

ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ В.Н. КАРАЗІНА

(повне найменування вищого навчального закладу)

ФІЗИКО-ТЕХНІЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ

(назва факультету)

КАФЕДРА ПРИКЛАДНОЇ ФІЗИКИ І ФІЗИКИ ПЛАЗМИ

(повна назва кафедри)

## Пояснювальна записка

до дипломного проекту (роботи)

БАКАЛАВРА

(освітньо-кваліфікаційний рівень)

на тему

укр. Моделювання охолодження та нагрівання в системах з рухомою межею фазового переходу для застосування кріоабляції

англ. Modeling of cooling and heating in systems with a moving boundary of the phase transition for the application of cryoablation

Виконав(ла): студент 4 курсу навчання

за ОПП бакалавр

напряму підготовки 105 Прикладна фізика та

наноматеріали

Фесенко І.І.

(прізвище та ініціали)

(особистий підпис)

Керівник к.ф.-м.н., доц. Серeda К.М.

(прізвище та ініціали)

(особистий підпис)

PhD Івахненко О.В.

(прізвище та ініціали)

(особистий підпис)

Консультант д.ф.-м.н., проф. Шевченко С. М.

(прізвище та ініціали)

(особистий підпис)

Рецензент к.т.н., Гордієнко Е.Ю.

(прізвище та ініціали)

(особистий підпис)

## Анотація

Метою цієї роботи є розв'язання рівняння теплопровідності і задачі Стефана для одновимірного випадку і в циліндричних координатах. Це необхідно для моделювання розповсюдження тепла в системах із аксіальною симетрією, а саме в гідрогелі. Гідрогель використовують, як модель для опису тканин людини, що є достатньо точним для моделювання різних процесів. Ця робота у майбутньому може допомогти в кріоабляції. Тобто в медичних дослідженнях, які вивчають вплив низьких і високих температур на шкіру і організм людини. А також результати цієї роботи можна використовувати не тільки в медицині, а і для моделювання розповсюдження тепла для будь-якої системи з циліндричною симетрією.

## **Abstract**

The purpose of this work is to solve the heat transfer equation and Stefan's problem for the one-dimensional case and in cylindrical coordinates. This is necessary for the simulation of heat propagation in systems with axial symmetry, namely in hydrogel. Hydrogel is used as a model for describing human tissues, which is accurate enough to simulate various processes. This work may help in cryoablation in the future. That is, in medical research that studies the effect of low and high temperatures on the skin and human body. Also, the results of this work can be used not only in medicine, but also for modeling heat distribution for any system with cylindrical symmetry.

## ЗМІСТ

<b>ВСТУП</b> .....		<b>4</b>
<b>РОЗДІЛ 1</b>	<b>Одномірна задача теплопровідності</b> .....	<b>6</b>
1.1	Одномірний стержень .....	6
1.2	Аналіз отриманих результатів .....	10
1.3	Одномірна задача про диск .....	11
<b>РОЗДІЛ 2</b>	<b>Задача теплопровідності в циліндричній системі</b>	
	<b>координат</b> .....	<b>15</b>
2.1	Постановка задачі .....	15
2.2	Аналітичний розв’язок рівняння .....	17
<b>РОЗДІЛ 3</b>	<b>Задача Стефана</b> .....	<b>22</b>
3.1	Одномірна задача Стефана .....	24
3.2	Перехід до безрозмірних величин .....	25
3.3	Розв’язок рівняння .....	27
<b>ВИСНОВКИ</b> .....		<b>30</b>
<b>СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ</b> .....		<b>32</b>

## ВСТУП

Кріоабляцію можна використовувати для видалення аномальних клітин з біологічної тканини з мінімальним пошкодженням здорових клітин. Час кріогенного впливу дуже важливий, щоб убити цільові клітини та мінімізувати непотрібний вплив на здорові клітини. Термодатчики можуть бути вставлені для контролю часу кріогенного впливу, але це призводить до додаткового пошкодження здорових клітин, щоб уникнути цього можна використовувати аналітичні методи для прогнозування розміру замороженої плями. Для моделювання тканин тіла, в даному випадку шкіри людини, найчастіше використовують гідрогель, тому в першу чергу ми будемо описувати розподіл температури в певні моменти часу саме для гідрогелю. Для точого опису цього процесу нам знадобиться вирішити рівняння теплопровідності (1.1) та додатково зрозуміти що відбувається при переході фаз, тобто розв'язати задачу Стефана.

Задача Стефана — це особливий тип крайової задачі для диференціального рівняння в частинних похідних стосовно розподілу тепла в середовищі, що змінює фазу. Оскільки границя фаз, що рухається, апріорі невідома, частина рішення полягатиме у визначенні межі. Прикладом є дифузія тепла під час танення льоду, і коли відбувається танення, межа льоду буде змінювати положення. Деякі автори позначають цю задачу як «вільна крайова задача», оскільки межа області апріорі невідома [3, 4, 5]. Щоб відрізнити випадок рухомої межі (пов'язаний із задачею, що залежить від часу) від задачі зі стаціонарною межею, деякі автори позначають останню як «проблему рухомої границі» [6].

Щоб досягти унікального розв'язку задачі Стефана, необхідно мати дві граничні умови: одна для визначення самої апріорі невідомої межі, а друга, як зазвичай, є прийнятною умовою для фіксованої межі. Природне виникнення проблеми Стефана здебільшого пов'язане з проблемами плавлення та затвердіння, однак існують також деякі проблеми, подібні до Стефана, наприклад течія рідини в пористих середовищах або навіть ударні хвилі в газовій динаміці [7].

Точне формулювання задачі Стефана неможливе, однак ми можемо перерахувати деякі характерні фактори щодо цього типу задач. Щоб згадати

декілька прикладів загальних рис, які ми маємо: (1) розподіл тепла та теплопередача описується рівняннями, (2) існує чітка межа розділу (або межа зміни фази) між двома фазами (або більше), які відрізняються один від одного, (3) температура межі розділу апіорі відома [5].

## РОЗДІЛ 1

## Одномірна задача теплопровідності

## 1.1 Одномірний стержень

Перед тим як вирішувати нашу задачу теплопровідності, щоб простіше можна було зрозуміти розв'язок для циліндричної симетрії та циліндричної системи координат, спершу розв'яжемо одномірну задачу теплопровідності. Будемо вважати що у нас є стержень, який термоізований по осям  $y$  та  $z$  і нас буде цікавити як розповсюджується тепло по осі  $x$ . Температуру, що ми надаємо стержню нехай буде  $T_s$ , довжина бруска  $l$ , теплопровідність  $a$  та температура на іншому кінці  $T_0$ .

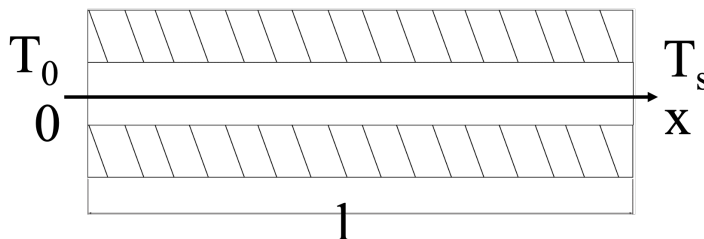


Рис. 1.1:  $T_s$  – це температура яку ми прикладаємо до стержня з правого боку,  $l$  – це довжина стержня,  $T_0$  – це температура навколишнього середовища.

Запишемо рівняння теплопровідності:

$$U_t = a^2 U_{xx}, \quad (1.1)$$

де  $U_t$  це перша похідна температури за часом, а  $U_{xx}$  це друга похідна за координатою. Сформулюємо початкові та граничні умови для цієї задачі.

Початкові умови:

$$U(x, 0) = T_0. \quad (1.2)$$

Граничні умови:

$$\begin{cases} U(0, t) = T_s \\ U(l, t) = T_{air} + e^{-kt}(T_0 - T_{air}). \end{cases} \quad (1.3)$$

Постановка задачі матфізики:

$$\begin{cases} U_t = a^2 U_{xx} \\ U(x, 0) = T_0 \\ U(0, t) = T_s \\ U(l, t) = T_{air} + e^{-kt}(T_0 - T_{air}). \end{cases} \quad (1.4)$$

Зробимо заміну змінних щоб скористатися методом розділення змінних:

$$U(x, t) = v(x, t) + A(t)\left(1 - \frac{x}{l}\right) + B(t)\frac{x}{l}, \quad (1.5)$$

де  $A(t)$  і  $B(t)$  це якісь функції, які залежать від часу  $t$ . А функція  $v(x, t)$  визначається як:

$$\begin{cases} v(0, t) = 0 \\ v(l, t) = 0 \\ v(x, 0) = u(x). \end{cases} \quad (1.6)$$

Знайдемо функції  $A(t)$  та  $B(t)$  із граничних умов.

$$\begin{cases} A(t) = T_s \\ B(t) = T_{air} + e^{-kt}(T_0 - T_{air}). \end{cases} \quad (1.7)$$

Початкові умови:

$$u(x) = U(x, 0) - T_s\left(1 - \frac{x}{l}\right) - (T_{air} + e^{-kt}(T_0 - T_{air}))\frac{x}{l} \quad (1.8)$$

$$u(x) = T_0 - T_s\left(1 - \frac{x}{l}\right) - (T_{air} + e^{-kt}(T_0 - T_{air}))\frac{x}{l}. \quad (1.9)$$

Тепер будемо вирішувати однорідне рівняння з однорідними граничними

умовами:

$$\begin{cases} v_t = a^2 v_{xx} \\ v(0, t) = 0 \\ v(l, t) = 0 \\ v(x, 0) = T_0 - T_s(1 - \frac{x}{l}) - (T_{air} + e^{-kt}(T_0 - T_{air}))\frac{x}{l}. \end{cases} \quad (1.10)$$

Скористаємося методом розділення змінних:

$$v = X(x)T(t). \quad (1.11)$$

Підставимо в наше рівняння теплопровідності:

$$X(x)T'(t) = a^2 X''(x)T(t), \quad (1.12)$$

$$\frac{T'(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda. \quad (1.13)$$

Права частина залежить тільки від  $x$ , а ліва тільки від  $t$ , відповідно ці два диференціальних рівняння можуть відрізнятися тільки на константу  $-\lambda$ . Таким чином ми отримали 2 простих диференціальних рівняння.

Вирішемо рівняння для координати:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda, \quad (1.14)$$

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad (1.15)$$

$$X(x) = C_1 \exp(i\sqrt{\lambda}x) + C_2 \exp(-i\sqrt{\lambda}x), \quad (1.16)$$

$$X(x) = \tilde{C}_1 \cos(\sqrt{\lambda}x) + \tilde{C}_2 i \sin(\sqrt{\lambda}x). \quad (1.17)$$

З початкових умов знайдемо коефіцієнти  $\tilde{C}_1$  та  $\tilde{C}_2$ :

$$X(0) = 0, \quad (1.18)$$

$$X(0) = \tilde{C}_1 = 0, \quad (1.19)$$

$$X(l) = 0, \quad (1.20)$$

$$X(l) = \tilde{C}_2 \sin(\sqrt{\lambda}l). \quad (1.21)$$

Отже в нас є залежність тільки від синусу, і щоб розв'язок задачі був нетривіальним, треба щоб цей синус обертався в 0, тобто:

$$\sqrt{\lambda_n l} = \pi n, \quad (1.22)$$

$$\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2, \quad (1.23)$$

$$n \in \mathbb{N}.$$

Тепер вирішемо рівняння для часової компоненти:

$$\frac{T'(t)}{a^2 T(t)} = -\lambda_n, \quad (1.24)$$

$$\frac{d \ln T(t)}{dt} = -a^2 \lambda_n, \quad (1.25)$$

$$T(t) = C \exp -a^2 \lambda_n t. \quad (1.26)$$

В нас задача лінійна, якщо ми маємо 2 різних розв'язки  $\Gamma_1$  та  $\Gamma_2$  то відповідно  $\Gamma_3 = \Gamma_1 + \Gamma_2$  теж буде розв'язком рівняння. Запишемо кінцевий розв'язок рівняння:

$$v(x, t) = X(x)T(t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right) \exp\left(-a^2 \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 t\right). \quad (1.27)$$

Константи  $C_n$  можна знайти з початкових умов:

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right) = u(x). \quad (1.28)$$

Отримали ряд Фур'є для функції  $u(x)$ . Тому коефіцієнти  $C_n$  можна записати як:

$$C_n = \frac{2}{l} \int_0^l u(x) \sin \frac{\pi n}{l} x dx. \quad (1.29)$$

Підставимо початкові умови в наш інтеграл:

$$C_n = \frac{2}{l} \int_0^l \left( (T_0 - T_s) + (T_s - T_{air} \frac{x}{l} - e^{-kt} (T_0 - T_{air} \frac{x}{l})) \right) \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right) dx.$$

У розв'язку цього інтегралу отримаємо:

$$\begin{cases} A = T_0 - T_s \\ B = T_s - T_{air} - e^{-kt}(T_0 - T_{air}) \\ C_n = \frac{2A - 2(A+B) \cos(\pi n)}{\pi n} \\ n \in \mathbb{N}. \end{cases} \quad (1.30)$$

Тепер запишемо остаточний розв'язок:

$$U(x, t) = T_s \left(1 - \frac{x}{l}\right) + (T_{air} + e^{-wt}(T_0 - T_{air})) \frac{x}{l} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2A - 2(A+B) \cos(\pi n)}{\pi n} \sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right) \exp\left(-a^2 \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 t\right). \quad (1.31)$$

## 1.2 Аналіз отриманих результатів

Ми в попередньому підрозділі отримали остаточну аналітичну формулу для розповсюдження тепла в одномірному стиржні в залежності від координати та часу. Тепер застосуємо цю формулу на реальній моделі гідрогелю. Вхідні параметри гідрогелю:

1. довжина стиржня  $l = 0.1$  м.
2. коефіцієнт теплопровідності  $a = 0.143 * 10^{-6} \frac{m^2}{c}$ .
3. температура повітря  $T_{air} = 300$ К.
4. температура джерела холоду  $T_s = 83$ К.
5. початкова температура тіла  $T_0 = 300$ К.
6. коефіцієнт тепловіддачі  $w = 2.3 * 10^{-4} c^{-1}$ .

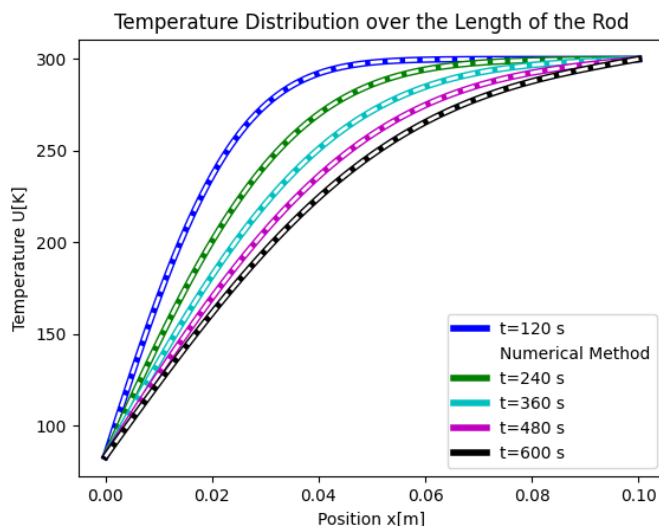


Рис. 1.2: Розподіл температури для одномірного стержня для  $t=120$  с, 240 с, 360 с, 480 с, 600 с після початку

Із графіку ми можемо побачити що в нас є узгодження між чисельним методом та аналітичним розв'язком, це підтверджує правильність аналітичного розв'язку. Можна також помітити що розподіл за температурами в стержні прямує до лінійного розподілу, як і має бути для одномірного випадку. І вже після 10 хвилин в нас майже встановлюється термодинамічна рівновага. Цей графік не дає нам точного часу і швидкості розповсюдження температури, адже ми нехтували залежністю коефіцієнта температуропровідності від температури, і ми поки не враховували фазовий перехід; але цей графік може нам показати порядок швидкості встановлення термодинамічної рівноваги. Для нас найголовніше що час порядку 10 хвилин ми можемо виміряти з достатньо високою точністю, тобто процес не проходить години чи наносекунди.

### 1.3 Одномірна задача про диск

Раніше ми розв'язали задачу для одномірного стержня. Для того щоб перейти у циліндричну систему координат, спочатку вирішимо задачу для диску. Диск наче плоска фігура, але через аксіальну симетрію задачі в нас функція температури  $U(\rho, t)$  залежить тільки від координати  $\rho$  та часу  $t$ . Тому ця задача, з якоїсь сторони, нічим не відрізняється від стержня, з іншої

сторони, через іншу систему координат в нас буде інший трохи складніший розв'язок.

Отже, сформулюємо нашу задачу. Гранична умова пов'язана з тим що на краю диску  $\rho = R$  в нас диск взаємодіє з навколишнім середовищем  $U(R, t) = T_{air} + e^{-kt}(T_0 - T_{air})$ , де  $T_0$  це якась початкова температура тіла на границі з середовищем. Початкові умови просто поки запишемо в загальному випадку  $U(\rho, 0) = u(\rho)$ , тому що кожного разу ми будемо вирішувати це рівняння за різних початкових умов.

Повне математичне формулювання задачі для диску виглядає так:

$$\begin{cases} U_t = \kappa^2 \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho \frac{\partial U}{\partial \rho} \\ U(\rho, 0) = u(\rho) \\ U(R, t) = T_{air} + e^{-kt}(T_0 - T_{air}). \end{cases} \quad (1.32)$$

Перед тим, як почати розв'язувати нашу задачу, спочатку перейдемо до однорідних граничних умов. В нашому випадку треба робити заміну на логарифм, а саме:

$$U(\rho, t) = V(\rho, t) + A(t) \ln(\rho) + B(t), \quad (1.33)$$

$$U(R, t) = T_{air} + e^{-kt}(T_0 - T_{air}), \quad (1.34)$$

$$A(t) \ln(\rho) + B(t) = T_{air} + e^{-kt}(T_0 - T_{air}),$$

$$A(t) = 0, \quad (1.35)$$

$$B(t) = T_{air} + e^{-kt}(T_0 - T_{air}). \quad (1.36)$$

Отримали заміну:

$$U(\rho, t) = V(\rho, t) + T_{air} + e^{-kt}(T_0 - T_{air}). \quad (1.37)$$

Далі будемо вирішувати задачу відносно  $V(\rho, t)$ , для якої граничні умови

однорідні. А саме, тепер наша однорідна задача виглядає так:

$$\begin{cases} V_t = \kappa^2 \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho \frac{\partial U}{\partial \rho} \\ V(\rho, 0) = u(\rho) - (T_{air} + e^{-kt}(T_0 - T_{air})) \\ V(R, t) = 0. \end{cases} \quad (1.38)$$

Далі, як і раніше, робимо розділення змінних:

$$V_t = R(\rho)T(t). \quad (1.39)$$

Підставимо в наше рівняння теплопровідності:

$$T'(t)R(\rho) = \kappa^2 T(t) \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho R'(\rho) \quad (1.40)$$

$$\frac{T'(t)}{\kappa^2 T(t)} = \frac{1}{\rho R(\rho)} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho R'(\rho) = -\lambda. \quad (1.41)$$

В диференціальному рівнянні, з одної сторони, залежність тільки від  $t$ , з іншої, тільки від  $\rho$ . Значить ці вирази можуть дорівнювати тільки константі  $-\lambda$ .

Спочатку розв'яжемо рівняння відносно часової компоненти  $T(t)$ :

$$\begin{aligned} \frac{T'(t)}{\kappa^2 T(t)} &= -\lambda, \\ \frac{dT}{dT} &= -\lambda \kappa^2, \\ \frac{d \ln T}{dt} &= -\lambda \kappa^2, \\ T &= C \exp -\lambda \kappa^2 t. \end{aligned} \quad (1.42)$$

Тепер перейдемо до радіальної компоненти  $R(\rho)$

$$\frac{1}{\rho R(\rho)} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho \frac{\partial R(\rho)}{\partial \rho} + \lambda = 0, \quad (1.43)$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho \frac{\partial R(\rho)}{\partial \rho} + \lambda R(\rho) = 0. \quad (1.44)$$

Нехай  $\lambda = k^2$ . Помножимо рівняння на  $\rho^2$

$$\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \rho \frac{\partial R(\rho)}{\partial \rho} + k^2 \rho^2 R(\rho) = 0. \quad (1.45)$$

Тепер робимо заміну  $x = \rho k$ ,  $y = R(\rho)$  і отримуємо рівняння Бесселя нульового порядку[9]:

$$x \frac{\partial}{\partial x} x \frac{\partial y}{\partial x} + x^2 y = 0. \quad (1.46)$$

Розв'язком цього рівняння є циліндричні функції Бесселя[9]:

$$J_0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}. \quad (1.47)$$

Тепер запишемо остаточну відповідь:

$$U(\rho, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n J_0(\rho \lambda_n) \exp(-\lambda_n^2 \kappa^2 t), \quad (1.48)$$

де  $\lambda_n = \frac{\rho_n}{R}$ ,  $J_0(\rho_n) = 0$ .

Де початкові коефіцієнти визначаються з інтегралу Фур'є:

$$C_n = \frac{2}{R J_0(\rho_n)} \int_0^R u(\rho) J_0\left(\rho_n \frac{\rho}{R}\right) d\rho. \quad (1.49)$$

## РОЗДІЛ 2

## Задача теплопровідності в циліндричній системі координат

## 2.1 Постановка задачі

У цьому розділі ми поставимо задачу математичної фізики для охолодження гідрогелю кріо-аплікатором. Наша задача має аксіальну симетрію, тобто в циліндричних координатах не залежить від кута повороту  $\varphi$ , але залежить від глибини  $z$  та відстані від осі симетрії  $\rho$ .

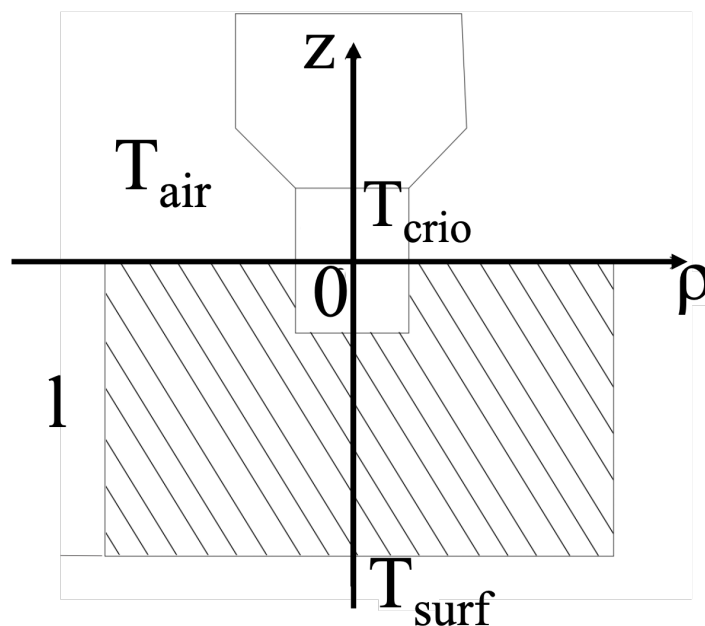


Рис. 2.1: Модель циліндричної задачі. Температура кріоаплікатора –  $T_{crio}$ , температура повітря –  $T_{air}$ , температура поверхні –  $T_{surf}$ , глибина гідрогелю –  $l$

$U(z, \rho, t)$  це функція розподілу температури в залежності від відповідних координат.

Рівняння теплопровідності має вигляд:

$$U_t = a^2 \Delta U. \quad (2.1)$$

де  $U_t$  це перша похідна температури за часом, а  $a$  коефіцієнт температуропровідності. Взагалі рівняння для теплопровідності записується через передачу енергії та теплопровідність, але немає ніякого значення

ми досліджуємо передачу енергії чи температури, тому що вони лінійно залежні. Ми досліджуємо саме температуру тому що це саме той параметр, який простіше виміряти і дослідити.

Розкривши Лапласіан в циліндричних координатах, через те що не маємо залежності від кута повороту  $\varphi$ , маємо:

$$U_t = a^2 \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho \frac{\partial U}{\partial \rho} + a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}. \quad (2.2)$$

Тепер опишемо початкові та граничні умови.

Початкові умови:

В нас початкова температура повітря  $T_{air}$ . Довжина нашого гідрогелю по осі  $z$  дорівнює  $l$ . Початкова температура гідрогелю по всьому своєму об'єму дорівнює температурі повітря  $U(z, \rho, 0) = T_{air}$

Вхідні параметри кріоаплікатора:

Кріоаплікатор це пристрій, що має циліндричний тонкий накінецьник з радіусом  $\rho_0$  та заглиблюється в наш гідрогель на глибину  $z_0$ . Початкова температура кріоаплікатора  $T_{crio}$ .

Отримали такі умови на початковий розподіл температури:

$$U(z < 0, \rho, 0) = T_{air}. \quad (2.3)$$

Тепер запишемо граничні умови:

$$\begin{cases} U(0, \rho > \rho_0, t) = T_{air} + e^{-kt}(T_0 - T_{air}) \\ U(z_0, \rho < \rho_0, t) = T_{crio} \\ U(0 > z > z_0, \rho_0, t) = T_{crio} \\ U(-l, \rho, t) = T_{surf}, \end{cases} \quad (2.4)$$

де  $T_{surf}$  це температура поверхні, на якій стоїть циліндр з гідрогелю. Температура поверхні не обов'язково дорівнює температурі повітря, але ми можемо експериментально виміряти цей параметр.

## 2.2 Аналітичний розв'язок рівняння

Отже, в попередньому підрозділі ми отримали таке рівняння теплопровідності в циліндричних координатах

$$\left\{ \begin{array}{l} U_t = a^2 \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho \frac{\partial U}{\partial \rho} + a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \\ U(z < 0, \rho, 0) = T_0 \\ U(0, \rho > \rho_0, t) = T_{air} + e^{-kt}(T_0 - T_{air}) \\ U(z_0, \rho < \rho_0, t) = T_{crio} \\ U(0 > z > z_0, \rho_0, t) = T_{crio} \\ U(-l, \rho, t) = T_{surf}. \end{array} \right. \quad (2.5)$$

Основна проблема аналітичного розв'язку задачі теплопровідності полягає в тому, що в нас на границі з кріоаплікатором розривна гранична умова. Для того щоб зробити хоч якесь наближення до аналітичного розв'язку треба штучно зробити цю границю неперервною. Заміна, яку необхідно зробити для розв'язку нашого рівняння, представлена нижче (2.6). Вона необхідна для того щоб перейти від неоднорідних граничних умов до однорідних. Основний критерій підбору функцій полягає в тому щоб лапласіан від цих функцій дорівнював 0. В циліндричних координатах це  $A(t)z \ln \rho$ ,  $B(t) \ln(\rho)$ ,  $C(t)z$ ,  $D(t)$ . Нескладно перевірити що саме ці функції нам даватимуть нульовий лапласіан і що інших функцій немає.

Тепер явно запишемо нашу заміну:

$$U(z, \rho, t) = v(z, \rho, t) + A(t)z \ln \rho + B(t) \ln \rho + C(t)z + D(t). \quad (2.6)$$

І розглянемо граничну умову:

$$\left\{ \begin{array}{l} U(0, \rho > \rho_0, t) = T_{air} + e^{-kt}(T_0 - T_{air}) \\ U(z_0, \rho < \rho_0, t) = T_{crio} \\ U(-l, \rho, t) = T_{surf}. \end{array} \right. \quad (2.7)$$

Підставимо нашу заміну. Будемо вважати що на границі наша функція

$v(z, \rho, t) = 0$  зануляється:

$$\begin{cases} B(t) \ln \rho + D(t) = T_{air} + e^{-kt}(T_0 - T_{air}) \\ A(t)z_0 \ln \rho + B(t) \ln \rho + C(t)z_0 + D(t) = T_{crio} \\ A(t)(-l) \ln \rho + B(t) \ln \rho + C(t)(-l) + D(t) = T_{surf} \end{cases} \quad (2.8)$$

Не складно побачити, що з першого та другого рівняння в нас зануляються коефіцієнти  $A(t)$  і  $B(t)$ , тому що в нас в правих частинах немає залежності від  $\rho$ . Тобто в нас вийшло 3 рівняння з двома невідомими. Через те що всі вони лінійно незалежні, то це означає що ця система рівнянь немає розв'язків. Тобто ми не можемо перейти до однорідних граничних умов і аналітично розв'язати рівняння за наших умов. Але для знаходження певного розв'язку та апроксимації вирішимо однорідну задачу теплопровідності в циліндричних координатах. Нам це необхідно, щоб розуміти по яких функціях треба буде розкладувати чисельний розв'язок.

Постановка однорідної задачі теплопровідності в циліндричних координатах, вважаємо що ця задача як і попередня аксіально симетрична, тобто не залежить від координати  $\varphi$ :

$$\begin{cases} u_t = a^2 \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho \frac{\partial u}{\partial \rho} + a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \\ u(z, \rho, 0) = u_0 \\ u(0, \rho, t) = 0 \\ u(z, 0, t) = 0. \end{cases} \quad (2.9)$$

Робимо розділення змінних:

$$u(z, \rho, t) = Z(z)R(\rho)T(t), \quad (2.10)$$

$$Z(z)R(\rho)T'(t) = a^2 T(t) \Delta Z(z)R(\rho), \quad (2.11)$$

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = a^2 \frac{\Delta Z(z)R(\rho)}{Z(z)R(\rho)} = -\lambda. \quad (2.12)$$

Зліва в нас залежність тільки від часу, справа тільки від координат, тому наше рівняння дорівнюватиме якійсь константі  $-\lambda$ . Тепер наше складне диференціальне рівняння перетворилось на 2 більш прості, де в одному

залежність тільки від часу, а в іншому тільки від координати.

Почнемо розв'язок з часової функції:

$$\frac{T'(t)}{a^2 T(t)} = -\lambda, \quad (2.13)$$

$$\frac{\frac{dT}{dt}}{dT} = -\lambda a^2, \quad (2.14)$$

$$\frac{d \ln T}{dt} = -\lambda a^2, \quad (2.15)$$

$$T = C \exp(-\lambda a^2 t). \quad (2.16)$$

Поки не будемо шукати цю константу, щоб не робити зайві викладки. При розв'язанні рівняння для просторової частини температури в нас теж з'явиться константа, і ми потім просто замінемо їх на одну і вже будемо її шукати опираючись на початкові умови.

Тепер розглянемо просторову частину температури:

$$\frac{\Delta Z(z)R(\rho)}{Z(z)R(\rho)} - \lambda \quad (2.17)$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho \frac{\partial Z(z)R(\rho)}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 Z(z)R(\rho)}{\partial z^2} = -\lambda Z(z)R(\rho). \quad (2.18)$$

Тепер все розділемо на  $Z(z)R(\rho)$ :

$$\frac{1}{\rho R(\rho)} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho \frac{\partial R(\rho)}{\partial \rho} + \lambda = -\frac{1}{Z(z)} \frac{\partial^2 Z(z)}{\partial z^2} = \lambda_3. \quad (2.19)$$

Ми знову отримали 2 диференційні рівняння, де права та ліва частина залежить від різних координат, значить вони обидва дорівнюють якійсь константі  $\lambda_3$ . Почнемо розв'язувати рівняння із  $z$  компоненти:

$$Z''(z) + \lambda_3 Z(z) = 0. \quad (2.20)$$

Це просте лінійне диференційне рівняння, і його розв'язок це сума 2х експонент:

$$Z(z) = C_1 \exp i\sqrt{\lambda_3}z + C_2 \exp -i\sqrt{\lambda_3}z. \quad (2.21)$$

Ми отримали 2 експоненти з комплексними степенями, тож їх можна розкласти на косинус та синус, отримуємо:

$$Z(z) = (C_1 + C_2) \cos \sqrt{\lambda_3} z + (C_1 - C_2) i \sin \sqrt{\lambda_3} z. \quad (2.22)$$

Згідно наших граничних умов:

$$\begin{cases} Z(0) = 0 \\ Z(-l) = 0. \end{cases} \quad (2.23)$$

Знайдемо коефіцієнти  $C_1$  і  $C_2$ :

$$Z(0) = (C_1 + C_2) = 0 \quad (2.24)$$

$$Z(-l) = (C_1 + C_2) \cos \sqrt{\lambda_3}(-l) + (C_1 - C_2) i \sin \sqrt{\lambda_3}(-l) = 0. \quad (2.25)$$

З рівняння (2.24) можна побачити, що  $C_1 = -C_2$ , отже різниця коефіцієнтів буде  $2C_1$ . Переобозначимо коефіцієнт  $2C_1 i = \tilde{C}$ . Отримаємо наступне рівняння:

$$Z(-l) = \tilde{C} \sin(\sqrt{\lambda_3}(-l)) = 0. \quad (2.26)$$

Знову для того щоб рівняння мало нетривіальний, потрібно щоб  $\sqrt{\lambda_3}(-l) = 0$ . Виходить:

$$\lambda_3 = \lambda_k = \left( \frac{\pi k}{-l} \right)^2 \quad (2.27)$$

$$k \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$$

Тепер перейдемо до радіальної складової рівняння  $R(\rho)$

$$\frac{1}{\rho R(\rho)} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho \frac{\partial R(\rho)}{\partial \rho} + \lambda = \lambda_3 \quad (2.28)$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho \frac{\partial R(\rho)}{\partial \rho} + (\lambda - \lambda_3) R(\rho) = 0. \quad (2.29)$$

Нехай  $\lambda - \lambda_3 = p^2$ . Помножимо рівняння на  $\rho^2$

$$\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \rho \frac{\partial R(\rho)}{\partial \rho} + p^2 \rho^2 R(\rho) = 0.$$

Тепер робимо заміну  $x = \rho p$ ,  $y = R(\rho)$  і отримуємо рівняння Бесселя нульового порядку:

$$x \frac{\partial}{\partial x} x \frac{\partial y}{\partial x} + x^2 y = 0.$$

Розв'язком цього рівняння є циліндричні функції Бесселя:

$$J_0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}. \quad (2.30)$$

Запишемо кінцевий розв'язок для циліндричної задачі теплопровідності:

$$U(z, \rho, t) = \sum_{n=1}^{inf} C_n J_0 \left( \lambda_n - \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 \right) \sin \left( \frac{\pi n}{l} z \right) \exp(-\lambda_n a^2 t), \quad (2.31)$$

де коефіцієнти  $C_n$  визначаються з початкових умов за допомогою інтегралу Фурьє:

$$C_n = \frac{4}{lR J_0(\rho_n)} \int_0^R \int_0^l u_0 J_0 \left( \rho_n \frac{\rho}{R} \right) \sin \left( \frac{\pi n}{l} z \right) d\rho dz, \quad (2.32)$$

де  $\lambda_n - \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 = \frac{\rho_n}{R}$ ,  $J_0(\rho_n) = 0$ .

## РОЗДІЛ 3

### Задача Стефана

Тепер сформулюємо найпростішу форму математичної моделі, що описує фазові переходи. Класична проблема Стефана — це проблема затвердіння і танення, наприклад, перехід між льодом і водою. Щоб розв'язати класичну задачу Стефана, необхідно розв'язати рівняння теплопровідності в нашому діапазоні температур, де саме и буде відбуватися фазовий перехід, з додатковою граничною умовою. Це називається «умовою Стефана» і буде виведена нижче. У цьому розділі ми будемо дотримуватися ідей з [8]. В нашій задачі ми використовуємо гідрогель, тобто суміш желатину і води. З одного боку в нас агрегатний стан цього матеріалу буде завжди твердим, але через присутність води при певній температурі  $-14^\circ$  буде фазовий перехід, для простого розуміння будемо казати що перша фаза для температури вище  $-14^\circ$  називається рідкою  $L$  — *Liquid*, а для температури нижче за  $-14^\circ$  будемо називати твердою  $S$  — *Solid*.

Для того щоб сформулювати класичну задачу Стефана треба спочатку зробити певні припущення. Нехай  $x = s(t)$ , де  $x$  — це просторова координата де буде відбуватися наш фазовий перехід,  $s(t)$  — це деяка функція від часу, яка описує те що в нас рухома міжфазна границя,  $t$  — це час. Не складно зрозуміти, що при зміні фаз в нас змінюється трохи об'єм речовини (як це відбувається для льоду і води) але для спрощення задачі ми будемо нехтувати зміною цього об'єму. При зміні фаз в певній точці в нас температура зберігається, з цього витікає така умова:

$$\lim_{x \rightarrow s(t)^+} U_S(x, t) = \lim_{x \rightarrow s(t)^-} U_L(x, t) = u_m, \quad (3.1)$$

де  $U_S(x, t)$  — це функція розподілу температури для твердої фази,  $U_L(x, t)$  — це функція розподілу температури для рідкої фази,  $u_m$  — це якась постійна температура фазового переходу.

Припустимо, що поверхня розділу рухається вправо, тобто коли тверда речовина плавиться. Таким чином, слід очікувати, що  $u_m$  у рідкій фазі та  $u_m$  у твердій фазі. У момент часу  $t = t_0$  розглянемо частину поверхні розділу, для простоти, у формі диска  $A$  з площею  $S$ . Пізніше в момент часу

$t_1 > t_0$  положення поверхні розділу змінюється на  $s(t_1) > s(t_0)$ . Тим часом циліндр об'ємом  $S(s(t_1) - s(t_0))$  розплавився, отже, виділив певну кількість тепла  $Q$ :

$$Q = S(s(t_1) - s(t_0))\rho c_V, \quad (3.2)$$

де  $c_V$  – це питома теплоємність,  $\rho$  - густина речовини.

Потік тепла:

$$\Phi_L = -K_L Du_L, \quad (3.3)$$

$$\Phi_S = -K_S Du_S, \quad (3.4)$$

де  $K$  – це теплова провідність для рідкої і твердої фази відповідно. З точки зору збереження енергії природно вважати, що загальна теплота, поглинена в рівнянні (3.2), дорівнює:

$$\int_{t_0}^{t_1} \int_A \Phi_L \hat{x} - \Phi_S (-\hat{x}) dA d\tau = \int_{t_0}^{t_1} \int_A -K_L Du_L(s(\tau), \tau) \hat{x} + K_S Du_S(s(\tau), \tau) (-\hat{x}) dA d\tau, \quad (3.5)$$

де  $\hat{x}$  – це одиничний вектор в напрямку  $x$ . Проінтегрувавши цей вираз в просторових координатах отримаємо:

$$Q = A \int_{t_0}^{t_1} -K_L \frac{\partial u_L}{\partial x}(s(\tau), \tau) + K_S \frac{\partial u_S}{\partial x}(s(\tau), \tau) d\tau \quad (3.6)$$

Прирівнюємо цей інтеграл до виразу(3.2):

$$(s(t_1) - s(t_0))\rho c_V = \int_{t_0}^{t_1} -K_L \frac{\partial u_L}{\partial x}(s(\tau), \tau) + K_S \frac{\partial u_S}{\partial x}(s(\tau), \tau) d\tau \quad (3.7)$$

Розділемо все на  $t_1 - t_0$  и візьмемо границю  $t_1 \rightarrow t_0$  у нас вийде:

$$c_V \rho \lim_{t_1 \rightarrow t_0} \frac{s(t_1) - s(t_0)}{t_1 - t_0} = \lim_{t_1 \rightarrow t_0} \frac{1}{t_1 - t_0} \int_{t_0}^{t_1} -K_L \frac{\partial u_L}{\partial x}(s(\tau), \tau) + K_S \frac{\partial u_S}{\partial x}(s(\tau), \tau) d\tau \quad (3.8)$$

Скористаємось теоремою Коші про середнє значення, нехай  $f(c)$  середнє

значення нашого інтегралу (3.6) на проміжку  $[t_0, t_1]$ , отримаємо:

$$c_V \rho s'(t_1) = \lim_{t_1 \rightarrow t_0} \frac{1}{t_1 - t_0} * (t_1 - t_0) f(c). \quad (3.9)$$

Для спрощення обозначимо  $f(c)$  як:

$$f(c) = -K_L u_x(s(c), c) + K_S u_x(s(c), c), \quad (3.10)$$

і  $c \in [t_0, t_1]$ . Але так як  $t_0 \rightarrow t_1$  і  $f$  неперервна функція, то:

$$c_V \rho s'(t_1) = f(t_1), \quad (3.11)$$

і виходить, що з нашого рівняння для  $f$  ми отримаємо такий вираз:

$$c_V \rho \frac{ds(t_1)}{dt} = -K_L u_x(s(t), t) + K_S u_x(s(t), t), \quad (3.12)$$

це рівняння називається **умовою Стефана** і це є гранична умова для вільної границі [8].

### 3.1 Одномірна задача Стефана

Як ми вже писали, щоб вирішити задачу Стефана треба вирішити одномірне рівняння теплопровідності і додатково накласти на це умову для вільної границі, умову Стефана. Для спрощення ми нехтуємо зміною густини під час фазового переходу. Обозначимо температуру фазового переходу  $T_\varphi$  і одразу зробимо заміну на нашу функцію від температури  $u(x, t) = u(x, t) - T_\varphi$ . Це робиться для спрощення рівняння і щоб тепер наша температура фазового переходу дорівнювала 0, на розв'язок рівняння це ніяк впливати не буде. Спочатку запишемо рівняння теплопровідності для рідкого стану:

$$\begin{cases} u_t = \frac{K_L}{C_L \rho} u_{xx} = \alpha u_{xx} \\ u(0, t) = f(t) \\ u(x, 0) = 0. \end{cases} \quad (3.13)$$

Ми перейшли відразу до однорідних граничних умов, як саме це робити ми вже продемонстрували в першому розділі. Умова Стефана для вільної границі:

$$\begin{cases} c_V \rho \frac{ds(t)}{dt} = -K_L u_x(s(t), t) \\ s(0) = 0 \\ u(s(t), t) = 0. \end{cases} \quad (3.14)$$

$u(s(t), t) = 0$  – це умова Діріхле для переходу між фазами. Рівняння для твердої фази:

$$u(x, 0) = 0. \quad (3.15)$$

Ще раз наголошемо про те що в данному випадку ми вирішуємо рівняння тільки за температури близьких до температури фазового переходу і вважаємо що в нас температура речовини не зростає поки не відбудеться фазовий перехід по всьому тілу.

### 3.2 Перехід до безрозмірних величин

Головна мета це обезрозмірити наше рівняння щоб надати йому суто математичний вигляд. Головне впевнитись в тому що наш перехід не змінює наші основні рівняння. Спочатку обезрозміримо час та температуру:

$$\begin{cases} u \rightarrow av \\ t \rightarrow \gamma\tau, \end{cases} \quad (3.16)$$

де  $\gamma$  і  $a$  константи. Нехай:

$$a = \gamma^2 \quad (3.17)$$

За допомогою рівнянь (3.16), (3.17) наша система задачі Стефана може

бути записана як:

$$\begin{cases} v_t = v_{xx} \\ v(0, \gamma\tau) = f(\gamma\tau)\gamma \\ v(x, 0) = 0 \\ \beta \frac{ds(\gamma\tau)}{d\tau} = -v_x(s(\gamma\tau), \gamma\tau), \end{cases} \quad (3.18)$$

де  $\beta = \frac{c_V \rho}{K_L}$ . Зробимо заміну функцій:

$$\begin{aligned} s(\gamma\tau) &\rightarrow \sigma(\tau), \\ f(\gamma\tau) &\rightarrow \frac{F(\tau)}{\gamma}, \\ v(x, \gamma\tau) &\rightarrow \lambda(x, \tau), \end{aligned} \quad (3.19)$$

і тепер:

$$\begin{aligned} \lambda_\tau(x, \tau) &= \lambda_{xx}(x, \tau) \\ \beta \frac{d\sigma(\tau)}{d\tau} &= -\lambda_x(\sigma(\tau), \tau), \end{aligned} \quad (3.20)$$

відтепер ми маємо математичне наближення і можемо замінити літери:

$$\begin{aligned} \sigma &\rightarrow s \\ \tau &\rightarrow t \\ \lambda &\rightarrow u \\ F &\rightarrow f, \end{aligned} \quad (3.21)$$

і тепер ми маємо безрозмірену задачу:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} \\ u(0, t) = f(t) \\ u(s(t), t) = 0 \\ u(x, 0) = 0 \\ \beta \frac{ds}{dt} = -u_x(s(t), t). \end{cases} \quad (3.22)$$

### 3.3 Розв'язок рівняння

Ще раз запишемо задачу Стефана, яка визначається рівняннями (3.13), (3.14), (3.15):

$$\left\{ \begin{array}{l} u_t = a_L u_{xx} \\ u(s(t), t) = 0 \\ u(0, t) = f(t) \\ u(x, 0) = 0 \\ s(0) = 0 \\ \beta \frac{ds}{dt} = -u_x(s(t), t). \end{array} \right. \quad (3.23)$$

Зробимо заміну змінних:

$$\xi = \frac{x}{\sqrt{t}}, \quad (3.24)$$

і відтепер будемо шукати розв'язок у вигляді:

$$u(x, t) = F(\xi(x, t)), \quad (3.25)$$

де  $F(\xi)$  це невідома функція яка залежить від одної змінної  $\xi$ . Тепер перепишемо наше диференціальне рівняння в нових змінних:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{dF}{d\xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{-x}{2t\sqrt{t}} \frac{dF}{d\xi}, \quad (3.26)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{dF}{d\xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{t}} \frac{dF}{d\xi}, \quad (3.27)$$

$$a_L \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = a_L \frac{1}{\sqrt{t}} \frac{d}{d\xi} \left( \frac{dF}{d\xi} \right) \frac{\partial \xi}{\partial x} = a_L \frac{1}{t} \frac{d^2 F}{d\xi^2}. \quad (3.28)$$

Рівняння (3.26) і (3.28) дають нам лінійне диференціальне рівняння другого порядку:

$$\frac{d^2 F}{d\xi^2} + \frac{\xi}{2a_L} \frac{dF}{d\xi} = 0, \quad (3.29)$$

яке може бути розв'язане за допомогою інтегрального фактора:

$$M(\xi) = \exp \left( \int_{s_0}^{\xi} \frac{s}{2a_L} ds \right) = C_1 \exp \left( \frac{\xi^2}{4a_L} \right). \quad (3.30)$$

Якщо ми  $M(\xi)$  помножимо на наше рівняння(3.29), то отримаємо:

$$\frac{d^2 F}{d\xi^2} M(\xi) + \frac{\xi}{2a_L} M(\xi) \frac{dF}{d\xi} = \frac{d}{d\xi} \left( M(\xi) \frac{dF}{d\xi} \right) = 0 \quad (3.31)$$

Проінтегруємо отримане рівняння, отримаємо:

$$M(\xi) \frac{dF}{d\xi} = C_2. \quad (3.32)$$

Ще раз проінтегрувавши рівняння можна отримати розв'язок:

$$F(\xi) = C \int_0^\xi \exp\left(-\frac{s^2}{4a_L}\right) ds + D, \quad (3.33)$$

де  $C$  і  $D$  – це вільні константи інтегрування. Даний інтеграл є функцією похибок:

$$F(\xi) = A \operatorname{erf}\left(\frac{\xi}{2\sqrt{a_L}}\right) + D. \quad (3.34)$$

Підставляючи нашу заміну із (3.24), отримаємо розв'язок для функції  $u(x, t)$ :

$$u(x, t) = F\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) = A \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{ta_L}}\right) + D, \quad (3.35)$$

Константи інтегрування можна знайти із граничних умов:

$$\begin{aligned} u(0, t) &= f(t), \\ f_1(t) &= A * 0 + D = D, \\ u(s(t), t) &= 0, \\ 0 &= A * \operatorname{erf}(\lambda) + D, \end{aligned} \quad (3.36)$$

де  $\lambda = \frac{s(t)}{2\sqrt{a_L t}}$  це якась констант. З цього виразу можна визначити функцію  $s(t)$ :

$$s(t) = 2\lambda\sqrt{a_L t}. \quad (3.37)$$

Звідси можемо записати розв'язок нашого рівняння:

$$u(x, t) = f(t) - \frac{f(t)}{\operatorname{erf}(\lambda)} \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{a_L t}}\right). \quad (3.38)$$

В нас є розв'язок для рівняння Стефана, то все що нам залишиться, це знайти параметр  $\lambda$ . З умови Стефана для вільної границі  $x = s(t)$ :

$$c_V \rho \frac{ds}{dt} = -K_L u_x(s(t), t). \quad (3.39)$$

Підставимо вираз для  $s(t)$  із рівняння(3.37):

$$\frac{ds(t)}{dt} = \frac{d}{dt} (2\lambda\sqrt{a_L t}) = \lambda\sqrt{\frac{a_L}{t}}. \quad (3.40)$$

Продиференціюємо вираз для  $u(x, t)$  по координаті  $x$ , отримаємо наступне рівняння:

$$\begin{aligned} c_V \rho \lambda \sqrt{\frac{a_L}{t}} &= k_L \frac{f(t)}{\operatorname{erf}(\lambda)} \frac{e^{-\lambda^2}}{\sqrt{a_L t \pi}}, \\ \lambda e^{-\lambda^2} \operatorname{erf}(\lambda) &= \frac{K_L}{\rho c_V a_L} \frac{f(t)}{\sqrt{\pi}} = \frac{C_L(f(t))}{c_V \sqrt{\pi}} = \frac{St_L}{\sqrt{\pi}}, \end{aligned} \quad (3.41)$$

де  $St_L$  це **число Стефана**[3]. Це транцендентне рівняння, яке визначає нам наш коефіцієнт  $\lambda$ . У висновку запишемо остаточний розв'язок для задачі Стефана:

$$\begin{cases} u(x, t) = f(t) - \frac{f(t)}{\operatorname{erf}(\lambda)} \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{a_L t}}\right), \\ s(t) = 2\lambda\sqrt{a_L t} \\ \lambda e^{-\lambda^2} \operatorname{erf}(\lambda) = \frac{St_L}{\sqrt{\pi}}. \end{cases} \quad (3.42)$$

## ВИСНОВКИ

В данній роботі ми змогли вирішити рівняння теплопровідності для одномірного стрижня, аксіальносиметричного диску і циліндру. Показали що аналітичний розв'язок для стрижня узгоджується з чисельним розрахунком. Довели що для диску та циліндру наш розв'язок буде виражатися через функції Бесселя, це означає що для будь-якої задачі за цих симетрій ми можемо наш чисельний розв'язок апроксимувати на функції Бесселя. Ми вирішили задачу Стефана для одномірного стрижня. Розв'язок для аксіально симетричного диску виводиться аналогічно. Ми вирішували задачу в одновимірному вигляді, бо це можливо зробити аналітично. Для того щоб отримати якесь аналітичне наближення до циліндричного випадку необхідно зробити дискретну сітку, для якої весь наш циліндр розділяється на  $N$  дисків. Початкові умови для кожного диску будемо знаходити з рівнянь для стрижнів, які проходять паралельно до осі симетрії циліндру і таким чином ми отримаємо напів аналітичний розв'язок рівняння теплопровідності для неоднорідних граничних умов. Це є важливим бо таким чином ми більш точно можемо змодельовати розповсюдження тепла для реальних умов, і крім того в нас буде теоретичне обґрунтування нашої моделі. Ця робота у майбутньому може допомогти в кріоабляції. Тобто в медичинських дослідженнях, які вивчають вплив низьких і високих температур на шкіру і організм людини. Кріоабляцію можна використовувати для видалення аномальних клітин з біологічної тканини з мінімальним пошкодженням здорових клітин. Час кріогенного впливу дуже важливий, щоб убити цільові клітини та мінімізувати непотрібний вплив на здорові клітини. Термодатчики можуть бути вставлені для контролю часу кріогенного впливу, але це призводить до додаткового пошкодження здорових клітин, щоб уникнути цього ми і змодельовали напіваналітично розповсюдження тепла чи холода в гідрогелі, але це є наближенням до тканин людини. В подальшому розвитку роботи можна уточнювати до нескінченності нашу модель, наприклад, додати в шматок гідрогелю капіляр і наповнити його водою, це буде нам описувати капіляри і артерії в тілі людини. Можна також використовувати різні матеріали для того щоб описати різні шкіряні тканини, тобто описати перехід між шарами. А також наші розрахунки можна використовувати не

тільки в медицині, а і для моделювання розповсюдження тепла для будь-якої системи з циліндричною симетрією.

## СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

- [1] Je-Chin Han, «Analytical Heat Transfer», CRC Press, Boca Raton, FL, 2012.
- [2] T. Johnson, «On the one dimensional Stefan problem: with some numerical analysis», Thesis 2013, Umeå University, Faculty of Science and Technology, Department of Mathematics and Mathematical Statistics.
- [3] V. Alexiades and A.D. Solomon. «Mathematical Modeling of Melting and Freezing Processes». Hemisphere Publishing Corporation, Washington, 1993.
- [4] A. Friedman. «Partial Differential Equations of Parabolic Type». Prentice-Hall, Inc, Englewood Cliffs, N.J., 1964.
- [5] S.C. Gupta. «The Classical Stefan Problem - Basic Concepts», Modelling and Analysis. Elsevier Science B.V, Amsterdam, 2003.
- [6] J. Crank. «Free and Moving Boundary Problems». Hemisphere Publishing Corporation, Washington, 1993.
- [7] L.I. Rubenstein. «The Stefan Problem. American Mathematical Society», Providence, Rhode Island, 1971.
- [8] D. Andreucci. «Lecture notes on the Stefan problem». 2002.
- [9] H. Bateman, A. Erdelyi. «Higher Transcendental Functions». MC Graw-Hill Book Company, inc. New York, 1956.
- [10] J. Stefan. «Über die Theorie der Eisbildung, insbesondere über die Eisbildung im Polarmeere». Ann. Physik Chemie 42, pp. 269–286, 1891.
- [11] S. Larsson and V. Thomée. «Partial Differential Equations with Numerical Methods». Springer, Berlin, 2005.
- [12] M.H. Protter and H.F. Weinberger. «Maximum Principles in Differential Equations». Prentice-Hall, Inc, London, 1967.