Міністерство освіти та науки України
Харківський національний університет ім.В.Н.Каразіна

Т.В. Клочко

Б.В. Кондратьєв

Н.І. Лесік

ДОСЛІДЖЕННЯ ОСОБЛИВИХ РОЗВ'ЯЗКІВ ЗВИЧАЙНИХ НЕЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ

Харків-2012

УДК 517.9: 681.3.057 (075.8)
ББК 22.161.6 + 32.973-018.2я7
К 50

*Рекомендовано до друку науково-методичною радою
Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна
(протокол № 7 від 5.01.2010.)*

Рецензенти:

Дюкарев Юрій Михайлович - доктор фізико-математичних наук, професор кафедри вищої математики фізичного факультету Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна;

Гандель Юрій Володимирович – доктор фізико-математичних наук, професор кафедри математичної фізики та обчислювальної математики механіко-математичного факультету Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна.

Клочко Т.В., Кондратьєв Б.В., Лесік Н.І.. Дослідження особливих розв'язків звичайних нелінійних диференціальних рівнянь першого порядку:
Навчально-методичний посібник. - Х.: ХНУ імені В.Н. Каразіна, 2012. - 44 с.

В навчально-методичному посібнику викладено теорію та наведені приклади типових задач теми розв'язання нелінійних звичайних диференціальних рівнянь першого порядку курсу «Диференціальні рівняння», який вивчається в 3 семестрі студентами 2 курсу фізичного і радіофізичного факультетів Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна. За допомогою системи комп'ютерної математики Maple 11 при вдало підібраних значеннях сталої *C* (їхні значення вказані на рисунках), побудований загальний розв'язок кожної задачі, також можна побачити графіки особливих розв’язків, якщо вони є. Лінії особливих розв’язків є обвідними для сім’ї кривих, що відповідають загальним розв’язкам при різних значеннях сталої *C.* В кожній точці таких ліній порушується єдиність розв’язку, що є дуже цікавим з точки зору візуалізації результатів розв'язання кожної задачі.

УДК 517.9: 681.3.057 (075.8)
ББК 22.161.6 + 32.973-018.2я7

Передмова. Основні відомості з теорії звичайних диференціальних рівнянь першого порядку

Диференціальним рівнянням називається співвідношення вигляду

$$F(x, y(x), y'(x), ...) = 0 ,$$

де задана функція F пов'язує між собою незалежну змінну x, шукану функцію *y(x)* та її похідні (диференціали). Якщо шукана функція залежить лише від однієї незалежної змінної, то таке *рівняння* називається *звичайним*; якщо ж шукана функція залежить від декількох незалежних змінних, то отримаємо *рівняння в частинних похідних*. В рівняння можуть входити також параметри, по яких не передбачається інтегрування. *Порядком диференціального рівняння* називається найвищий порядок похідної (диференціала), що входить в рівняння. *Диференціальне рівняння* називається *лінійним*, якщо воно містить шукану функцію *y(x)* та її похідні (диференціали) лише в лінійних комбінаціях; але незалежна змінна x може при цьому входити в довільних комбінаціях.

Таким чином, звичайне диференціальне рівняння першого порядку може бути записане в загальній формі

$$F(x, y(x), y'(x)) = 0 ,$$

(нерозв'язаній відносно похідної) або у вигляді

$$y' = f(x, y(x)),$$

(явно розв'язаному відносно похідної).

Розв'язком (інтегруванням) диференціального рівняння називається визначення такої функції $\varphi(x)$, яка задовольняє цьому рівнянню, тобто обертає його в тотожність

$$F(x,\varphi(x),\varphi'(x)) \equiv 0 \quad \text{або} \quad \varphi'(x) \equiv f(x,\varphi(x))$$

при всіх значеннях x із деякого інтервалу $(\alpha,\beta) \subset \overline{\mathbb{R}}$. Ми будемо враховувати лише дійснозначні розв'язки диференціальних рівнянь. Графік функції $y = \varphi(x)$ називається *інтегральною кривою* цього диференційного рівняння.

Загальний розв'язок (загальний інтеграл) звичайного диференціального рівняння першого порядку записується у вигляді

$$\Phi(x, y, C) = 0 \text{ (нерозв'язаний вигляд)}$$

або

$$y = \varphi(x, C) \text{ (розв'язаний вигляд)}$$

Тут величина $C \in \mathbb{R}$ - довільна стала інтегрування. Відзначимо, що при розв'язуванні за допомогою диференціальних рівнянь практичних фізичних задач, звичайно, буває легше досліджувати фізичний сенс розв'язку з виділеною шуканою функцією $y = \varphi(x,C)$, щоправда, таке виділення не завжди виявляється можливим. Розв'язок рівняння, записаний через необчислені интеграли, звичайно називається *розв'язком в квадратурах*. Іноді при розв'язанні рівнянь для шуканої функції вдається отримати розв'язок лише для оберненої їй функції $x(y)$. Надаючи різні чисельні значення сталій C (як певному параметру), можна нарисувати сім'ю інтегральних кривих досліджуваного диференціального рівняння.

Частинним розв'язком звичайного диференціального рівняння називається такий розв'язок, який отримується із загального при фіксованому значенню довільної сталої. Ці сталі знаходять з початкових умов. Таким чином, *задачею Коші* називається сукупність самого рівняння та початкових умов до нього, наприклад,

$$F(x, y(x), y'(x)) = 0 \text{ та } y_0 = y(x_0) \text{ при } x_0 \le x < \infty.$$

Задача з початковими умовами для звичайного диференціального рівняння першого порядку ставиться так: знайти розв'язок $y = \varphi(x)$ рівняння $F(x, y(x), y'(x)) = 0$ такий, щоб виконувалась рівність $y_0 = \varphi(x_0)$. Геометрично задача з початковими умовами зводиться до того, щоб із сім'ї інтегральних кривих, які задаються загальним розв'язком $\Phi(x, y(x), C) = 0$, виділити ту криву, яка проходить через точку $M(x_0, y_0)$ площини *xOy*. Можливість розв'язку цієї задачі визначається теоремою Коші про існування та єдиність такого розв'язку.

Теорема Коші. *Нехай задане звичайне диференціальне рівняння першого порядку з початковими умовами*

$$y' = f(x, y(x)), \text{ (або } F(x, y(x), y'(x)) = 0\text{), та } y(x_0) = y_0.$$

Якщо в замкненій області D={|x-x₀|≤a, |y-y₀|≤b} функції $f(x, y)$ *та* $f'_y(x, y)$ *неперервні (або неперервні функції* $F(x, y, y')$, F'_y *та* $F'_{y'} \ne 0$*), то на деякому відрізку* $|x - x_0| \le s$ *існує єдиний розв'язок заданого рівняння, що задовольняє поставленій початковій умові* $y(x_0) = y_0$.

Зазвичай можна взяти $s = \min\left(a, \dfrac{b}{M}\right)$ при $|f| \le M$ в області D. Часто розв'язок початкової задачі визначається не тільки на вказаному відрізку $|x - x_0| \le s$, але й на більш широкому відрізку.

Розв'язок нелінійного диференціального рівняння

$$\Psi(x, y) = 0,$$

який не може бути отриманий із його загального розв'язку

$$\Phi(x, y(x), C) = 0$$

ні при якому чисельному значенні (скінченному або нескінченному) сталої $C \in \square$, називається *особливим розв'язком (особливим інтегралом)* цього рівняння. Графіки особливих розв'язків $\Psi(x, y) = 0$ (або у явному вигляді *y=ψ(x)*) зазвичай є обвідними для сім'ї кривих, що відповідають загальному розв'язку $\Phi(x,y,C)=0$ при різних значеннях сталої C. Тому в кожній точці кривої $\Psi(x,y)=0$ порушується єдиність розв'язку. Всі лінійні диференціальні рівняння особливих розв'язків не мають.

Іноді особливі розв’язки можуть отримуватися із загального розв'язку при підстановці в останнє $C=C(x)\neq const$. Часто вони знаходяться як нулі множників, що скорочуються при алгебраїчних перетвореннях рівняння $F(x,y,y')=0$ (це метод перетворень); але існує і два спеціальних методи їхнього визначення, які розглянемо нижче.

Приведемо в загальному вигляді основні методи розв'язування звичайних диференціальних рівнянь першого порядку

$$F(x, y(x), y'(x)) = 0 \ ,$$

або в явному вигляді

$$y' = f(x, y(x)) .$$

1. Рівняння з відокремлюваними змінними

Основним методом розв'язання таких рівнянь є метод відокремлювання змінних, решта методів тим чи іншим чином зводяться до нього. Якщо вдається записати рівняння у вигляді

$$y' = f(x, y) = f_1(x) \cdot f_2(y) ,$$

де його права частина є добутком двох функцій від одного аргумента кожна, то загальний розв'язок такого рівняння відразу визначається в квадратурах

$$\int \frac{dy}{f_2(y)} = \int f_1(x)dx + C .$$

Якщо знаменник $f_2(y) = 0$ має дійсні корні, то можливі й особливі розв'язки.

2. Однорідні рівняння

Диференціальне рівняння

$$y' = f(x, y)$$

називається *однорідним*, якщо його права частина задовольняє умові однорідності

$$f(ax, ay) = f(x, y), \text{ де } a \neq 0 .$$

Тоді, вибравши $a = \dfrac{1}{x}$, отримаємо

$$f(x, y) = f(ax, ay) = f(1, \frac{y}{x}) .$$

Якщо ввести нову шукану функцію

$$z(x) = \frac{y(x)}{x}$$

та записати

$$y' = xz' + z = f(1, z) ,$$

то змінні в рівнянні відокремлюються і його можна проінтегрувати

$$\int \frac{dz}{f(1,z)-z} = \ln|Cx|.$$

Корені знаменника $f(1,z_0) = z_0$ $(z_0 = const)$ приводять до особливих розв'язків вигляду $y = z_0 x$ - пучок прямих.

Рівняння вигляду

$$y' = f\left(\frac{a_1 x + b_1 y + c_1}{a_2 x + b_2 y + c_2}\right),$$

де $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 = const$, зводиться до однорідного заміною

$$x = \xi + \alpha \text{ та } y(x) = \eta(\xi) + \beta, \text{ де } \alpha, \beta = const,$$

щоб звільнитися від вільних членів c_1 та c_2. Деякі рівняння зводяться до однорідних заміною

$$y(x) = (x \cdot z(x))^{\alpha},$$

де показник $\alpha = const$ підбирається методом порівняння різних частин рівняння.

3. Лінійне диференціальне рівняння першого порядку

$$y' + p(x) \cdot y(x) = f(x) \neq 0$$

розв'язуємо зведенням його спочатку до відповідного однорідного рівняння

$$\overset{o}{y}{}' + p(x) \cdot \overset{o}{y} = 0,$$

змінні в якому завжди розділяються

$$\frac{d\overset{o}{y}}{\overset{o}{y}} = -p(x)dx,$$

і отримуємо розв'язок

$$\overset{o}{y}(x) = \overset{o}{C} \cdot \exp(-\int p(x)dx) \text{ при } \overset{o}{C} = const.$$

Розв'язок первісного неоднорідного рівняння можна знайти підбором або методом варіації довільної сталої, прийнявши

$$y(x) = C(x) \cdot \exp(-\int p(x)dx).$$

Величина $C(x)$ легко знаходиться із заданого рівняння

$$y' + p(x) \cdot y = C'(x) \cdot e^{-\int pdx} = f(x)$$

або

$$C'(x) = f(x) \cdot e^{\int pdx} \Rightarrow C(x) = C_0 + \int e^{\int pdx} \cdot f(x)dx, \; C_0 = const.$$

Тоді остаточно отримаємо

$$y(x) = C(x) \cdot \mathrm{e}^{-\int pdx} = \left(C_0 + \int e^{\int pdx} \cdot f(x)dx\right) \cdot e^{-\int pdx}.$$

4. Рівняння Бернулі

З лінійними рівняннями пов'язане нелінійне рівняння Бернулі

$$y' + p(x) \cdot y = f(x) \cdot y^{\alpha}, \text{ де } \alpha = const \text{ та } \alpha \neq 0, \alpha \neq 1.$$

Перепишемо це рівняння у вигляді

$$y' \cdot y^{-\alpha} + p(x) \cdot y^{1-\alpha} = f(x)$$

та введемо нову шукану функцію

$$z(x) = y^{1-\alpha}.$$

Тоді для функції $z(x)$ отримаємо лінійне рівняння, при поверненні до первісної функції $y(x)$ можуть з'явитися особливі розв'язки.

5. Рівняння в повних диференціалах

Рівняння вигляду

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$$

називається *рівнянням в повних диференціалах*, якщо його ліва частина дійсно є повним диференціалом деякої функції $u(x,y)$. Це має місце, якщо виконується рівність

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} (= \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}).$$

Тоді рівняння можна записати у вигляді

$$du(x,y) = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy = P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$$

та визначити функцію $u(x,y)$ за допомогою криволінійного інтеграла по будь-якому зручному ломаному контуру. Можна знайти розв'язок і роздільним інтегруванням, наприклад,

$$u(x,y) = \int P(x,y)dx = f(x,y) + C(y),$$

де $C(y)$ - довільна функція від y. Похідну від цієї функції визначимо із порівняння з виразом

$$\frac{\partial u}{\partial y} = Q(x,y)dy = f'_y(x,y) + C'(y)$$

та отримаємо розв'язок

$$u(x,y) = f(x,y) + C(y) = C_0.$$

Якщо рівняння

$$Pdx + Qdy = 0$$

не є повним диференціалом (тобто $\frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x}$), то це можна виправити, домноживши вираз

$$Pdx + Qdy = 0$$

на інтегруючий множник

$$\mu = \mu(x, y) \neq 0 .$$

Такий множник часто можна знайти за допомогою перетворень рівняння або розв'язавши спеціальне рівняння

$$\frac{\partial}{\partial x}(\mu Q) = \frac{\partial}{\partial y}(\mu P)$$

за умови, що множник $\mu(x, y)$ залежить лише від однієї зі змінних $\mu = \mu(x)$ або $\mu = \mu(y)$. Особливі розв'язки заданого рівняння

$$Pdx + Qdy = 0$$

звичайно знаходяться при його різних перетвореннях.

6. Рівняння Лагранжа

Рівнянням Лагранжа називається рівняння лінійне відносно x та y та нерозв'язуване відносно похідної y':

$$y = \varphi(y') \cdot x + \psi(y') .$$

Якщо ввести параметр $p = y'$, отримаємо вираз $y = \varphi(p) \cdot x + \psi(p)$, який міг би бути розв'язком рівняння в параметричній формі. Для знаходження *x(p)* продиференціюємо наше рівняння по змінній x і отримаємо вираз

$$y' \equiv p = \varphi(y) + x \cdot \varphi'(p) \frac{dp}{dx} + \psi'(p) \frac{dp}{dx} ,$$

який легко зводиться до лінійного неоднорідного рівняння відносно функції $x(p)$ вигляду

$$\frac{dx}{dp} + \frac{\varphi'(p)}{\varphi(p) - p} \cdot x(p) = \frac{\psi'(p)}{\varphi(p) - p} , \text{ де } \varphi(p) \neq p .$$

Отримане лінійне рівняння завжди розв'язується в квадратурах, що і дає потрібний вираз $x(p)$ через параметр. Розв'язок рівняння Лагранжа у звичайному виляді $y(x) = ...$ (не в параметричному $x = x(p), y = y(p)$) практично ніколи не отримується.

Якщо виявиться, що рівняння $\varphi(p) = p$ має розв'язок $p = p_0 = const$, то лінійна функція $y = \varphi(p_0) \cdot x + \psi(p_0)$ є особливим розв'язком рівняння Лагранжа (він не отримується із загального розв'язку).

7. Рівняння Клеро

$$y = y' \cdot x + \psi(y')$$

є окремим випадком рівняння Лежандра при $\varphi(y') = y'$. Його загальний розв'язок має вигляд $y = Cx + \psi(C)$ - це сім'я прямих при різних $C = const$. Тоді особливий розв'язок рівняння Клеро може бути лише обвідною цієї сім'ї.

Зауважимо, що завжди, коли записати задане рівняння в явному вигляді відносно y' складно, вводять параметр $y'=p(x)$ і рівняння

$$F(x,y,p)=0$$

розв'язують методом диференціювання, тобто знаходять повну похідну

$$\frac{dF}{dx}=\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}\cdot p+\frac{\partial F}{\partial p}\cdot\frac{dp}{dx}=0,$$

звідки отримують диференціальне рівняння для параметра $p(x)$. Воно буде такого вигляду:

$$\frac{dp}{dx}=f_0(p,x(p)).$$

Розв'язуючи його, отримаємо загальний інтеграл початкового рівняння

$$F(x,y,p(x,C))=\Phi(x,y,C)=0.$$

Якщо з рівняння

$$F(x,y,p)=0$$

нескладно знайти

$$y=g(x,p)$$

(для випадку $x=g(y,p)$ все робиться аналогічно), то знаходять повну похідну

$$\frac{dy}{dx}\equiv p=\frac{\partial g}{\partial x}+\frac{\partial g}{\partial p}\cdot\frac{dp}{dx},$$

або

$$\frac{dx}{dp}=\frac{\dfrac{\partial g}{\partial p}}{p-\dfrac{\partial g}{\partial x}},$$

що дозволяє записати і розв'язати рівняння для функції $x(p,C)$. Тоді загальний розв'язок початкового рівняння знаходиться в параметричній формі

$$\begin{cases} x=x(p,C) \\ y=g(x(p,C),p) \end{cases}.$$

Якщо загальне рівняння

$$F(x,y,y')=0$$

розпадається на декілька рівнянь вигляду

$$y'=f_k(x,y)$$

при $k=1,2,3,\ldots;$ причому криві, що відповідають їхнім загальним розв'язкам

$$y=\varphi_k(x,C)$$

в кожній точці перетину одна з одною, мають різні дотичні, то такі рівняння та їхні розв'язки вважаються різними (не пов'язаними між собою).

Як вже було сказано, часто особливі розв'язки знаходяться як нулі множників, що скорочуються при алгебраїчних перетвореннях рівняння

$F(x,y,y')=0$ (метод перетворень); але *існує і два спеціальних методи* їхнього визначення. Розглянемо їх.

Для визначення особливого розв'язку по заданному рівнянню

$$F(x,y,y')=0$$

(***p*-метод**) роблять заміну $y'=p(x)$, а потім вилучають параметр p із системи

$$\begin{cases} F(x,y,p)=0 \\ F'_p(x,y,p)=0 \end{cases}$$

і отримують рівняння дискримінантної кривої

$$\Psi(x,y)=0$$

(тут вимога $F'_p=0$ порушує умову теореми Коші $F'_{y'}\neq 0$). Якщо отримана функція $\Psi(x,y)=0$ (або $y=\psi(x)$) задовольняє початковому рівнянню та на деякому інтервалі значень x порушується єдиність розв'язку, то вираз $\Psi(x,y)=0$ (або $y=\psi(x)$) є особливим розв'язком.

Для визначення особливого розв'язку по загальному інтегралу

$$\Phi(x,y,C)=0$$

(***C*-метод**) заданого рівняння $F(x,y,y')=0$ вилучають величину C із системи

$$\begin{cases} \Phi(x,y,C)=0 \\ \Phi'_C(x,y,C)=0 \end{cases}$$

і отримують рівняння обвідної $\Psi(x,y)=0$ (або $y=\psi(x)$) для сім'ї загальних розв'язків рівняння при різних значеннях сталої C. Функція $\Psi(x,y)=0$, як і вище, буде особливим розв'язком, якщо вона задовольняє початковому рівнянню та на деякому інтервалі значень x порушується єдиність розв'язку. Може виявитися, що величина C, яка відповідає особливому розв'язку, не є сталою, тобто $C=C(x)\neq const$

Важливо відмітити, що за **р-методом** можна відразу відповісти на запитання про існування особливих розв'язків і не треба розв'язувати задане диференціальне рівняння, що іноді виявляється нелегкою задачею. Але, хоч за **С-методом** і необхідно перед знаходженням особливого розв'язку цю задачу розв'язувати, проте цим методом відразу ж знаходиться рівняння обвідної.

Нижче наведені розв'язання деяких типових нелінійних звичайних диференціальних рівнянь першого порядку, знайдені загальний та особливі розв'язки цих рівнянь. Зображені сім'ї графіків частинних розв'язків при різних значеннях довільної сталої C та графіки особливих розв'язків, які часто є обвідними для сім'ї частинних розв'язків.

Приклади

Знайти розв'язки таких диференціальних рівнянь і дослідити їх:

1. $y'^2 - 2xy' = 8x^2$

Це рівняння загального вигляду

$$F(x, y, y') \equiv y'^2 - 2xy' - 8x^2 = (y' - 4x)(y' + 2x) = 0$$

розпадається на два незалежних рівняння

$$y' = f_1(x, y) \equiv 4x \text{ та } y' = f_2(x, y) \equiv -2x,$$

загальний розв'язок кожного з них отримуються безпосереднім інтегруванням:

$$y = 2x^2 + C \text{ та } y = C - x^2.$$

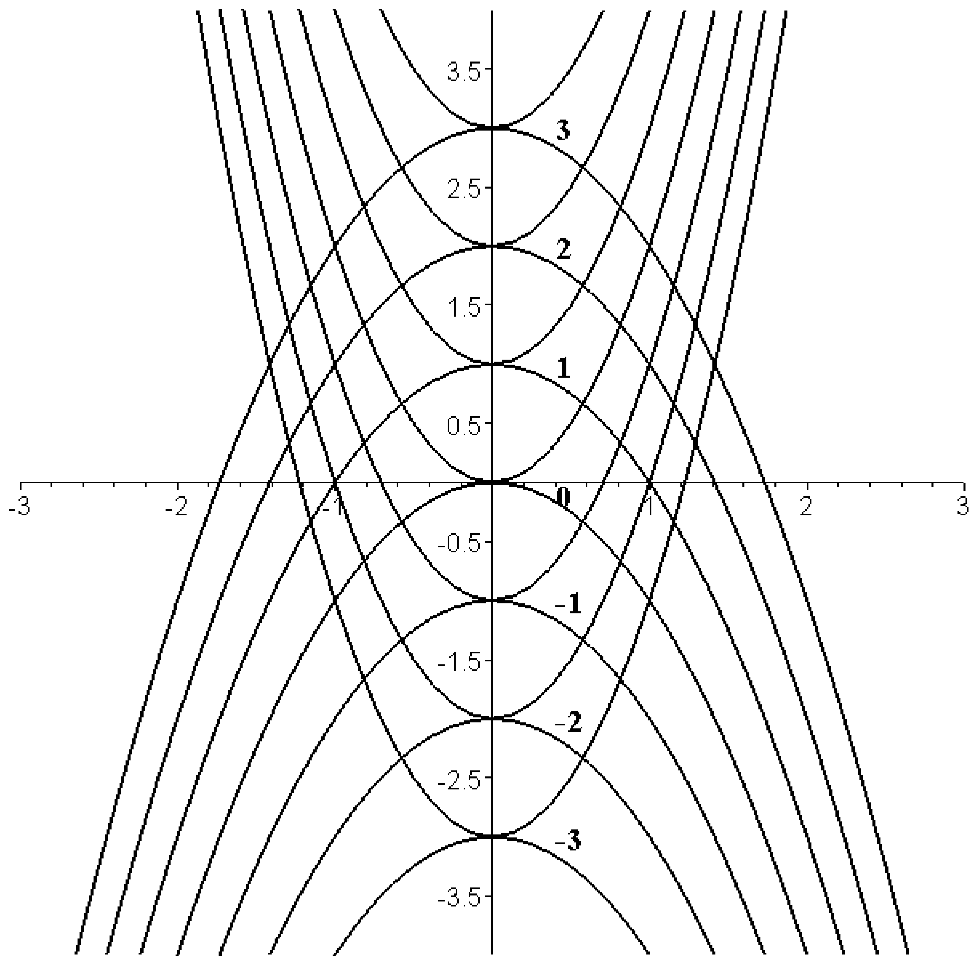

Рис. 1 Графіки розв'язків рівняння $y'^2 - 2xy' = 8x^2$ при C = -3,..,3.

Тоді отримуємо загальні інтеграли

$$\Phi_1(x, y, C) \equiv y - 2x^2 - C = 0 \text{ та } \Phi_2(x, y, C) \equiv y + x^2 - C = 0;$$

іноді їх записують

$$\Phi(x, y, C) \equiv \Phi_1(x, y, C) \cdot \Phi_2(x, y, C) = (y - 2x^2 - C)(y + x^2 - C) = 0.$$

Тут функції Φ_1 та Φ_2 є двома непов'язаними загальними розв'язками, оскільки їхні графіки в точках перетину у загальному випадку мають різні дотичні; значення сталої C (рис.1) у функціях Φ_1 та Φ_2 вважається однаковим.

Для визначення особливих розв'язків по p-методу введемо параметр

$$y' = p(x)$$

і розглянемо систему

$$\begin{cases} F(x,y,p) \equiv p^2 - 2xp - 8x^2 = 0 \\ F'_p(x,y,p) = 2(p-x) = 0 \Rightarrow p = x \end{cases}.$$

Тут параметр p легко вилучити

$$F(x,y,p)\Big|_{p=x} = -9x^2 \neq 0,$$

але при цьому рівняння не задовольняється і немає особливих розв'язків при $x \neq 0$. Перетинаючи при $x = 0$ вісь ординат, графіки розв'язків Φ_1 та Φ_2 мають спільну дотичну, отже ця вісь – геометричне місце особливих точок початкового рівняння; проте функція $x = 0$ рівнянню не задовольняє (не є розв'язком). Отже особливих розв'язків рівняння, що розглядається, не має; отже не може бути і обвідної.

2. $y^2(y'^2 + 1) = 1$

Розв'яжемо рівняння відносно похідної

$$y' = f(x,y) \equiv \pm\frac{1}{y}\sqrt{1-y^2}$$

при $y \neq 0$ ($y = 0$ не задовольняє рівнянню); потім розділимо змінні

$$\frac{ydy}{\sqrt{1-y^2}} = \pm dx \text{ при } y \neq \pm 1$$

та, проінтегрувавши, отримуємо

$$\sqrt{1-y^2} = C \pm x \text{ або } (x-C)^2 + y^2 = 1;$$

отже, загальний інтеграл (рис. 2)

$$\Phi(x,y,C) \equiv (x-C)^2 + y^2 - 1 = 0.$$

По p-методу знайдемо особливий розв'язок; введемо параметр $y' = p(x)$ та видалимо p із системи

$$\begin{cases} F(x,y,p) \equiv y^2(p^2+1) - 1 = 0 \\ F'_p(x,y,p) = 2py^2 = 0 \Rightarrow y \neq 0, p = 0 \end{cases}.$$

Тоді $F(x,y,p)\Big|_{p=0} = y^2 - 1 = 0$ та отримуємо $y = \pm 1$ – особливі розв'язки. Це вже було ясно і вище з результатів перетворень.

За C-методом перевіримо, що ці розв'язки є обвідними. Для цього вилучимо сталу C із системи

$$\begin{cases}\Phi(x,y,C)\equiv(x-C)^2+y^2-1=0\\ \Phi'_C(x,y,C)=-2(x-C)=0\Rightarrow C(x)=x\neq const\end{cases},$$

тоді

$$\Phi'_C(x,y,C)\big|_{C=x}=y^2-1=0.$$

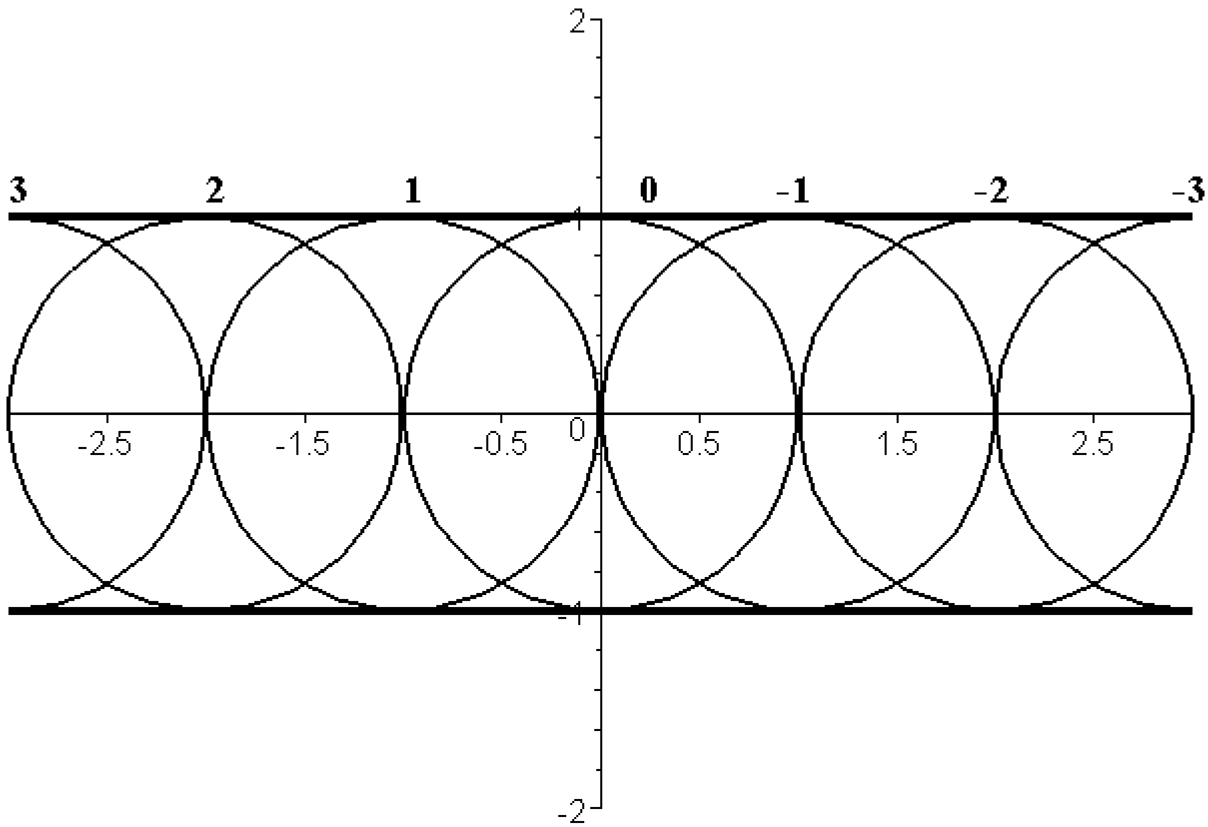

Рис. 2 Графіки розв'язків рівняння $y^2(y'^2+1)=1$ при C = -3,..,3.

Тобто особливі розв’язки рівняння $y=\pm1$ будуть обвідними (дотичними) для сім’ї кіл $(x-C)^2+y^2=1$ (рис. 2).

.

3. $x(y'^2-1)=2y'$

Якщо ввести параметр $y'=p$, то отримаємо вираз

$$x(p)=\frac{2p}{p^2-1}.$$

Визначимо диференціал функції

$$dy(p)=pdx(p)=-\frac{2p(p^2+1)}{(p^2-1)^2}dp,$$

звідки

$$y(p)=\int pdx(p)=$$

$$=px(p)-\int x(p)dp=$$

$$=\frac{2p^2}{p^2-1}-\int\frac{2p}{p^2-1}dp=$$

$$=\frac{2}{p^2-1}-\ln\left|C(p^2-1)\right|$$

Загальний інтеграл рівняння тут знаходиться в параметричній формі

$$\begin{cases} x(p)=\dfrac{2p}{p^2-1} \\ y(p)=\dfrac{2}{p^2-1}-\ln\left|C(p^2-1)\right|, \; ð\neq\pm1 \end{cases}$$

Для визначення особливих розв'язків розглянемо систему

$$\begin{cases} F(x,y,p)\equiv x^2(p^2-1)-2p=0 \\ F'_p(x,y,p)=2(px-1)=0\Rightarrow px=1 \end{cases},$$

тоді $p=\dfrac{1}{x}\;(x\neq0)$,

$$F(x,y,p)\Big|_{p=\frac{1}{x}}=\frac{-(x^2+1)}{x}\neq0.$$

Це рівняння не має дійсних розв'язків, отже особливих розв'язків теж немає (рис. 3).

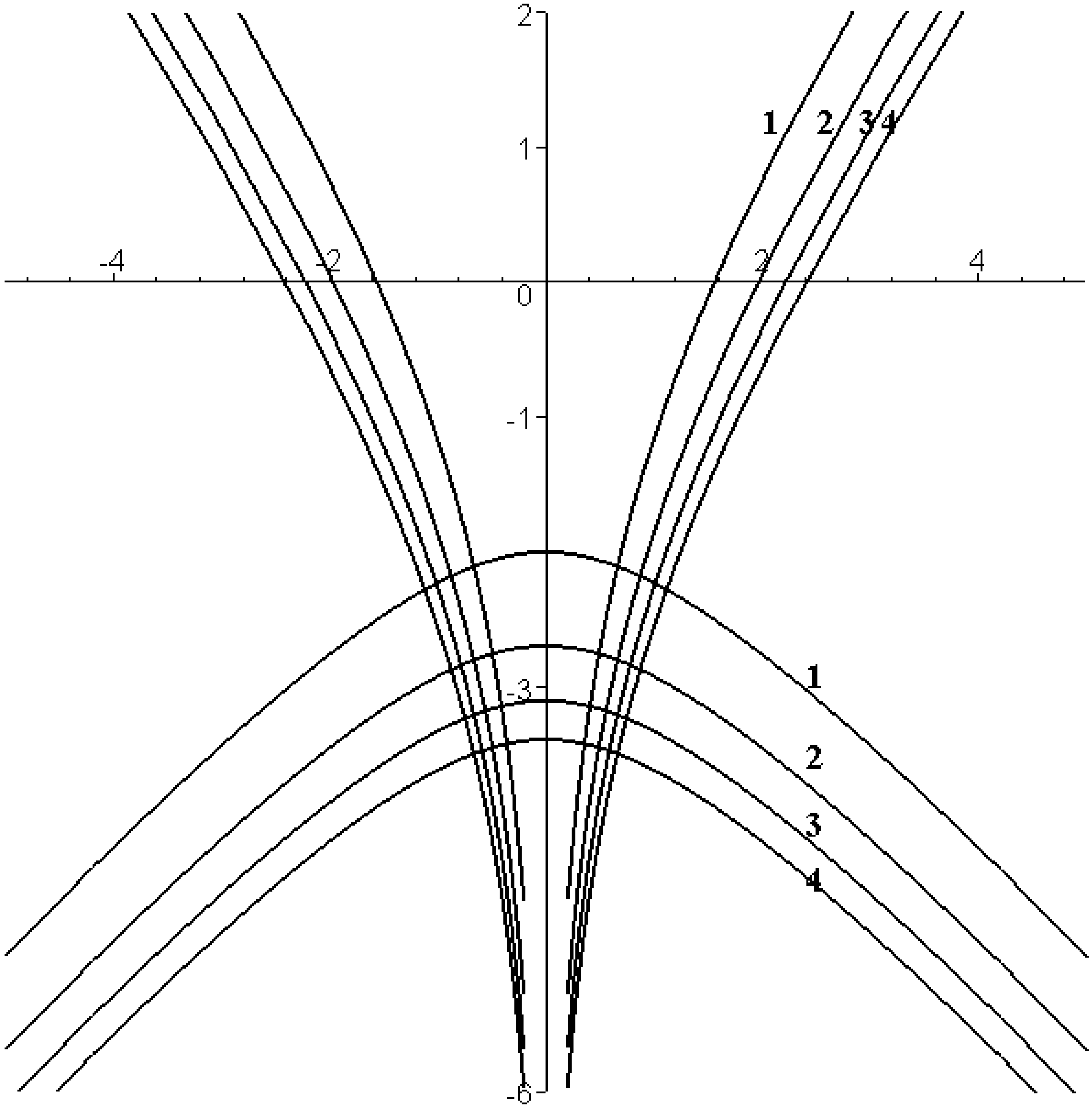

Рис. 3 Графіки розв'язків рівняння $x(y'^2-1)=2y'$ при C =1,..,4.

4. $y = y'^2 - xy' + \dfrac{1}{2}x^2$

Рівняння

$$F(x,y,p) \equiv y - p^2 + xp - \frac{1}{2}x^2 = 0,\ p = y'$$

будемо розв'язувати за методом диференціювання. Знайдемо повну похідну

$$\frac{dF}{dx} = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\cdot p + \frac{\partial F}{\partial p}\cdot\frac{dp}{dx} = 0$$

та отримаємо

$$p - x + p + (x - 2p)\cdot\frac{dp}{dx} = 0 \text{ або } \left(\frac{dp}{dx} - 1\right)\left(p - \frac{x}{2}\right) = 0.$$

Рівняння $\frac{dp}{dx} = 1$ має розв'язок $p = x + C$, тому

$$F(x, y, p)\Big|_{p=x+C} = \Phi(x, y, C) \equiv y - C^2 - Cx - \frac{1}{2}x^2 = 0$$

і загальний розв'язок рівняння (рис. 4), що розглядається, буде

$$y = C^2 + Cx + \frac{1}{2}x^2.$$

Значення $p = \frac{x}{2}$ приводить до іншого розв'язку

$$F(x, y, p)\Big|_{p=\frac{x}{2}} = \Psi(x, y) \equiv y - \frac{1}{4}x^2 = 0 \text{ або } y = \frac{1}{4}x^2.$$

Використовуючи p-метод, покажемо, що останній розв'язок особливий. Розглянемо систему

$$\begin{cases} F(x, y, p) \equiv y + xp - p^2 - \frac{1}{2}x^2 = 0 \\ F'_p(x, y, p) = x - 2p = 0 \Rightarrow x = 2p \end{cases},$$

звідки

$$p = \frac{x}{2},$$

$$F(x, y, p)\Big|_{p=\frac{x}{2}} = y - \frac{1}{4}x^2 = 0 \text{ або } y = \frac{1}{4}x^2.$$

Далі розглянемо систему

$$\begin{cases} \Phi(x, y, C) \equiv y - \frac{1}{2}x^2 - Cx - C^2 = 0 \\ \Phi'_C(x, y, C) = -x - 2C = 0 \Rightarrow C(x) = -\frac{x}{2} \neq const \end{cases},$$

тоді

$$\Phi(x, y, C)\Big|_{C=\frac{-x}{2}} = y - \frac{1}{4}x^2 = 0.$$

Таким чином, дійсно, розв'язок $y = \frac{1}{4}x^2$ буде особливим – обвідною сім'ї кривих загального розв'язку при різних чисельних значеннях C (рис. 4).

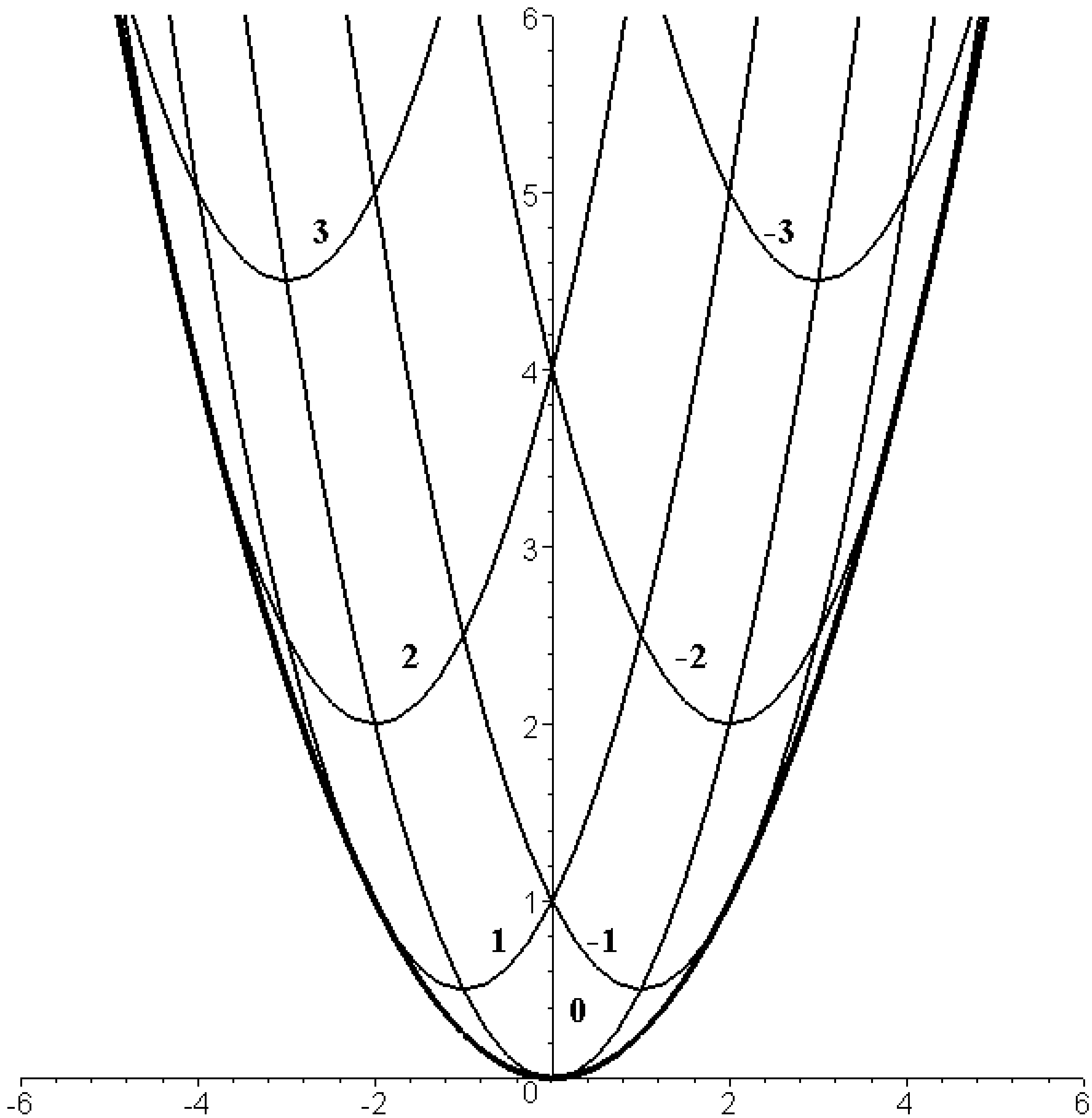

Рис. 4 Графіки розв'язків рівняння $y = y'^2 - xy' + \frac{1}{2}x^2$ при C = -3,..,3.

5. $(y'+1)^3 = 27(y+x)^2$

Введемо нову шукану функцію

$$z(x) = y(x) + x\,.$$

Тоді

$$z' = y' + 1$$

і рівняння матиме вигляд

$$z'^3 = 27z^2 \text{ або } z' = 3z^{\frac{2}{3}}\,.$$

Розділимо змінні

$$\frac{1}{3} z^{-\frac{2}{3}} dz = dx$$

при $z \neq 0$ (або $y \neq -x$) та проінтегруємо, тоді

$$z^{\frac{1}{3}} = x + C$$

і, отже, $z(x) = (x + C)^3$.

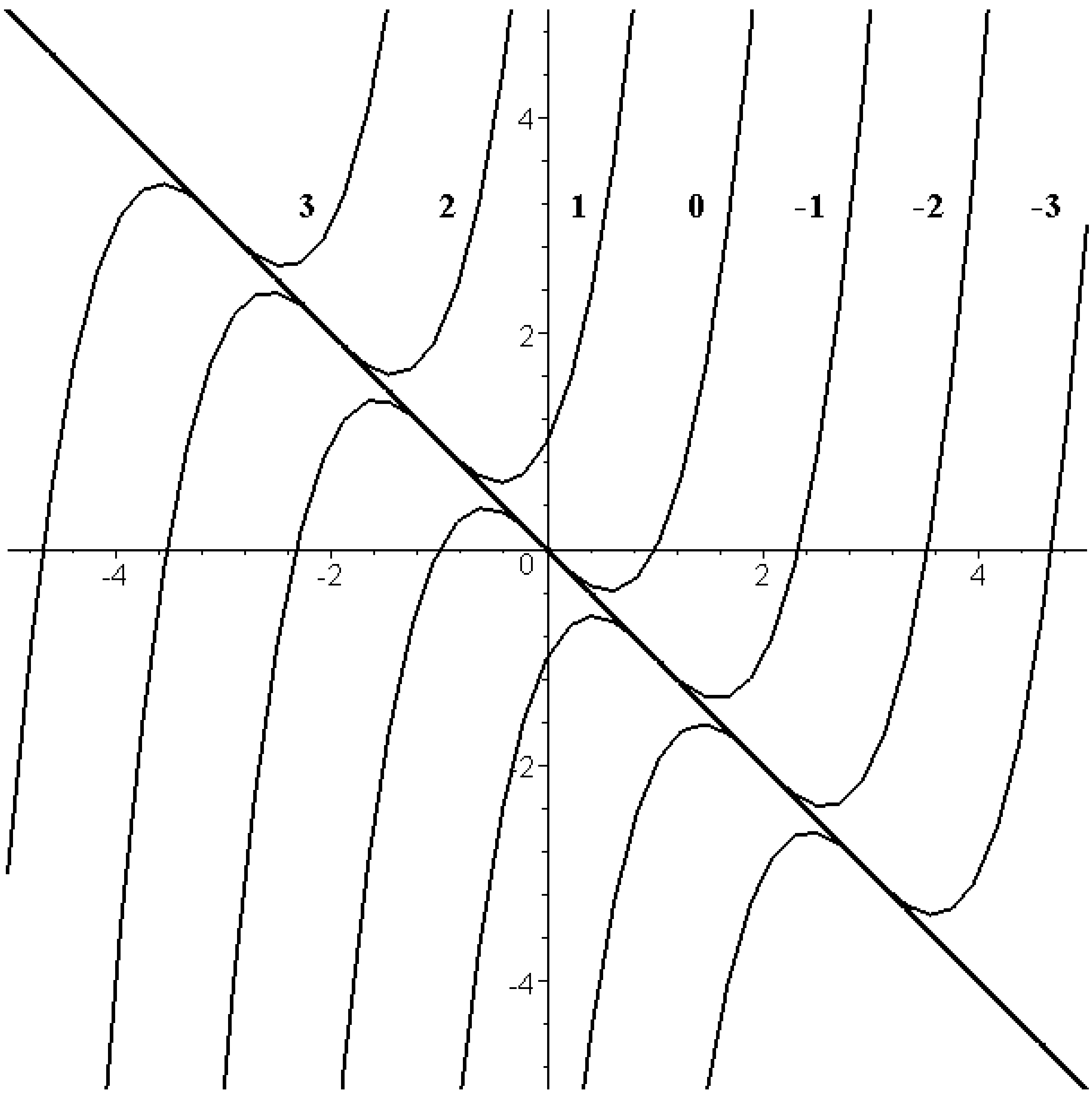

Рис. 5 Графіки розв'язків рівняння $(y' + 1)^3 = 27(y + x)^2$ при C = -3,..,3.

Якщо повернутися до шуканої функції $y(x)$, отримаємо остаточно

$$y(x) = (x + C)^3 - x$$

або $\Phi(x, y, C) \equiv (x + C)^3 - (y + x) = 0$.

Знайдемо особливий розв'язок за p-методом

$$\begin{cases} F(x,y,p) \equiv (p+1)^3 - 27(y+x)^2 = 0 \\ F'_p(x,y,p) = 3(p+1)^2 = 0 \Rightarrow p = -1 \end{cases},$$

тоді

$$F(x,y,p)\Big|_{p=-1} = 27(y+x)^2 = 0$$

або $y = -x$ (рис. 5).

Отже, дійсно, особливим розв'язком буде обвідна $y = -x$ для сім'ї кубічних парабол.

6. $y'^2 - 2xy' + 4y = x^2$

Записавши рівняння через параметр $y' = p(x)$, отримаємо

$$F(x,y,p) \equiv p^2 - 2xp - x^2 + 4y = 0.$$

Знайдемо повну похідну

$$\frac{dF}{dx} = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\cdot p + \frac{\partial F}{\partial p}\cdot\frac{dp}{dx} = 0,$$

тоді

$$-2p - 2x + 4p + (2p - 2x)\cdot\frac{dp}{dx} = 0 \text{ або } (\frac{dp}{dx} + 1)(p - x) = 0.$$

З рівняння $\dfrac{dp}{dx} = -1$ отримаємо $p = C - x$ і знайдемо загальний розв'язок

$$F(x,y,p)\Big|_{p=C-x} = \Phi(x,y,C) \equiv 4y + 2(C-x)^2 - C^2 = 0 \text{ або } y = \frac{1}{4}(C^2 - 2(C-x)^2).$$

Для $p = x$ отримаємо інший розв'язок

$$F(x,y,p)\Big|_{p=x} = \Psi(x,y) \equiv 2(2y - x^2) = 0 \text{ або } y = \frac{x^2}{2}.$$

Для пошуку особливого розв'язку дослідимо систему

$$\begin{cases} F(x,y,p) \equiv p^2 - 2px - x^2 + 4y = 0 \\ F'_p(x,y,p) = 2(p - x) = 0 \Rightarrow p = x \end{cases},$$

тоді $F(x,y,p)\Big|_{p=x} = \Psi(x,y) \equiv 2(2y - x^2) = 0$, звідки $y = \dfrac{x^2}{2}$.

Перевіримо, що це рівняння обвідної

$$\begin{cases} \Phi(x,y,C) \equiv 4y - C^2 + 2(C-x)^2 = 0 \\ \Phi'_C(x,y,C) = 2(C - 2x) = 0 \Rightarrow C(x) = 2x \neq const \end{cases},$$

тепер $\Phi(x,y,C)\Big|_{C=2x} = 2(2y - x^2) = 0$ або $y = \dfrac{x^2}{2}$.

Отже, рівняння обвідної $y = \dfrac{x^2}{2}$ буде особливим розв’язком (рис. 6).

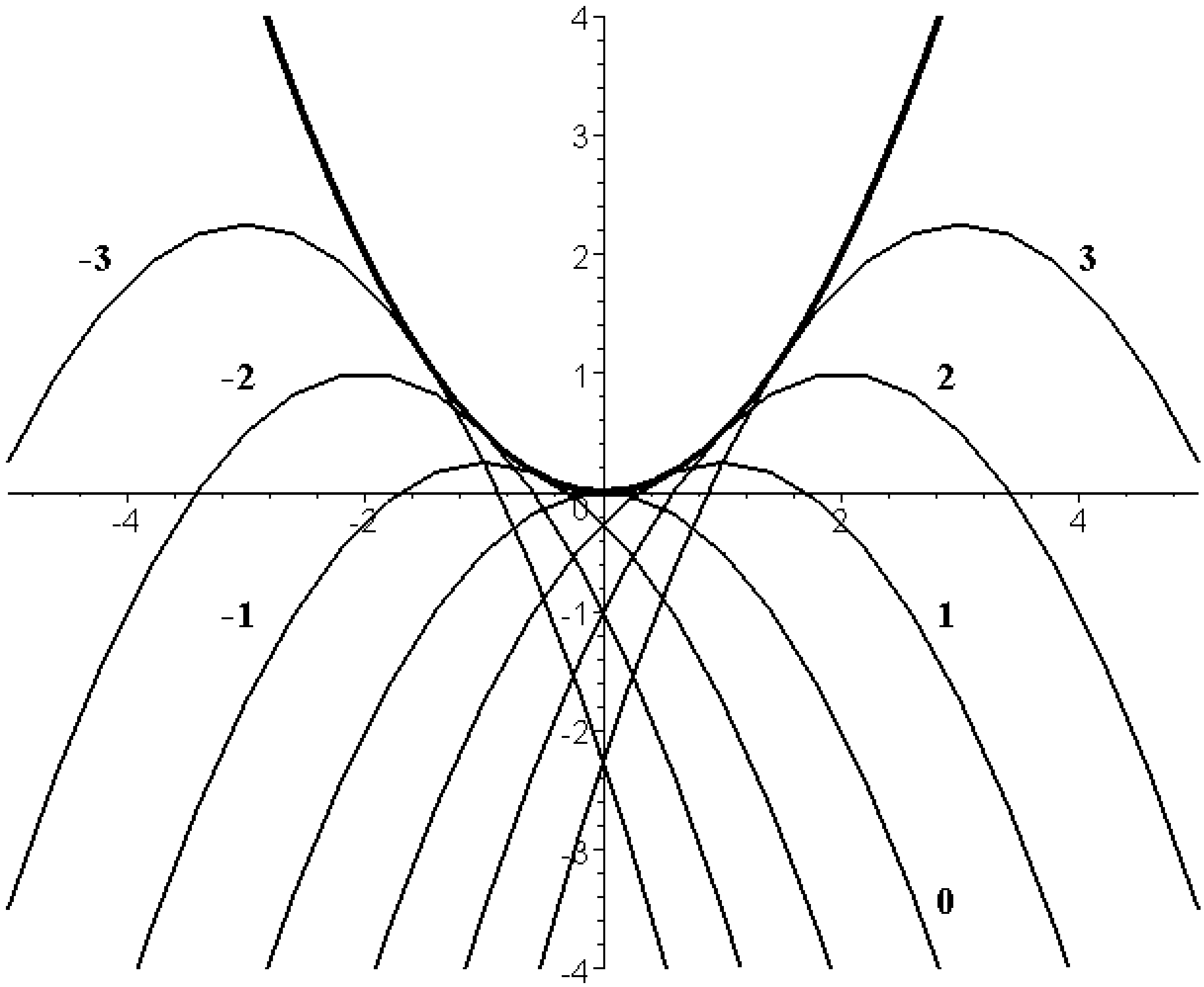

Рис. 6 Графіки розв'язків рівняння $y'^2 - 2xy' + 4y = x^2$ при C = -3,..,3.

7. $y = 2xy' + y^2 y'^3$

Від загального вигляду рівняння

$$F(x, y, p) \equiv 2xp + y^2 p^3 - y = 0$$

знайдемо повну похідну

$$\frac{dF}{dx}=\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}\cdot p+\frac{\partial F}{\partial p}\cdot\frac{dp}{dx}$$

$$=2p+(2yp^3-1)p+(2x+3y^2p^2)\frac{dp}{dx}=0$$

або

$$(2yp^3+1)+(2x+3y^2p^2)\cdot\frac{dp}{dx}=0.$$

Далі перетворимо похідну

$$\frac{dp}{dx}=\frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx}=p\cdot\frac{dp}{dy}$$

та із загального вигляду рівняння знайдемо вираз

$$2x=\frac{y}{p}-y^2p^2 \text{ при } p\neq 0.$$

Тоді змінна x із рівняння для повної похідної вилучається і воно прийме вигляд

$$p(2yp^3+1)+(\frac{y}{p}-y^2p^2+3y^2p^2)p\frac{dp}{dy}=0$$

або

$$(y\frac{dp}{dy}+p)(2yp^3+1)=0.$$

В першому множнику розділимо змінні

$$\frac{dy}{y}=-\frac{dp}{p} \text{ при } y\neq 0, p\neq 0,$$

тоді $p=\dfrac{C}{y}\neq 0$, звідки

$$F(x,y,p)\Big|_{p=\frac{C}{y}}=\frac{1}{y}(C^3+2Cx-y^2)=0,$$

і загальний інтеграл початкового рівняння буде

$$\Phi(x,y,C)\equiv C^3+2xC-y^2=0.$$

Із другого множника отримаємо

$$p=\frac{-1}{\sqrt[3]{2y}}\neq 0,$$

тому другий розв’язок

$$F(x,y,p)\Big|_{p=\frac{-1}{\sqrt[3]{2y}}}=-\frac{(4x+3y\sqrt[3]{2y})}{2\sqrt[3]{2y}}=0$$

або в раціональній формі

$$\Psi(x,y)\equiv 27y^4+32x^3=0$$

при $x \le 0$.

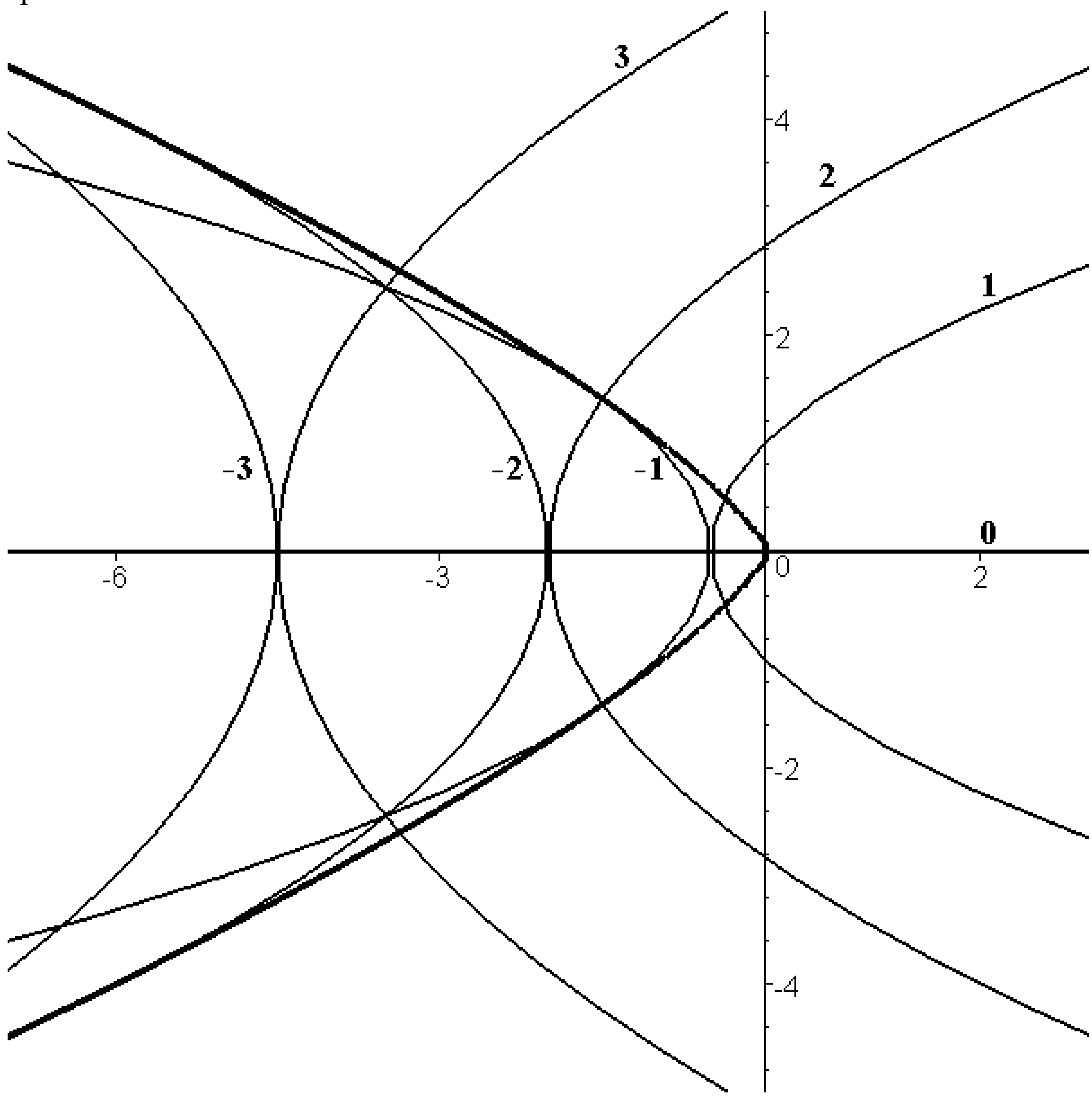

Рис. 7 Графіки розв'язків рівняння $y = 2xy' + y^2 y'^3$ при C = -3,..,3.

Нарешті, приймаючи $py = C = 0$, знаходимо ще один розв’язок $y = 0$ (рис. 7). Оскільки $\Phi(x, y, 0) = -y^2 = 0$, то виходить $y = 0$ – частинний розв’язок. Перевіримо, що розв’язок $\Psi(x, y) = 0$ буде особливим. Дійсно,

$$\begin{cases} F(x, y, p) \equiv 2xp + y^2 p^3 - y = 0 \\ F'_p(x, y, p) = 2x + 3p^2 y^2 = 0 \Rightarrow p = \dfrac{1}{y}\sqrt{\dfrac{-2x}{3}} \;\text{ï ðè}\; x \le 0 \end{cases};$$

підставляючи цей вираз в функцію $F(x, y, p) = 0$, приходимо до нового виразу

$$\Psi(x,y) \equiv 27y^4 + 32x^3 = 0\,.$$

Із загального розв'язку отримаємо той самий результат для обвідної

$$\begin{cases} \Phi(x,y,C) \equiv C^3 + 2xC - y^2 = 0 \\ \Phi'_C(x,y,C) = 3C^2 + 2x = 0 \Rightarrow C(x) = \sqrt{\dfrac{-2x}{3}} \neq const \end{cases},$$

далі буде

$$\Phi(x,y,C)\Big|_{C=\sqrt{\frac{-2x}{3}}} = \frac{4x}{3}\sqrt{\frac{-2x}{3}} - y^2 = 0$$

або в раціональній формі

$$\Psi(x,y) \equiv 27y^4 + 32x^3 = 0$$

при $x \le 0$.

8. $y = xy' + \dfrac{1}{2}y'^2$

Це рівняння Клеро. Введемо параметр $y' = p(x) \neq 0$ і запишемо

$$y = g(x,p) \equiv xp + \frac{1}{2}p^2\,.$$

Знайдемо повну похідну

$$\frac{dy}{dx} \equiv p = \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial p}\cdot\frac{dp}{dx} =$$

$$= p + (x - \frac{1}{p^3})\frac{dp}{dx}\,,$$

або

$$p = p + (x - \frac{1}{p^3})\frac{dp}{dx}\,,$$

звідки

$$\frac{dp}{dx}(x - \frac{1}{p^3}) = 0\,.$$

Спочатку із рівняння

$$\frac{dp}{dx} = 0$$

знайдемо

$$p(x) = C \neq 0.$$

Тоді розв'язок початкового рівняння буде

$$y = g(x,C) \equiv Cx + \frac{1}{2C^2}\,,$$

тобто загальний розв'язок рівняння Клеро отримується із заданого рівняння формальною заміною в ньому похідної $y' = p$ на сталу *C* (рис. 8).
Потім розглянемо значення

$$x = \frac{1}{p^3}.$$

Тоді

$$y = g(\frac{1}{p^3}, p) = \frac{3}{2p^2},$$

що дає інший розв'язок початкового рівняння в параметричній формі

$$\begin{cases} x(\eth) = \dfrac{1}{\eth^3} \\ y(p) = \dfrac{3}{2p^2} \end{cases}$$

при $p \neq 0$.
Якщо вилучити параметр *p*, то отримуємо розв'язок у явному вигляді (рис. 8)

$$y = \frac{3}{2} x^{\frac{2}{3}}$$

або в раціональній формі

$$\Psi(x, y) \equiv 8y^3 - 27x^2 = 0.$$

Легко перевірити, що цей розв'язок особливий.

Розглянемо систему

$$\begin{cases} F(x, y, p) \equiv y - xp - \dfrac{1}{2} p^2 = 0 \\ F'_p(x, y, p) = -x + \dfrac{1}{p^3} = 0 \Rightarrow x = \dfrac{1}{p^3} \end{cases}$$

Звідки

$$F(x, y, p)\Big|_{p=\frac{1}{\sqrt[3]{x}}} = y - \frac{3}{2} x^{\frac{2}{3}} = 0$$

або $y = \frac{3}{2} x^{\frac{2}{3}}$.

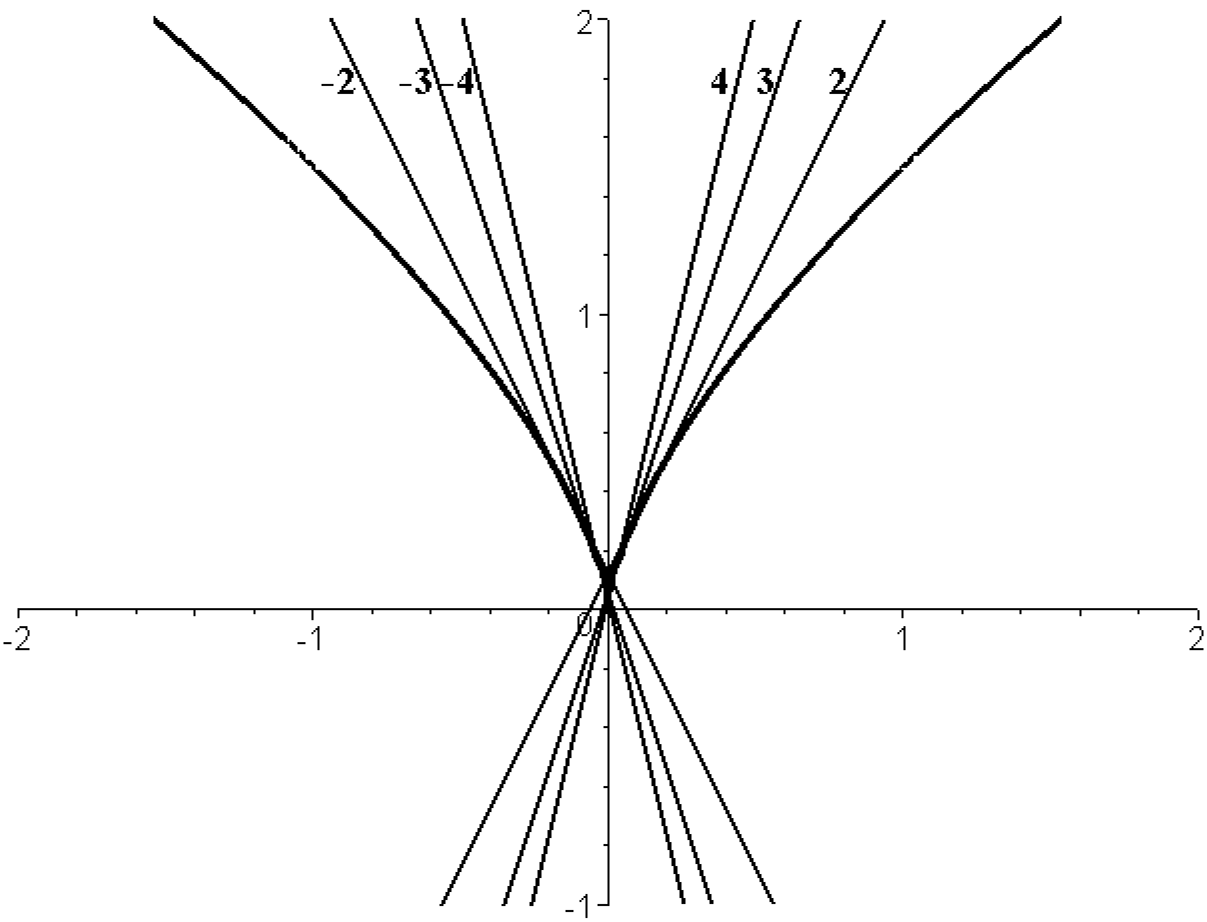

Рис. 8 Графіки розв'язків рівняння $y = xy' + \frac{1}{2}y'^2$ при C = -4,..,-2,2,..,4.

Тепер перевіримо, що це рівняння обвідної. Розглянемо систему

$$\begin{cases} \Phi(x,y,C) \equiv y - Cx - \dfrac{1}{2C^2} = 0 \\ \Phi'_C(x,y,C) = -x + \dfrac{1}{C^3} = 0 \Rightarrow C(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}} \neq const \end{cases},$$

звідки

$$\Phi(x,y,C)\Big|_{C=\frac{1}{\sqrt[3]{x}}} = y - \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}} = 0$$

або в раціональній формі $\Psi(x,y) \equiv 8y^3 - 27x^2 = 0$.

9. $y = xy' - \ln y'$

Це знову рівняння Клеро. Його загальний розв'язок можна записати відразу

$$y = xC - \ln C,$$

де $C > 0$ - довільна стала (рис. 9).

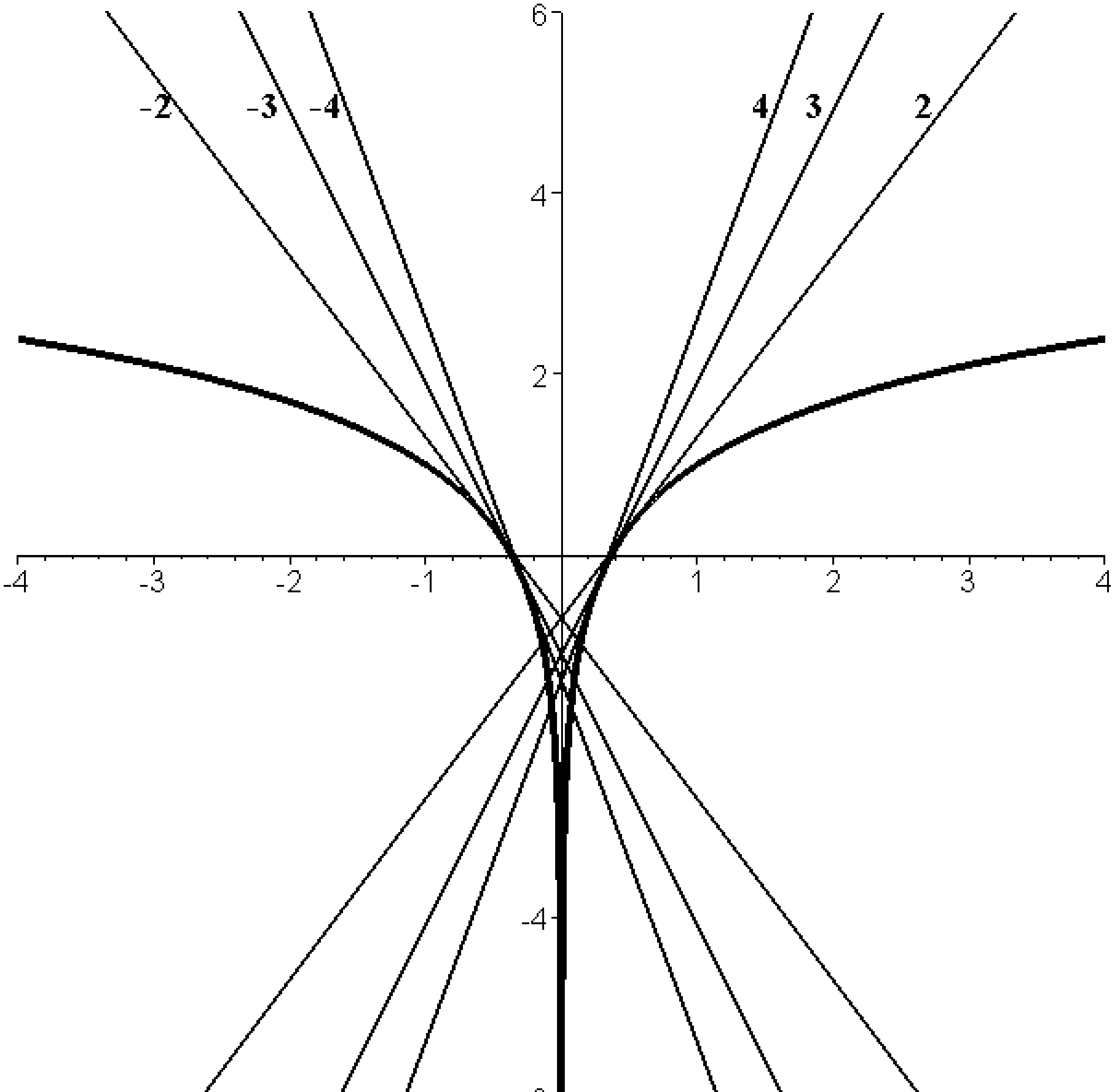

Рис.9 Графіки розв'язків рівняння $y = xy' - \ln y'$ при C = -4,..,-2,2,..,4.

Особливий розв'язок, як звичайно, знаходимо p-методом із системи

$$\begin{cases} F(x,y,p) \equiv y - xp + \ln p = 0, p > 0 \\ F'_p(x,y,p) = -x + \dfrac{1}{p} = 0 \Rightarrow p = \dfrac{1}{x} \end{cases},$$

тоді

$$F(x,y,p)\Big|_{p=\frac{1}{x}} = \Psi(x,y) \equiv y - \ln(ex) = 0,$$

або особливий розв'язок (рис. 9)

$$y = \ln(ex).$$

Перевіримо, що це буде рівняння обвідної. Розглянемо систему

$$\begin{cases} \Phi(x,y,C) \equiv y - Cx + \ln(C) = 0 \\ \Phi'_C(x,y,C) = -x + \dfrac{1}{C} = 0 \Rightarrow C(x) = \dfrac{1}{x} \neq const \end{cases},$$

звідки

$$\Phi(x,y,C)\Big|_{C=\frac{1}{x}} = y - 1 - \ln x = 0$$

або

$$y = 1 + \ln x = \ln ex.$$

10. $y = 2xy' - 4y'^3$

Це рівняння Лагранжа.

Через параметр $p(x) = y'$ запишемо його у вигляді

$$y = g(x,p) \equiv 2xp - 4p^3.$$

Тоді повна похідна

$$\frac{dy}{dx} \equiv p = \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial p} \cdot \frac{dp}{dx} =$$

$$= 2p + (2x - 12p^3)\frac{dp}{dx},$$

звідки

$$p\frac{dx}{dp} + 2x = 12p^2.$$

При $p \neq 0$ це рівняння зводиться до лінійного неоднорідного

$$\frac{dx}{dp} + \frac{2}{p}x(p) = 12p$$

(тут параметр $p \neq 0$ приймається за незалежну змінну), якому відповідає лінійне однорідне рівняння або

$$\frac{dx}{x} = -2\frac{dp}{p}$$

при $x, p \neq 0$. Визначивши загальний розв’язок однорідного рівняння

$$x(p)=\frac{C}{p^2},\ \text{де}\ C=const,$$

загальний розв'язок неоднорідного рівняння знайдемо за методом варіації довільної сталої

$$x(p)=\frac{C(p)}{p^2}.$$

Тоді

$$\begin{aligned}&\frac{dx}{dp}+\frac{2}{p}x(p)=\\&=\frac{C'(p)}{p^2}-2\frac{C(p)}{p^3}+\frac{2}{p}\frac{C(p)}{p^2}=\\&=\frac{C'(p)}{p^2}=\\&=12p,\end{aligned}$$

або

$$C'(p)=12p^3,$$

звідки

$$C(p)=3p^4+C$$

і загальний розв'язок буде

$$\begin{cases}x(p)=\dfrac{C(p)}{p^2}=\dfrac{C}{p^2}+3p^2\\ y(p)=g(x(p),p)=\dfrac{2C}{p}+2p^3\end{cases}$$

при $p\neq 0$.

Загальний розв'язок рівняння Лагранжа практично завжди отримується тільки в параметричній формі. При $p=0$ отримаємо

$$y=g(x,0)\equiv 0$$

або $y=0$. Це буде особливий розв'язок (рис. 10), оскільки при $p=0$ в лінійному неоднорідному рівнянні обертається у нуль коефіцієнт при похідній $\frac{dx}{dp}$ у виразі

$$p\frac{dx}{dp}+2x(p)=12p^2,$$

тоді вираз перестає бути рівнянням.

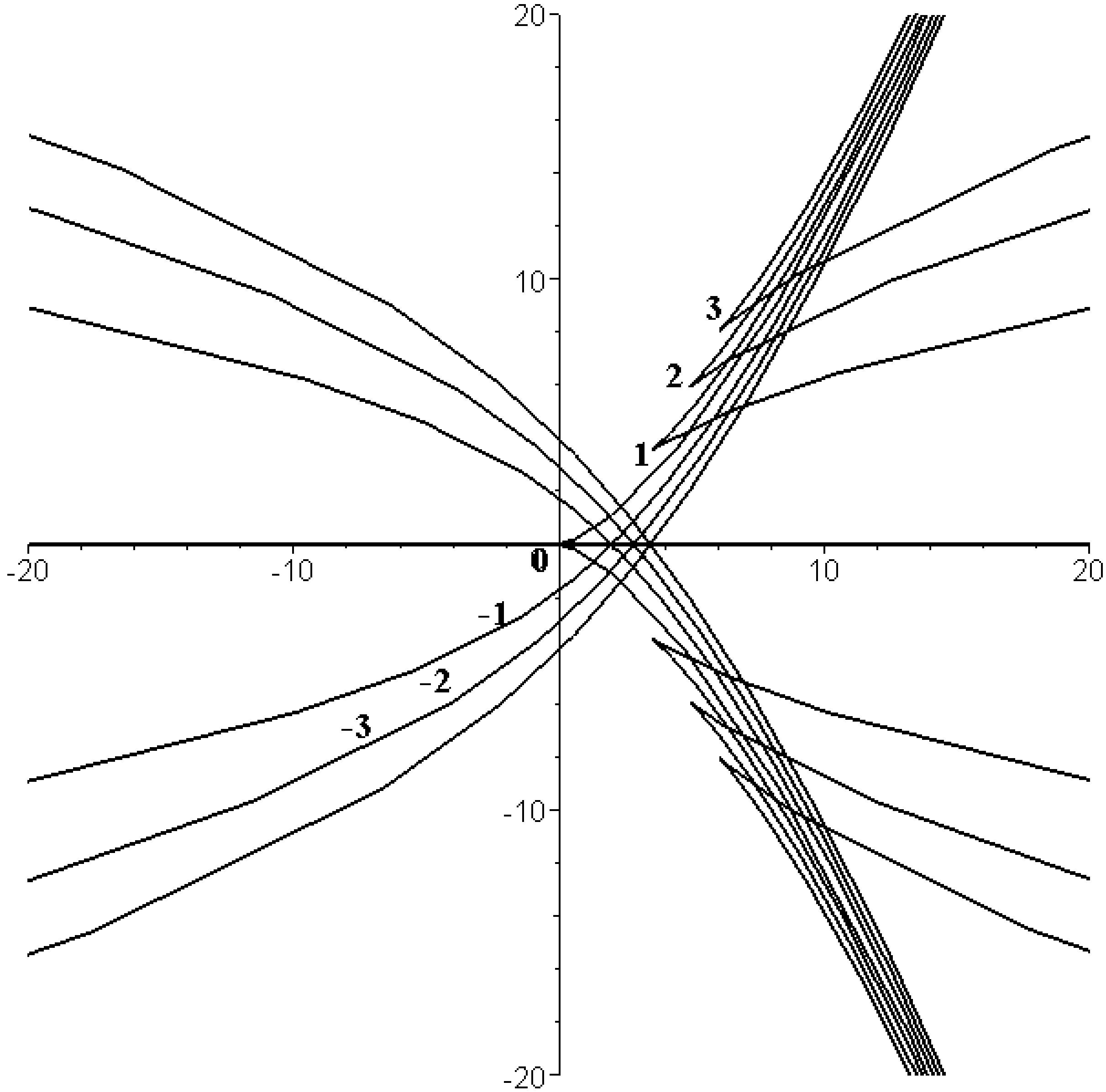

Рис. 10 Графіки розв'язків рівняння $y = 2xy' - 4y'^3$ при C = -3,..,3.

Дослідимо особливі розв'язки по p-методу. Розглянемо систему

$$\begin{cases} F(x, y, p) \equiv y - 2xp + 4p^3 = 0 \\ F'_p(x, y, p) = -2(x - 6p^2) = 0 \Rightarrow x = 6p^2 \end{cases},$$

тоді вираз

$$F(x, y, p)\Big|_{x=6p^2} = y - 8p^3 = 0$$

дає $y = 8p^3$ і можна записати параметричний вигляд функції

$$\begin{cases} x(p) = 6p^2 \\ y(p) = 8p^3 \end{cases},$$

при $p \in \mathbf{R}$, явний вигляд якої буде

$$y(x) = \frac{2x}{9}\sqrt{6x}$$

при $x \geq 0$. Проте, ця функція не є розв'язком, оскільки вона не задовольняє заданому рівнянню Лагранжа.
Дійсно,

$$F(x, y, y') = F(x, \frac{2x}{9}\sqrt{6x}, \frac{1}{2}\sqrt{6x}) = \frac{4x}{9}\sqrt{6x} \neq 0,$$

отже, p-методом знайти особливий розв'язок не вдається (не отримається він і C-методом, оскільки тут не буде обвідної). При розв'язуванні рівнянь Лагранжа особливі розв'язки, звичайно, знаходяться тільки через корені коефіцієнта при похідній $\dfrac{dx}{dp}$, але не визначаються за p- або C-методами.

11. $y = 2xy' - \ln y'$

Для цього рівняння Лагранжа при $y' = p(x) > 0$ запишемо

$$y = g(x, p) \equiv 2xp - \ln p.$$

Повна похідна

$$\frac{dy}{dx} \equiv p = \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial p} \cdot \frac{dp}{dx} =$$

$$= 2p + (2x - \frac{1}{p})\frac{dp}{dx}$$

приводить до виразу при $p \neq 0$

$$p\frac{dx}{dp} = \frac{1}{p} - 2x,$$

а потім до лінійного неоднорідного рівняння

$$\frac{dx}{dp} + \frac{2}{p}x(p) = \frac{1}{p^2}.$$

Розв'язком відповідного однорідного рівняння

$$\frac{dx}{x} = -2\frac{dp}{p}$$

буде $x(p) = \dfrac{C}{p^2}$.

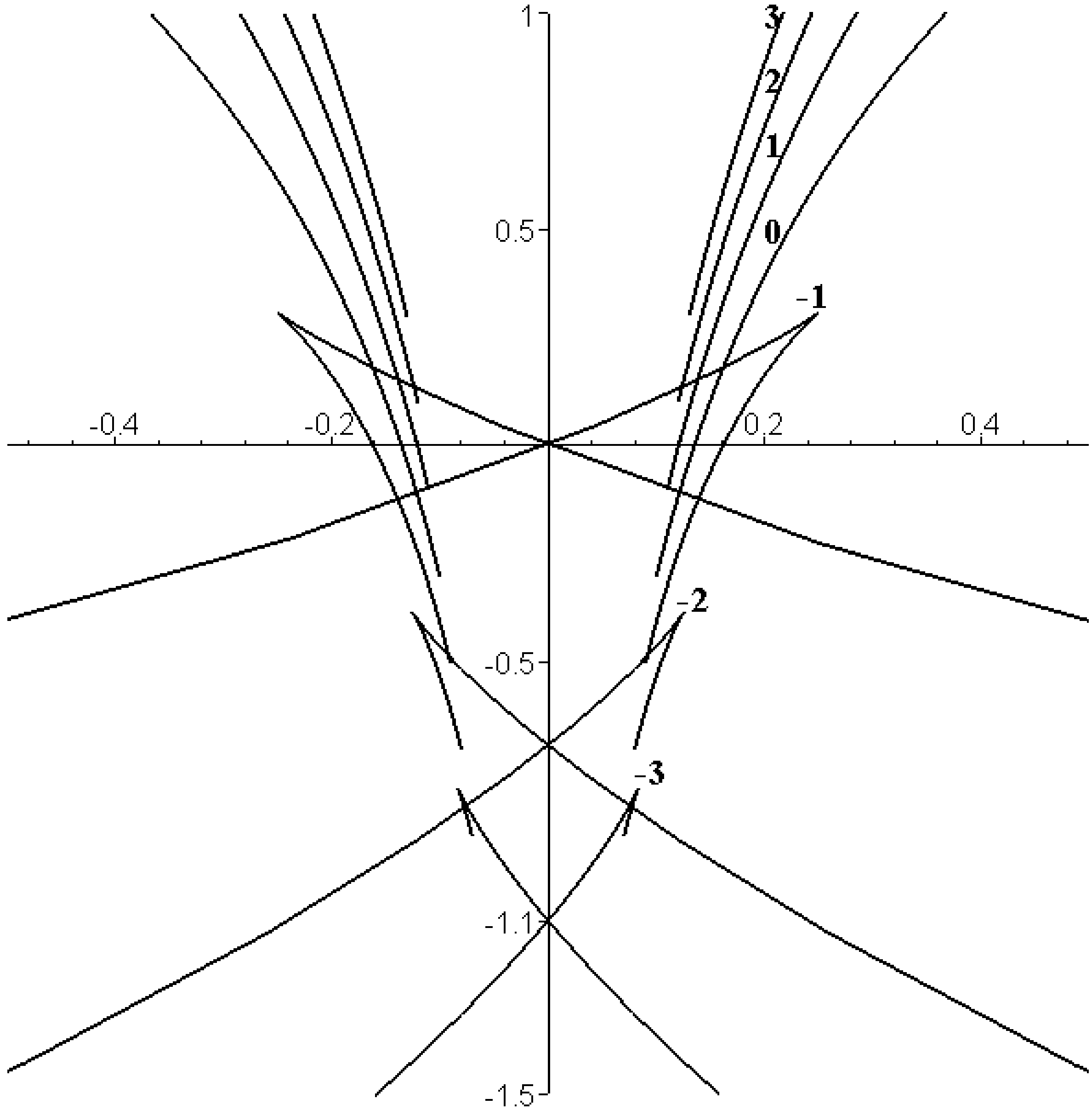

Рис. 11 Графіки розв'язків рівняння $y = 2xy' - \ln y'$ при C =-3,..,3.

Методом варіації сталої

$$x(p) = \frac{C(p)}{p^2}$$

знайдемо

$$C'(p) = 1,$$
$$C(p) = p + C;$$

тому

$$\begin{cases} x(p) = \dfrac{C(p)}{p^2} = \dfrac{C+p}{p^2} \\ y(p) = g(x(p), p) = \dfrac{2C}{p} + \ln\dfrac{e^2}{p} \end{cases}$$

при $p > 0$ – це і буде загальний розв’язок початкового рівняння в параметричній формі.
При $p = 0$ тут розв’язку немає, оскільки

$$y = g(x, 0) = \infty;$$

методи *p* та *C* теж не дають результатів (як звичайно для рівнянь Лагранжа); отже, особливих розв’язків це рівняння не має (рис. 11).

12. $y = 2xy' - y'^2$

В цьому рівнянні Лагранжа запишемо

$$y = g(x, p) \equiv 2xp - p^2$$

і методом диференціювання знайдемо

$$p\frac{dx}{dp} = 2(p - x).$$

При $p \neq 0$ отримаємо лінійне неоднорідне рівняння

$$\frac{dx}{dp} + \frac{2}{p}x(p) = 2,$$

яке розв’язується методом варіації

$$x(p) = \frac{C(p)}{p^2}.$$

Загальний розв’язок знаходиться в параметричній формі

$$\begin{cases} x(p) = \dfrac{2}{3}p + \dfrac{C}{p^2} \\ y(p) = g(x(p), p) = \dfrac{1}{3}p^2 + \dfrac{2C}{p} \end{cases}$$

при $p \neq 0$.
Випадок $p = 0$ дає особливий розв’язок $y = g(x, 0) = 0$, але *p*-метод розв’язків не дає, а отже, не буде обвідних (рис. 12).

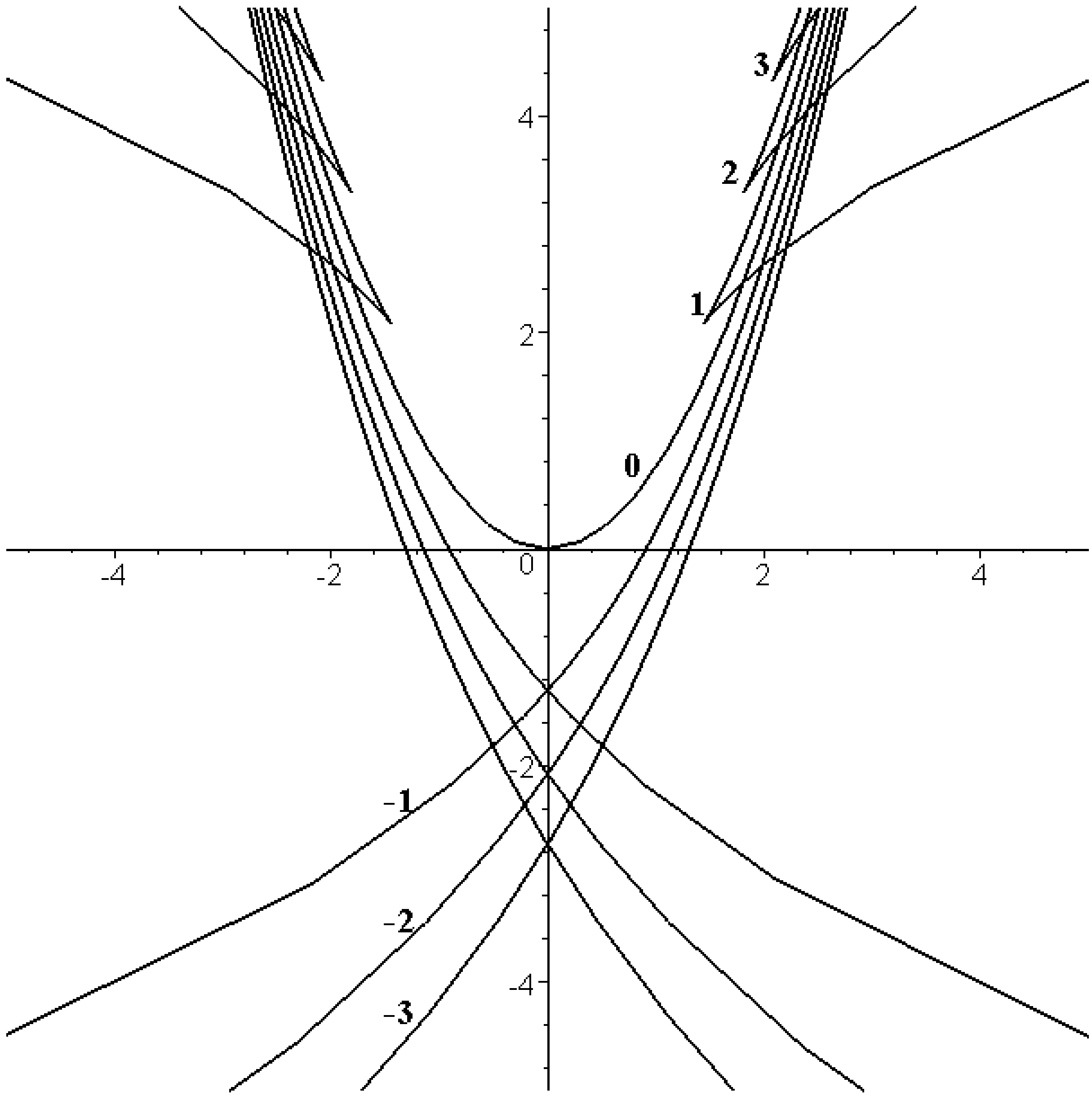

Рис. 12 Графіки розв'язків рівняння $y = 2xy' - y'^2$ при C =-3,..,3.

13. $y = x(y'^2 + 2y')$

Розглянемо вираз

$$y = g(x, p) \equiv x(p^2 + 2p) + 0,$$

де $y' = p(x)$; це буде рівняння Лагранжа (без другого доданку). Після звичайного диференціювання знайдемо

$$p = p^2 + 2p + x(2p + 2)\frac{dp}{dx}$$

або після перетворень отримаємо $(\frac{dx}{dp} + \frac{2}{p}x) \cdot p(p+1) = 0$.

При $p \neq 0$ та $p \neq -1$ маємо рівняння

$$\frac{dx}{x} = -2\frac{dp}{p},$$

розв’язок якого $x = \frac{C}{p^2}$, звідки параметр

$$p = \pm\sqrt{\frac{C}{x}}$$

і загальний розв’язок початкового рівняння

$$y = g(x, \pm\sqrt{\frac{C}{x}}) = C \pm 2\sqrt{Cx}$$

при $Cx \geq 0$. При $p = 0$ та $p = -1$ отримаємо ще два розв’язки (рис. 13)

$$y = g(x, 0) = 0$$

(це частинний розв’язок при $C = 0$) та

$$y = g(x, -1) = -x.$$

Далі по p-методу знайдемо особливі розв’язки. Для цього розглянемо систему

$$\begin{cases} F(x, y, p) \equiv y - x(p^2 + 2p) = 0 \\ F'_p(x, y, p) = -x(2p + 2) = 0. \end{cases}$$

З нижньої рівності отримаємо

$$x = 0 \text{ та } p = -1.$$

Тут випадок $x = 0$ приводить до частинного розв’язку $y = 0$, а випадок $p = -1$ дає

$$F(x, y, p)\Big|_{p=-1} = y + x = 0$$

або $y = -x$ – особливий розв’язок.

Тепер розглянемо систему

$$\begin{cases} \Phi(x, y, C) \equiv y - C \mp \qquad 0 \\ \Phi'_C(x, y, C) = -1 \mp \sqrt{\frac{C}{x}} \quad \Rightarrow C(x) = x \neq const, \end{cases}$$

тоді

$$\Phi(x, y, C)\Big|_{C=x} = y - x \mp$$

або $y = x \pm 2x$.

Випадок $y_- = -x$ дає особливий розв’язок – обвідну, випадок $y_+ = 3x$ не задовольняє рівнянню (рис. 13).

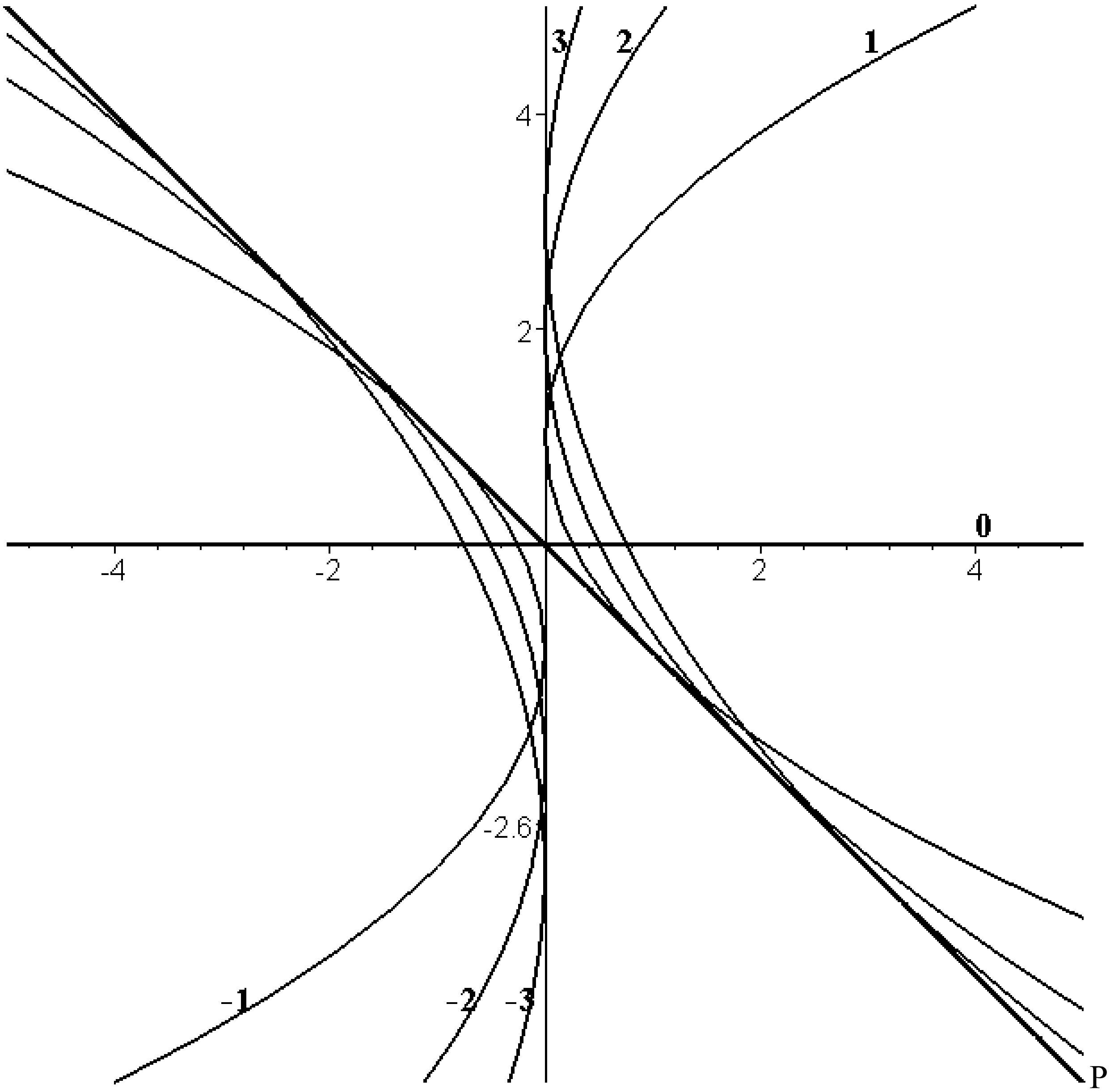

Рис. 13 Графіки розв'язків рівняння $y = x(y'^2 + 2y')$ при C =-3,..,3.

14. $y' = \exp(\dfrac{xy'}{y})$

Найпростіше це рівняння розв'язується відносно змінної x, тоді

$$x = \frac{y}{y'} \ln y'$$

або $x = g(y, p) \equiv \dfrac{y}{p} \ln p$ при $y' = p(x) > 0$ та $y \neq 0$.

Для функції $x(y)$ повна похідна

$$\frac{dx}{dy} \equiv \frac{1}{p} = \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial p} \cdot \frac{dp}{dy} =$$

$$= \frac{\ln p}{p} + \frac{y}{p^2} \ln \frac{e}{p} \cdot \frac{dp}{dy},$$

звідки

$$1 = \ln p + \frac{y}{p} \ln \frac{e}{p} \cdot \frac{dp}{dy},$$

$$-p \ln \frac{p}{e} + y \ln \frac{p}{e} \cdot \frac{dp}{dy} = 0,$$

$$(y \frac{dp}{dy} - p) \cdot \ln \frac{p}{e} = 0.$$

Тут рівняння

$$\frac{dy}{y} = \frac{dp}{p}$$

має розв'язок $y = Cp \neq 0$, тому

$$x = g(y, p)\Big|_{y=Cp} = C \ln p.$$

Вилучивши параметр p з параметричного розв'язку

$$\begin{cases} x(p) = C \ln p \\ y(p) = Cp, \end{cases}$$

отримаємо явний вигляд загального розв'язку $y = Ce^{\frac{x}{C}}$ при $C \neq 0$ (рис. 14). Приймаючи далі $p = e$, знайдемо інший розв'язок

$$x = g(y, p)\Big|_{p=e} = \frac{y}{e}$$

або $y = ex$.

Дослідимо p-методом систему

$$\begin{cases} F(x, y, p) \equiv p - exp \dfrac{xp}{y} = 0 \\ F'_p(x, y, p) = 1 - \dfrac{x}{y} exp \dfrac{xp}{y} = 0 \Rightarrow p = \dfrac{y}{x} \ln \dfrac{y}{x}, xy > 0, \end{cases}$$

тоді

$$F(x, y, p)\Bigg|_{p=\frac{y}{x}\ln\frac{y}{x}} = \frac{y}{x}(\ln \frac{y}{x} - 1) = 0,$$

отже, $y = ex$ – особливий розв'язок.

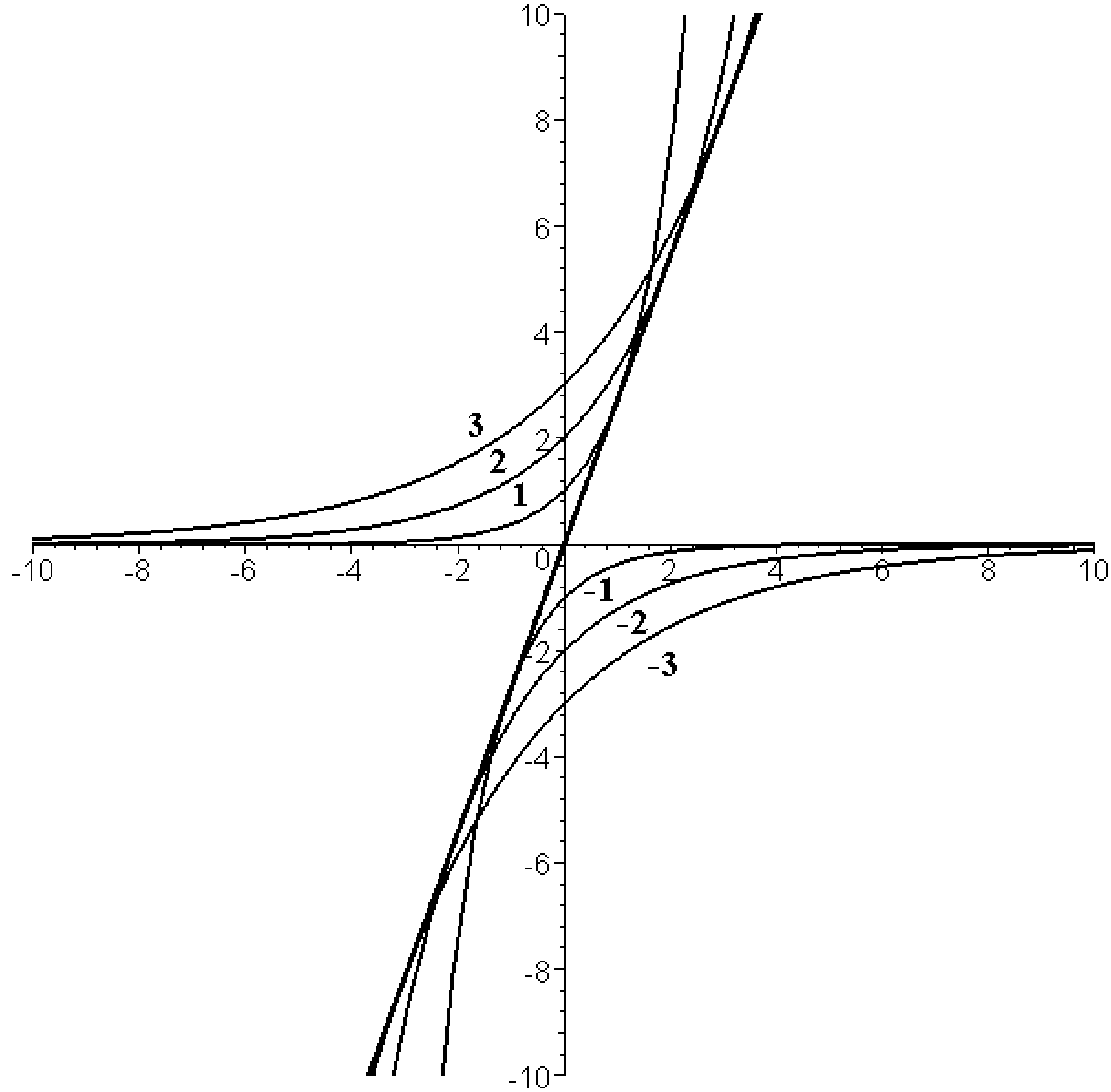

Рис. 14 Графіки розв'язків рівняння $y' = \exp(\dfrac{xy'}{y})$ при C = -3,..,-1,1,..,3; $C \neq 0$

Перевіримо, що він є рівнянням обвідної

$$\begin{cases} \Phi(x,y,C) \equiv y - Ce^{\frac{x}{C}} = 0 \\ \Phi'_C(x,y,C) = e^{\frac{x}{C}} \cdot (\dfrac{x}{C} - 1) = 0 \Rightarrow C(x) = x \neq const, \end{cases}$$

тому

$$\Phi(x,y,C)\big|_{C=x} = y - ex = 0$$

де $y = ex$ – рівняння обвідної (рис. 14).

15. $y'^2 - yy' + e^x = 0$

Розв'язувати це рівняння відносно похідної

$$y' = \frac{1}{2}(y \pm \sqrt{y^2 - 4e^x})$$

нераціонально (результат не можна проінтегрувати). Тому розв'яжемо рівняння відносно функції

$$y = g(x,p) \equiv p + \frac{e^x}{p},$$

де $y' = p(x) \neq 0$, та знайдемо повну похідну

$$\frac{dy}{dx} \equiv p = \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial p} \cdot \frac{dp}{dx} =$$

$$= \frac{e^x}{p} + (1 - \frac{e^x}{p^2})\frac{dp}{dx},$$

звідки після перетворень можна отримати рівняння $p^3 = pe^x + (p^2 - e^x)\frac{dp}{dx}$,

або

$$(\frac{dp}{dx} - p)(p^2 - e^x) = 0.$$

Перший множник дає рівняння

$$\frac{dp}{p} = dx,$$

розв'язок якого

$$p(x) = Ce^x \neq 0,$$

тоді

$$y = g(x,p) = g(x, Ce^x) = Ce^x + \frac{1}{C}$$

є загальний розв'язок (рис. 15).
Другий множник дасть

$$p(x) = \pm e^{\frac{x}{2}},$$

що приводить до іншого розв'язку

$$y = g(x,p) = g(x, \pm e^{\frac{x}{2}}) = \pm 2e^{\frac{x}{2}}.$$

Перевіримо по p-методу, що другий розв'язок особливий

$$\begin{cases} F(x,y,p) \equiv p^2 - yp + e^x = 0 \\ F'_p(x,y,p) = 2p - y = 0 \Rightarrow p = \frac{y}{2}, \end{cases},$$

тоді

$$F(x,y,p)\Big|_{p=\frac{y}{2}} = \Psi(x,y) = -\frac{1}{4}y^2 + e^x = 0$$

або $y = \pm 2e^{\frac{x}{2}}$ – особливий розв'язок (рис. 15).

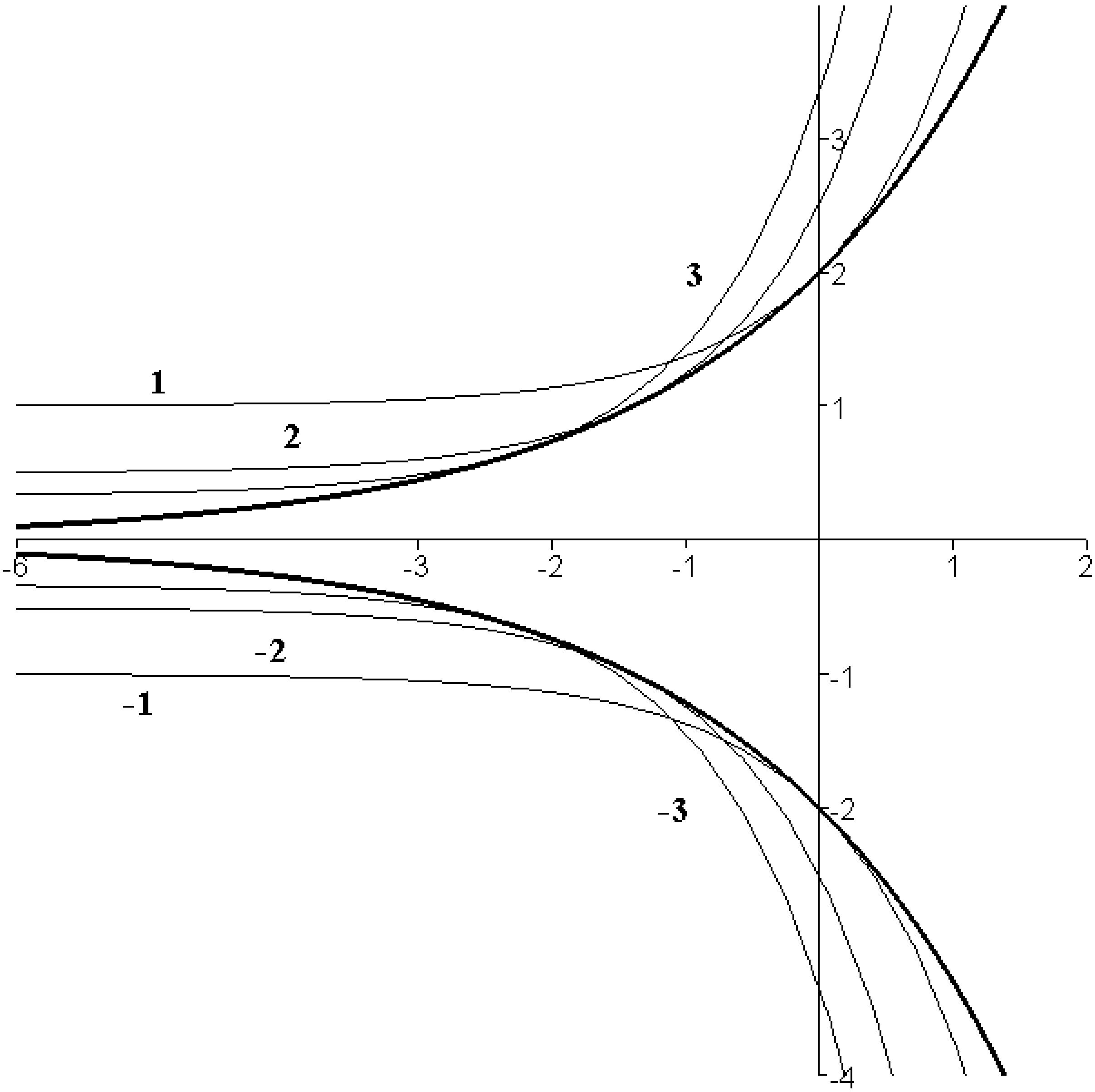

Рис. 15 Графіки розв'язків рівняння $y'^2 - yy' + e^x = 0$ при C=-3,..,-1,1,..,3

Знайдемо тепер рівняння обвідної

$$\begin{cases} \Phi(x,y,C) \equiv y - Ce^x - \dfrac{1}{C} = 0 \\ \Phi'_C(x,y,C) = -e^x + \dfrac{1}{C^2} = 0 \Rightarrow C(x) = \pm e^{-\frac{x}{2}} \neq const, \end{cases}$$

тому

$$\Phi(x,y,C)=\Phi(x,y,\pm e^{-\frac{x}{2}})=y\mp {}^{\frac{x}{2}} \qquad \text{або } \; y=\pm e^{\frac{x}{2}};$$
тобто, дійсно, особливий розв’язок є рівнянням обвідної.

16. $4y'^2(2y'-3)=27(y-x)$

Запишемо рівняння в загальному вигляді

$$F(x,y,p)\equiv 4p^2(3-2p)+27(y-x)=0$$

(тут $p(x)=y'$) та знайдемо повну похідну

$$\frac{dF}{dx}=\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}\cdot p+\frac{\partial F}{\partial p}\cdot\frac{dp}{dx}=$$

$$=-27+27p+(24p-24p^2)\frac{dp}{dx}=-24(p-1)(p\frac{dp}{dx}-\frac{9}{8})=0$$

Останній множник приводить до рівняння

$$pdp=\frac{9}{8}dx,$$

розв’язок якого $p^2=\frac{9}{4}(x+C)$ або $p=\pm\frac{3}{2}\sqrt{x+C}$, тоді загальний розв’язок

$$F(x,y,p)=F\left(x,y,\pm\frac{3}{2}\sqrt{x+C}\right)=$$

$$=27\left(y+C-\left(C+x\right)^{\frac{3}{2}}\right)=0$$

або $y(x)=\left(x+C\right)^{\frac{3}{2}}-C$, звідки отримаємо загальний інтеграл у раціональній формі

$$\Phi(x,y,C)\equiv(y+C)^2-(x+C)^3=0$$

Інший множник дає $p=1$, відповідний розв’язок отримаємо

$$F(x,y,p)\Big|_{p=1}=27(y-x)+4=0$$

або $\Psi(x,y)\equiv y-x+\frac{4}{27}=0$ та $y(x)=x-\frac{4}{27}$.

Далі дослідимо особливі розв’язки

$$\begin{cases} F(x,y,p)\equiv 4p^2(3-2p)+27(y-x)=0 \\ F'_p(x,y,p)=24p-24p^2=0\Rightarrow p(p-1)=0. \end{cases}$$

Випадок $p=1$ розглянутий вище, там знайшли

$$\Psi(x,y)\equiv y-x+\frac{4}{27}=0$$

– особливий розв’язок (рис. 16).

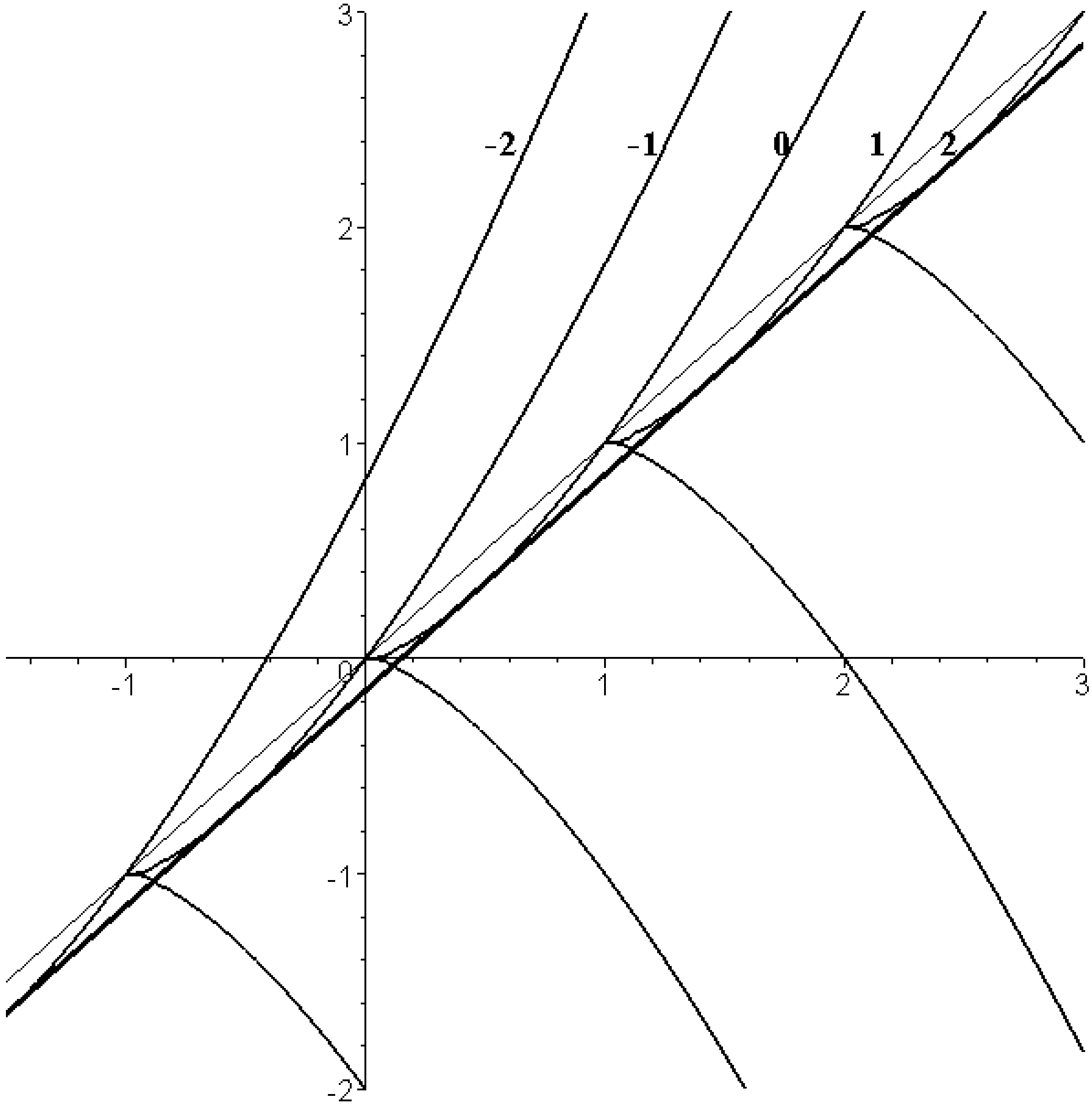

Рис. 16. Графіки розв'язків рівняння $4y'^2(2y'-3)=27(y-x)$ при C=-2,..,2.

У випадку $p=0$ отримаємо

$$F(x,y,p)\Big|_{p=0}=27(y-x)=0$$

або $y=x$ (рис. 16). Ця дискримінантна лінія буде геометричним місцем точок звороту для сім'ї кривих загального розв'язку. Проте, заданому рівнянню функція $y=x$ не задовольняє. Дійсно,

$$F(x,y,p)\Big|_{p=0}=-\frac{4}{27}\neq 0\,.$$

Перевіримо існування обвідної

$$\begin{cases} \Phi(x,y,C) \equiv (y+C)^2 - (x+C)^3 = 0 \\ \Phi'_C(x,y,C) = 2(y+C) - 3(x+C)^2 = 0 \Rightarrow y+C = \dfrac{3}{2}(x+C)^2, y(x) = \dfrac{3}{2}(x+C)^2 - C. \end{cases}$$

Обчисливши відношення $\frac{\Phi'_C}{\Phi}$, отримаємо $\frac{2}{y+C} = \frac{3}{x+C}$, звідки

$$C(x) = 2x - 3y \neq const,$$

тоді

$$\Phi(x,y,C) = \Phi(x,y,2x-3y) = 27(y-x)^2(y-x+\frac{4}{27}) = 0.$$

Як було перевірено вище, тут $y = x$ не є розв’язком (це геометричне місце точок звороту), а рівняння $y = x - \frac{4}{27}$ буде особливим розв’язком і обвідною для верхніх гілок кривих сім’ї загальних розв’язків.

Завдання для самостійної роботи

Для кожного із запропонованих нелінійних диференціальних рівнянь

- знайти загальний і особливий розв'язки,
- зобразити сім’ю розв'язків рівняння,
- зобразити обвідну сім’ї розв'язків, якщо обвідна існує.

1) $y = (\frac{2}{3}y')^3$,

2) $(x+y)^2 = (\frac{1}{3}(y'+1))^3$,

3) $y^3 = (\frac{1}{2}y')^2$,

4) $y = xy'^2$,

5) $2yy' = x(y'^2 + 1)$,

6) $y = y'(2y + xy')$,

7) $5y + y'^2 = (y' + x) \cdot x$,

Література

1. Филиппов А.Ф. „Сборник задач по дифференциальным уравнениям”. – М.: Наука, 1992 – 128с.
2. Степанов В.В. „Курс дифференциальных уравнений”.–М.: Физматгиз, 1959 – 468с.
3. Эльгольц Л.Э. „Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление”. – М.: Наука, 1969 – 424с.
4. Матвеев Н.М. „Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений”. – СПб.: Лань, 2003 – 832с.
5. Самойленко А.М., Кривошея С.А., Перестюк М.О. „Диференціальні рівняння у прикладах і задачах : навчальний посібник для вузів”. – К.: Вища школа, 1994 – 454с.
6. Камке Э. „Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям”. – СПб.: Лань, 2003 – 576с.
7. Ю.М. Дюкарев, О.Г. Литвинова. „Дифференциальные уравнения”. Учебное пособие. – Х.: ХНУ им. В.Н. Каразина, 2007. – 80 с.
8. „Методические указания к решению обыкновенных дифференциальных уравнений”. Составители Кондратьев Б.В., Рыжий В.С. – Х.: Издат. ХГУ. 1987 – 28с.

Навчальне видання

Клочко Тамара Володимирівна
Кондратьєв Борис Вікторович
Лесік Ніна Іванівна

ДОСЛІДЖЕННЯ РОЗВ'ЯЗКІВ НЕЛІНІЙНИХ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ

Навчально-методичний посібник
з диференціальних рівнянь для студентів 2-го курсу
фізичного та радіофізичного факультетів

Коректор Попій І. В.
Комп'ютерна верстка Клочко Т. В.
Макет обкладинки Дончик І. М.

Підписано до друку 15.05.2012. Формат 60x84/16.
Папір офсетний. Друк ризографічний.
Обл.-вид. арк.4,3.Умов. друк. арк. 3,7.
Наклад 50 прим. Ціна договірна

61077, Харків, пл. Свободи, 4,
Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна,
Видавництво ХНУ імені В. Н. Каразіна

Надруковано ХНУ імені В.Н. Каразіна
61077, м. Харків, пл. Свободи, 4.
Тел.: 705-24-32

Свідоцтво про державну реєстрацію ДК № 3367 від 13.01.09