними атомами  $m_i$  и  $m_{i+1}$ . Из представления (10) для  $a_{ij}$  вытекает, что

1)  $a_{ij} < a_{i+R, j+R}$ , если  $i < b$ ; 2)  $a_{ij} = a_{i+R, j+R}$ , если  $i \geq b$ ,  $i+R \leq v-1-b$ ; 3)  $a_{ij} > a_{i+R, j+R}$ , если  $i+R > v-1-b$ .

Поскольку числа  $C_i^{(n)} = \sum a_{ik}, k \equiv n \pmod{R}$  обладают свойством  $C_i^{(n)} = C_{i+R}^{(n)}$ , то вся информация о них содержится в матрице  $B$  с неотрицательными элементами

$$b_{mn} = C_i^{(n)} \geq 0, i \equiv m \pmod{R}, b \leq i \leq v-1-b, m, n = 1, \dots, R, \quad (11)$$

не зависящими от числа атомов  $v \geq 2(b-1)+R$ . По теореме Фробениуса максимальному собственному числу  $\rho(B)$  матрицы  $B$  отвечает положительный собственный вектор  $x = (x_1, \dots, x_R)$ ,  $x_i > 0$ . Для вектора  $y = (x, \dots, x, x_1, \dots, x_{\Delta-1})$  размера  $v-1$  и матрицы  $A = A_G$ , из той же теоремы с использованием (1) — (3) следует оценка

$$\|A\| = \rho(A) < \max_i \frac{\sum_j a_{ij} y_j}{y_i} = \max_{1 < m < R} \frac{\sum_{n=1}^R b_{mn} x_n}{x_m} = \rho(B).$$

С другой стороны,

$$\|A\|^2 \geq \frac{\|Ay\|^2}{\|y\|^2} \geq \frac{[\rho(B)]^2 (M-1 - [(2b-1)/R])}{M+1}.$$

Тем самым доказана

**Теорема 2.** Для периодической одномерной структуры условие  $\|A_{G'}\| < 1$  при любом подграфе  $G'$  эквивалентно оценке  $\rho(B) \leq 1$  для максимального собственного числа матрицы  $B$ . Условие устойчивости по частям имеет вид  $\rho(B) \leq 1$ .

С л е д с т в и е. Для устойчивости по частям цепочки одинаковых атомов ( $R=1$ ) необходимо и достаточно, чтобы

$$\rho(B) = b_{11} = \frac{1}{p_1} \sum_{d=2}^b d^2 p_d \leq 1,$$

где  $p_d$  — коэффициент упругости взаимодействия дальности  $d$ .

Заметим, что для указанной структуры приведенное условие устойчивости по частям совпадает с условием ее устойчивости по Борну [2].

4. Для фиксированного графа связей  $G^\pm$  рассмотрим всевозможные допустимые матрицы  $K$  коэффициентов упругости (являющиеся ограниченными, вполне обратимыми и такие, что  $\text{sgn} K_{st} = \text{sgn} y_{st}$ ). Соответствующие им упругие структуры будем записывать в виде пар  $[G^\pm, K]$ .

Рассмотрим «положительный» подграф  $G^+ = (X, Y^+)$  графа  $G^\pm$ , где  $Y^+ = \{y_{st}; \text{sgn } y_{st} = 1\}$ . Мы будем говорить, что граф  $G^+$  связан по частям, если для любой последовательности П. графов  $G_i^+$  (9) существует такое  $N$ , что  $G_i^+$  связан при всех  $i \geq N$ . Легко убедиться, что справедлива

**Лемма 1.** Если знаковый граф  $G^\pm$  допускает устойчивые структуры (устойчивые по частям), то его положительный подграф  $G^+$  связан (связен по частям).

**Лемма 2.** Конечный знаковый граф  $G^\pm$  допускает устойчивые структуры тогда и только тогда, когда граф  $G^\pm$  связан.

Доказательство. С учетом леммы 1 достаточно при связанном  $G^+$  подобрать допустимую матрицу  $K$  так, чтобы получилось  $\Phi > 0$ . В графе  $G$  существует дерево  $T^+ = (X, Y_T) \subset G^+$ . Положим  $K_{st} = \lambda E (y_{st} \in Y_T)$ ,  $K_{st} = E (y_{st} \in Y^+ / Y_T)$ ,  $K_{st} = -E (y_{st} \in Y / Y^+)$ .

Если (6) составлено по дереву  $T^+$ , то  $\Phi = S_1(\lambda E + q^* K_1 q) S_1^*$  и при  $\lambda > \|q^* K_1 q\|$   $\Phi > 0$ .

Окрестностью ячейки  $A(m_1, \dots, m_N)$  с множеством вершин  $X(m_1, \dots, m_N)$  называется подграф  $G(m_1, \dots, m_N)$  графа  $G$ , отвечающий взаимодействиям всех пар атомов, из которых хотя бы один содержится в  $X(m_1, \dots, m_N)$ .

Назовем граф  $G^+$  равномерно связным, если он связан и существует такое  $d < \infty$ , что всякие две вершины из окрестности любой ячейки связаны между собой в графе  $G^+$  путем длины не более  $d$ . Граф  $G^+$  называется равномерно связным по частям, если для любой последовательности  $G_i$  (9) существуют  $N$  и  $d$ , такие, что при всех  $i \geq N$  всякие две вершины из окрестности любой ячейки в графе  $G_i$  связаны путем длины не более  $d$  в графе  $G_i^+$ .

**Замечание 1.** У периодической структуры с естественным выбором ячеек из связности (связности по частям) подграфа  $G^+$  вытекает его равномерная связность (связность по частям).

Из леммы 2 следует

**Лемма 3.** Если  $G^+$  равномерно связан (по частям), то  $G^\pm$  допускает устойчивые структуры (устойчивые по частям).

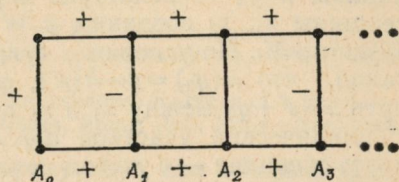
**Замечание 2.** Если граф  $G^\pm$  периодический, то доказательство леммы 3 обеспечивает существование такой матрицы  $K$ , что структура  $[G^\pm, K]$  — периодическая.

**Замечание 3.** Для того, чтобы бесконечный граф  $G^\pm$  допускал устойчивые по частям структуры, недостаточно одной только связности по частям графа  $G^+$ . Действительно, рассмотрим граф  $G^\pm$  (рисунок), у которого подграф  $G^+$  связан по частям, но не равномерно связан по частям. Разобьем  $G^\pm$  на ячейки  $A_i$  и построим последовательность П. графов (9):  $G_i = A_1 \cup \dots \cup A_i$ . Очевидно,  $G^+$  — дерево в  $G^\pm$ . Пусть  $q^*(G_i)$  — матрица сечений дуг  $G_i^+$  по дереву  $T_i = G_i^+ = G^+ \cap G_i$  в графе  $G_i$ . Легко проверить, что  $\lim \|q^*(G_i)\| = \infty$ . С другой стороны, если бы для некоторой

допустимой матрицы  $K$  структура  $[G^\pm, K]$  была устойчива по частям, то, используя для конечной ее подструктуры  $[G_i, K_i]$  представление (6), мы получили бы ограниченность норм  $\|q^*(G_i)\|$ .

5. Ниже рассматриваются только периодические структуры, они обладают группой трансляций  $H$ . При естественном выборе ячеек из лемм 1—3 и замечаний 1, 2 получаем

Следствие 2. Периодический знаковый граф  $G^\pm$  допускает устойчивые (устойчивые по частям) структуры тогда и только тогда, когда положительный подграф  $G^+$  связан (связан по частям).



Из следствия 2 вытекает, что знаковые графы кубической, гранецентрированной и объемноцентрированной решеток допускают устойчивые структуры. Однако, как показано в [2], знаковый граф гранецентрированной решетки не допускает структур, устойчивых относительно однородных деформаций.

Критерий устойчивости бесконечной структуры из следствия 2 является глобальным. Ниже устанавливается локальный критерий, использующий характеристики окрестности ячейки.

Абелева группа трансляций  $H$  периодической решетки порождается  $N$  образующим, из которых часть  $g_1, \dots, g_k$  имеют бесконечные периоды, остальные  $g_{k+1}, \dots, g_N$  — конечные  $p_{k+1}, \dots, p_N$  [2]. Следующий конечный граф  $W = (X_w, Y_w)$  назовем характеристическим графом ячейки  $A(m_1, \dots, m_N)$ : в положительном подграфе  $G^+(m_1, \dots, m_N)$  окрестности ячейки вершины, не принадлежащие ячейке, отождествляются с эквивалентными им (относительно трансляций из  $H$ ) вершинами ячейки, а затем все имеющиеся ребра раздваиваются. Каждому ребру  $y \in Y_w$  ставится в соответствие элемент  $h(y) \in H$ . Именно, если некоторое ребро  $y'$  графа  $G^+(m_1, \dots, m_N)$  вело из ячейки  $A(m_1, \dots, m_N)$  в ячейку  $A(m'_1, \dots, m'_N)$ , то двум его прообразам  $y_1, y_2$  в графе  $W$  поставим в соответствие элементы  $\pm \sum (m_i - m'_i) g_i$ . Отображение  $h$  естественным образом доопределяется до отображения множества  $S(W)$  всех путей графа  $W$  в  $H$ . Из следствия 2 и построения графа  $W$  вытекает

**Лемма 4.** Периодический знаковый граф  $G^\pm$  допускает устойчивые структуры тогда и только тогда, когда для любой пары вершин (в том числе одинаковых) характеристического графа  $W$  и для любого  $g \in H$  существует путь  $s \in S(W)$  между этими вершинами такой, что  $h(s) = g$ .

Пусть  $Q_w$  — абелева группа циклов связного графа  $W$ . Отображение  $h: S(W) \rightarrow H$  сужается до гомоморфизма  $h: Q_w \rightarrow H$ . Образ  $h(Q_w)$  является некоторой подгруппой  $H$ .

**Теорема 3.** *Периодический знаковый граф  $G^\pm$  допускает устойчивые структуры тогда и только тогда, когда характеристический граф  $W$  связан и  $h(Q_w) = H$ .*

**Доказательство.** Пусть  $g$  — произвольный элемент группы  $H$ ;  $\{q_i\}$  — базис группы  $Q_w$ , составленный из простых циклов, и  $V_i$  — некоторая вершина в цикле  $q_i$ . Произвольные вершины  $x_1, x_2$  соединим в  $W$  путем  $s'$ , проходящим через все вершины  $V_i$ . По условию, существует сложный цикл  $q_0 \in Q_w$ , такой, что  $h(q_0) = g - h(s')$ ,  $q_0 = \sum \alpha_i q_i$ ,  $\alpha_i$  — целые. Искомый путь  $s = s' + q_0$  между  $x_1$  и  $x_2$  получается присоединением к пути  $s'$  циклических участков  $\alpha_i q_i: h(s) = h(s') + h(q_0) = g$ . Необходимость очевидна — с учетом связности  $W$ , вытекающей из леммы 4.

Для проверки, допускает ли  $G^\pm$  устойчивые структуры, нужно найти характеристический граф  $W$ , циклы  $q_i$ , а затем по образующим  $g_1, \dots, g_N$  группы  $H/h(Q_w)$  и ее определяющим соотношениям  $h(q_i) = 0$  и  $p_i g_i = 0$  ( $k+1 \leq i \leq N \leq 3$ ) выяснить, состоит ли она из одного нулевого элемента.

6. Рассмотрим теперь локальный критерий существования на  $G^\pm$  структур, устойчивых по частям.

**Теорема 4.** *Пусть  $\delta$  — число компонент связности положительного подграфа одной ячейки периодического знакового графа  $G^\pm$  размерности  $N$ . Граф  $G^\pm$  допускает устойчивые по частям структуры тогда и только тогда, когда параллелепипедный граф с линейными размерами  $l(N)$  ячеек связан, где  $l(1) = \delta$ ,  $l(2) = \delta + 1 + (\delta + 1)^2$ ,  $l(3) = (\delta + 1)[2 + \delta + (\delta + 1)^3(\delta + 2)^3]$ .*

**Доказательство.** Пусть  $N = 2$ . Доказательство теоремы 4 разбивается на три части.

а) Через  $G(m, n)$  обозначим П. граф размера  $m \times n$ , через  $\lambda(m, n)$  — число компонент связности его положительной части  $G^+(m, n)$ . Рассмотрим расширяющиеся П. графы вида  $G^+(1, l) \subset G^+(2, l) \subset \dots$ . Доказывается, что либо граф  $G^+$  не связан по частям, либо  $\lambda(i+1, l) \leq \lambda(i, l)$  для всех  $i$ ; и если для некоторого  $k \lambda(k, l) = \lambda(k+1, l)$ , то  $\lambda(i, l) = \lambda(k, l)$  при  $i \geq k$ .

в) Далее рассматривается следующая последовательность  $G(m_i, n_i)$  вложенных П. графов  $G^+(m_1, n_1) = G^+(\delta+1, \delta+1)$ ,  $G^+(m_2, n_2) = G^+(\delta+1, \delta+2)$ ; если  $\lambda(m_2, n_2) < \lambda(m_1, n_1)$ , то  $G^+(m_3, n_3) = G^+(\delta+1, \delta+3)$  (иначе  $G^+(m_3, n_3) = G^+(\delta+2, \delta+2)$  и т. д.). Доказывается, что либо граф  $G^+$  не связан по частям, либо последовательность  $\lambda(m_i, n_i)$  не возрастает, и начиная с некоторого номера  $R$

$$\lambda(m_R, n_R) = \lambda(m_{R+1}, n_{R+1}) = \lambda(m_{R+2}, n_{R+2}).$$

с) Доказывается, что граф  $G^+$  связан по частям тогда и только тогда, когда граф  $G^+(m_R, n_R)$  связан, а линейные размеры графа  $G^+(m_R, n_R)$  не превышают  $\delta+1 + (\delta+1)^2$  ячеек.

Автор выражает благодарность А. Г. Руткасу за руководство работой.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Руткас А. Г., Хиргий Н. И. Полугруппы мономорфизмов графов в дискретных структурах. — В кн.: Теория функций, функциональный анализ и их приложения. Вып. 19. Харьков, 1973, с. 111—125.
2. Борн М., Хуан Кунь. Динамическая теория кристаллических решеток. М., ИЛ, 1958. 488 с.
3. Марадудин А., Монтролл Э., Вейсс Дж. Динамическая теория кристаллической решетки в гармоническом приближении. М., «Мир», 1965. 383 с.
4. P o n s t e i n I. A. A generalization of the incidence matrices of a graph. — «Theorie des graphes. Journes internat. etude», Rome, 1966, Paris—New-York. 1967, p. 315—332.
5. Бриллиэн Л., Пароди М. Распространение волн в периодических структурах. М., ИЛ, 1959. 457 с.

Поступила 15.V 1976 г.

УДК 517.948:513.8+519.4

В. А. ЗОЛОТАРЕВ

### О СТРУКТУРЕ И ТРЕУГОЛЬНЫХ МОДЕЛЯХ СИСТЕМ ОДНОГО КЛАССА ПЕРЕСТАНОВОЧНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Нами получены результаты, которые позволяют каждой системе операторов из класса  $K_n$  сопоставить краевую задачу в частных производных (типа Дарбу—Гурса) на многообразии  $D$ . Характеристическая функция [1] системы операторов из класса  $K_n$  сопоставляет начальным данным этой краевой задачи на одной системе характеристик значение решения этой задачи на другой системе характеристик. Полученные результаты могут быть использованы в теории открытых систем и теории цепей.

1. Мы будем говорить, что система линейных, ограниченных операторов  $A_k$  ( $k=1, 2$ ), определенная в гильбертовом пространстве  $H$ , принадлежит классу  $K_n$ , если:

$$1. A_1 A_2 = A_2 A_1;$$

$$2. \dim CH = n < \infty, C = A_1^* A_2 - A_2 A_1^*;$$

$$3. C^{n+1} = 0, C^n \neq 0.$$

Класс  $K_0$  совпадает с классом дважды перестановочных операторов [5, 7].

Оператор  $A$  в гильбертовом пространстве  $H$  называется вполне несамосопряженным [1—4], если  $H = \bigvee_{m>0} A^m H_0$ ,  $H_0 =$

$= \overline{A_1 H}$ ,  $A_1 = \frac{1}{2i}(A - A^*)$  [5, 7]. Символом  $\bigvee_{m>0} A^m H_0$  обозначается [5] замкнутая, линейная оболочка векторов вида  $A^m h_0$ ,  $h_0 \in H_0$ .

Важную роль для дальнейшего играет следующая система операторов из класса  $K_1$ . Пусть  $D = \{(x_1, x_2); 0 \leq x_1 \leq a_1$

при  $0 \leq x_2 \leq b_2$  и  $0 \leq x_1 \leq b_1$  при  $b_2 \leq x_2 \leq a_2$ ,  $0 < b_k < a_k$  ( $k = 1, 2$ ). Определим пространство  $L^2(D)$ :

$$L^2(D) = \{f(x), x = (x_1, x_2) \in D: \int_D |f(x)|^2 dx < \infty\}, \quad (1)$$

$dx = dx_1 dx_2$ . Зададим в этом пространстве два оператора:

$$(\dot{A}_1 f)(x) = \alpha_1(x_1) f(x) + i \int_0^{x_1} f(t, x_2) I_1 dt; \quad (2)$$

$$(\dot{A}_2 f)(x) = \alpha_2(x_2) f(x) + i \int_0^{x_2} f(x_1, t) I_2 dt;$$

$x = (x_1, x_2) \in D$ ,  $f(x) \in L^2(D)$ ;  $I_k = \pm 1$ ,  $\alpha_k(x_k)$  — вещественные, убывающие, ограниченные функции при  $0 \leq x_k \leq a_k$  ( $k=1, 2$ ). Очевидно, система  $\dot{A}_k$  ( $k=1, 2$ ) принадлежит классу  $K_1$ .

Имеет место следующая теорема.

**Теорема 1.** Пусть система операторов  $A_k$  ( $k=1, 2$ ), каждый из которых вполне несамосопряжен, принадлежит классу  $K_1$  и обладает свойствами

$$1. \dim H_0 = 1, H_0 = \bigcap_1^2 \overline{(A_k)_I H};$$

2.  $(A_1)_I C H \subset C H$ ,  $(A_2)_I C^* H \subset C^* H$ , причём  $(A_1)_I C H \neq 0$  и  $(A_2)_I C^* H \neq 0$ .

Тогда пространство  $H$  можно разложить в ортогональную сумму подпространств  $H = H_1 \oplus H_2$  сужения, на которые системы  $A_k$  ( $k=1, 2$ ) дают дважды перестановочные системы операторов, причём подпространство  $H_1$  приводит  $A_1$  и инвариантно относительно  $A_2$ .

Доказательству теоремы 1 предшествуют следующие леммы.

**Лемма 1.** Пусть  $G$  — инвариантное подпространство вполне несамосопряженного оператора  $A$  в гильбертовом пространстве  $H$ . И пусть  $E'$  — образ  $(A')_I$  ( $A'$  — сужение  $A$  на  $G$ ), причём  $E'$  инвариантно относительно  $A_I$ . Тогда  $G$  приводит  $A$ .

Введем пространства  $L_1 = \bigvee_{m>0} A_2^m C H$ ,  $\tilde{L}_1 = \bigvee_{m>0} A_1^m C^* H$ .

**Лемма 2.** Пусть система  $A_k$  ( $k=1, 2$ ) находится в условиях предложений теоремы 1. Тогда пространство  $L_1(\tilde{L}_1)$  инвариантно относительно  $(A_1)_I$  ( $(A_2)_I$ ), причём  $(A_1)_I$  ( $(A_2)_I$ ) на  $L_1(\tilde{L}_1)$  скалярен.

Доказательство. Из формулы

$$(A_1)_I A_2^k h_0 = A_2^k (A_1)_I h_0 - \frac{1}{2i} \sum_{s=0}^{k-1} A_2^s C A_2^{k-s-1} h_0, \quad (3)$$

$h_0 \in CH (\|h_0\| = 1)$  следует, что пространство  $L_1^n = VA_{n>m>0}^m CH$  инвариантно относительно  $(A_1)_I$ . Из  $(A_1)_I CH \subset CH$  следует, что  $(A_1)_I h_0 = \alpha h_0$ ,  $\alpha \neq 0$ , так как  $(A_1)_I CH \neq 0$ . Докажем, что  $(A_1)_I \times A_2^m h_0 = \alpha A_2^m h_0$ ,  $m \geq 0$ .

Из  $C^2 = 0$  следует, что  $(A_1)_I A_2 h_0 = \alpha A_2 h_0$ . Пусть (в силу принципа индукции)  $(A_1)_I$  на  $L_1^{n-1}$  действует как оператор умножения на  $\alpha$ . Докажем, что  $(A_1)_I$  на  $L_1^n$  также скалярен. Из  $L_1^{n-1} \subset L_1^n$  следует, что существует  $h_n \in L_1^n$ ,  $h_n \perp L_1^{n-1}$ ; в противном случае  $L_1^n = L_1^{n-1}$  и утверждение доказано. Из инвариантности  $(A_1)_I L_1^k \subset L_1^k$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) вытекает, что существует

$\alpha_n \in R$  такое, что  $(A_1)_I h_n = \alpha_n h_n$ . Пусть  $h_0 = \sum_0^n \xi_k^n A_2^k h_0$ ,  $\xi_n^n \neq 0$  ( $h_n \perp L_1^{n-1}$ ). Используя формулу (3), получим

$$\alpha_n \sum_0^n \xi_k^n A_2^k h_0 = \alpha \sum_0^n \xi_k^n A_2^k h_0 - \frac{1}{2i} \xi_n^n C A_2^{n-1} h_0.$$

Обозначим  $\mu h_0 = \frac{1}{2i} \xi_n^n C A_2^{n-1} h_0$ . Тогда  $(\alpha_n - \alpha) \sum_0^n \xi_k^n A_2^k h_0 + \mu h_0 = 0$ ,  $(\alpha_n - \alpha) h_n + \mu h_0 = 0$ . Из  $h_n \perp h_0$  ( $h_n \perp L_1^{n-1}$ ) следует, что  $\mu = 0$  и  $\alpha_n = \alpha$ . А из  $\mu = 0$  вытекает, что  $C A_2^{n-1} h_0 = 0$ .

Аналогично этому  $(A_2)_I l = \beta l$ ,  $l \in \tilde{L}_1$ ;  $(A_2)_I g_0 = \beta g_0$ ,  $g_0 \in C^*H (\|g_0\| = 1)$ .

*Следствие 1. В условиях предположений теоремы 1 пространство*

$$L_1 \subset \text{Ker } C (\tilde{L}_1 \subset \text{Ker } C^*).$$

**Лемма 3.** Пусть система операторов  $A_k$  ( $k = 1, 2$ ) находится в условиях предположений 1, тогда  $L_1 \oplus C^*H \subset \text{Ker } (A_1)_I$ .

**Доказательство.** Рассмотрим пространство  $N = (A_1)_I H$ . Пространство  $N$  инвариантно относительно  $A_2$ . Для этого достаточно доказать (в силу непрерывности  $A_2$ ), что  $A_2 l \in N$ , если  $l \in (A_1)_I H$ . Последнее очевидно в силу  $A_2 l = A_2 (A_1)_I h = (A_1)_I A_2 h + \frac{1}{2i} C h = (A_1)_I (A_2 h + \frac{1}{2i\alpha} C h) \in N$ , где  $l = (A_1)_I h$ .

Очевидно,  $\frac{1}{4}(C - C^*)l_1 = 0$ , если  $l_1 \in \tilde{L}_1$ ,  $l_1 \perp g_0$ , так как  $C^*l_1 = 0$  и  $Ch = \mu(h, g_0)h_0$ ,  $h \in H$ ,  $\mu = (Cg_0, h_0)$ . Отсюда  $[(A_1)_I \times \times (A_2)_I - (A_2)_I(A_1)_I]l_1 = \frac{1}{4}(C - C^*)l_1 = 0$  или  $[(A_2)_I - \beta] \times \times (A_1)_I l_1 = 0$  (см. лемму 2). Итак,  $(A_1)_I l_1 \in N$  — собственный вектор оператора  $(A_2)_I$ . Но у оператора  $A_2$ , суженного на  $N$ , одномерная мнимая компонента в силу предположения 1 теоремы 1. Поэтому  $(A_1)_I l_1$  — одномерно при  $l_1 \in \tilde{L}_1$ ,  $l_1 \perp g_0$ . Предположим, что существует вектор  $l_1 \in L_1$ ,  $l_1 \perp g_0$  такой, что  $(A_1)_I l_1 \neq 0$ . Тогда к оператору  $A_2$  в  $H$  в силу  $[(A_2)_I - \beta](A_1)_I l_1 = 0$  применима лемма 1, из которой следует, что  $N$  приводит оператор  $A_2$ . Отсюда вытекает, что  $g_0 \in N$ .

$$\text{Действительно, } \frac{1}{4}(C - C^*)h_0 = -\frac{1}{4}C^*h_0 = -\frac{1}{4}\bar{\mu}g_0; \\ -\frac{1}{4}\bar{\mu}g_0 = [(A_1)_I(A_2)_I - (A_2)_I(A_1)_I]h_0 = [(A_1)_I - \alpha](A_2)_I h_0.$$

Так как  $(A_2)_I h_0 \in N$ , то из последней формулы следует  $g_0 \in N$ .

Из следствия 1  $L_1 \subset \text{Ker } C$  заключаем  $L_1 \perp g_0$ , поэтому  $g_0 \in N \oplus L_1$ . Тогда  $g_0$  — собственный вектор  $(A_1)_I$ , так как  $(A_1)_I$  на  $N \oplus L_1$  действует как оператор умножения на  $\alpha'$ . Для этого достаточно заметить, что  $C^*(N \oplus L_1) = 0$  и  $A_2^*$ , суженный на  $N \oplus L_1$ , имеет одномерную мнимую компоненту. Так как  $g_0$  — общий собственный вектор операторов  $(A_k)_I$  ( $k=1,2$ ), то

$$\frac{1}{4}\mu h_0 = \frac{1}{4}(C - C^*)g_0 = [(A_1)_I(A_2)_I - (A_2)_I(A_1)_I]g_0 = 0.$$

А это противоречит тому, что  $CH \neq 0$ .

Следствие 2. В условиях предположений теоремы 1 имеет место  $L_1 \perp \tilde{L}_1$ .

Доказательство теоремы 1. Обозначим через  $H_1$  наименьшее подпространство, инвариантное относительно  $A_1^*$  и  $A_2$ , такое, что  $CH \subset H_1$ . Докажем, что разложение  $H = H_1 \oplus H_2$  — искомое. Из следствия 2 вытекает, что  $H_1 = \bigvee_{m_1, m_2 > 0} A_1^{*m_1} A_2^{m_2} CH$  и  $H_1 \subset \text{Ker } C$ .

Докажем, что  $H_1$  приводит  $A_1^*$  (и, следовательно,  $A_1$ ). Отсюда и из  $H_1 \subset \text{Ker } C$  будет следовать дважды перестановочность сужений  $A_1, A_2$  на  $H_1$  и на  $H_2$ .

Рассмотрим пространство  $M(h_0) = \bigvee_{k > 0} A_1^{*k} h_0$ . Докажем, что  $M(h_0)$  приводит  $A_1^*$ . Для этого рассмотрим  $M'(h_0) = \bigvee_{k, p > 0} A_1^{*k} \times$

$\times (A_2)_I^p h_0$ . Из формулы  $\frac{1}{2i} C^* h = [(A_2)_I A_1^* - A_1^* (A_2)_I] h$ ,  $h \in H$ ,

вытекает, что  $(A_2)_I M'(h_0) \subset M'(h_0) \tilde{V} \tilde{L}_1$ . Итак,  $(A_2)_I M'(h_0) \tilde{V} \tilde{L}_1 \subset \subset M'(h_0) \tilde{V} \tilde{L}_1$ . Очевидно, что  $(A_2)_I$  на  $V(A_2)_I^p h_0$  невырожден ( $(A_2)_I h_0 \neq 0$ ), а отсюда и из предыдущей формулы следует, что  $(A_2)_I$  на  $M'(h_0) \tilde{V} \tilde{L}_1$  невырожден. Следовательно (в силу п. 1 теоремы 1), образ сужения  $(A_1)_I$  на  $M(h_0)$  — одномерное подпространство, которое содержит  $h_0$ . Поэтому (см. лемму 1)  $M(h_0)$  приводит  $A_1$ .

Введем пространство  $Q_k = V_{k \geq s > 0} A_s M(h_0)$ ,  $k \geq 0$ ,  $Q_k \subset H_1$ . Очевидно,  $A_1^* Q_k \subset Q_k$ , ибо  $Q_k \subset H_1 \subset \text{Ker } C$ , ( $k \geq 0$ ). Докажем, что  $(A_1)_I Q_k \subset Q_k$  ( $k \geq 0$ ). Из формулы  $(A_1)_I A_2 h = A_2 (A_1)_I h - \frac{1}{2i} C h$ ,  $h \in Q_k$  вытекает, что  $(A_1)_I Q_k \subset Q_k$  ( $k \geq 0$ ), так как  $C Q_k = 0$ ,  $k \geq 0$  и  $Q_0 = M(h_0)$  приводит  $A_1^*$ .

Наконец,  $H_1$  приводит  $A_1^*$ , так как  $H_1 = \bigcup_{k > 0} Q_k$ , и  $Q_k$  приводят  $A_1^*$  ( $k \geq 0$ ).

II. Треугольные модели систем из класса  $K_1$ .

**Теорема 2.** Пусть система операторов  $A_1, A_2$ , каждый из которых вполне несамосопряжен, принадлежит классу  $K_1$  и обладает свойствами:

$$1. \quad \dim H_0 = 1, H_0 = \bigcap_1^2 \overline{(A_k)_I H};$$

$$2. \quad (A_1)_I C H \subset C H, (A_2)_I C^* H \subset C^* H, \text{ причем } (A_1)_I C H \neq 0, \\ (A_2)_I C^* H \neq 0.$$

3. Спектр каждого оператора  $A_k$  ( $k = 1, 2$ ) вещественен. Тогда существует пространство  $L^2(D)$  и операторы  $\hat{A}_k$  ( $k = 1, 2$ ) в нем (см. (1), (2)), а также изометрический оператор  $U$  из  $H$  в  $L^2(D)$  такой, что  $U A_k = \hat{A}_k U$  ( $k = 1, 2$ ).

Для доказательства теоремы 2 нам понадобится следующая лемма.

**Лемма 4.** Если система операторов  $A_k$  ( $k = 1, 2$ ) удовлетворяет условиям предположений теоремы 1, то  $\text{sign } \alpha = \text{sign } \alpha'$  ( $\alpha$  ( $\alpha'$ ) — собственное число сужения  $(A_1)_I$  на  $H_1$  ( $H_2$ )).

Доказательство. Рассмотрим разложение  $H = G_1 \oplus G_2$ ,  $G_2 = V_{m_1, m_2 > 0} A_1^{m_1} A_2^{m_2} C^* H$ ,  $G_2 \subset \text{Ker } C^*$ . Аналогично разложению  $H = H_1 \oplus H_2$  пространство  $G_2$  приводит  $A_2$  и инвариантно относительно  $A_1$ . Кроме того, сужения системы  $A_k$  ( $k = 1, 2$ ) на  $G_1, G_2$  дают дважды перестановочные системы операторов.

Очевидно,  $G_2 \perp H_1$ , так как  $(A_1^{*m_1} A_2^{m_2} h_0, A_{p_1} A_2^{*p_2} g_0) = (A_{p_2+m_2} h_0, A_{p_1+m_1} g_0) = 0$ ,  $m_k, p_k \geq 0$  ( $k=1,2$ ) в силу  $L_1 \perp \tilde{L}_1$  (см. следствие 2). Отсюда  $G_2 \subset H_2$ . Очевидно,  $G_2$  не совпадает с  $H_2$ . Ибо если  $G_2$  совпадает с  $H_2$ , то приводимость  $A_1$  пространством  $H_1$  влечет приводимость  $A_1$  пространством  $G_2$ . Поэтому  $\frac{1}{4} \mu h_0 = \frac{1}{4} (C - C^*) g_0 = [(A_2)_I - \beta] (A_1)_I g_0 \in G_2$ ,

что невозможно, поскольку  $h_0 \in H_1$  и  $h_0 \perp G_2$ . Из включения  $G_2 \subset H_2$  следует, что включение  $G_1 \supset H_1$  также строгое. Сужение  $(A_1)_I$  на  $G_1$  имеет только одну точку спектра в силу дважды перестановочности сужений  $A_k$  ( $k=1,2$ ) на  $G_1$ . Отсюда заключаем, что у сужений  $(A_1)_I$  на  $G_1 \ominus H_1$  и на  $H_1$  знаки собственных чисел совпадают.

Так как у  $(A_1)_I$  на  $H_2 = (G_1 \ominus H_1) \oplus G_2^-$  — одна точка спектра, а  $G_2$  — инвариантное подпространство  $A_1$ , то знаки собственных чисел сужений  $(A_1)_I$  на  $G_1 \ominus H_1$  и на  $G_2$  совпадают.

Доказательство теоремы 2. Рассмотрим модели систем дважды перестановочных операторов  $A'_k$  ( $k=1,2$ ) и  $A''_k$  ( $k=1,2$ ) в  $H_1$  и в  $H_2$  соответственно [7]. Нами доказано, что  $\alpha \neq \alpha'$  и что  $\text{sign } \alpha = \text{sign } \alpha'$  (см. доказательство теоремы 1 и леммы 4).

Пусть  $|\alpha| = b_1$  и  $|\alpha'| = a_1$ . Покажем, что  $b_1 < a_1$ . Пространство  $M = (A_2)_I H$  инвариантно относительно  $A_1$ , причем сужение  $(A_1)_I$  на  $M$  — одномерный оператор. Пусть  $Q_1 = \bigvee_{m>0} A_1^m C H$ .

Тогда  $M \ominus \tilde{L}_1 \supset Q_1$ , так как  $L_1 \perp Q_1$ . Оператор  $(A_1)_I$ , суженный на  $M \ominus \tilde{L}_1$ , одномерен. Кроме того,  $Q_1 \subset M \ominus \tilde{L}_1$  приводит  $(A_1)_I$ . Поэтому собственные числа сужений  $(A_1)_I$  на  $Q_1$  и на  $M \ominus (\tilde{L}_1 \oplus Q_1)$  совпадают. Оператор  $A_1$  на  $M \oplus Q_1$  является сцеплением [1—4] сужений  $A_1$  на  $\tilde{L}_1$  и на  $M \ominus (\tilde{L}_1 \oplus Q_1)$ . Поэтому в силу одномерности сужения  $(A_1)_I$  на  $M \ominus Q_1$  получим  $a_1 > b_1$ .

Осталось воспользоваться соответствующими моделями [7]. Предположим, что  $A'_k$  ( $k=1,2$ ) в  $L^2(D_1)$ , где  $D_1 = [0, b_1] \times [b_2, a_2]$ , является треугольной моделью для  $A'_k$  ( $k=1,2$ ) в  $H_1$ . Аналогично  $A'_k$  ( $k=1,2$ ) в  $L^2(D_2)$ ,  $D_2 = [0, a_1] \times [0, b_2]$  — модель  $A'_k$  ( $k=1,2$ ) в  $H_2$ . Так как  $H_1$  приводит  $A_1$  и инвариантно относительно  $A_2$ , то пространства  $L^2(D_k)$  ( $k=1,2$ ) „склеиваются“ по отрезку  $0 \leq x_1 \leq b_1$ ,  $x_2 = b_2$ . По этому же отрезку происходит сцепление  $A'_2$  в  $L^2(D_1)$  с  $A'_2$  в  $L^2(D_2)$ . Совпадение точек спектра оператора  $A_1$  в  $L^2(D_1)$  и  $A_1$  в  $L^2(D_2)$

при  $0 \leq x_1 \leq b_1$  следует из того, что  $A_1$  в  $M \ominus \tilde{L}_1$  имеет одномерную мнимую компоненту.

III. Определим модельную систему  $\dot{A}_k$  ( $k=1,2$ ) из класса  $K_n$ . Пусть  $D_n$  — октантаобразная область из первой четверти, граница которой а) содержит отрезки  $x_1=0$ ,  $0 \leq x_2 \leq a_2$  и  $x_2=0$ ,  $0 \leq x_1 \leq a_1$  ( $a_k > 0$ ;  $k=1,2$ ); б) состоит из кривой, соединяющей точки  $(0, a_2)$  и  $(a_1, 0)$ ; причем кривая является ломаной, а отрезки прямых ее параллельны осям координат; в) количество «изломов» равно  $2n+1$ .

Определим пространство

$$L^2(D_n) = \{f(x), x = (x_1, x_2) \in D_n: \int_{D_n} |f(x)|^2 dx < \infty\}, \quad (4)$$

и операторы в нем

$$(\dot{A}_1 f)(x) = \alpha_1(x_1) f(x) + i \int_0^{x_1} f(t, x_2) I_1 dt;$$

$$(\dot{A}_2 f)(x) = \alpha_2(x_2) f(x) + i \int_0^{x_2} f(x_1, t) I_2 dt; \quad (5)$$

$x = (x_1, x_2) \in D_n$ ,  $f(x) \in L^2(D_n)$ ,  $\alpha_k(x_k)$  — вещественные, неубывающие, ограниченные функции при  $0 \leq x_k \leq a_k$ ,  $I_k = \pm 1$  ( $k=1,2$ ). Легко убедиться в том, что система  $\dot{A}_k$  ( $k=1,2$ ) в  $L^2(D_n)$  принадлежит классу  $K_n$ .

**Теорема 3.** Пусть система операторов  $A_k$  ( $k=1,2$ ), каждый из которых вполне несамосопряжен, принадлежит классу  $K_n$  и обладает свойствами:

- $\dim H_0 = 1$ ,  $H_0 = \bigcap_1^2 \overline{(A_k)_I H}$ ;

- $(A_1)_I C^* H \subset C^* H$ ,  $(A_2)_I C^{*s} H \subset C^{*s} H$ , ( $k, s = 1, \dots, n$ ), причем  $(A_1)_I$  ( $(A_2)_I$ ) на  $C^* H$  ( $C^{*s} H$ ) невырожден. Тогда существует разложение  $H = H_1 \oplus H_2$  такое, что сужение системы  $A_k$  ( $k=1,2$ ) на  $H_1$  — дважды перестановочная система, а на  $H_2$  — система из класса  $K_{n-1}$ , причем  $H_1$  приводит  $A_1$  и инвариантно относительно  $A_2$ .

**Теорема 4.** Пусть система операторов  $A_k$  ( $k=1,2$ ), каждый из которых вполне несамосопряжен, принадлежит классу  $K_n$  и обладает свойствами

- $\dim H_0 = 1$ ,  $H_0 = \bigcap_1^2 \overline{(A_k)_I H}$ .

- $(A_1)_I C^* H \subset C^* H$ ,  $(A_2)_I C^{*s} H \subset C^{*s} H$ , ( $k, s = 1, \dots, n$ ), причем  $(A_1)_I$  на  $C^* H$ ,  $(A_2)_I$  на  $C^{*s} H$  — невырождены.

- Спектр каждого оператора  $A_k$  ( $k=1,2$ ) вещественен. Тогда существует пространство  $L^2(D_n)$  и операторы  $\dot{A}_k$  ( $k=1,2$ )

в нем (см. (4), (5)), а также изометрический оператор  $U$  из  $H$  в  $L^2(D_n)$  такой, что  $UA_k = A_k U$  ( $k=1, 2$ ).

В теоремах 2, 4 можно освободиться от ограничения вещественности спектра операторов  $A_k$  ( $k=1, 2$ ). Для этого необходимо воспользоваться треугольной моделью «дискретной части» операторов  $A_k$  ( $k=1, 2$ ).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лившиц М. С., Янцевич А. А. Теория операторных узлов в гильбертовых пространствах. Изд-во Харьк. ун-та, 1971.
2. Лившиц М. С. О спектральном разложении линейных несамосопряженных операторов. — «Матем. сб.», 1954, 34(76).
3. Бродский М. С., Лившиц М. С. Спектральный анализ несамосопряженных операторов и промежуточные системы. — УМН, 1958. 13, № 1(79).
4. Бродский М. С. Треугольные и жордановы представления линейных операторов. М., «Наука», 1976.
5. Секефальви-Надь Б., Фояш Ч. Гармонический анализ операторов в гильбертовом пространстве. М., «Мир», 1970.
6. Гохберг И. Ц., Крейн М. Г. Теория вольтеровых операторов в гильбертовом пространстве и ее применения. М., «Наука», 1967.
7. Золотарев В. А. О треугольных моделях систем дважды перестановочных операторов. — ДАН АрмССР, 1976.

Поступила 14.XI 1976 г.

УДК 532.51:538.4

И. И. ИЕВЛЕВ

#### К РАВНОВЕСИЮ И УСТОЙЧИВОСТИ СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТИ ЖИДКОГО ДИЭЛЕКТРИКА В ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ

1. Пусть два жидких, несжимаемых, однородных, изотропных диэлектрика заполняют сосуд, образованный двумя несоприкасающимися идеально проводящими стенками  $S$  и  $\Sigma$  (рис. 1). Рассмотрим задачу определения равновесия и устойчивости границы раздела жидкостей под действием сил тяжести, сил поверхностного натяжения, действующих на границах раздела сред, и сил электрического поля, создаваемого заряженными стенками сосуда.

Обозначим:  $\Omega_k$  — объем сосуда, занимаемый  $k$ -й жидкостью;  $S_k, \Sigma_k$  — поверхности стенок сосуда  $S$  и  $\Sigma$ , смоченные  $k$ -й жидкостью;  $\Gamma$  — поверхность раздела жидких диэлектриков;  $\vec{n}$  — орт нормали к  $\Gamma$ , направленный внутрь области  $\Omega_1$ ;  $\vec{n}_2$  — орт внутренней нормали к  $S$  и  $\Sigma$ ;  $l$  и  $L$  — линии пересечения  $\Gamma$  с  $S$  и  $\Sigma$ ;  $\alpha$  — угол смачивания поверхностей  $S$  и  $\Sigma$  второй жидкостью;  $\rho_k = \text{const}$ ,  $\epsilon_k = \text{const}$  — плотность и диэлектрическая постоянная  $k$ -й жидкости;  $T$  — температура жидкостей, одинаковая в любой точке области  $\Omega_1 + \Omega_2$ ;  $\vec{g}$  — интенсив-

ность гравитационного поля,  $g = |\vec{g}|$ ;  $\sigma$  — коэффициент поверхностного натяжения на  $\Gamma$ ;  $\sigma_k$  — коэффициент поверхностного натяжения на  $S_k$  и  $\Sigma_k$ ;  $\sigma_0 = \sigma_2 - \sigma_1$ ;  $\Phi_k$  — потенциал электростатического поля в  $\Omega_k$ ;  $U$  — разность потенциалов между стенками  $S$  и  $\Sigma$ ;  $q$  — суммарный заряд на  $S$ . Введем декартову систему координат  $(x, y, z)$  так, чтобы ось  $Oz$  была параллельна и противоположно направлена вектору  $g$ .

Будем рассматривать совокупность жидкостей и электрического поля, заключенного в объеме  $\Omega_1 + \Omega_2$ , как единую «термодинамическую систему», характеризуемую температурой  $T$  и «внешним параметром»  $q$ . При этом полная энергия системы  $u = u_0 + u_1 + u_2 + u_3$ , где

$$u_1 = \sigma \int_{\Gamma} d\Gamma + \sigma_0 \int_{S_2} dS + \sigma_0 \int_{\Sigma_2} d\Sigma$$

— энергия поверхностного натяжения,

$u_2 = \rho_1 \int_{\Omega_1} \Pi d\Omega + \rho_2 \int_{\Omega_2} \Pi d\Omega$  — потенциальная энергия системы в гравитационном поле,  $\Pi = gz$ ,  $u_3 = Uq/2$  — энергия электрического поля [1],  $u_0 = u_0(T)$  — внутренняя энергия системы. При совершении системой элементарного равновесного процесса, в результате которого происходит теплообмен с окружающей средой и изменяется величина заряда на стенках сосуда, согласно первому и второму законам термодинамики, имеем [2]

$$du = Tds + Udq, \quad (1)$$

где второе слагаемое определяет элементарную работу «сторонних» сил по перемещению зарядов с одной стенки сосуда на другую,  $s$  — энтропия системы. Переходя от полной энергии  $u$  к термодинамическому потенциалу Гиббса  $Z = u - Ts - Uq$ , соотношение (1) можно представить в виде

$$dZ = -sdT - qdU. \quad (2)$$

Здесь  $s = s(T, U)$ ,  $q = q(T, U)$  играет роль обобщенных термодинамических сил, для равновесных процессов являющихся функциями обобщенных координат  $T, U$ .

Для системы, помещенной в термостат ( $T = \text{const}$ ) и с подключенным к стенкам сосуда внешним источником ЭДС ( $U = \text{const}$ ), правая часть соотношения (2) обращается в нуль. Согласно теории устойчивости термодинамических систем, система находится в состоянии устойчивого равновесия тогда, когда  $Z$  принимает минимальное значение [2, 3], откуда следует, что необходимым условием равновесия является равенство нулю первой вариации  $Z$  на возможных возмущениях системы

$$\delta Z = 0, \quad (3)$$

а достаточным условием устойчивости этого равновесия — положительность второй вариации  $Z$

$$\delta^2 Z > 0. \quad (4)$$

Таким образом задача определения равновесия и его устойчивости для рассматриваемой системы при  $T = \text{const}$ ,  $U = \text{const}$  сводится к вариационной задаче отыскания минимума функционала  $Z = u_1 + u_2 - u_3 + \text{const}$ .

Потенциал электростатического поля, как известно [1], удовлетворяет соотношениям

$$\Delta \Phi_k = 0 \text{ в } \Omega_k; \quad (5)$$

$$\langle \Phi \rangle = 0, \quad \left\langle \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right\rangle = 0 \text{ на } \Gamma; \quad (6)$$

$$\Phi_k|_S = U, \quad \Phi_k|_\Sigma = 0, \quad (7)$$

где  $\langle a \rangle = a_1 - a_2$ , и определяет величину суммарного заряда на  $S$  посредством выражения

$$q = - \sum_{k=1}^2 \frac{\epsilon_k}{8\pi} \int_{S_k} \frac{\partial \Phi_k}{\partial n_\Sigma} dS.$$

Тогда, с точностью до несущественного постоянного слагаемого, функционал  $Z$  можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} Z = & \sigma \int_{\Gamma} d\Gamma + \sigma_0 \int_{S_2} dS + \sigma_0 \int_{\Sigma_2} d\Sigma + \sum_{k=1}^2 \rho_k \int_{\Omega_k} \Pi d\Omega + \\ & + \sum_{k=1}^2 \frac{\epsilon_k}{8\pi} \int_{S_k} \Phi_k \left[ \frac{\partial \Phi_k}{\partial n_\Sigma} \right] dS. \end{aligned} \quad (8)$$

Определим возмущение положения равновесия системы полем виртуальных перемещений частиц жидкости  $\vec{h}$ . Условия несжимаемости, неподвижности стенок  $S$  и  $\Sigma$  и задания одного из объемов жидкости, например

$$\int_{\Omega_2} d\Omega = \Omega_2, \quad (9)$$

приводят к ограничениям на поле возмущений  $\vec{h}$

$$\text{div } \vec{h} = 0 \text{ в } \Omega_k; \quad (10)$$

$$N_\Sigma = \vec{n}_\Sigma \cdot \vec{h} = 0 \text{ на } S \text{ и } \Sigma; \quad (11)$$

$$\int_{\Gamma} N d\Gamma = 0 \quad (N = \vec{n} \cdot \vec{h}_{|\Gamma}). \quad (12)$$

Возмущения положения частиц жидкости в  $\Omega_1 + \Omega_2$  вызывают возмущения потенциала электростатического поля  $\Phi_k$ , удовлетворяющего соотношениям (5)–(7). Обозначим локальное (в данной точке пространства) возмущение потенциала  $\Phi_k$  через  $\psi_k$ . Тогда можно показать, что в силу выполнения (5)–(7) функции  $\psi_k$  ( $k=1, 2$ ) должны удовлетворять условиям

$$\Delta\psi_k = 0 \text{ в } \Omega_k, \quad (13)$$

$$\left\langle \psi + N \frac{\partial\Phi}{\partial n} \right\rangle = 0 \text{ на } \Gamma, \quad (14)$$

$$\left\langle \varepsilon \left[ \frac{\partial\psi}{\partial n} - \vec{\nabla}_{\Gamma} \cdot (N \vec{\nabla}_{\Gamma} \Phi) \right] \right\rangle = 0, \quad (15)$$

$$\psi_k = 0 \text{ на } S \text{ и } \Sigma, \quad (16)$$

где  $\vec{\nabla}_{\Gamma} = \vec{e}^{\alpha} \nabla_{\alpha}$  — дифференциальный оператор набла на поверхности  $\Gamma$  [4, 5];  $\vec{e}^{\alpha}$  — взаимный базис на поверхности  $\Gamma$  ( $\alpha=1,2$ );  $\nabla_{\alpha}$  — оператор ковариантной производной в произвольной системе координат двумерного риманова пространства, определенного на поверхности  $\Gamma$ .

Не вдаваясь в подробности получения первой и второй вариации функционала (8) при ограничениях (5)–(7), (9)–(12), запишем в окончательном виде условия (3), (4), учитывая связи (10)–(16) по методу неопределенных множителей Лагранжа [6–9]:

$$\begin{aligned} \delta Z = \int_{\Gamma} \left\{ -\sigma 2H + \left\langle p + \frac{\varepsilon}{8\pi} \left[ (\vec{\nabla}\Phi)^2 - \right. \right. \right. \\ \left. \left. - 2 \left( \frac{\partial\Phi}{\partial n} \right)^2 \right] \right\rangle + c_0 \right\} N d\Gamma + \sum_{k=1}^2 \int_{\Omega_k} \vec{h} \cdot \vec{\nabla} (p_k \Pi + p_k) d\Omega + \\ + \int_{I+L} (\sigma \cos \alpha + \sigma_0) \vec{h} \cdot \vec{\tau} dl = 0, \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \delta^2 Z = \sigma \int_{\Gamma} \left\{ -\Delta_{\Gamma} N + AN + \frac{1}{4\pi\sigma} \left\langle \varepsilon (\vec{\nabla}_{\Gamma} \Phi \cdot \vec{\nabla}_{\Gamma} \psi - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{\partial\Phi}{\partial n} \frac{\partial\psi}{\partial n} \right) \right\rangle \right\} N d\Gamma + \sigma \int_{I+L} \left( \frac{\partial N}{\partial \nu} + \chi N \right) N dl > 0. \end{aligned} \quad (18)$$

Здесь  $H$  — средняя кривизна  $\Gamma$ ;  $p_1, p_2, c_0$  — неопределенные множители Лагранжа, учитывающие условия (10), (12);

$\tau$  — единичный вектор, касательный к стенке  $S$  (или  $\Sigma$ ) и нормальный к контуру  $l$  (или  $L$ );  $\Delta_\Gamma$  — оператор Лапласа-Бельтрами [5];

$$A = \frac{\rho g}{\sigma} (\vec{n} \cdot \vec{\nabla} z)|_\Gamma - (4H^2 - 2K) - \frac{1}{4\pi\sigma} \left\langle \varepsilon \left[ 2H \left( \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right)^2 - \sum_{\beta, \gamma=1}^2 b^{\beta\gamma} \nabla_\beta \Phi \nabla_\gamma \Phi \right] \right\rangle;$$

$K$  — гауссова кривизна поверхности  $\Gamma$ ;  $b^{\beta\gamma}$  — компоненты матрицы, обратной матрице коэффициентов второй квадратичной формы поверхности  $\Gamma$ ,  $\rho = \rho_2 - \rho_1$ ;  $\frac{\partial}{\partial \nu}$  — дифференцирование по направлению вектора  $\nu$ , касательного к  $\Gamma$ , нормального к контуру  $l$  (и  $L$ ) и внешнего по отношению к области  $\Omega_1 + \Omega_2$ ;  $\chi = (k_\Gamma \cos \alpha - k_S) / \sin \alpha$ ;  $k_\Gamma$  — кривизна нормального к контуру  $l$  (или  $L$ ) сечения поверхности  $\Gamma$  в точке, принадлежащей  $l$  (или  $L$ );  $k_S$  — аналогичная  $k_\Gamma$  кривизна поверхности  $S$  (или  $\Sigma$ ). Знак величины  $k_\Gamma$  положительный, если в рассматриваемой точке поверхность  $\Gamma$  направлена выпуклостью в сторону направления  $\vec{n}$ . Аналогично этому значение  $k_S$  положительное, если выпуклость соответствующей поверхности ( $S$  или  $\Sigma$ ) обращена в сторону, указываемую нормалью  $\vec{n}_S$ .

Как следствие равенства (17) получаем соотношение для определения функций  $\rho_k$  ( $k=1, 2$ ):  $\rho_k + \rho_k \Pi = c_k$  и уравнение равновесия

$$2H - \frac{\rho g}{\sigma} z - \frac{1}{8\pi\sigma} \left\langle \varepsilon \left[ (\vec{\nabla} \Phi)^2 - 2 \left( \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right)^2 \right] \right\rangle + c = 0 \quad (19)$$

на  $\Gamma$ , которое совпадает с уравнением равновесия, полученным в [10] другим способом, и краевые условия

$$\cos \alpha = -\sigma_0 / \sigma \text{ на } l, L, \quad (20)$$

где  $c = (c_0 + c_2 - c_1) \sigma^{-1} = \text{const}$  — неизвестная константа. Уравнения (5), (19) совместно с условиями (6,7), (9), (20) образуют замкнутую систему уравнений и условий для определения неизвестных функций  $\Phi_k$  ( $k=1, 2$ ), поверхности  $\Gamma$  и постоянной  $c$ , описывающих равновесие жидкостей.

Вторую вариацию функционала  $Z$  можно рассматривать как однородный квадратичный функционал, областью определения которого служит множество  $M$  дважды непрерывно дифференцируемых на  $\Gamma$  функций, удовлетворяющих условию (12):

$$M = \left\{ N \in C_2(\Gamma) : \int_\Gamma N d\Gamma = 0 \right\}, \text{ и в котором функции } \psi^k \text{ (} k=1, 2 \text{) определяются через } N \text{ соотношениями (13) — (16).}$$

Будем рассматривать  $M$  как подмножество в пространстве  $L_2(\Gamma)$  функций, суммируемых в квадрате на  $\Gamma$ , с метрикой, определяемой скалярным произведением  $(N, \tilde{N}) = \int_{\Gamma} N \tilde{N} d\Gamma \sqrt{N}$ ,

$\tilde{N} \in L_2(\Gamma)$ . Из выражения (18) и соотношений (13)—(16) следует, что функционал  $F(N) = \frac{1}{\sigma} \delta^2 Z$  может быть представлен в виде  $F(N) = (VN, N)$ , где  $V$  — линейный (аддитивный, однородный) и, как следует из (13)—(16), (5)—(7), симметричный на  $M$  оператор. Предположим, что  $F(N)$  ограничен снизу на  $M$  и достигает своей точной нижней грани

$$\lambda_* = \inf_M \frac{F(N)}{(N, N)}$$

на некоторой функции  $N_* \in M$ . Тогда, как известно [11],  $\lambda_*$  совпадает с наименьшим собственным числом оператора  $V$

$$VN_* = \lambda_* N_*, \quad (21)$$

а  $N_*$  — с соответствующей собственной функцией. В рассматриваемом случае операторному уравнению (21) соответствует уравнение

$$-\Delta_{\Gamma} N + AN + \frac{1}{4\pi\sigma} \left\langle \varepsilon \left[ \vec{\nabla}_{\Gamma} \Phi \cdot \vec{\nabla}_{\Gamma} \Psi - \frac{\partial \Phi}{\partial n} \frac{\partial \Psi}{\partial n} \right] \right\rangle = \lambda N \quad (22)$$

на  $\Gamma$  и краевое условие на  $l, L$

$$\frac{\partial N}{\partial \nu} + \chi N = 0, \quad (23)$$

которые совместно с соотношениями (12)—(16) и условием нормировки функции  $N$

$$\int_{\Gamma} N^2 d\Gamma = 1 \quad (24)$$

представляют собой краевую задачу на собственные значения по параметру  $\lambda$ , однозначно определяющую соответствующие собственные функции  $N$ .

Таким образом, условие устойчивости равновесия, найденного решением задачи (5)—(7), (9), (19), (20), эквивалентно условию положительности наименьшего собственного значения задачи (12)—(16), (22)—(24):

$$\lambda_* > 0. \quad (25)$$

2. В качестве примера рассмотрим следующую задачу. Пусть жидкая капля  $\Omega_2$  помещена между горизонтально расположенными плоскостью  $S: \vec{x} = (r, \varphi, 1)$  и слабо искривленной осесимметричной поверхностью  $\Sigma: \vec{x} = (r, \varphi, f(r))$  (рис. 2). Здесь  $(r, \varphi, z)$  — координаты произвольной точки  $P$  в цилиндрической системе координат;  $\vec{x}$  — радиус вектор точки  $P$ ; все переменные приведены к безразмерному виду с помощью характер-

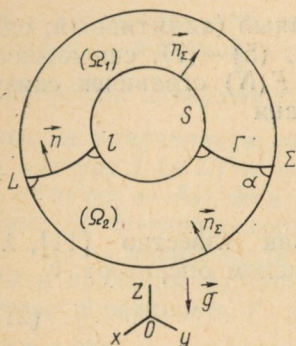


Рис. 1.

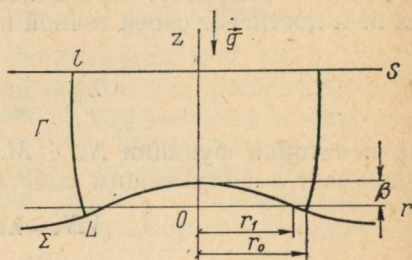


Рис. 2.

ного линейного размера  $H$  — расстояния между  $S$  и средним уровнем поверхности  $\Sigma$  и коэффициента поверхностного натяжения  $\sigma$ . Последнее обстоятельство приводит к тому, что сомножитель первого слагаемого в выражении для  $A$  и второго слагаемого уравнения (19)  $\frac{\rho g}{\sigma}$  должен быть заменен числом Бонда

$B = \rho g H^2 / \sigma$ , а безразмерная разность потенциалов  $U$  связана с размерной  $U_0$  соотношением  $U = U_0 (\sigma H)^{-1/2}$ . Будем разыскивать осесимметричную поверхность  $\Gamma$  в параметрическом виде  $\vec{x} = (r_0 + X(z), \varphi, z)$  для случая  $f(r) = \beta \cos \frac{\pi r}{2r_1}$ , где  $r_1 = br_0$  и угла

смачивания  $\alpha = 90^\circ$ . Решать задачу будем в предположении, что параметр задачи  $r_0$ , определяющий значение полярного радиуса линии пересечения  $\Gamma$  с  $\Sigma$ , велик, т. е.  $h = 1/r_0 < \ll 1$ . Кроме того,

считаем, что  $B = h \tilde{B}$ ,  $\tilde{B} = O(1)$ ,  $b = O(1)$ ,  $U = O(1)$ . Эти предположения осуществляются для жидкой капли конечного объема, помещенной между двумя очень близко расположенными поверхностями  $S$  и  $\Sigma$ , причем искривление поверхности  $\Sigma$  должно быть незначительным. При данных предположениях поверхность  $\Gamma$  будет мало отличаться от цилиндрической поверхности  $r = r_0$  и для решения задачи можно воспользоваться методом возмущений [12], разыскивая искомые величины в виде асимптотических рядов по малому параметру  $h$ .

Решение соответствующей краевой задачи, определяющей равновесие, дает следующее выражение для функции  $X(z)$ :

$$X(z) = h \left\{ \frac{1}{2} \left[ \tilde{B} \frac{1-f_0}{2} - \beta \frac{\pi}{2b(1-f_0)} \sin \frac{\pi}{2b} \right] \times \right. \\ \times [(z-1)^2 - (1-f_0)^2] + \tilde{B} \frac{(z-1)^3 + (1-f_0)^3}{6} + \\ \left. + \frac{U^2 (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)^2}{(1-f_0)^3 2\pi} \tilde{B} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1 - \cos \pi p}{(\varepsilon_2 + \varepsilon_1) \nu_p + \frac{U^2 (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)^2}{(1-f_0)^2 4\pi}} \times \right. \\ \left. \times \frac{\cos \nu_p (z-1) - \cos \pi p}{\nu_p^4} \right\} + O(h^2),$$

где  $\nu_p = \pi p (1-f_0)^{-1}$  ( $p = 1, 2, \dots$ ),  $f_0 = \beta \cos \frac{\pi}{2b}$ .

Нижняя граница функционала  $F(N)$ , соответствующая данному равновесию, достигается на неосесимметричных возмущениях  $N$  и равна

$$\lambda_* = hU^2 \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{8 \left( 1 - \beta \cos \frac{\pi}{2b} \right)^2} \frac{\beta}{b} \sin \frac{\pi}{2b} + O(h^2). \text{ Рассмотрим част-}$$

ный случай  $b = 1, \beta > 0$ . Тогда  $\lambda_* = U^2 (\varepsilon_2 - \varepsilon_1) \frac{h\beta}{8} + O(h^2)$ ,

откуда следует, что электрическое поле стабилизирует равновесие осесимметричной капли ( $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$ ) и дестабилизирует положение равновесия воздушного пузырька ( $\varepsilon_2 < \varepsilon_1$ ). Эти результаты согласуются с известным экспериментальным фактом вытягивания диэлектрика в область с большей интенсивностью электрического поля.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тамм И. Е. Основы теории электричества. М., «Наука», 1976. 616 с.
2. Базаров И. П. Термодинамика. М., «Высшая школа», 1976. 447 с.
3. Гленсдорф П., Пригожин И. Термодинамическая теория структуры, устойчивости и флуктуаций. М., «Мир», 1973. 280 с.
4. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике. М., «Наука», 1973. 832 с.
5. Мак-Коннел А. Дж. Введение в тензорный анализ с приложениями к геометрии, механике и физике. М., Физматгиз, 1963. 411 с.
6. Беляева М. А., Слобожанин Л. А., Тюпцов А. Д. Гидростатика в слабых силовых полях. — В кн.: Введение в динамику тела с жидкостью в условиях невесомости. Вып. 26. М., 1968, с. 5—68.
7. Шашин В. М., Шуванов Н. И. Равновесные формы свободной поверхности жидкости в гравитационном и магнитном полях с учетом поверхностного натяжения. — «Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа», 1970, № 3, с. 113—116.

8. Борисов И. Д. О равновесных формах поверхности намагничивающейся жидкости. — «Магнитная гидродинамика», 1976, № 4, с. 11—18.
9. Иевлев И. И., Исерс А. Б. Равновесие и устойчивость поверхности раздела жидких диэлектриков в электрическом и гравитационном полях. — «Магнитная гидродинамика», 1976, № 4, с. 89—95.
10. Тарапов И. Е. Некоторые вопросы гидростатики намагничивающихся и поляризующихся сред. — «Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа», 1974, № 5, с. 141—144.
11. Михлин С. Г. Вариационные методы в математической физике. М., «Наука», 1970. 512 с.
12. Коул Дж. Методы возмущений в прикладной математике. М., «Мир», 1972. 274 с.

Поступила 15.III 1977 г.

УДК 532.5.013.4:536.25:538.4

А. И. ЖАКИН

### О КОНВЕКТИВНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ БИНАРНОЙ ПРОВОДЯЩЕЙ СМЕСИ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

1. Рассмотрим несжимаемую проводящую бинарную смесь с концентрациями компонент  $\gamma$ ,  $\gamma_1$  ( $\gamma < \gamma_1$ ). Компоненту, обладающую концентрацией  $\gamma$ , будем называть легкой. Конвективную устойчивость равновесия исследовали для смеси, находящейся в постоянных однородных магнитном и гравитационном полях. Предполагаем: градиент концентрации легкой компоненты направлен вниз, что дестабилизирует состояние равновесия, а градиент температуры направлен вверх, что способствует стабилизации состояния равновесия [1]. Известно [1, 2], что для однородных проводящих сред магнитное поле способствует устойчивости. На примере одного точного решения рассмотрим вопрос о влиянии магнитного поля на конвективную устойчивость бинарной проводящей смеси.

2. Считаем, что эффекты диффузионной теплопроводности и термодиффузии незначительны [3]. В МГД-приближении [4] и приближений Буссинеска [1, 2] уравнения конвекции бинарной проводящей смеси в магнитном поле имеют вид

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0, \quad \frac{\partial \gamma}{\partial t} + \vec{v} \nabla \gamma = D \Delta \gamma, \quad \frac{\partial T}{\partial t} + \vec{v} \nabla T = \chi \Delta T, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \nabla) \vec{v} = - \frac{\nabla p}{\rho} + \frac{\mu}{4\pi} (\vec{H} \nabla) \vec{H} + \nu \Delta \vec{v} + g[1 - \alpha(T - \bar{T}) -$$

$$-\beta(\gamma - \bar{\gamma})] \vec{a}, \quad \operatorname{div} \mu \vec{H} = 0, \quad \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = \operatorname{rot}[\vec{v}, \mu \vec{H}] - \operatorname{rot}(\nu_m \operatorname{rot} \vec{H}),$$

где обозначено:  $\vec{v}$ ,  $\vec{H}$  — вектора скорости и напряженности магнитного поля;  $\vec{a}$  — единичный вектор, направленный вдоль силы

тяжести,  $T$  — температура,  $p$  — полное давление;  $\bar{\gamma}$ ,  $\bar{T}$  — средние значения концентрации легкой компоненты и температуры в состоянии равновесия,  $\alpha = -(\partial\rho/\partial T)/\rho$ ,  $\beta = -(\partial\rho/\partial\gamma)/\rho$ ;  $D$ ,  $\chi$ ,  $\nu$  — коэффициенты диффузии, теплопроводности и кинематической вязкости;  $\nu_m = c^2/(4\pi\sigma)$  — магнитная вязкость,  $c$  — скорость света,  $\sigma$  — проводимость смеси,  $\mu$  — магнитная проницаемость. В дальнейшем предполагаем:  $\mu = 1$ ,  $\sigma = \text{const}$ . Система уравнений (1) допускает решение в виде

$$T_0(x) = -Ax + A_1, \quad \gamma_0(x) = Bx + B_1, \quad \vec{H} = -H\vec{a}_1, \quad (2)$$

соответствующее равновесию бинарной смеси. Здесь  $T_0(x)$ ,  $\gamma_0(x)$  — распределение температуры и концентрации легкой компоненты в состоянии равновесия;  $A$ ,  $A_1$ ,  $B$ ,  $B_1$ ,  $H$  — постоянные величины, определяемые граничными условиями;  $g$  — ускорение свободного падения;  $x$  — декартова координата оси  $ox$ , направленная вертикально вверх. В дальнейшем будем пользоваться безразмерными переменными, выбирая в качестве единиц измерения следующие величины: длины — характерный размер  $L$ , времени —  $L^2/\nu$ , скорости —  $\chi/L$ , давления —  $\rho\nu\chi/L^2$ , температуры —  $AL$ , концентрации легкой компоненты —  $B\chi L/D$ , величины напряженности магнитного поля —  $4\pi\chi \sqrt{\rho\sigma\nu}/(Lc)$ . Состояние равновесия, описываемое соотношениями (2), исследуется методами линейной теории конвективной устойчивости [1, 2]. Полагая, что возмущенное состояние смеси описывается скоростью  $\vec{v}$ , температурой  $T_0(x) + T$ , концентрацией легкой компоненты  $\gamma_0(x) + \gamma$ , давлением  $p_0 + p$ , напряженностью магнитного поля  $\vec{H} + \vec{h}$ , подставляем эти величины в систему (1) и линеаризируем ее, считая  $\ll T_0, \gamma \ll \gamma_0, p \ll p_0, |(\vec{v} \nabla) \vec{v}| \ll \left| \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \right|, |\vec{h}| \ll |\vec{H}|$ .

В безразмерном виде линеаризованная система уравнений конвекции имеет вид

$$\text{div } \vec{v} = 0; \quad P_d \frac{\partial \gamma}{\partial t} - \vec{v} \vec{a} = \Delta \gamma; \quad P \frac{\partial T}{\partial t} + \vec{v} \vec{a} = \Delta T;$$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\nabla p + M(\vec{a}_1 \nabla) \vec{h} + \Delta \vec{v} - (RT + R_d \gamma) \vec{a}; \quad \text{div } \vec{h} = 0;$$

$$\frac{\partial \vec{h}}{\partial t} - M(\vec{a} \nabla) \vec{v} = \Delta \vec{h}, \quad (3)$$

где обозначено:  $P = \nu/\chi$ ,  $P_d = \nu/D$ ,  $P_m = \nu/\nu_m$  — температурное, диффузионное и магнитное числа Прандтля;  $R = \alpha g AL^4/(\nu\chi)$ ,  $R_d = \beta g BL^4/(\nu D)$  — температурное и диффузионное числа Рэлея;  $M = \frac{\mu HL}{4\pi c} \sqrt{\frac{\sigma}{\rho\nu}}$  — число Гартмана.

3. Основные закономерности конвективной устойчивости бинарной проводящей смеси в магнитном поле можно выяснить на примере решения задачи об устойчивости вертикального слоя с изотермическими идеально проводящими недеформируемыми плоскими границами, на которых поддерживается постоянная концентрация легкой компоненты.

Введем декартову систему координат так, чтобы ось  $oy$  была направлена поперек слоя, а начало координат поместим на одной из граничных поверхностей. В качестве характерного размера выберем ширину слоя. Известно [1], что для вертикальных слоев наиболее опасными являются плоскопараллельные возмущения, поэтому решение системы уравнений (3) ищем в виде

$$\begin{pmatrix} \vec{v} \\ T \\ \gamma \\ p \\ \vec{h} \end{pmatrix} = e^{-\lambda t} \begin{pmatrix} (v(y), 0, 0) \\ T(y) \\ \gamma(y) \\ p(y) \\ (h(y), 0, 0) \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Если подставить соотношения (4) в (3) и спроектировать полученные уравнения на ось  $ox$ , то получим

$$\begin{aligned} -\lambda v = v'' + RT + R_d \gamma + M h'; \quad -\lambda p T + v = T''; \quad -\lambda P_d \gamma - v = \gamma''; \\ -\lambda P_m h - M v' = h'', \end{aligned} \quad (5)$$

где  $(\cdot)' = \frac{d}{dy}$ . Граничные условия имеют вид

$$v = v'' = T = \gamma = h' = 0, \quad y = 0, 1. \quad (6)$$

Условие  $h' = 0$  означает, что на границах исчезает тангенциальная компонента тока. Это соответствует бесконечной электропроводности границ (так называемое условие Ферми [1]). Равенства  $T = 0$ ,  $\gamma = 0$  выражают постоянство распределения поля температуры и концентрации на границах слоя. Условия  $v = v'' = 0$  являются следствиями недеформируемости границ слоя, уравнения неразрывности и равенства нулю тангенциальных составляющих тензора напряжений на свободных поверхностях.

Система уравнений (5) и краевые условия (6) определяют краевую задачу на собственные значения. Собственным числом является параметр  $\lambda$ . Собственные функции рассматриваемой задачи имеют вид  $(v, T, \gamma) = (c_1, c_2, c_3) \sin \pi n y$ ;  $h = c_4 \cos \pi n y$

( $n=1, 2, 3, \dots$ ). Для  $n=1$  (наиболее опасная мода [1]) собственные значения определяются из уравнения

$$\begin{vmatrix} \lambda - \pi^2 & R & R_d & -\pi M \\ -1 & \lambda P - \pi^2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \lambda P_d - \pi^2 & 0 \\ \pi M & 0 & 0 & \lambda P_m - \pi^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрывая определитель, получим

$$a_4 \lambda^4 - a_3 \lambda^3 + a_2 \lambda^2 - a_1 \lambda + a_0 = 0, \quad (7)$$

$$a_4 = PP_d P_m; \quad a_3 = \pi^2 a;$$

$$a_2 = \pi^4 (P + P_d + P_m + PP_d + PP_m + P_d P_m) + \pi^2 PP_d Q + P_m P_d R - P_m P R_d; \quad a_1 = \pi^6 b + \pi^2 (P_d + P_m) R - \pi^2 (P + P_m) R_d + \pi^4 (P + P_d) Q;$$

$$a_0 = \pi^4 (\pi^4 + R - R_d + \pi^2 Q); \quad a = PP_d + PP_m + P_d P_m + PP_d P_m;$$

$$b = 1 + P + P_d + P_m; \quad Q = M^2.$$

Граница устойчивости определяется из условия  $\text{Re} \lambda = 0$ , поэтому, полагая  $\lambda = i\omega$ , из (7) получим

$$a_4 \omega^4 - a_2 \omega^2 + a_0 = 0; \quad a_3 \omega^3 - a_1 \omega = 0. \quad (8)$$

Неизвестными в системе (8) являются  $\omega$ ,  $R_d$ . Первое решение, определяющее критические числа  $R_d$  для монотонных возмущений, имеет вид

$$\omega = 0; \quad R_{d_1} = \pi^4 + R + \pi^2 Q. \quad (9)$$

Остальные решения определяют критические диффузионные числа Рэля для колебательных возмущений.  $R_d$  находятся из следующего уравнения:

$$a_{200} R_d^2 - (a_{100} + a_{110} R + a_{101} Q) R_d + (a_{002} Q^2 + a_{020} R^2 + a_{011} R Q + a_{010} R + a_{001} Q + a_{000}) = 0, \quad (10)$$

$$a_{200} = P^2 P_m^2 (1 + P_d) (P + P_m); \quad a_{020} = P_d^2 P_m^2 (1 + P) (P_d + P_m); \\ a_{002} = \pi^4 P^2 P_d^2 (P + P_d) (1 + P_m); \quad a_{110} = P_m^2 [P^2 (1 + P_d) (P_d + P_m) + P_d^2 (1 + P) (P + P_m)]; \\ a_{101} = \pi^2 P^2 [P_m^2 (1 + P_d) (P + P_d) + P_d^2 (1 + P_m) (P + P_m)]; \quad a_{011} = \pi^2 P_d^2 [P_m^2 (1 + P) (P + P_d) + P^2 (1 + P_m) (P_d + P_m)]; \\ a_{100} = \pi^4 (1 + P_d) [a P^2 + P_m^2 (1 + P) (P + P_d) (P + P_m) + b P^2 P_m^2]; \quad a_{010} = \pi^4 (1 + P) [a P_d^2 + P_m^2 (1 + P_d) (P + P_d) (P_d + P_m) + b P_d^2 P_m^2]; \\ a_{001} = \pi^6 (1 + P_m) [a (P^2 + P_d^2) + 2b P^2 P_d^2]; \quad a_{000} = \pi^8 (P + P_d) (P + P_m) (P_d + P_m) (a + b).$$

Минимальный положительный корень уравнения (10) определяет критическое диффузионное число Рэля  $R_{d_2}$  для колебательных возмущений:

$$R_{d_2} = \frac{a_{100} + a_{110} R + a_{101} Q}{2a_{200}} - \frac{\sqrt{(a_{100} + a_{110} R + a_{101} Q)^2 - 4a_{200} F}}{2a_{200}}, \quad (11)$$

где  $F$  — свободный член уравнения (10). Квадраты частот нейтральных колебаний и условие существования колебательных возмущений выражаются в виде

$$\omega^2 = \frac{1}{a} (R_{d_1} - R_d) > 0; R_{d_1} = \frac{\pi^4 b + (P_d + P_m) R + \pi^2 (P + P_d) Q}{P + P_m}. \quad (12)$$

Легко видеть, что в общем случае могут быть наиболее опасными как монотонные ( $R_{d_1} < R_{d_2}$ ), так и колебательные ( $R_{d_1} > R_{d_2}$ ) возмущения. Известно [1, 2], что в однородных жидкостях колебательные возмущения могут существовать лишь при  $P_m > P$ . В бинарных смесях это условие не выполняется. Например, если  $P_m \ll 1$ , то из (11) получаем

$$R_{d_2} = \frac{b_0 + b_1 R + b_2 Q + b_3 R Q + b_4 Q^2}{P^2 P_d Q + \pi^2 (1 + P_d) P^2} + O(P_m);$$

$$b_0 = (P + P_d) (1 + P + P_d + P P_d); \quad b_1 = \pi^2 P_d^2 (1 + P); \quad (13)$$

$$b_2 = \pi^4 (P + P_d) (P + P_d + 2 P P_d); \quad b_3 = P P_d^2;$$

$$b_4 = \pi^2 P P_d (P + P_d).$$

Условие (12) с учетом (13) дает

$$Q < \frac{P - P_d}{P_d} (R - R_*) + O_1(P_m); \quad R_* = \pi^4 \frac{1 + P_d}{P - P_d}. \quad (14)$$

Из (14) следует, что в слабых полях при условии  $R > R_*$ ,  $P > P_d$  возможны колебательные возмущения. В сильных полях условие (14) нарушается, поэтому кризис неустойчивости связан с возмущениями монотонного типа, а критическое диффузионное число определяется соотношением (9). Отметим, что критерий существования колебательных возмущений в данном случае по форме совпадает с критерием существования колебательных возмущений бинарной смеси без магнитного поля, который выглядит так [1]:  $P > P_d$ ,  $R_d > R_{d*}$ ,  $R_{d*} = R_*$ .

Таким образом, для того чтобы существовали колебательные возмущения, необходим достаточно сильный подогрев смеси сверху, при этом должно выполняться условие  $D > \chi$ , т. е. температурные неоднородности должны выравниваться медленнее, чем концентрационные.

Рассмотрим случай  $P \ll 1$  (для расплавленных металлов, например, это условие имеет место [5]). В сильных полях ( $P^2 O \gg \gg 1$ ) критические диффузионные числа Рэлея для колебательных возмущений имеют порядок

$$R_{d_2} \approx \frac{P_d^2 (1 + P_m) \pi^2 Q}{P_m (P_d + P_m + 2 P_d P_m)}, \quad (15)$$

квадраты частот нейтральных колебаний

$$\omega^2 \simeq \frac{(1 + P_d)\pi^2 Q}{P_m (P_m + P_d + 2P_d P_m)}$$

Сравнивая (9) и (15), делаем вывод, что если в (15) множитель при  $\pi^2 Q$  больше единицы, то в сильных полях кризис неустойчивости связан с монотонными возмущениями, если меньше единицы — с колебательными. Эти два условия эквивалентны соответственно следующим неравенствам:

$$P_d > W, P_d < W, W = \frac{P_m (1 + 2P_m)}{2(1 + P_m)} \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{4(1 + P_m)}{(1 + 2P_m)^2}} \right).$$

В заключение отметим, что подавление конвективных возмущений магнитным полем в бинарных проводящих смесях подтверждается также экспериментом [6].

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М., «Наука», 1973. 392 с.
2. Chandrasechar S. Hydrodynamic and hydromagnetic stability. Oxford. Claredon Press, 1961.
3. Де Гроот С., Мазур П. Неравновесная термодинамика. М., «Мир», 1964. 456 с.
4. Куликовский А. Г., Любимов Г. А. «Магнитная гидродинамика», М., Физматгиз, 1962. 248 с.
5. Жидкометаллические теплоносители. М., «Атомиздат», 1976. 248 с. Авт.: В. М. Боришанский, С. С. Кутателадзе, И. И. Новиков, О. С. Рядынский.
6. Cahoon I. R., Youdelis W. Y. Application of a magnetic field to suppress convective velocities durring liquid diffusion. — «Canadian Metallurgical Quarterly», 1969, vol. 8, № 1, p. 39—40.

Поступила 15.III 1977 г.

УДК 511.42

Л. Н. ПРОНИН

#### АВТОМОРФИЗМЫ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ БИНАРНЫХ ЭРМИТОВЫХ ФОРМ НАД КОЛЬЦОМ ЦЕЛЫХ КВАТЕРНИОНОВ

В статье приняты следующие обозначения:  $Z$  — кольцо целых рациональных чисел;  $Q$  — кольцо целых (по Гурвицу) кватернионов;  $i_0 \equiv 1, i_1, i_2, i_3$  — базисные кватернионные единицы;  $\text{Re}x$  — вещественная (скалярная) часть кватерниона  $x$ ;  $\bar{x}$  — сопряженный с  $x$  кватернион;  $N(x)$  — норма кватерниона  $x$ ;  $x \sim y$  — кватернион  $x$  ассоциирован в  $Q$  с кватернионом  $y$ ;  $Q$ -форма — эрмитова форма над  $Q$ ;  $f(x, y) = [a, b, c] = xax + + xby + ybx + ycy$  — бинарная  $Q$ -форма;  $\Delta = ac - b\bar{b}$  — определитель формы  $[a, b, c]$ ;  $Af$  —  $Q$ -форма, полученная из  $f$  в результате подстановки переменных с матрицей  $A$  над  $Q$ ;  $f_1 \sim f_2$  —  $Q$ -формы  $f_1$  и  $f_2$  эквивалентны над  $Q$ .

Определение. Кватернион  $x \in Q$  называется приведенным по модулю  $m \in Z$ , если он имеет наименьшую норму в классе вычетов кольца  $Q$  по  $\text{mod } m$ , которому он принадлежит.

**Лемма 1.** Если  $x \cong y$  и  $x$  приведен по  $\text{mod } m$ , то  $y$  также приведен по  $\text{mod } m$ .

**Доказательство.** Предположим противное. Пусть  $z$  — приведенный по  $\text{mod } m$  кватернион из класса вычетов, которому принадлежит  $y$ . Тогда  $N(z) < N(y) = N(x)$  и  $z = y + m\alpha = \varepsilon x \eta + m\alpha$ , где  $\varepsilon, \eta, \alpha \in Q$ ,  $N(\varepsilon \eta) = 1$ , а следовательно, кватернион  $\varepsilon z \eta$  принадлежит тому же классу вычетов, что и  $x$ , и  $N(\varepsilon z \eta) = N(z) < N(x)$ , это противоречит условию. Лемма доказана.

**Лемма 2.** Целый кватернион  $b = \sum_{k=0}^3 b_k i_k$  приведен по  $\text{mod } m (m > 0)$  тогда и только тогда, когда

$$|b_k| \leq \frac{m}{2} \quad (k = 0, \dots, 3); \quad \sum_{k=0}^3 |b_k| \leq m. \quad (1)$$

**Доказательство.** Пусть  $b$  — приведенный по  $\text{mod } m$  кватернион. Первое из неравенств (1) очевидно. Действительно, если бы для какого-нибудь  $k$  выполнялось  $|b_k| > \frac{m}{2}$ , то при подходящем выборе знака  $N(b \pm m i_k) < N(b)$ , что противоречит приведенности  $b$ . Второе из неравенств (1) получается, если применить первое неравенство и лемму 1 к  $\varepsilon b$ , где  $\varepsilon$  — единица кольца  $Q$ , подобранная так, что  $\text{Re } \varepsilon b = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^3 |b_k|$ .

Для доказательства достаточности условий (1) положим, что  $b'$  — приведенный по  $\text{mod } m$  кватернион из того же класса вычетов, что и  $b$ . Пусть  $b' = b + m\alpha$ . Используя (1) для  $b$  и  $b'$ , нетрудно убедиться в том, что  $N(\alpha) \leq 2$ . Если  $\alpha = 0$ , то  $b = b'$ , и больше доказывать нечего. Если  $N(\alpha) = 1$ , то  $\overline{ab'} = \overline{ab} + m$ , и, следовательно,  $\text{Re } \overline{ab} = -\frac{m}{2}$ ,  $\overline{ab'} = -(\overline{ab}) = -ba$ ,  $b' = -\overline{ab}a$  и  $N(b) = N(b')$ . Если  $N(\alpha) = 2$ , то  $\alpha = i_k + i_s$  ( $k \neq s$ ),  $m \equiv 0 \pmod{2}$  и  $b = -b' = -\frac{m}{2}\alpha$ .

Лемма доказана.

**Следствие 1.** В каждом классе вычетов кольца  $Q$  по  $\text{mod } m$  содержится единственный приведенный по  $\text{mod } m$  кватернион, за исключением случаев:

а) если какой-либо приведенный по  $\text{mod } m$  кватернион  $b$  из данного класса не ассоциирован с  $\frac{m}{2}\alpha$ , где  $N(\alpha) = 2$ , и существу-

ют единицы  $\varepsilon \in Q$  такие, что  $\operatorname{Re} \varepsilon \bar{b} = -\frac{m}{2}$ , то множество приведенных по mod  $m$  кватернионов данного класса состоит из  $b$  и кватернионов  $-\varepsilon b$ ;

б) если  $b \simeq \frac{m}{2} \alpha$ , где  $N(\alpha) = 2$ , то, кроме перечисленных в пункте а), приведенными в данном классе являются также кватернионы  $\varepsilon b$  и  $\varepsilon \bar{b}$ .

Следствие вытекает из доказательства достаточности условий (1).

Следствие 2. Если  $b$  — приведенный по mod  $m$  кватернион, то

$$N(b) \leq \frac{m^2}{2}. \quad (2)$$

Знак равенства в (2) имеет место тогда и только тогда, если  $m \equiv 0 \pmod{2}$  и  $b \simeq \frac{m}{2} \alpha$ , где  $N(\alpha) = 2$ .

Доказательство. Если по крайней мере для трех коэффициентов  $|b_k| \leq \frac{m}{4}$ , то (2) очевидно. К этому же случаю легко прийти, если для трех коэффициентов  $\frac{m}{4} < |b_k| \leq \frac{m}{2}$ . Надо только для  $b + m\varepsilon$  соответствующим образом подобрать несобственно-целую единицу  $\varepsilon$ . Рассмотрим случай, когда лишь два коэффициента кватерниона  $b$  не превосходят по абсолютной величине  $\frac{m}{4}$ . Положим для определенности, не нарушая общности доказательства,  $|b_k| \leq \frac{m}{4}$  для  $k=0,1$  и  $\frac{m}{4} < |b_k| \leq \frac{m}{2}$  для  $k=2,3$ . Тогда в силу (1)

$$\begin{aligned} N(b) &= \sum_{k=0}^3 b_k^2 = b_0^2 + b_1^2 + \frac{m^2}{2} - |b_2| \left( \frac{m}{2} - |b_2| \right) - \\ &- |b_3| \left( \frac{m}{2} - |b_3| \right) - \frac{m}{2} (m - |b_2| - |b_3|) \leq b_0^2 + b_1^2 + \\ &+ \frac{m^2}{2} - |b_2| \left( \frac{m}{2} - |b_2| \right) - |b_3| \left( \frac{m}{2} - |b_3| \right) - \frac{m}{2} (|b_0| + \\ &+ |b_1|) = \frac{m^2}{2} - \sum_{k=0}^3 |b_k| \left( \frac{m}{2} - |b_k| \right) \leq \frac{m^2}{2}. \end{aligned}$$

Легко видеть, что знак равенства имеет место тогда и только тогда, когда  $b_0 = b_1 = 0$ ,  $|b_2| = |b_3| = \frac{m}{2}$ ,  $m \equiv 0 \pmod{2}$ .

**О п р е д е л е н и е.** *Бинарная  $Q$ -форма  $[a, b, c]$ , не представляющая нуль нетривиально, называется приведенной, если  $|a| \leq |c|$ , и  $b$  — приведенный по mod  $a$  кватернион.*

Из (2) вытекает, что для приведенной формы

$$2N(b) \leq a^2 \leq c^2. \quad (3)$$

**Теорема 1.** *Каждая бинарная  $Q$ -форма, не представляющая нуль нетривиально, эквивалентна приведенной форме\*.*

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Пусть бинарная  $Q$ -форма  $f_0 = [a_0, b_0, c_0]$  не представляет нуль нетривиально. Подвергнем форму  $f_0$  процедуре приведения, которая состоит в следующем. С помощью преобразования  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \beta_1 & 1 \end{pmatrix}$  переведем форму  $f_0$  в форму  $f_1 = [a_1, b_1, c_1] = [a_0, a_0\bar{\beta}_1 \pm b_0, c_1]$ . Элемент  $\beta_1 \in Q$  выберем так, чтобы кватернион  $b_1 = a_0\bar{\beta}_1 + b_0$  был приведенным по mod  $a_1$ . Если  $|a_1| \leq |c_1|$ , то процесс приведения заканчивается. В противном случае переводим форму  $f_1$  в форму  $f_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} f_1 = [a_2, b_2, c_2] = [c_1, \bar{b}_1, a_0]$ , а затем с помощью преобразования  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \beta_2 & 1 \end{pmatrix}$  в форму  $f_3 = [a_3, b_3, c_3]$  с приведенными по mod  $a_3$  коэффициентом  $b_3$  и т. д. Описанный процесс оборвется на некотором шаге, так как цепь неравенств  $|a_0| > |a_2| > |a_4| > \dots > 0$  не может быть бесконечной.

**С л е д с т в и е.** *Число классов эквивалентных бинарных  $Q$ -форм определителя  $\Delta \neq 0$  конечно.*

Для форм, не представляющих нуль нетривиально, это утверждение следует из соотношения

$$2N(b) \leq |ac| \leq 2\Delta, \quad (4)$$

справедливого для приведенных форм. Всякая форма, представляющая нуль нетривиально, очевидно, эквивалентна форме вида  $[0, b, c]$ , где  $N(b) = -\Delta \neq 0$ ,  $\text{Re } b \neq 0$ . Выберем  $n \in \mathbb{Z}$  так, чтобы форма  $[0, b, c_1] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n & 1 \end{pmatrix} [0, b, c] = [0, b, 2n \text{Re } b + c]$  подчинялась условию  $|c_1| < \text{Re } b \leq |\Delta|$ . Последнему, очевидно, может удовлетворять лишь конечное число форм вида  $[0, b, c]$ .

**Лемма 3\*\*.** *Матрица  $A = \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix}$  обратима над  $Q$  тогда и только тогда, когда*

$$N(\alpha\delta) + N(\gamma\beta) - 2 \text{Re } \bar{\beta}\alpha \bar{\delta}\gamma = 1. \quad (5)$$

Если  $A^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha' & \gamma' \\ \beta' & \delta' \end{pmatrix}$ , то

\* В [4] дано неполное доказательство теоремы 1.

\*\* Другим способом это утверждение доказано в [3].

$$\begin{aligned} \alpha' &= \bar{\alpha}N(\delta) - \bar{\beta}\delta\bar{\gamma}, \quad N(\alpha') = N(\delta); \quad \gamma' = \bar{\beta}N(\gamma) - \bar{\alpha}\gamma\bar{\delta}, \quad N(\gamma') = \\ &= N(\gamma); \quad \beta' = \bar{\gamma}N(\beta) - \bar{\delta}\beta\bar{\alpha}, \quad N(\beta') = N(\beta); \quad \delta' = \bar{\delta}N(\alpha) - \bar{\gamma}\alpha\bar{\beta}, \\ &N(\delta') = N(\alpha). \end{aligned} \quad (6)$$

**Доказательство.** Если  $A$  обратима над  $Q$ , то определитель бинарной  $Q$ -формы  $A$   $[1, 0, 1]$  равен единице, что равносильно (5). Наоборот, если для матрицы  $A$  над  $Q$  выполняется условие (5), то  $A$  имеет обратную, элементы которой определяются по формулам (6).

**Теорема 2.** Для того чтобы две положительные, приведенные бинарные  $Q$ -формы  $f = [a, b, c]$  и  $f' = [a', b', c']$  были эквивалентны, необходимо и достаточно, чтобы а)  $a = a', c = c', b \simeq b'$ , если  $a \neq c$  и  $b \neq b''$ , где  $\operatorname{Re} b'' = \frac{a}{2}$ ; б)  $a = a', c = c', b \simeq b'$  или  $b \simeq \bar{b}'$ , если  $a = c$  или  $b \simeq b''$ , где  $\operatorname{Re} b'' = \frac{a}{2}$ .

**Доказательство.** Достаточность условий теоремы немедленно вытекает из того, что  $[a, b, c] \simeq [a, b', c]$ , если  $b' \simeq b'$ , из  $[a, b, a] \simeq [a, b, a]$  и следствия 1 леммы 2.

Докажем необходимость условий теоремы. Пусть  $f' = Af$ , где  $A = \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix}$  — матрица, обратимая над  $Q$ , и  $A^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha' & \gamma' \\ \beta' & \delta' \end{pmatrix}$ . Положим для определенности  $0 < a' \leq a$ . Из равенства  $a' = f(\alpha, \gamma) = aN(\alpha) + 2\operatorname{Re} \alpha b \bar{\gamma} + cN(\gamma)$  в силу (3) и очевидного неравенства  $|\operatorname{Re} x| \leq \sqrt{N(x)}$  вытекает, что

$$\begin{aligned} a' &\geq aN(\alpha) - 2\sqrt{N(\alpha b \bar{\gamma})} + aN(\gamma) \geq \\ &\geq a[N(\alpha) - \sqrt{2N(\alpha\gamma)} + N(\gamma)] \geq a(2 - \sqrt{2})\sqrt{N(\alpha\gamma)}. \end{aligned} \quad (7)$$

Отсюда  $N(\alpha\gamma) \leq 2$ . Исследуем все возможные случаи. Если  $\alpha = 0$ , то  $N(\gamma\beta) = 1$ ,  $a' = c = a$  и  $b' \equiv \bar{\gamma}b\bar{\beta} \pmod{a}$ . Утверждение теоремы вытекает теперь из следствия 1 леммы 2. Аналогично этому, если  $\gamma = 0$ , то  $N(\alpha\delta) = 1$ ,  $a' = a$  и  $b' \equiv \alpha b \bar{\delta} \pmod{a}$ . Если  $N(\alpha\gamma) = 1$ , то  $\operatorname{Re} \alpha b \bar{\gamma} = \frac{1}{2}(a + c - a') \geq$

$\geq \frac{a}{2}$ , и, следовательно,  $a = a' = c$ . Домножив справа равенства  $a = a\alpha\bar{\alpha} + ab\bar{\gamma} + \gamma\bar{b}\bar{\alpha} + \gamma a \bar{\gamma}$ ;  $b' = a\alpha\bar{\beta} + \alpha b \bar{\delta} + \gamma\bar{b}\bar{\beta} + \gamma a \bar{\delta}$  соответственно на  $\bar{\alpha}'$  и  $\bar{\gamma}'$  и сложив их, получим  $a\bar{\alpha}' + b'\bar{\gamma}' = \gamma\bar{b} + a\alpha$ . Так как  $N(\gamma') = N(\gamma) = 1$  (см. лемму 3), утверждение теоремы и в этом случае вытекает из следствия 1 леммы 2. Если  $N(\alpha\gamma) = 2$ , то при некотором  $\omega \in Q$ ,  $N(\omega) = 2$  будет  $|\operatorname{Re} \omega b| = \left\{ \frac{1}{2}(2c + a - a') \text{ или } \frac{1}{2}(2a + c' - a') \right\}$ , а это, как

нетрудно проверить, влечет  $a' = a = c \equiv 0 \pmod{2}$  и  $b \cong b' \cong \frac{a}{2} (i_k + i_s)$ ,  $k \neq s$ .

**Следствие.** Для арифметического минимума положительной бинарной формы  $f$  определителя  $\Delta$  имеет место оценка  $\min f \leq \sqrt{2\Delta}$ . (8)

Следствие вытекает из теоремы 1, теоремы 2 и неравенства (4). Заметим, что оценка (8) точна. Равенство в (8) достигается на формах  $f = [a, \frac{a}{2}\omega, a]$ , где  $a \equiv 0 \pmod{2}$ ,  $N(\omega) = 2$ .

Теоремы 1 и 2 позволяют найти полную систему представителей классов эквивалентных положительных бинарных  $Q$ -форм для любого определителя\*. Ниже мы приводим таблицу неэквивалентных приведенных положительных бинарных  $Q$ -форм определителей  $\Delta \leq 21$ .

**Теорема 3.** Порядки групп автоморфизмов положительных бинарных  $Q$ -форм ограничены в совокупности.

**Доказательство.** Очевидно, без ограничения общности, можно рассматривать автоморфизмы только приведенных положительных бинарных  $Q$ -форм. Пусть  $T = \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix}$  — автоморфизм приведенной формы  $f = [a, b, c]$ . Из (7) при  $a' = a$  вытекает, что  $N(\alpha\gamma) \leq 2$ . Так как  $T^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha' & \gamma' \\ \beta' & \delta' \end{pmatrix}$  — также автоморфизм формы  $f$ , то  $N(\delta\gamma) = N(\alpha'\gamma') \leq 2$ . Из доказательства теоремы 2 следует, что  $a = c$ , если  $N(\alpha\gamma) = \{1 \text{ или } 2\}$ . В этом случае из соображений симметрии получаем  $N(\beta\delta) \leq 2$ . Пусть теперь  $\gamma = 0$  и, следовательно,  $N(\delta) = 1$ . Так как  $Tf = f$ , то  $c = aN(\beta) + 2\operatorname{Re} \beta\bar{\delta} + c$ , т. е.  $aN(\beta) = -2\operatorname{Re} \beta\bar{\delta}$ . Отсюда  $aN(\beta) \leq 2\sqrt{N(\beta b)} \leq a\sqrt{2N(\beta)}$ , или  $N(\beta) \leq 2$ .

Итак, нормы элементов матрицы любого автоморфизма положительной приведенной бинарной  $Q$ -формы не превосходят двух. Теорема тем самым доказана.

**Следствие.** Для положительной приведенной бинарной  $Q$ -формы возможны автоморфизмы лишь следующих видов:

$$\begin{array}{llll} \text{I. } \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix}; & \text{II. } \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon \\ \varepsilon & 0 \end{pmatrix}; & \text{III. } \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix}; & \text{IV. } \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 0 \end{pmatrix}; \\ \text{V. } \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix}; & \text{VI. } \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix}; & \text{VII. } \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix}; & \text{VIII. } \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ \omega & \varepsilon \end{pmatrix}; \end{array}$$

\* Эта задача значительно облегчается, если при отыскании представителей классов ассоциированных кватернионов использовать лемму 4 настоящей статьи и формулу для числа целых кватернионов заданной нормы [2]. В частности, с их помощью легко показать, что все целые кватернионы любой нормы, не превосходящей шести, ассоциированы.

Определи- тель	Система представителей классов	Число клас- сов
1	[1, 0, 1]	1
2	[1, 0, 2]; [2, 1 + $i_1$ , 2]	2
3	[1, 0, 3]; [2, 1, 2]	2
4	[1, 0, 4]; [2, 0, 2]; [2, 1 + $i_1$ , 3]	3
5	[1, 0, 5]; [2, 1, 3]	3
6	[1, 0, 6]; [2, 0, 3]; [2, 1 + $i_1$ , 4]; [3, 1 + $i_1$ + $i_2$ , 3]	4
7	[4, 0, 7]; [2, 1, 4]; [3, 1 + $i_1$ , 3]	3
8	[1, 0, 8]; [2, 0, 4] [2, 1 + $i_1$ , 5]; [3, 1, 3]; [4, 2 + 2 $i_1$ , 4]	5
9	[1, 0, 9]; [2, 1, 5]; [3, 0, 3]; [3, 1 + $i_1$ + $i_2$ , 4]	4
10	[1, 0, 10]; [2, 0, 5]; [2, 1 + $i_1$ , 6]; [3, 1 + $i_1$ , 4]; [4, 2 + $i_1$ + $i_2$ , 4]	5
11	[1, 0, 11]; [2, 1, 6]; [3, 1, 4]; [4, 2 + $i_1$ , 4]	4
12	[1, 0, 12]; [2, 0, 6]; [2, 1 + $i_1$ , 7]; [3, 0, 4]; [3, 1 + $i_1$ + $i_2$ , 5]; [4, 2, 4]; [4, 2 + 2 $i_1$ , 5]	7
13	[1, 0, 13]; [2, 1, 7]; [3, 1 + $i_1$ , 5]; [4, 1 + $i_1$ + $i_2$ , 4]	4
14	[1, 0, 14]; [2, 0, 7]; [2, 1 + $i_1$ , 8]; [3, 1, 5]; [4, 1 + $i_1$ , 4]; [4, 2 + $i_1$ + $i_2$ , 5]	6
15	[1, 0, 15]; [2, 1, 8]; [3, 0, 5]; [3, 1 + $i_1$ + $i_2$ , 6]; [4, 1, 4]; [4, 2 + $i_1$ , 5]	6
16	[1, 0, 16]; [2, 0, 8]; [2, 1 + $i_1$ , 9]; [3, 1 + $i_1$ , 6]; [4, 0, 4]; [4, 2, 5]; [4, 2 + 2 $i_1$ , 6]; [5, 2 + 2 $i_1$ + $i_2$ , 5]	8
17	[1, 0, 17]; [2, 1, 9]; [3, 1, 6]; [4, 1 + $i_1$ + $i_2$ , 5] [5, 2 + 2 $i_1$ , 5]	5
18	[1, 0, 18]; [2, 0, 9]; [2, 1 + $i_1$ , 10]; [3, 0, 6]; [3, 1 + $i_1$ + $i_2$ , 7]; [4, 1 + $i_1$ , 5]; [4, 2 + $i_1$ + $i_2$ , 6]; [5, 2 + $i_1$ + $i_2$ + $i_3$ , 5]; [6, 3 + 3 $i_1$ , 6]	9
19	[1, 0, 19]; [2, 1, 10]; [3, 1 + $i_1$ , 7]; [4, 1, 5]; [4, 2 + $i_1$ , 6]; [5, 2 + $i_1$ + $i_2$ , 5]	6
20	[1, 0, 20]; [2, 0, 10]; [2, 1 + $i_1$ , 11]; [3, 1, 7]; [4, 0, 5]; [4, 2, 6]; [4, 2 + 2 $i_1$ , 7]; [5, 2 + $i_1$ , 5]	8
21	[1, 0, 21]; [2, 1, 11]; [3, 0, 7]; [3, 1 + $i_1$ + $i_2$ , 8]; [4, 1 + $i_1$ + $i_2$ , 6]; [5, 2, 5]; [5, 2 + 2 $i_1$ + $i_2$ , 6]	7

$$\text{IX.} \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon \\ \varepsilon & \omega \end{pmatrix}; \text{ X.} \begin{pmatrix} \omega & \varepsilon \\ \varepsilon & 0 \end{pmatrix}; \text{ XI.} \begin{pmatrix} \varepsilon & \omega \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix}; \text{ XII.} \begin{pmatrix} \varepsilon & \omega \\ \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix}; \quad (9)$$

$$\text{XIII.} \begin{pmatrix} \omega & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix}; \text{ XIV.} \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \omega \end{pmatrix}; \text{ XV.} \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon \\ \omega & \varepsilon \end{pmatrix}; \text{ XVI.} \begin{pmatrix} \varepsilon & \omega \\ \omega & \varepsilon \end{pmatrix};$$

XVII.  $\begin{pmatrix} \omega & \varepsilon \\ \varepsilon & \omega \end{pmatrix}$ , где  $\varepsilon$  — общее обозначение для всех единиц кольца  $Q$ , а  $\omega$  — для всех элементов из  $Q$ -нормы, равной двум.

**Лемма 4.** Число решений уравнения

$$b = xby, \quad b \in Q$$

в единицах  $x, y$  кольца  $Q$  равно а) 576, если  $b=0$ ; б) 24, если  $b \simeq b_0, b_0 \in \mathbb{Z}, b_0 \neq 0$ ; в) 24, если  $b \simeq b_0(1+i_1), b_0 \neq 0$ ; г) 4, если  $b \simeq b_0 + b_k i_k, 1 \leq k \leq 3, b_0, b_k \neq 0, |b_0| \neq |b_k|$ ; д) 6, если  $b \simeq b_1 i_1 + b_2 i_2 + b_3 i_3, b_k \neq 0, k=1, 2, 3$  и  $b_1 \pm b_2 \pm b_3 = 0$  при некотором наборе знаков; е) 6, если  $b \simeq b_0 + b_1(i_1 \pm i_2 \pm i_3), b_1 \neq 0, |b_0| \neq |b_1|$ ; ж) 2 во всех остальных случаях.

**Доказательство.** Случаи а–в очевидны. Пусть  $b \neq 0$ ,

$$b = \sum_{k=0}^3 b_k i_k, \quad x = \sum_{k=0}^3 x_k i_k, \quad y = \sum_{k=0}^3 y_k i_k, \quad p = x_0 - y_0, \quad q = x_1 - y_1, \\ -y_1, \quad r = x_2 - y_2, \quad s = x_3 - y_3, \quad t = x_0 + y_0, \quad u = x_1 + y_1, \quad v = x_2 + y_2, \quad w = x_3 + y_3.$$

Легко проверить, что уравнение (9) равносильно системе уравнений

$$\begin{cases} pb_0 + qb_1 + rb_2 + sb_3 = 0; & qb_0 + pb_1 - wb_2 + vb_3 = 0; & rb_0 + \\ + wb_1 + pb_2 - ub_3 = 0; & sb_0 - vb_1 + ub_2 + pb_3 = 0. \end{cases} \quad (10)$$

Так как уравнение (9) при любом  $b \in Q$  имеет по крайней мере два решения  $x=y=\pm 1$ , то определитель  $d$  системы (10), если рассматривать  $b_k$  как неизвестные, должен равняться нулю:  $d = p^2(p^2 + q^2 + r^2 + s^2 + u^2 + v^2 + w^2) + 2(qsuw + qruv + rsvw) = 0$ . Отсюда ввиду  $qsu = qru = rsv = 0$  вытекает, что  $p=0$ . Следовательно,  $x$  и  $y$  суть одновременно собственно-целые либо несобственно-целые единицы кольца  $Q$ . Утверждения леммы теперь легко проверить непосредственно.

**Лемма 5.** Число решений уравнения

$$b = xby, \quad b \in Q, \quad (11)$$

в единицах  $x, y$  кольца  $Q$  равно а) 576, если  $b=0$ ; б) 24, если  $b \simeq b_0, b_0 \in \mathbb{Z}, b_0 \neq 0$ ; в) 24, если  $b \simeq b_0(1+i_1), b_0 \neq 0$ ; г) четырем, если  $b \simeq b_0 + b_k i_k, 1 \leq k \leq 3, b_0, b_k \neq 0, |b_0| \neq |b_k|$ ; д) шести, если  $b \simeq b_1 i_1 + b_2 i_2 + b_3 i_3, b_k \neq 0, k=1, 2, 3, u \pm b_1 \pm b_2 \pm b_3 = 0$  при некотором наборе знаков; е) шести, если  $b \simeq b_1(i_1 \pm i_2 \pm i_3), b_1 \neq 0$ ; ж) двум, если  $b \simeq b_1 i_1 + b_2 i_2 + b_3 i_3,$

$b_k \neq 0, k=1, 2, 3$ , не все  $|b_k|$  равны между собой и  $\pm b_1 \pm b_2 \pm \pm b_3 \neq 0$  ни при каком наборе знаков; 3) нулю во всех остальных случаях.

Доказательство. Уравнение (11) равносильно системе уравнений (в обозначениях леммы 4):

$$pb_0 + ub_1 + vb_2 + wb_3 = 0; qb_0 - tb_1 + sb_2 - rb_3 = 0; rb_0 - sb_1 - -tb_2 + qb_3 = 0; sb_0 + rb_1 - qb_2 - tb_3 = 0. \quad (12)$$

Пусть  $b_k \neq 0, k=0, \dots, 3$ . Нетрудно проверить, что система (12) в этом случае имеет решение (в допустимой области значений неизвестных  $p, \dots, w$ ) лишь тогда, когда при некотором наборе знаков  $\pm b_0 \pm b_1 \pm b_2 \pm b_3 = 0$ , т. е.  $b \simeq b', Reb' = 0$ . Следовательно, не теряя в общности, можно положить с самого начала  $Reb = 0$ . Но тогда  $\bar{b} = -b$  и уравнение (11) сводится к уравнению вида (9).

**Лемма 6.** Число решений уравнения

$$Rexb = b_0, b \in Q, b_0 \in Z, b, b_0 \neq 0 \quad (13)$$

в единицах кольца  $Q$  равно а) 6, если  $b \simeq b_0(1 + i_1)$ ; б) 3, если  $b \simeq b_0 + b_r i_r + b_s i_s, 0 < r < s \leq 3$  и  $|b_r| + |b_s| = |b_0|$ ; в) 2, если

$$b = \sum_{k=0}^3 b_k i_k, b_k \neq 0, \sum_{k=1}^3 |b_k| = |b_0|; г) 1, если  $b \simeq \sum_{k=0}^3 b_k i_k,$$$

$\sum_{k=1}^3 |b_k| \neq |b_0|$ ; д) нулю во всех остальных случаях.

Лемма легко проверяется непосредственно.

Заметим, что решения уравнений (9), (11) и (13) легко конструируются, и поэтому их выражения в явном виде мы опускаем.

**Теорема 4.** Порядок группы автоморфизмов положительной приведенной бинарной  $Q$ -формы  $[a, b, c]$  равен 1)  $576(1)^*$ , если  $b = 0, a \neq c$ ; 2)  $576(1) + 576(II) = 1152$ , если  $b = 0, a = c$ ;

3)  $24(1)$ , если  $b \simeq b' \in Z, 0 \neq |b'| \neq \frac{a}{2}, a \neq c$ ; 4)  $24(1) + 24(II) = 48$ , если  $b \simeq b' \in Z, 0 \neq |b'| \neq \frac{a}{2}, a = c$ ;

5)  $24(1) + 24(II) = 48$ , если  $b \simeq \frac{a}{2}, a \equiv 0 \pmod{2}, a \neq c$ ; 6)  $24(1) + 24(II) + 24(III) + 24(IV) + 24(V) + 24(VI) = 144$ , если  $b \simeq \frac{a}{2}, a \equiv 0 \pmod{2}, a = c$ ; 7)  $4(1)$ , если  $b \simeq b_0 + b_k i_k, 1 \leq$

\* Римские цифры в скобках указывают вид автоморфизмов.

$\leq k \leq 3, 0 \neq |b_0|, |b_k| \neq \frac{a}{2}, |b_0| \neq |b_k|, |b_0| + |b_k| \neq a, a \neq c; 8) 4(I) + 4(II) = 8$ , если  $b \simeq b_0 + b_k i_k, 1 \leq k \leq 3, 0 \neq |b_0|, |b_k| \neq \frac{a}{2}, |b_0| \neq |b_k|, |b_0| + |b_k| \neq a, a = c; 9) 24(I)$ , если  $b \simeq b_0(1 + i_1), 0 \neq |b_0| \neq \frac{a}{2}, a \neq c; 10) 24(I) + 24(II) = 48$ , если  $b \simeq b_0(1 + i_1), 0 \neq |b_0| \neq \frac{a}{2}, a = c; 11) 4(I) + 4(II) = 8$ , если  $b \simeq \frac{a}{2} + b_k i_k, 1 \leq k \leq 3, a \equiv 0 \pmod{2}, 0 \neq |b_k| \neq \frac{a}{2}, a \neq c; 12) 4(I) + 4(II) + 4(III) + 4(IV) + 4(V) + 4(VI) = 24$ , если  $b \simeq \frac{a}{2} + b_k i_k, 1 \leq k \leq 3, a \equiv 0 \pmod{2}, 0 \neq |b_k| \neq \frac{a}{2}, a = c; 13) 24(I) + 144(V) + 24(VIII) = 192$ , если  $b \simeq \frac{a}{2}(1 + i_1), a \equiv 0 \pmod{2}, a \neq c; 14) 24(I) + 24(II) + (144)(III) + 144(IV) + 144(V) + 144(VI) + 576(VII) + 24(VIII) + 24(IX) + 24(X) + 24(XI) + 144(XII) + 144(XIII) + 144(XIV) + 144(XV) + 24(XVI) + 24(XVII) = 1920$ , если  $b = \frac{a}{2}(1 + i_1), a \equiv 0 \pmod{2}, a = c; 15) 2(I) + 2(II) = 4$ , если  $b \simeq b_0 + b_1 i_1 + b_2 i_2, a = c, 0 \neq |b_0|, |b_1|, |b_2| \neq \frac{a}{2}, |b_0| + |b_1| + |b_2| \neq a, b_0 \pm b_1 \pm b_2 \neq 0$  ни при каком наборе знаков, и не все  $|b_k|$  равны между собой; 16)  $6(I)$ , если  $b \simeq b_0 + b_1 i_1 + b_2 i_2, 0 \neq |b_0|, |b_1|, |b_2| \neq \frac{a}{2}, |b_0| + |b_1| + |b_2| \neq a, b_0 \pm b_1 \pm b_2 = 0$  при некотором наборе знаков, и  $a \neq c; 17) 6(I) + 6(II) = 12$ , если  $b \simeq b_0 + b_1 i_1 + b_2 i_2, 0 \neq |b_0|, |b_1|, |b_2| \neq \frac{a}{2}, |b_0| + |b_1| + |b_2| \neq a, b_0 \pm b_1 \pm b_2 = 0$  при некотором наборе знаков, и  $a = c; 18) 6(I)$ , если  $b \simeq b_0(1 \pm i_1 \pm i_2), 0 \neq |b_0| \neq \frac{a}{3}, a \neq c; 19) 6(I) + 6(II) = 12$ , если  $b \simeq b_0(1 \pm i_1 \pm i_2), 0 \neq |b_0| \neq \frac{a}{3}, a = c; 20) 6(I) + 12(V) = 18$ , если  $b \simeq \frac{a}{3}(1 \pm i_1 \pm i_2), a \equiv 0 \pmod{3}, a \neq c; 21) 6(I) + 6(II) + 12(III) + 12(IV) + 12(V) + 12(VI) + 12(VII) = 72$ , если  $b \simeq \frac{a}{3}(1 \pm i_1 \pm i_2), a \equiv 0 \pmod{3}, a = c; 22) 2(I) + 2(V) = 4$ , если

$b \simeq \frac{a}{2} + b_r i_r + b_s i_s, 1 \leq r < s \leq 3, a \equiv 0 \pmod{2}, b_r, b_s \neq 0, |b_r| + |b_s| \neq \frac{a}{2}, a \neq c$ ; 23)  $2(I) + 2(II) + 2(III) + 2(IV) + 2(V) + 2(VI) = 12$ , если  $b \simeq \frac{a}{2} + b_r i_r + b_s i_s, 1 \leq r < s \leq 3, a \equiv 0 \pmod{2}, b_r, b_s \neq 0, |b_r| + |b_s| \neq \frac{a}{2}, a = c$ ; 24)  $6(I) + 18(V) = 24$ , если  $b \simeq \frac{a}{2} + b_r i_r + b_s i_s, 1 \leq r \leq s \leq 3, a \equiv 0 \pmod{2}, b_r, b_s \neq 0, |b_r| + |b_s| = \frac{a}{2}, a \neq c$ ; 25)  $6(I) + 6(II) + 18(III) + 18(IV) + 18(V) + 18(VI) + 36(VII) = 120$ , если  $b \simeq \frac{a}{2} + b_r i_r + b_s i_s, 1 \leq r < s \leq 3, a \equiv 0 \pmod{2}, b_r, b_s \neq 0, |b_r| + |b_s| = \frac{a}{2}, a = c$ ; 26)  $2(I) + 4(V) = 6$ , если  $b \simeq b_0 + b_1 i_1 + b_2 i_2, |b_0| + |b_1| + |b_2| = a, 0 \neq |b_0|, |b_1|, |b_2| \neq \frac{a}{2}, b_0 \pm b_1 \pm b_2 \neq 0$  ни при каком наборе знаков, не все  $|b_k|$  равны между собой, и  $a \neq c$ ; 27)  $2(I) + 2(II) + 4(III) + 4(IV) + 4(V) + 4(VI) + 4(VII) = 24$ , если  $b \simeq b_0 + b_1 i_1 + b_2 i_2, 0 \neq |b_0|, |b_1|, |b_2| \neq \frac{a}{2}, |b_0| + |b_1| + |b_2| = a, b_0 \pm b_1 \pm b_2 \neq 0$  ни при каком наборе знаков, не все  $|b_k|$  равны между собой, и  $a = c$ ; 28)  $6(I)$ , если  $b \simeq b_0 + b_1(i_1 \pm i_2 \pm i_3), 0 \neq |b_0|, |b_1| \neq \frac{a}{2}, |b_0| \neq |b_1|, |b_0| \neq 3|b_1|, |b_0| + 3|b_1| \neq a$ ; 29)  $2(I) + 2(III) + 2(IV) = 6$ , если  $b \simeq \frac{a}{2} + b_1 i_1 + b_2 i_2 + b_3 i_3, b_k \neq 0, k = 1, 2, 3, |b_1| + |b_2| + |b_3| \neq \frac{a}{2}$ , не все  $|b_k|$  равны между собой, и  $a = c$ ; 30)  $6(I)$ , если  $b \simeq \frac{a}{2} + b_1(i_1 \pm i_2 \pm i_3), 0 \neq |b_1| \neq \frac{a}{2}, a \neq c$ ; 31)  $6(I) + 6(III) + 6(IV) = 18$ , если  $b \simeq \frac{a}{2} + b_1(i_1 \pm i_2 \pm i_3), 0 \neq |b_1| \neq \frac{a}{2}, a = c$ ; 32)  $2(I)$  во всех остальных случаях.

Доказательство. Два автоморфизма:  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  и  $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

вида I, очевидно, имеет любая форма. Можно показать (см. доказательство теоремы 3), что положительная приведенная бинарная  $Q$ -форма  $f=[a, b, c]$  может иметь автоморфизмы видов II, III, IV, VI и VII лишь в том случае, если  $a=c$ , автоморфизмы вида VIII, если  $b \simeq a/2(1+i_1)$ ,  $a \equiv 0 \pmod{2}$ , и автоморфизмы видов IX—XVII, если  $a=c \equiv 0 \pmod{2}$ ,  $b \simeq a/2(1+i_1)$ . Условие  $Tf=f$  для автоморфизма  $T$  вида I приводит к уравнению (9). Легко установить взаимно-однозначное соответствие между решениями уравнения (9) и автоморфизмами вида I. Число решений уравнения (9), а следовательно, и число автоморфизмов вида I, указано в лемме 4. Подобным же образом устанавливается взаимно-однозначное соответствие между автоморфизмами вида II и решениями уравнения (11). Информация о числе автоморфизмов вида II содержится в лемме 5. Условие  $Tf=f$  для автоморфизмов вида III приводит к уравнениям (9) и (13), и число автоморфизмов этого вида оказывается равным произведению чисел решений этих уравнений, указанных в леммах 4 и 6. Автоморфизмы вида IV обратны автоморфизмам вида III. Автоморфизмы видов V и VI связаны с решениями уравнений (10) и (13). Число автоморфизмов каждого из этих видов равно произведению чисел решений этих уравнений. Более подробно остановимся на изучении автоморфизмов вида VIII. Пусть  $T = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \varepsilon_4 \end{pmatrix}$ ,  $N(\varepsilon_k) = 1$ ,  $k=1, \dots, 4$ . Условие  $Tf=f$  в этом случае равносильно системе равенств

$$\operatorname{Re} \varepsilon_1 \bar{b} \varepsilon_2 = -\frac{a}{2}; \quad (14)$$

$$\operatorname{Re} \varepsilon_3 \bar{b} \varepsilon_4 = -\frac{a}{2}; \quad (15)$$

$$b = \varepsilon_1 a \bar{\varepsilon}_3 + \varepsilon_1 b \bar{\varepsilon}_4 + \varepsilon_2 \bar{b} \varepsilon_3 + \varepsilon_2 a \bar{\varepsilon}_4. \quad (16)$$

Кроме того, автоморфизм  $T$  подчиняется условию обратимости (5), которое для данного случая принимает вид

$$\operatorname{Re} \varepsilon_1 \bar{\varepsilon}_3 \varepsilon_4 \bar{\varepsilon}_2 = \frac{1}{2}. \quad (17)$$

В силу (17) единицы  $\bar{\varepsilon}_3 \varepsilon_1$  и  $\bar{\varepsilon}_4 \varepsilon_2$  не могут быть одновременно собственно целыми, и поэтому из (14) или из (15) вытекает, что

$$\sum_{k=0}^3 |b_k| = a. \text{ Вычитая (15) из (14), получаем } \operatorname{Re} (\bar{\varepsilon}_2 \varepsilon_1 - \bar{\varepsilon}_4 \varepsilon_3) b =$$

$= 0$ , причем  $N(\bar{\varepsilon}_2 \varepsilon_1 - \bar{\varepsilon}_4 \varepsilon_3) = 1$ . Таким образом,  $b \simeq b'$ , где

$$\operatorname{Re} b' = 0, \text{ и } b \simeq b'', \text{ где } \operatorname{Re} b'' = \frac{a}{2}, \text{ и } \sum_{k=0}^3 |b_k| = a. \text{ Нетрудно те-}$$

перь показать, что любой автоморфизм формы  $f$  вида  $\begin{pmatrix} \varepsilon\eta \\ \varepsilon\varepsilon \end{pmatrix}$ , где  $\varepsilon$  — общее обозначение для всех единиц кольца  $Q$ , а  $\eta$  — общее обозначение для элементов из  $Q$  нормы, равной 0, 1 или 2, можно единственным образом представить в виде произведения двух автоморфизмов вида  $\begin{pmatrix} \varepsilon\varepsilon \\ 0\varepsilon \end{pmatrix}$  и  $\begin{pmatrix} 0-x \\ x & 1 \end{pmatrix}$ , где  $x \in Q$  — решение уравнения (13). Число таких автоморфизмов, очевидно, равно произведению числа автоморфизмов вида VI и числа решений уравнения (13). Таким образом, количество автоморфизмов вида VII равно разности между числом всех автоморфизмов формы  $f$  вида  $\begin{pmatrix} \varepsilon\eta \\ \varepsilon\varepsilon \end{pmatrix}$  и числом автоморфизмов видов V и XII. Автоморфизмы видов VIII—XVII строятся непосредственно. Ввиду громоздкости выкладки мы опускаем.

Перебор различных вариантов форм и их автоморфизмов приводит к формулировке теоремы 4.

Заметим, что при доказательстве теоремы 4 устанавливается не только число автоморфизмов того или иного вида, но и способ их построения. Автором сконструированы группы автоморфизмов всех указанных в теореме типов и дано их описание с помощью определяющих соотношений.

Пусть  $t_f$  — порядок группы автоморфизмов формы  $f$ ,  $A, B, C, D$  — образующие групп автоморфизмов,  $\varepsilon = 1/2(1 + i_1 + i_2 + i_3)$ .

В случае 32 теоремы  $4 t_f = 2$ ; определяющее соотношение группы автоморфизмов:  $A^2 = 1$ ; матричное представление:  $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ .

В случаях 7, 15 и 22 имеем  $t_f = 4$ ,  $A^4 = 1$ ; одно из возможных матричных представлений:  $A = \begin{pmatrix} i_1 & 0 \\ 1 & -i_1 \end{pmatrix}$ ; оно реализуется, например, для формы  $f = [6, 3i_1 + i_2 + i_3, 7]$ .

В случаях 16, 18, 26, 28, 29 и 30  $t_f = 6$ ;  $A^6 = 1$ ;  $A = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix}$ ;  $f = [8, 2 + i_1 + i_2 + i_3, 8]$ .

В случаях 8, 11  $t_f = 8$ ;  $A^4 = 1$ ,  $A^2 = B^2$ ,  $AB = B^3A$  (группа кватернионов);  $A = \begin{pmatrix} i_3 & 0 \\ i_3 & -i_3 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} i_1 & 0 \\ 0 & i_1 \end{pmatrix}$ ;  $f = [4, 2 + i_1, 5]$ .

В случаях 17, 23  $t_f = 12$ ;  $A^4 = B^3 = 1$ ,  $AB = B^2A$ ;  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 0 & -i_1 \\ -i_1 & -1 \end{pmatrix}$ ;  $f = [6, 3i_1 + i_2 + i_3, 6]$ .

В случае 19 имеем  $t_f = 12$ ;  $A^{12} = 1$ ;  $A = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon \\ \varepsilon & 0 \end{pmatrix}$ ;  $f = [4, i_1 + i_2 + i_3, 4]$ .

В случаях 20, 31 имеем  $t_f = 18$ ;  $A^6 = B^3 = 1$ ,  $AB = BA$ ;  $A = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} -\varepsilon & 0 \\ 1 & -\varepsilon \end{pmatrix}$ ;  $f = [3, i_1 + i_2 + i_3, 4]$ .

В случаях 3, 9, 24, 27 имеем  $t_f = 24$ ;  $A^4 = (AB)^3 = 1$ ;  $A^2 = B^3$  (группа кватернионных единиц);  $A = \begin{pmatrix} -i_1 \varepsilon i_1 & 0 \\ 0 & -i_1 \varepsilon i_1 \end{pmatrix}$ ,  
 $B = \begin{pmatrix} -i_1 & 0 \\ -1 & i_1 \end{pmatrix}$ ;  $f = [4, 2i_1 + i_2 + i_3, 5]$ .

В случае 12  $t_f = 24$ ;  $A^{12} = 1$ ,  $A^6 = B^2$ ,  $AB = B^3A$ ;  $A = \begin{pmatrix} i_1 & -i_1 \\ i_1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 0 & i_3 \\ i_3 & 0 \end{pmatrix}$ ;  $f = [4, 2 + i_1, 4]$ .

В случаях 4 и 5  $t_f = 48$ ;  $A^4 = (AB)^3 = C^2 = 1$ ,  $B^3 = A^2$ ,  $AC = CA$ ,  $BC = CB$ ;  $A = \begin{pmatrix} i_1 & 0 \\ 0 & i_1 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix}$ ,  $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ ;  $f = [2, 1, 3]$ .

В случае 10  $t_f = 48$ ;  $A^4 = 1$ ,  $B^4 = A^2$ ,  $BAB = AB^3A$ ;  $A = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon i_1 \\ i_1 \varepsilon & 0 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -i_1 & 0 \end{pmatrix}$ ;  $f = [3, 1 + i_1, 3]$ .

В случае 21  $t_f = 72$ ;  $A^{12} = B^3 = (AB)^3 = 1$ ,  $A^2B = BA^2$ ;  $A = \begin{pmatrix} 0 & -\varepsilon \\ \varepsilon & 0 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix}$ ;  $f = [3, i_1 + i_2 + i_3, 3]$ .

В случае 25  $t_f = 120$ ;  $A^6 = 1$ ,  $B^3 = A^3$ ,  $A^{\alpha_1} B^{\alpha_2} A^{\alpha_3} B^{\alpha_4} = B^{6-\alpha_4} \times$   
 $\times A^{3-\alpha_3} B^{3-\alpha_2} A^{3-\alpha_1}$ ,  $0 < \alpha_k < 3$ ,  $k = 1, \dots, 4$ ,  $\sum_{k=1}^4 \alpha_k \equiv (\text{mod } 2)$ ;

$A = \begin{pmatrix} 0 & -\varepsilon \\ \varepsilon & 1 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} -i_1 \varepsilon i_1 & 0 \\ 0 & -i_1 \varepsilon i_1 \end{pmatrix}$ ;  $f = [4, 2i_1 + i_2 + i_3, 4]$ .

В случае 6  $t_f = 144$ ;  $A^4 = (AB)^6 = 1$ ,  $B^3 = A^2$ ,  $AB^\alpha AB^\alpha AB^\beta \times$   
 $\times AB^\beta = B^\alpha AB^\alpha AB^\beta AB^\beta A$ ,  $AB^{\alpha_1} AB^{\alpha_2} AB^{\beta_1} AB^{\beta_2} = B^{\beta_2} AB^{\beta_1} AB^{\alpha_2} AB^{\alpha_1} A$ ,

$0 < \alpha, \beta, \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 < 3$ ,  $\alpha_1 \neq \alpha_2$  или  $\beta_1 \neq \beta_2$ ;  $A = \begin{pmatrix} i_1 & 0 \\ i_1 & -i_1 \end{pmatrix}$ ,  
 $B = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon \\ -\varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix}$ ;  $f = [2, 1, 2]$ .

В случае 13 имеем  $t_f = 192$ ;  $A^4 = B^6 = (AB)^3 = (AC)^3 = 1$ ,  
 $A^2B = BA^2$ ,  $B^3A = AB^3$ ,  $C^3 = A^2$ ,  $C^2B = B^2C$ ,  $CB^2 = BC^2$ ,  $C^2AC =$   
 $= B^2AB$ ,  $CAC^2 = BA^3B^5$ ;  $A = \begin{pmatrix} i_1 & 0 \\ 0 & i_1 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ -\varepsilon i_1 \varepsilon & \varepsilon i_1 \varepsilon \end{pmatrix}$ ,  $C =$   
 $= \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & i_1 \varepsilon \end{pmatrix}$ ;  $f = [2, 1 + i_1, 3]$ .

В случае 1  $t_f=576$  и группа автоморфизмов изоморфна прямо-му произведению двух групп кватернионных единиц; элемен-ты группы имеют вид  $\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix}$ , где  $x, y$  — произвольные единицы кольца  $Q$ .

В случае 2  $t_f=1152$  и группа автоморфизмов изоморфна пря-мому произведению двух групп кватернионных единиц и цикли-ческой группы второго порядка; элементы группы имеют вид  $\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^\alpha$ , где  $\alpha=1, 2, x, y$  — единицы кольца  $Q$ .

В случае 14  $t_f=1920$ ;  $A^4=B^6=(AB)^3=(AC)^3=(B^2D)^5=1$ ,  $A^2B=BA^2$ ,  $B^3A=AB^3$ ,  $C^3=(BD)^5=A^2$ ,  $C^2B=B^2C$ ,  $CB^2=BC^2$ ,  $C^2AC=B^2AB$ ,  $CAC^2=BA^3B^5$ ,  $D^2=A$ ,  $DC=C^2D^7$ ,  $B^3D=DB^3$ ;  $A = \begin{pmatrix} i_1 & 0 \\ 0 & i_1 \end{pmatrix}$ ,

$$B = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ -\varepsilon i_1 \varepsilon & \varepsilon i_1 \varepsilon \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & i_1 \varepsilon \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 0 & i_1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; f = [2, 1 + i_1, 2].$$

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Hurwitz A. Über die Zahlentheorie der Quaternionen, Götting. Nachr., math. — «Phys. Kl.», 1896, S. 313—340.
2. Венков Б. А. Об арифметике кватернионов. — «Изв. АН СССР», 1922, т. 16, с. 205—220, 221—246.
3. Speiser A. Über die Minima Hermitescher Formen. — «Jour. für die reine und ang. Math.», 1932, Bd. 167, S. 88—97.
4. Пронин Л. Н. О целочисленных бинарных эрмитовых формах над телом кватернионов. — «Вестн. Харьк. ун-та. Сер. мех.-мат.», 1967, т. 33, с. 27—41.

Поступила 19.XI 1975 г.

## РЕФЕРАТЫ

УДК 62—501.72:57

Об адаптивном управлении марковскими процессами. Баранов В. В. «Вестн. Харьк. ун-та. Прикладная математика и механика», 1978, вып. 43, с. 3—14.

Рассматривается задача об управлении марковским процессом с дискретным временем в предположении, что переходная функция априори не задана. Это приводит к задаче адаптивного управления, которая в свою очередь состоит из трех задач: идентификации, адаптивного синтеза оптимальной стратегии и оптимальной остановки процесса идентификации. В работе рассмотрены последние две задачи. Список лит.: 2 назв.

УДК 62—503.4

Об одном методе в статистике случайных процессов. Баранов В. В. «Вестн. Харьк. ун-та. Прикладная математика и механика», 1978, вып. 43, с. 14—21.

Рассматривается задача последовательной оценки неизвестного параметра переходной функции марковского процесса. Предложен метод оценивания, основанный на использовании суммарной условной дисперсии. Метод обеспечивает несмещенность и сильную состоятельность последовательности оценок и сводится к простым рекуррентным соотношениям. Список лит.: 4 назв.

УДК 517.934.1

Управляемость нелинейных систем с затухающими возмущениями. Нгуен Хоа Шон. «Вестн. Харьк. ун-та. Прикладная математика и механика», 1978, вып. 43, с. 21—34.

Рассматривается управляемая система с нелинейным возмущением в  $R_n$ :  $dx/dt = Ax + \varphi(u) + g(t, x, u)$ ,  $u \in \Omega \in R_r$ .

На множество  $\Omega$  накладывается единственное ограничение: существует такой вектор  $u_0 \in \Omega$ , что  $\varphi(u_0) = 0$ ,  $g(t, x, u_0) = 0$ . Список лит.: 10 назв.

УДК 517.934

Управляемость нелинейных систем при наличии ограничений на управление. Коробов В. И., Маринич А. П., Подольский Е. Н. «Вестн. Харьк. ун-та. Прикладная математика и механика», 1978, вып. 43, с. 34—37.

Статья посвящена обобщению результатов предыдущей работы авторов (РЖМат., 1976, 4Б 585). В данной работе приводится достаточное условие локальной нуль управляемости системы вида  $dx/dt = f(x, u)$ ,  $x \in R_n$ ,  $u \in \Omega \in R_r$  ( $\exists u_0 \in \Omega: f(0, u_0) = 0$ ). Список лит.: 5 назв.

УДК 519.3:62—50

Некоторые свойства линейных управляемых уравнений в бесконечномерных пространствах. Приходько А. П., Рабах Р. «Вестн. Харьк. ун-та. Прикладная математика и механика», 1978, вып. 43, с. 37—43.

Получен критерий точной управляемости уравнений вида  $dx/dt = A(t)x + B(t)u$  в случае, когда операторы  $A(t)$  неограничены.

Обобщено условие отсутствия точной управляемости для данного уравнения. Дается достаточное условие локальной достижимости и управляемости. Список лит.: 6 назв.

УДК 519.3:62—50

О точной управляемости и стабилизации в бесконечномерных пространствах. Рабах Р. «Вестн. Харьк. ун-та. Прикладная математика и механика», 1978, вып. 43, с. 43—50.

Для систем вида  $dx/dt = Ax + Bu$ , рассматриваемых в банаховом пространстве, получен критерий точной управляемости в терминах операторов  $B^*A^k$ ,  $k=0, 1, 2, \dots$ , который обобщается на случай неавтономной системы с аналитическими оператор-функциями  $A(t)$  и  $B(t)$ . Список лит.: 6 назв.

УДК 51:65.012.122

Аксиоматическое построение математической модели восстановления. Босов А. А. «Вестн. Харьк. ун-та. Прикладная математика и механика», 1978, вып. 43, с. 50—55.



Исходя из понятия элементарной технологической операции ремонта (восстановления) предлагается аксиоматическое определение математической модели ремонта (восстановления), которое охватывает значительный круг моделей профилактик и, в частности, содержит модель полного восстановления. Список лит.: 7 назв.

УДК 517.928+517.928

**Обоснование кинематической модели автомата вождения.** Синяков В. А. «Вестн. Харьк. ун-та. Прикладная математика и механика», 1978, вып. 43, с. 56—61.

Исследуется общий случай произвольного управляемого движения самоходной машины, близкого к прямолинейному. Существенным элементом построенной математической модели является система двух дифференциальных уравнений с малым параметром при старшей производной, полученная при некоторых предположениях. Список лит.: 6 назв. Ил. 1.

УДК 519.1:61—539.2

**Связь геометрии и устойчивости дискретных структур.** Чернявский А. Г. «Вестн. Харьк. ун-та. Прикладная математика и механика», 1978, вып. 43, с. 61—69.

Получено представление матрицы Ф силовых постоянных упругой структуры через геометрические матрицы графа связей решетки и коэффициенты упругости всех взаимодействий. Список лит.: 5 назв. Ил. 1.

УДК 517.948:513.8+519.4

**О структуре и треугольных моделях систем одного класса перестановочных операторов.** Золотарев В. А. «Вестн. Харьк. ун-та. Прикладная математика и механика», 1978, вып. 43, с. 69—76.

В гильбертовом пространстве рассматривается класс  $K_n$  систем операторов  $A_k (k=1, 2): 1. A_1 A_2 = A_2 A_1; 2. \dim CH = n < \infty, C = A_1^* A_2 - A_2 A_1^*, 3. C^{n+1} = 0, C^n \neq 0$ . Доказано, что существует инвариантное подпространство системы  $A_k (k=1, 2)$  из класса  $K_n$  (приводящее один из операторов) такое, что сужение системы на него дает систему из класса  $K_0$ , а на ортогональном дополнении — из  $K_{n-1}$ . Список лит.: 7 назв.

УДК 532.51:538.4

**К равновесию и устойчивости свободной поверхности жидкого диэлектрика в электрическом поле.** Евлев И. И. «Вестн. Харьк. ун-та. Прикладная математика и механика», 1978, вып. 43, с. 76—84.

Рассматривается задача определения равновесной свободной поверхности жидкости и ее устойчивости. Предполагается, что жидкость является идеальным однородным изотопным несжимаемым диэлектриком. На жидкость действуют электрическое поле, внешнее гравитационное поле и силы поверхностного натяжения на границах раздела сред. Список лит.: 12 назв. Ил. 2.

УДК 532.5.013.4:536.25:538.4

**О конвективной устойчивости бинарной проводящей смеси в магнитном поле.** Жакин А. И. «Вестн. Харьк. ун-та. Прикладная математика и механика», 1978, вып. 43, с. 84—89.

Рассматривается конвективная устойчивость бинарной проводящей смеси в магнитном поле. Уравнения движения записываются в МГД-приближении. В случае вертикального слоя со свободными недеформируемыми изотермическими идеально проводящими плоскими поверхностями, на которых поддерживается постоянная температура и концентрация легкой компоненты, получено точное решение. Список лит.: 6 назв.

УДК 511.42

**Автоморфизмы положительных бинарных эрмитовых форм над кольцом целых кватернионов.** Пронин Л. Н. «Вестн. Харьк. ун-та. Прикладная математика и механика», 1978, вып. 43, с. 89—103.

Рассматривается арифметическая теория положительных бинарных форм над кольцом целых (в смысле Гурвица) кватернионов. На базе построенной арифметической теории приведения доказана конечность числа неизоморфных групп автоморфизмов положительных форм. Табл. 1. Список лит.: 4 назв.

УИБ-12