

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ В.Н. КАРАЗІНА  
ННІ «ФІЗИКО-ТЕХНІЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ»  
КАФЕДРА ПРИКЛАДНОЇ ФІЗИКИ ТА ФІЗИКИ ПЛАЗМИ

## Пояснювальна записка

до дипломного проєкту (роботи)

МАГІСТРА

(освітньо-кваліфікаційний рівень)

на тему:

укр. Перші експерименти з розрахунку тривимірної плазми з використанням  
позитивного оператора Максвелла  
англ. First Experiments on 3D Plasma Calculations Using  
Positive Maxwellian Operator

Виконав(ла): студент 2 курсу навчання  
за ОНП магістр  
спеціальності 105 Прикладна фізика та наноматеріали  
освітня програма: Експериментальна ядерна фізика та  
(назва)

фізика плазми

Схабицький Н. К.

(прізвище, ім'я, по батькові)

(особистий підпис)

Керівник: д.ф.-м.н., професор КПФФП ННІ «ФТФ»

Гірка І.О.

(прізвище, ім'я, по батькові)

(особистий підпис)

Консультант: д.ф.-м.н., ст.н.с. ННЦ ХФТІ

Моїсеєнко В.Є.

(прізвище, ім'я, по батькові)

(особистий підпис)

Рецензент: д.ф.-м.н., ст.н.с. ННЦ ХФТІ

Кулик Ю.С.

(прізвище, ім'я, по батькові)

(особистий підпис)

Харків – 2025 рік

## АНОТАЦІЯ

Для числового моделювання радіочастотних полів у неоднорідній плазмі використано нову форму часово–гармонічних рівнянь Максвелла, розроблену на основі стандартної форми [1]. Вона використовує напруженість магнітного поля  $\mathbf{H}$ , електричну індукцію  $\mathbf{D}$ , векторний потенціал  $\mathbf{A}$  і скалярний потенціал  $\Phi$ . Ця форма має кілька привабливих особливостей. Перша полягає в тому, що диференціальний оператор, який діє на ці величини, додатний. Друга – відсутність роторів серед диференціальних операторів провідного порядку. Лапласіан є оператором провідного порядку в рівняннях для  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{A}$  і  $\Phi$ , а градієнт дивергенції – для  $\mathbf{D}$ . Третя особливість – відсутність змінних у просторі коефіцієнтів у диференціальних операторах провідного порядку, що забезпечує діагональну домінантність результуючої матриці дискретизованих рівнянь.

В [1] новий підхід було протестовано в рамках тестової задачі у вільному просторі. Модельною областю був прямокутний паралелепіпед. Для дискретизації використано 3D–метод скінченних різниць найнижчого порядку.

У цьому дослідженні використано аналогічний підхід для задачі з неоднорідною плазмою без магнітного поля. Незважаючи на те, що задача такого роду виглядає добре вивченою, нещодавно в ній було виявлено нові особливості [2]. Як модель антени обрано електричний струм без дивергенції, спрямований у напрямку  $u$ .

## ABSTRACT

A new form of time-harmonic Maxwell's equations developed on the base of the standard ones [1] is used here for numerical modeling of RF fields in non-uniform plasma without the magnetic field. In spite of the problems of such kind look well-studied, new features are recently found in it [2]. The new form of time-harmonic Maxwell's equations is written for the magnetic field strength  $\mathbf{H}$ , electric displacement  $\mathbf{D}$ , vector potential  $\mathbf{A}$  and the scalar potential  $\Phi$ . There are several attractive features of this form. The first one is that the differential operator acting on these quantities is positive. The second is absence of curl operators among the leading order differential operators. The Laplacian stands for leading order operator in the equations for  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{A}$  and  $\Phi$ , while the gradient of divergence stands for  $\mathbf{D}$ . The third feature is absence of space varied coefficients in the leading order differential operators that provides diagonal domination of the resulting matrix of the discretized equations.

In [1] the new approach had been tested within the test problem in free space. A rectangular parallelepiped was the model domain. A lowest order 3D finite difference method was used for discretization.

The present study uses a similar approach. The antenna model chosen is the divergence free electric current directed in y direction. Plasma is 3D non-uniform and without magnetic field.

## ЗМІСТ

ВСТУП.....	5
РОЗДІЛ 1: Математична модель .....	6
1.1 Форма рівнянь Максвелла .....	6
1.2 Поділ системи рівнянь .....	7
1.3 Антена .....	8
1.4 Діелектрична проникність .....	9
РОЗДІЛ 2: Дискретизація .....	10
2.1 Скінченні різниці.....	10
2.2 Прямий метод спряженого градієнта .....	11
2.3 Ітеративний метод спряженого градієнта .....	11
РОЗДІЛ 3: Програмні модифікації.....	14
3.1 Оригінальна програма.....	14
3.2 Модифікована програма .....	14
РОЗДІЛ 4: Чисельний експеримент .....	16
4.1 Аналітичний аналіз рівнянь.....	16
4.2 Конфігурація чисельного експерименту.....	16
РОЗДІЛ 5: Аналіз розв'язку .....	18
5.1 Одинична проникність.....	18
5.2 Змінна у просторі проникність .....	19
5.2 Аналіз збіжності .....	20
ВИСНОВОК .....	22
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ .....	23

## ВСТУП

Часово–гармонічна форма рівнянь Максвелла лежить в основі електродинаміки, і має застосування від біології до нагрівання плазми в установках термоядерного синтезу. Однак розв'язання цих рівнянь залишається складним завданням, особливо у термоядерній плазмі, де неоднорідна діелектрична проникність і складна геометрія ускладнюють числове моделювання.

Слід зазначити, що для розв'язання рівнянь Максвелла чисельно зазвичай використовують прямі методи [4, с.305–460] з, або без перетворення Фур'є [4, с.319–335] для переведення задачі у частотний простір, що вимагають багато ресурсів пристрою, що рахує, і як наслідок виникають неймовірні потреби для обрахування задач зі складними умовами, до того ж вони потребують багато часу для обрахування. У порівнянні ітераційні методи є більш привабливою опцією для розрахунків полей Максвелла, бо потребують значно менше пам'яті.

Ця робота пропонує підхід до включення неоднорідної діелектричної проникності в обчислення, зберігаючи стабільність і точність. Це дослідження має значення для розвитку технологій моделювання і підтримує розвиток майбутньої термоядерної енергетики.

Метою цієї роботи є узагальнення рівнянь [1] для випадку металеві порожнини із плазмовим середовищем при радіо–хвильовому нагріві (“RF–heating”), де генератором полей виступатиме антена.

## РОЗДІЛ 1

## Математична модель

## 1.1 Форма рівнянь Максвелла

Згідно роботи [1] запропонована форма рівнянь Максвелла має наступний вигляд:

$$\begin{cases} -\nabla(\nabla \cdot \mathbf{D}) + k_0^2(\hat{I} + \hat{\zeta}^{*T}\hat{\zeta})\mathbf{D} - k_0^2\hat{\zeta}^{*T}\mathbf{A} - ik_0\nabla \times \mathbf{H} - ik_0\hat{\zeta}^{*T}\nabla\Phi = -ik_0\frac{4\pi}{c}\mathbf{j} - 4\pi\nabla\rho \\ -\nabla^2\Phi + ik_0\nabla \cdot \mathbf{A} - ik_0\nabla \cdot (\hat{\zeta}\mathbf{D}) = 0 \\ -\nabla^2\mathbf{H} + k_0^2\mathbf{H} + ik_0\nabla \times \mathbf{A} + ik_0\nabla \times \mathbf{D} = \frac{4\pi}{c}\nabla \times \mathbf{j} \\ -\nabla^2\mathbf{A} + k_0^2\mathbf{A} - ik_0\nabla \times \mathbf{H} - k_0^2\hat{\zeta}\mathbf{D} + ik_0\nabla\Phi = 0 \end{cases} \quad (1.1)$$

Для цих рівнянь  $\mathbf{D}$  – індукція електричного поля,  $\Phi = \phi/ik_0$  – нормалізований скалярний потенціал,  $\mathbf{H}$  – магнітне поле,  $\mathbf{A} = ik_0\mathbf{a}$  – нормалізований векторний потенціал,  $\hat{\zeta}$  – тензорний оператор, зворотній до діелектричної проникності,  $\mathbf{j}$  – густина електричного струму та  $\rho$  – густина електричного заряду, яка визначається законом збереження заряду (в гармонічній до часу формі):

$$\rho = \frac{\nabla \cdot \mathbf{j}}{ik_0c} \quad (1.2)$$

Множник  $k_0 = \omega/c$  вводиться у рівняння (1.1) та (1.2) у зв'язку з тим, що рівняння знаходяться у частотній області.

На невідомі (потенціал  $\Phi$ , нормальні до границі компоненти  $\mathbf{H}$ , тангенціальні компоненти  $\mathbf{D}$  і  $\mathbf{A}$ ) в системі (1.1) накладають граничну умову Діріхле – занулення на межах області розповсюдження поля. Джерела полів мають таку саму умову:

$$\rho|_S = 0, d\mathbf{S} \times \mathbf{j}|_S = 0. \quad (1.3)$$

Систему дискретизованих рівнянь (1.1) з подальших міркувань буде переписано в операторне рівняння:

$$\hat{M}\mathbf{x} = \mathbf{y} \quad (1.4)$$

Тут:  $\hat{M}$  – додатньо–означений оператор,  $\mathbf{x} = (\mathbf{D}, \Phi, \mathbf{H}, \mathbf{A})$  – невідомий вектор, та  $\mathbf{y}$  – генеруючий вектор, який є комбінацією правих частин рівнянь (1.1).

## 1.2 Поділ системи рівнянь

Поділ буде відбуватись з тих міркувань, що задача зазначена у [1] вже рахується чисельно у випадку одиничної діелектричної проникності і щоб не відтворювати задачу програмно з нулю слід лише провести деякі модифікації до операторного рівняння (1.4).

Правильним можна вважати такий поділ операторного рівняння (1.4), результатом якого можна отримати початкову систему рівнянь (1.1). Користуючись цим фактом можна виразити дію оператора  $\hat{M}$  через дію двох операторів:

$$\hat{M} = \hat{U} + \hat{C} \quad (1.5)$$

Перший оператор в сумі є оператором  $\hat{M}$ , але введений з тим фактом, що діелектрична проникність – одинична, а другий оператор в сумі визначається різницею  $\hat{C} = \hat{M} - \hat{U}$ . Таким чином можна отримати наступні вирази для дії операторів:

$$\hat{U}_{\mathbf{x}} = \begin{cases} -\nabla(\nabla \cdot \mathbf{D}) + 2k_0^2 \mathbf{D} + k_0^2 \mathbf{A} - ik_0 \nabla \times \mathbf{H} - ik_0 \nabla \Phi \\ -\nabla^2 \Phi + ik_0 \nabla \cdot \mathbf{A} - ik_0 \nabla \cdot \mathbf{D} \\ -\nabla^2 \mathbf{D} + k_0^2 \mathbf{H} + ik_0 \nabla \times \mathbf{A} + ik_0 \nabla \times \mathbf{D} \\ -\nabla^2 \mathbf{A} + k_0^2 \mathbf{A} - ik_0 \nabla \times \mathbf{H} - k_0^2 \mathbf{D} \end{cases} \quad (1.6)$$

$$\hat{C}_{\mathbf{x}} = \begin{cases} k_0^2 (\hat{\zeta}^{*T} \hat{\zeta} - \hat{I}) \mathbf{D} + k_0^2 (\hat{\zeta} - \hat{I}) \mathbf{A} + ik_0 (\hat{I} - \hat{\zeta}^{*T}) \nabla \Phi \\ ik_0 \nabla \cdot ([\hat{I} - \hat{\zeta}] \mathbf{D}) \\ 0 \\ k_0^2 (\hat{I} - \hat{\zeta}) \mathbf{D} \end{cases} \quad (1.7)$$

Хоча дії операторів мають повертати генеруючий вектор  $\mathbf{y}$ , сам цей вектор подібно операторам має бути сумою двох генеруючих векторів:

$$\mathbf{y} = \mathbf{y}_u + \mathbf{y}_c \quad (1.8)$$

Де вектор  $\mathbf{y}_u$  є результатом дії оператора  $\hat{U}$  та  $\mathbf{y}_c$  є результатом дії оператора  $\hat{C}$ . Вектор  $\mathbf{y}_u$  має задаватись конфігурацією щільності струму  $\mathbf{j}$ , або густини заряду  $\rho$ , при одиничній діелектричній проникності, однак генеруючий вектор  $\mathbf{y}_c$  має бути побудовано з іншого міркування: єдине, що змінюється для

$\hat{M}$  при перетворенні у  $\hat{U}$  це  $\hat{\zeta} \rightarrow \hat{I}$ . Щоб урахувати цей факт слід розглянути теорему про циркуляцію поля магнітної напруженості:

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + ik_0 \mathbf{E} \\ \nabla \times \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_m + ik_0 \mathbf{D} \end{cases} \Rightarrow \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_m = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} - ik_0 (\hat{\zeta} - \hat{I}) \mathbf{D} \quad (1.9)$$

Таким чином  $\mathbf{y}_c$  залежить лише від значеннь вектору  $\mathbf{D}$  та значеннь різниці оператора  $\hat{\zeta}$  та одиничного вектору  $\hat{I}$  і має бути побудован з використанням виразу (7) на різниці векторів:

$$\mathbf{y}_c = \begin{pmatrix} -ik_0 (\hat{\zeta} - \hat{I}) \mathbf{D} + \nabla (\nabla \cdot [\{\hat{\zeta} - \hat{I}\} \mathbf{D}]) \\ 0 \\ -ik_0 \nabla \times ([\hat{\zeta} - \hat{I}] \mathbf{D}) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.10)$$

Такий поділ системи є алгебраїчно вірним, що забезпечує повернення до системи рівнянь (1.1):

$$\begin{aligned} \hat{U} \mathbf{x} &= \mathbf{y}_u \\ + \hat{C} \mathbf{x} &= \mathbf{y}_c \end{aligned} \Rightarrow \hat{M} \mathbf{x} = \mathbf{y} \quad (1.11)$$

### 1.3 Антена

Як генератор полей буде використана антена ближнього поля, щільність струму якої задається наступною функцією:

$$\mathbf{j}_a = I_a \frac{f(x)f(z)}{\delta_{a,x}\delta_{a,z}} \mathbf{e}_y, f(h) = \begin{cases} 0, h < h_a - \delta_{a,h} \\ \cos^2 \left( \frac{\pi[h-h_a]}{2\delta_{a,h}} \right), h_a - \delta_{a,h} \leq h \leq h_a + \delta_{a,h} \\ 0, h > h_a + \delta_{a,h} \end{cases} \quad (1.12)$$

Тут:  $h$  – Декартовий напрям  $(x, y, z)$ ,  $h_a$  – центральні координати антени,  $\delta_{a,h}$  – напів-довжини антени,  $I_a$  – струм в статамперах.

Така антена генерує сигнал у формі квадратного косинусового колокола, бездивергентний згідно з (1.2). Це спрощує задачу таким чином, що для задання вектору  $\mathbf{y}_u$  слід лише порахувати сам струм і його ротор.

#### 1.4 Діелектрична проникність

У якості розглядаємої діелектричної проникності буде використовуватись наступний вираз:

$$\hat{\epsilon}(x, y, z) = 1 - \epsilon_0 \sin(k_x x) \sin(k_y y) \sin(k_z z), \epsilon_0 \in \mathbb{C} \quad (1.13)$$

Ця діелектрична проникність була обрана для симуляції плазми з просторово-періодичною щільністю відповідає умовам Діріхле коли:

$$k_x = \pi/l_x, k_y = \pi/l_y, k_z = \pi/l_z$$

Тут  $l_x, l_y, l_z$  – довжини металевої порожнини за Декартовими координатами, яка буде розглядатись в експерименті.

Слід зазначити той факт, що замість діелектричної проникності буде використано зворотній до неї оператор  $\hat{\zeta}$ , вираз для якого має наступний вигляд:

$$\hat{\zeta}(x, y, z) = \hat{\epsilon}^{-1}(x, y, z) = \frac{1}{1 - \epsilon_0 \sin(k_x x) \sin(k_y y) \sin(k_z z)} \quad (1.14)$$

Через факт використання оператора  $\hat{\zeta}$  можна вивести обмеження, які виникають з його визначення:

$$\hat{\zeta}(x, y, z) \in \left( \frac{1}{1 - \epsilon_0}, \frac{1}{1 + \epsilon_0} \right) \quad (1.15)$$

Ці обмеження забезпечують кінцевий характер цього оператора, однак має сенс виразити обмеження саме для параметру  $\epsilon_0$ , щоб рівняння для полей мали кінцеве рішення:

$$\text{Re}\{\epsilon_0\} < 1 \quad (1.16)$$

Через обмеження (1.16) можна сказати, що у випадку, коли дійсна частина параметру більше за одиницю виникає сингулярне рішення. Додатково слід указати той факт, що при наближенні цього параметру до одиниці плазма стає сильно неоднорідною, що у свою чергу приводить до появи фізичних явищ, безпосередньо пов'язаних з нею.

## РОЗДІЛ 2

## Дискретизація

## 2.1 Кінцеві різниці

Ця система має буде дискретизована щодо Декартової системи координат використовуючи скінченні різниці, при цьому скінченні різниці мають бути різні для різних точок: на межах кінцеві різниці в один напрям, а не на межах кінцеві різниці в два напрями:

$$\frac{df(p)}{dp} \approx \begin{cases} \frac{f(p+h_p)-f(p)}{h_p}, p \in \partial P^+ \\ \frac{f(p+h_p)-f(p-h_p)}{2h_p}, p \in P \\ \frac{f(p)-f(p-h_p)}{h_p}, p \in \partial P^- \end{cases} \quad (2.1)$$

Тут  $P$  – це область визначення функції  $f$ , а  $\partial P$  – це межа цієї області, при чому знак мінус або плюс позначають де відносно цієї межі лежить основна область визначення.

Таким чином дискретизуються саме диференційні операції за участі оператора  $\nabla$ , що є частиною оператора  $\hat{M}$  з операторного рівняння (1.1), перетворює систему (1.11) у матричне рівняння з загальною кількістю точок рівній  $N = n_x \times n_y \times n_z$ :

$$\begin{aligned} \hat{U}^{(N)} \cdot \mathbf{x}^{(N)} &= \mathbf{y}_u^{(N)} \\ + \hat{C}^{(N)} \cdot \mathbf{x}^{(N)} &= \mathbf{y}_c^{(N)} \end{aligned} \Rightarrow \hat{M}^{(N)} \cdot \mathbf{x}^{(N)} = \mathbf{y}^{(N)} \quad (2.2)$$

Використання наближення шляхом дискретизації для операторів не змінить їх властивостей, адже кінцеві різниці з великою точністю відтворюють саме дію операторів (1.6) і (1.7), а тому ітераційні методи все ще мають силу.

У якості ітераційного методу для дискретної системи (2.2) буде обрано метод спряжених градієнтів, так, як він має відносно велику швидкість розрахунків у порівнянні з іншими методами.

## 2.2 Прямий метод спряженого градієнта

Згідно з [3, с. 185] для системи лінійних рівнянь, що описується цим матричним рівнянням:

$$\hat{A} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{g} \quad (2.3)$$

Тут:  $\hat{A}$  – це позитивно–визначена симметрична квадратна матриця,  $\mathbf{u}$  – це невідомий вектор, а  $\mathbf{g}$  – це задана права частина.

Для цієї системи має місце припущення, що існують два не–нульові вектори  $\{\mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ , такі, що для них виконується наступна умова:

$$\mathbf{v} \cdot (\hat{A}\mathbf{w}) = 0 \quad (2.4)$$

Оскільки матриця є розрідженою та позитивно–означеною, ліва частина визначає внутрішній добуток:

$$(\hat{A}\mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \mathbf{v} \cdot (\hat{A}^T \mathbf{w}) = \mathbf{v} \cdot (\hat{A}\mathbf{w}) \quad (2.5)$$

Два вектори є сполученими тоді і лише тоді, коли вони ортогональні щодо цього внутрішнього добутку, при цьому сполученість є симетрично. Від цього факту будується основа, або базис, для невідомого вектору  $\mathbf{u}$ :

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{p}_i \quad (2.6)$$

Тут:  $\mathbf{p}_i$  – є базисним вектором, а  $\alpha_i$  є коефіцієнтами цих базисних векторів.

Таким чином використовуючи розкладання за базисом можна отримати наступне рішення для коефіцієнтів базису:

$$\alpha_k = \frac{\mathbf{p}_k \cdot \mathbf{b}}{\mathbf{p}_k \cdot (\hat{A}\mathbf{p}_k)} \Rightarrow \mathbf{u} = \sum_{i=1}^n \frac{\mathbf{p}_i \cdot \mathbf{b}}{\mathbf{p}_i \cdot (\hat{A}\mathbf{p}_i)} \mathbf{p}_i \quad (2.7)$$

Хоча це і є рішенням для системи (2.3), слід ще знайти всі базисні вектори, що не підійде до цієї задачі.

## 2.3 Ітеративний метод спряженого градієнта

Згідно [3, с. 187–192] при переході від прямого методу до ітеративного методу можна обмежити базисні вектори, щоб отримати дуже близьке рішення. Починається цей метод з довільного початкового вектору  $\mathbf{u}_0$ , який можна покласти рівним нулю. Починаючи з початкового вектору починається і пошук

напряму де знаходиться рішення системи за метрикою, що надається тим фактом, що рішення системи є унікальним мінімізатором наступної функції:

$$f(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \mathbf{u} \cdot (\hat{A} \cdot \mathbf{u}) - \mathbf{u} \cdot \mathbf{g} \quad (2.8)$$

Дія оператора Лапласа на такий мінімізатору задається самою матрицею  $\hat{A}$ , яка є симетричною і позитивно–визначеною. Через цей факт можна сказати, що градієнт такої функції вирішує початкову задачу. Це свідчить про те, що базовий вектор  $\mathbf{p}_0$  у просторі базисних векторів  $P$  є від’ємним градієнтом функції  $f$  при  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0$ :

$$\mathbf{p}_0 = \mathbf{g} - \hat{A} \cdot \mathbf{u}_0 \quad (2.9)$$

Таким чином інші вектори у базису будуть спряжені з градієнтом. Слід ще зауважити, що цей базисний вектор також є залишковим. Залишок на деякій ітерації  $k$  визначається наступним виразом:

$$\mathbf{r}_k = \mathbf{g} - \hat{A} \cdot \mathbf{u}_k \quad (2.10)$$

Так як залишки  $\mathbf{r}_k$  – це від’ємні градієнти то метод спуску градієнтом потребує рух за цими залишками. Тут, однак потрібно щоб напрямки  $\mathbf{p}_k$  мають бути спряжені один з одним. Практичний спосіб це забезпечити це вимагати, щоб наступний напрямок пошуку був побудован з поточного залишку та всіх попередніх напрямків пошуку. Така потреба породжує наступні вираз:

$$\mathbf{p}_k = \mathbf{r}_k - \sum_{i < k} \frac{\mathbf{p}_i \cdot (\hat{A} \cdot \mathbf{r}_k)}{\mathbf{p}_i \cdot (\hat{A} \cdot \mathbf{p}_i)} \mathbf{p}_i \quad (2.11)$$

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{u}_k + \frac{\mathbf{p}_k \cdot \mathbf{r}_k}{\mathbf{p}_k \cdot (\hat{A} \cdot \mathbf{p}_k)} \mathbf{p}_k \quad (2.12)$$

Таким чином отриманий алгоритм набуває наступного вигляду в форматі послідовності дій:

1. Розраховуємо початковий залишок:

$$\mathbf{r}_0 = \mathbf{g} - \hat{A} \cdot \mathbf{u}_0 \quad (2.13)$$

2. Якщо початковий залишок достатньо малий, тоді повернути початкову догадку  $\mathbf{u}_0$ .

3. Якщо початковий залишок не достатньо малий, тоді починаються розрахункові ітерації:

4. Розраховуємо перший базисний вектор:

$$\mathbf{p}_0 = \mathbf{r}_0 \quad (2.14)$$

5. Повторюємо:

6. Вводимо та розраховуємо коефіцієнт:

$$\alpha = \frac{\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{r}_0}{\mathbf{p}_0 \cdot (\hat{A} \cdot \mathbf{p}_0)} \quad (2.15)$$

7. Розраховуємо наступний вектор і наступний залишок:

$$\begin{cases} \mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_0 + \alpha \mathbf{p}_0 \\ \mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_0 - \alpha \hat{A} \cdot \mathbf{p}_0 \end{cases} \quad (2.16)$$

8. Якщо наступний залишок достатньо малий закінчуємо повторення.

9. Вводимо та розраховуємо коефіцієнт:

$$\beta = \frac{\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_1}{\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{r}_0} \quad (2.17)$$

10. Розраховуємо наступний базисний вектор:

$$\mathbf{p}_1 = \mathbf{r}_1 + \beta \mathbf{p}_0 \quad (2.18)$$

11. Змінюємо вектори з індексом 1 на вектори з індексом 0.

12. Повертаємо  $\mathbf{u}_1$ , як фінальну відповідь.

Щодо того, наскільки малим повинен бути залишок можна скористатись умовою, що величина залишку має бути менше деякого значення, але у данній роботі використовується нормалізована, щодо вектору  $\mathbf{g}$ , величина  $\mathbf{r}_1$ :

$$|\mathbf{r}_1|_{\text{normalized}} = \sqrt{\frac{\langle \hat{A}\mathbf{u} - \mathbf{g}, \hat{A}\mathbf{u} - \mathbf{g} \rangle}{\langle \mathbf{g}, \mathbf{g} \rangle}} \quad (2.19)$$

Також з визначення цього методу стає зрозуміло, що генеруючий вектор у виразі (7) стає нульовий при нульовій початковій здогадці, що зменшує обсяг розрахунків.

Додатково слід зазначити, що цей метод підійде і для комплексних полей з єдиною різницею у збіжності методу, адже чисельно комплексні значення можна поділити на дійсну і уявну частину, що свідчить про те, що в дійсності для комплексних чисел цей метод поділяється на два паралельних методи спряженого градієнту і щоб цей метод збігався для комплексних чисел мають збігатись окремо як дійсна, так і уявна частина цього методу.

## РОЗДІЛ 3

## Програмні модифікації

## 3.1 Оригінальна програма

Початкова версія програми була написана на мові програмування FORTRAN і була названа “dphifield.f90” і вона виступала у якості чисельного прикладу згідно роботи [1]. Вона брала значення для сітки, розмірів металеві порожнини, частоти нагріву порожнини, точності та порядок помилки у якості даних з одного конфігураційного файлу “in3.dat” та записувала у файл “errs.dat” ітерації програми, нормалізовану величину залишку, помилку між ітераційним та аналітичним рішенням. Будувалась вона для випадку одиначної діелектричної проникності і як джерело полей використовувалась наступна форма щільності струму:

$$\mathbf{j} = \begin{pmatrix} j_{0x} \cos(k_x x) \sin(k_y y) \sin(k_z z) \\ j_{0y} \sin(k_x x) \cos(k_y y) \sin(k_z z) \\ j_{0z} \sin(k_x x) \sin(k_y y) \cos(k_z z) \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

## 3.2 Модифікована програма

Модифікована версія програми має назву “EMFC.f90” і зараз вона додатково бере значення амплітуди струму, позиції антени та напів-довжин антени з додаткового конфігураційного файлу “antenna.dat” і на відміну від оригінальної версії “dphifield.f90” записує у три файли формату “.csv” для подальшої обробки: “errors.csv” – файл з ітераціями, скалярними добутками  $\langle \mathbf{r}, \hat{U}\mathbf{r} \rangle$ ,  $\langle \mathbf{r}, \hat{C}\mathbf{r} \rangle$ ,  $\langle \mathbf{r}, \hat{M}\mathbf{r} \rangle$  та дожинами залишку  $|\mathbf{r}|$ ; “sources.csv” – файл з генеруючими значеннями вектору  $\mathbf{u}$  для векторів зазначених у виразах (1.11); “solution.csv” – файл зі значеннями вектору  $\mathbf{x}$  в кожній точці сітки.

Модифікації до коду включають: модуль “antenna” – тимчасове зберігання чиселових значень файлу “antenna.dat” під час виконання програми; підпрограма “read\_antenna” – зчитування даних файлу “antenna.dat”; підпрограма “calculate\_operators” – чисельний розрахунок оператору діелектричної проникності, зворотнього до нього оператору та комплексно

спаряжений оператор до зворотнього оператору діелектричної проникності згідно виразів (1.14) та (1.15); підпрограма “apply\_operator” – дія скалярного оператору на три-вимірний вектор; підпрограма “calculate\_rhs” – розрахунок генеруючого вектору  $U_u$ ; підпрограма “modify\_rhs” – додавання генеруючого вектору  $U_c$  до вектору  $U_u$ ; підпрограма “muladd” – розрахунок дії оператору  $\hat{C}$ ; підпрограма “write\_to\_csv” – запис до файлів десяти-вимірних векторів по вузлам обрахування; підпрограма “dfield” – модифікована версія “efield” для обрахування полей з урахуванням діелектричної проникності.

Саме ці модифікації точно відтворюють метод спряженого градієнту для системи рівнянь (1.1) з урахуванням діелектричної проникності. Всі зміни від “dphifield.f90” до “EMFC.f90” дозволяють вирішити задачу чисельно.

## РОЗДІЛ 4

## Чисельний експеримент

## 4.1 Аналітичний аналіз рівнянь

Рівняння (1.1) були виведені з гармонічної до часу форми рівнянь Максвела для полей  $\mathbf{D}$ ,  $\Phi$ ,  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{A}$  згідно роботи [1]:

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{A} - ik_0 \mathbf{H} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{H} + ik_0 \mathbf{D} &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} \\ \nabla \cdot \mathbf{D} &= 4\pi\rho \\ \nabla\Phi + ik_0 \hat{\zeta} \mathbf{D} - ik_0 \mathbf{A} &= 0\end{aligned}\tag{4.1}$$

З аналізу рівнянь (4.1) на дійсну та уявну частину за умови одиничної діелектричної проникності можна отримати, що для дійсної щільності струму єдині компоненти зі значеннями будуть  $\text{Im}\{\mathbf{D}\}$ ,  $\text{Re}\{\Phi\}$ ,  $\text{Re}\{\mathbf{H}\}$ ,  $\text{Im}\{\mathbf{A}\}$ . Цей факт робить аналіз легшим, бо для аналізу системи достатньо розглянути лише ці компоненти поля. Це полегшує також і аналіз фізично–експериментального характеру, бо достатньо лише виміряти значення магнітної напруженості близь джерела полей.

## 4.2 Конфігурація чисельного експерименту

Програма буде рахувати чисельно для металеві порожнини розмірами стінок  $l_x \times l_y \times l_z = 24 \times 24 \times 100[\text{cm}^3]$ , з кількістю вузлів для чисельної обробки  $n_x \times n_y \times n_z = 49 \times 49 \times 201$ , що означає, що кінцеві різниці мають однаковий розмір  $h_x = h_y = h_z = 0.5[\text{cm}]$ , що у свою чергу означає, що похибка наближення для точок всередині сітки вона буде пропорційна до квадрату кінцевої різниці. Ця конфігурація сітки буде надавати достатню точність для отримання результатів.

Антенна, що визначається виразом (1.12), має розміри надані у форматі площі самої антени  $4 \times \delta_{a,x} \times \delta_{a,z} = 4 \times 2 \times 10[\text{cm}^2]$ , з центром у координатах  $(x_a, z_a) = (6[\text{cm}], 25[\text{cm}])$  та амплітудний електричний струм, в одиницях згідно системи СГС є статамперами,  $I_a = 2997924536.8[\text{стА}]$ , що на справі є лише одним Ампером у системі одиниць СІ, але рівняння (4.1), з яких виводяться

рівняння (1.1) виведені у системі одиниць СГС, тому слід використовувати відповідні одиниці, що означає, що і дійсна частина магнітної напруженості, яка буде розглянута, буде мати значення в Ерстедах [Е], і для конвертації в систему одиниць СІ до Амперу за метр [А/м] потрібно додатково домножати ці значення на скалярний фактор, що становить  $1000/4\pi$ , або 79.577.

Нагрівання середовища буде відбуватись за частоти  $\omega = 6.279[\text{ГГц}]$ , або використовуючи хвильовий вектор  $k_0 = \frac{\pi}{15} = 0.209[\text{см}^{-1}]$ , що відповідає нагріву радіохвилями (“RF–heating”).

Для експерименту буде обрано два випадки: перший – одинична діелектрична проникність, що відповідає випадку відсутності плазми, а другий – плазма, згідно виразу (1.14). Обидва випадки будуть задаватись відповідно  $\epsilon_0 = 0$  та  $\epsilon_0 = 0.9$ , що є близько–максимальним значенням, згідно виразу (1.16). Обидва випадки буде перевірено згідно з підрозділом 4.1, так, як вони мають демонструватись згідно з міркуваннями про дійсну та уявну частину в зазначеному підрозділі.

## РОЗДІЛ 5

## Аналіз розв'язку

## 5.1 Одинична проникність

Для аналізу отриманих полів буде використано дійсну частину вектору магнітної напруженості:

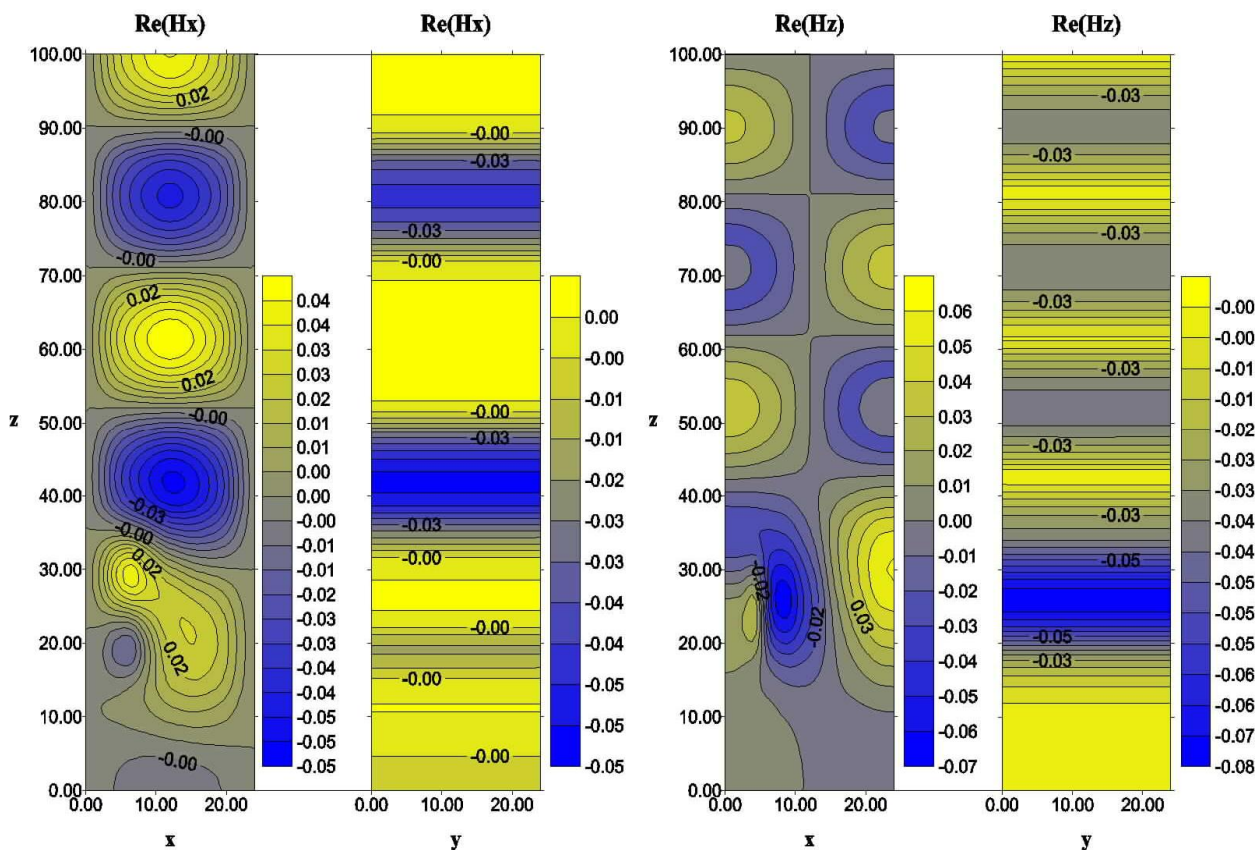


Рисунок №5.1: Дійсна частина магнітної напруженості для компонент  $x$ ,  $z$  у площинах  $xOz$  та  $yOz$  за умови одиничної проникності

На рисунку №5.1 спостерігається поле антени в указаному для неї центрі та виникаючі при цьому хвилі магнітного поля, що показує, що моделювання є успішним.

Додатково можна помітити за графіками у площині  $yOz$  залежності безпосередньо від координати  $y$  немає.

Слід зазначити, що програма рахує наближено і для деяких полів існують не-нульові значення, але вони надзвичайно малі, з цих міркувань можна зазначити, що програма може видавати чисельний шум при розрахунках, але він у межах помилки.

## 5.2 Змінна у просторі проникність

Результати розрахунку показують, що для плазми у металевій порожнині спостерігаються заборонені зони, більша інтенсивність поля близьк поверхні антени і сильна модуляція хвиль у полі. Для аналізу отриманих полей скористаємось дійсною частиною вектору магнітні напруженоості для порівняння результатів з минулим аналізом:

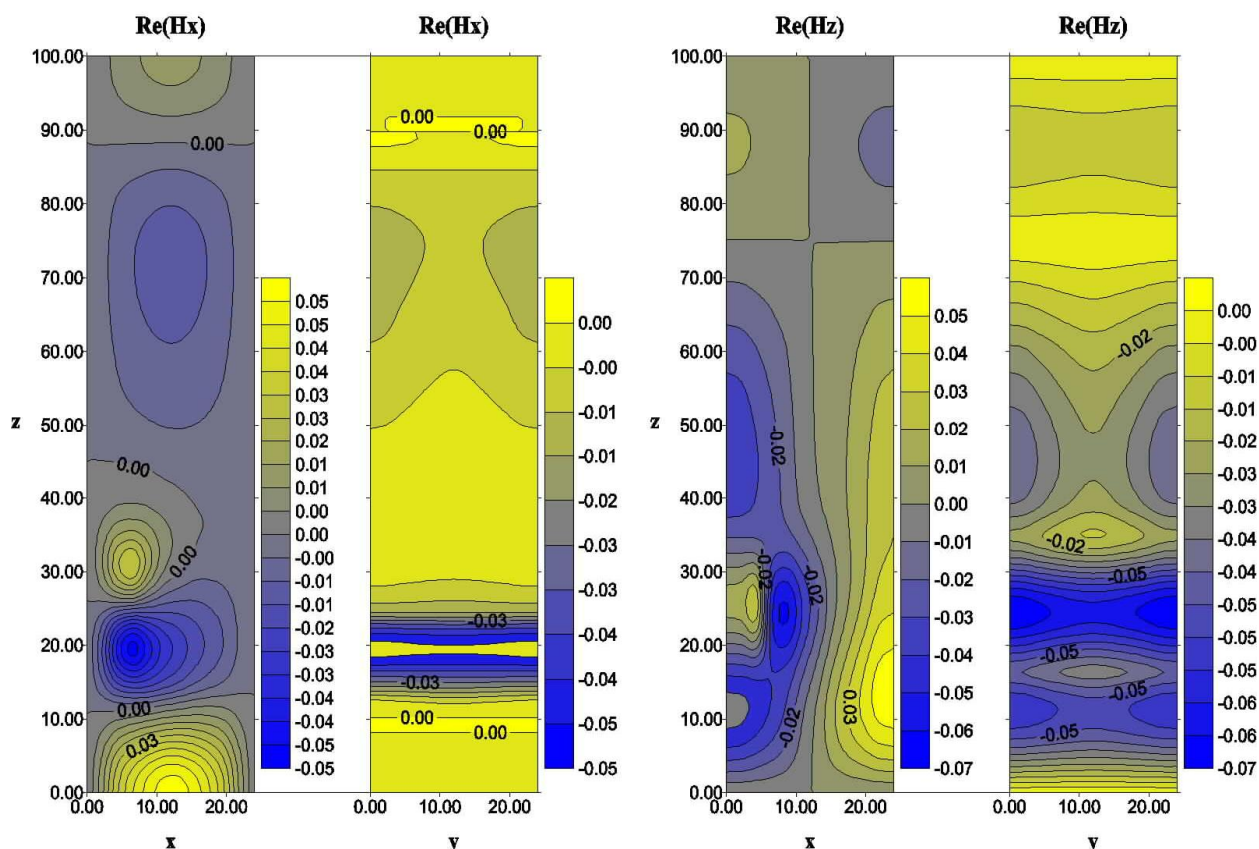


Рисунок №5.2: Дійсна частина магнітної напруженості для компонент  $x, z$  у площинах  $xOz$  та  $yOz$  за умови наявності плазми

На рисунку №5.2 можна спостерігати, що поле антени дії антени збільшується у декілько разів за рахунок модуляції, але за рахунок цієї ж модуляції розповсюдженні від неї хвилі мають заборонені зони, які можна спостерігати у фотонних кристалах.

Наявність заборонених зон каже про те, що лише хвилі з деяким діапазоном енергій (або частот) можуть розповсюджуватись по металевій порожнині у плазмі.

Заборонені зони визначаються умовами Брегівського розсіювання для наданих хвильових чисел, що свідчить про те, що плазма діє як часткове

дзеркало, що можна побачити на рисунку №5.2, як збільшення інтенсивності антени, бо якщо хвилі не розповсюджуються по металевій порожнині то вони мають відбиватись, але ефективність такого відбиття залежить від кута падінні хвильового фронту антени.

Додатково можна відмітити, що на рисунку №5.1 залежності від координати у не спостерігалось, однак на рисунку №5.2 ця залежність з'являється явно, що можна помітити по неоднорідному розподілу значень магнітної напруженості.

## 5.2 Аналіз збіжності

Зазначений раніше файл “errors.csv” буде використовуватись для побудови метрики, відносно якої можна зрозуміти, як швидко збігається розрахунок для точності порядку мікро:

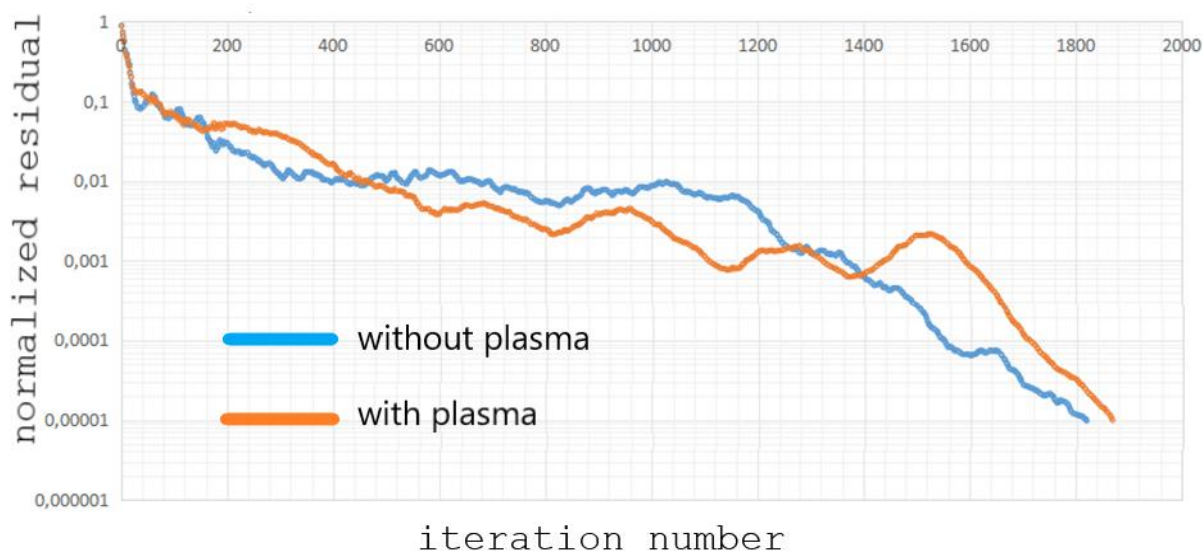


Рисунок №5.3: Графік збіжності методу спряженого градієнту у логарифмічному масштабі для вакууму та плазми

Графік на рисунку №5.3 показує, що для отримання результатів оптимальна кількість ітерацій є приблизно однаковою що для вакууму, що для плазми, що можна вважати добрим і відносно швидким результатом для розрахунку електромагнітних полей.

Слід зазначити, що для методу спряжених градієнтів збіжність відносно залишку має бути монотонна, але не-монотонність на рисунку №5.3 лише виникає через той факт, що використовується не величина залишку, а його

нормалізована відносно правої сторони рівнянь (1.1). Якщо будувати саме величину залишку, то збіжність буде монотонною з кожною ітерацією методу спряжених градієнтів.

## ВИСНОВОК

Тестування підходу з позитивним оператором Максвелла демонструє числову ефективність у розв'язанні крайової задачі в неоднорідній плазмі.

Швидкість збіжності ітерацій подібна до крайової задачі у вільному просторі.

Додатково було здобуто чисельні значення для полів магнітної напруженості, що дозволило їх безпосередній аналіз. Для вакууму результати розрахунків показують розподіл поля в режимі металеві порожнини і видиме ближнє поле антени. Для плазми результати розрахунків показують більш цікаві результати, серед яких:

- Утворення заборонених зон для поширених хвиль.
- Більш виражене поле поблизу антени (ближнє поле антени).

## СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Vladimir E. Moiseenko and Olov °Agren. Curl-free positive definite form of time-harmonic Maxwell's equations well-suitable for iterative numerical solving. *Plasma Physics and Controlled Fusion*, 63(12):124007, 2021.
2. J. Zhang et al. 2d simulation of the electromagnetic wave across the non-uniform reentry plasma sheath with comsol. *AIP Advances*, 9(5):055316, 2019.
3. Yousef Saad. *Iterative Methods for Sparse Linear Systems*, Third Edition. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), 2022.
4. Gilbert Strang. *Computational Science and Engineering*. Wellesley-Cambridge Press, 2020.